西南交通大学2015-2016学年第（2）学期考试试卷参考答案
复变函数

一、计算题：（每小题7分，共28分）

1. 求$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{2015}+(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{2015}$的值.

因为$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ ……………… 2分

所以$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{2015}+(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{2015}$

$$=2^{2015}\left(\cos\frac{2015\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2015\pi}{3}\right)+2^{2015}\left[\cos\left(-\frac{2015\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2015\pi}{3}\right)\right]$$ ……3分

$$=2^{2015}\cdot 2\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=2^{2015}$$ ……………………………………………………………… 2分

2. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-\mathrm{i})^n]^n z^n$的收敛半径.

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|3+(-\mathrm{i})^n|^n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}|3+(-\mathrm{i})^n|=4$， ……………………………………… 5分

因此收敛半径$R=\frac{1}{4}$. ……………………………………………………… 2分

3. 求留数$\mathrm{Res}\left((2-z)\cos\frac{1}{z},0\right)$.

$(2-z)\cos\frac{1}{z}=(2-z)\left[1-\frac{1}{2z^2}+\Lambda\right]=-z+2+\frac{1}{2z}-\frac{1}{z^2}+\Lambda$， ……………………5分

因此$\mathrm{Res}\left((2-z)\cos\frac{1}{z},0\right)=\frac{1}{2}$. ……………………………………………… 2分

4. 求把$1,-1,\mathrm{i}$分别映成$\mathrm{i},1,\infty$的分式线性变换.

这个变换由下式决定：$(1,-1,z,\mathrm{i})=(\mathrm{i},1,w,\infty)$， ……………………………… 2分

即$\frac{z-1}{z+1}:\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}=\frac{w-\mathrm{i}}{w-1}:\frac{1}{1}$， ……………………………………………… 3分

解得$w=\frac{(1+\mathrm{i})z}{z-\mathrm{i}}$（或$\frac{(\mathrm{i}-1)z}{\mathrm{i}z+1}$或$\frac{2z}{(1-\mathrm{i})z-1-\mathrm{i}}$） ………………………… 2分

二、设函数$f(z)$在复平面上解析，且$f(x+\mathrm{i}y)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}(x^3+lxy^2)$，求$m,n,l$的值以及$f'(z)$.（10分）

$u=my^3+nx^2y$，$v=x^3+lxy^2$，

$u_x=2nxy$，$u_y=3my^2+nx^2$，$v_x=3x^2+ly^2$，$v_y=2lxy$. ……………………… 2分

由 Cauchy-Riemann 条件$u_x = v_y$，$u_y = -v_x$得

$2nxy = 2lxy$，$3my^2 + nx^2 = -(3x^2 + ly^2)$，··································2 分

比较系数得$m = 1$，$n = l = -3$． ··································3 分

于是$f(z) = y^3 - 3x^2y + \mathrm{i}(x^3 - 3xy^2)$（$= \mathrm{i}z^3$）， ··································1 分

$f'(z) = u_x + iv_x = -6xy + \mathrm{i}(3x^2 - 3y^2)$（$= 3\mathrm{i}z^2$）． ··································2 分

三、计算下列积分：（每小题 8 分，共 16 分）

1. $I = \int\limits_C \frac{(\bar{z}-1)\mathrm{Re}\, z}{|z-1|} \mathrm{d}z$，其中$C$是上半圆周$|z-1| = 2$，方向从右向左.

C的参数方程为$z = 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 \le \theta \le \pi$，··································3 分

$I = \int_0^{\pi} 2\mathrm{i}(1 + 2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$ ··································3 分

$= 2\pi\mathrm{i}$. ··································2 分

2. $I = \int\limits_C \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z-1)} \mathrm{d}z$，其中$C$是圆周$|z| = 2$，取逆时针方向.

$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z-1)}$在$C$中有一个二阶极点 0，一个一阶极点 1. ··················2 分

$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim\limits_{z\to 0}[z^2 f(z)]' = \lim\limits_{z\to 0} \frac{(z-2)\mathrm{e}^z}{(z-1)^2} = -2$，··································2 分

$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim\limits_{z\to 1}[(z-1)f(z)] = \lim\limits_{z\to 1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2} = \mathrm{e}$，··································2 分

因此$I = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, 1)] = 2\pi(\mathrm{e} - 2)\mathrm{i}$. ··································2 分

四、在复数域中解方程$\cos z = 3\mathrm{i}$．（8 分）

由余弦函数的定义得$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = 3\mathrm{i}$，即$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 6\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0$，··················2 分

于是$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \frac{6\mathrm{i} + \sqrt{-40}}{2} = (3 \pm \sqrt{10})\mathrm{i}$，··································2 分

从而$z = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}[(3+\sqrt{10})\mathrm{i}] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \mathrm{i}\ln(3+\sqrt{10})$ ··································2 分

或$z = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}[(3-\sqrt{10})\mathrm{i}] = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{10}-3)$，其中$k$为整数. ··············2 分

五、将函数$f(z) = \frac{z^3}{(z+2)^2}$在圆环域$\{z : 2 < |z| < +\infty\}$中展开为洛朗级数.（8 分）

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}},$$ ……………………………………3 分

$$\frac{1}{(z+2)^2}=-\left(\frac{1}{z+2}\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n(n+1)}{z^{n+2}},$$ ……………………………………3 分

$$f(z)=\frac{z^3}{(z+2)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n(n+1)}{z^{n-1}}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n+1}(n+2)}{z^n}.$$ ……………………2 分

六、求方程 $z^3-z^2-5z+1=0$ 在圆环域 $1<|z|<3$ 中的根的个数.（10 分）

在圆周 $|z|=1$ 上，取 $f(z)=-5z$， $g(z)=z^3-z^2+1$，则有

$|f(z)|=5|z|=5$，$|g(z)|\le|z|^3+|z|^2+1=3$，从而 $|f(z)|>|g(z)|$，

由 Rouché 定理，方程 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 中有相同个数的零点.

