Strassen's Matrix- Multiplication

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} , Y = \begin{bmatrix} F & E \\ G & H \end{bmatrix}$$

ROW(+)   COLOUM(-)

$P_1 = A * (F - H)$

$P_2 = (A + B) * H$ FOUR RULES

$P_3 = (C + D) * E$ # A H E D

$P_4 = D * (G - F)$ # DIAGONAL

$P_5 = (A + D) * (E + H)$ # LAST C R

$P_6 = (B - D) * (G + H)$ # FIRST C R

$P_7 = (A - C) * (E + F)$

$$Z = \begin{bmatrix} P_6 + P_5 + P_4 - P_2 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 - P_3 + P_5 - P_7 \end{bmatrix}$$

Some examples of

Strassen's Matrix Multiplication

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$P_1 = A \times (F - H)$

$P_2 = (A+B) \times H$

$P_3 = (C+D) \times E$

$P_4 = D \times (G-E)$

$P_5 = (A+D) \times (E+H)$

$P_6 = (B-D) \times (G+H)$

$P_7 = (A-C) \times (E+F)$

For row we use (+), for col. we use (−)

→ Points to remember
- AHED (for 1st four)
- Diagonal: last col. (of X), last row (of Y)
- first col. (of X), first row (of Y)

$$Z = \begin{bmatrix} P_6 + P_5 + P_4 - P_2 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 - P_3 + P_5 - P_7 \end{bmatrix}$$

Q) Assume

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soln)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 44 \\ 16 & 40 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \left(\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 15 & 11 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 67 & 85 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 35 & 49 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 72 \\ 70 & 110 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 35 & 49 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 72 \\ 70 & 110 \end{bmatrix}$$

$$P_6 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & -26 \\ -21 & -55 \end{bmatrix}$$

$$P_7 = \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 & -88 \\ -39 & -53 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} P_6 + P_5 + P_4 - P_2 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 - P_3 + P_5 - P_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 & -26 \\ -21 & -55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46 & 72 \\ 70 & 110 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 35 & 49 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 20 & 44 \\ 16 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 67 & 85 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 35 & 49 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 20 & 44 \\ 16 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 67 & 85 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46 & 72 \\ 70 & 110 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -34 & \\ -39 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Page No. 25

$$Z = \begin{bmatrix} 35 & 37 & 30 & 64 \\ 66 & 77 & 34 & 67 \\ 68 & 87 & 52 & 128 \\ 102 & 134 & 58 & 124 \end{bmatrix}$$

Ans.