由此可知，方程 $z^3-z^2-5z+1=0$ 在圆盘 $|z|<1$ 中有 1 个根. ………………3 分

在圆周 $|z|=3$ 上，取 $f(z)=z^3$， $g(z)=-z^2-5z+1$，则有

$|f(z)|=|z|^3=27$，$|g(z)|\le|z|^2+5|z|+1=25$，从而 $|f(z)|>|g(z)|$，

由 Rouché 定理，方程 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在圆盘 $|z|<3$ 中有相同个数的零点.

由此可知，方程 $z^3-z^2-5z+1=0$ 在圆盘 $|z|<3$ 中有 3 个根. ……………3 分

在圆周 $|z|=1$ 上，

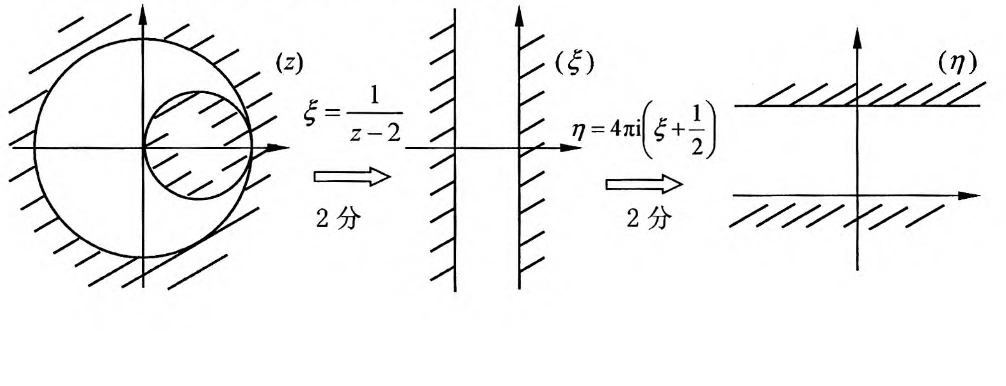
$$|z^3-z^2-5z+1|\ge|-5z|-|z^3-z^2+1|\ge5|z|-|z|^3-|z|^2-1=2>0,$$

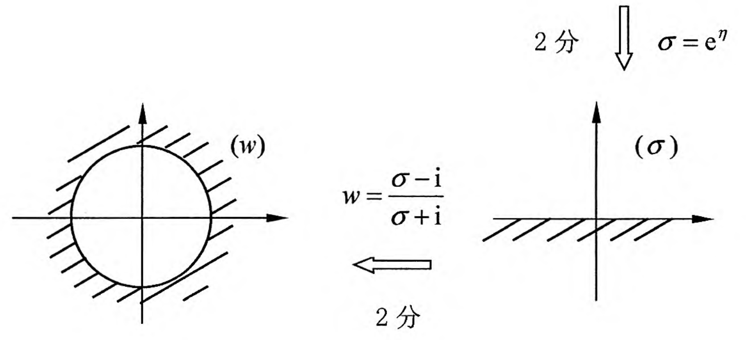
因此方程 $z^3-z^2-5z+1=0$ 在圆周 $|z|=1$ 上没有根. ……………………………2 分

由此可知，方程 $z^3-z^2-5z+1=0$ 在圆环域 $1<|z|<3$ 中有 2 个根. …2 分

七、求共形映射，把区域 $\{z:|z|<2,|z-1|>1\}$ 映射成单位圆盘 $\{w:|w|<1\}$.（10 分）

所求共形映射可由以下各映射复合而得：

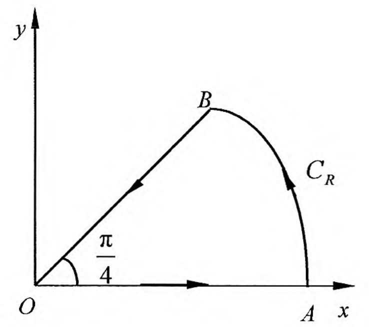




综合起来，就得到$w = \dfrac{e^{\frac{2\pi iz}{z-2}} - i}{e^{\frac{2\pi iz}{z-2}} + i}$. ……………………………………………………2 分

八、已知$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，利用右图中的闭曲线证明：

$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$.（10 分）



考虑函数e^{iz^2}在右图中闭曲线上的积分，

由 Cauchy 定理得

$\int\limits_{OA} e^{iz^2} dz + \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz + \int\limits_{BO} e^{iz^2} dz = 0$，……………………………………………………2 分

即$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz - e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^R e^{-x^2} dx = 0$. ……………………………………1 分

$$\left| \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz \right| \le \int\limits_{C_R} \left| e^{iz^2} \right| ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2\theta} R d\theta \le \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin\theta} d\theta$$

$$\le \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right) \to 0 \ (R \to +\infty),$$ ……………………………2 分

因此$\lim\limits_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz = 0$. ……………………………………………………1 分

在上面第二式中令$R \to +\infty$，并利用$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，即得

$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{\pi}{4}i} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$. ……………………………………………………3 分

两边分别取实部和虚部，就得到$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$. ……………1 分