第一章　时域离散信号和时域离散系统

1.1　引言

1.2　时域离散信号

只在某些规定的离散瞬时给出函数值；

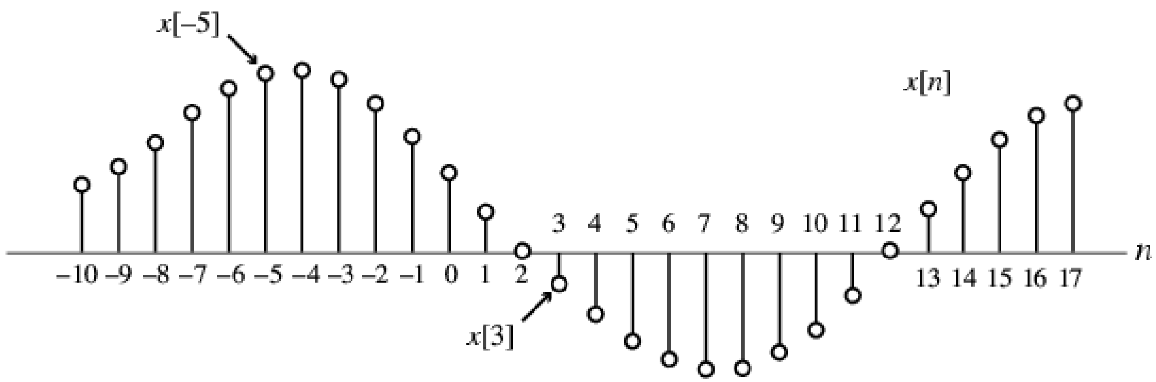
在其他时间，函数没有定义。

这些时间上不连续的值构成数值的序列。

1.2 离散时间信号

1.2.1 时域表达方式

$$x[n] = x_a(t)\big|_{t=nT} = x_a(nT), \quad n = \cdots -2,-1,0,1,2,\cdots$$



T称为采样周期或采样间隔，**F=1/T**成为采样频率

1. 用集合符号表示序列:

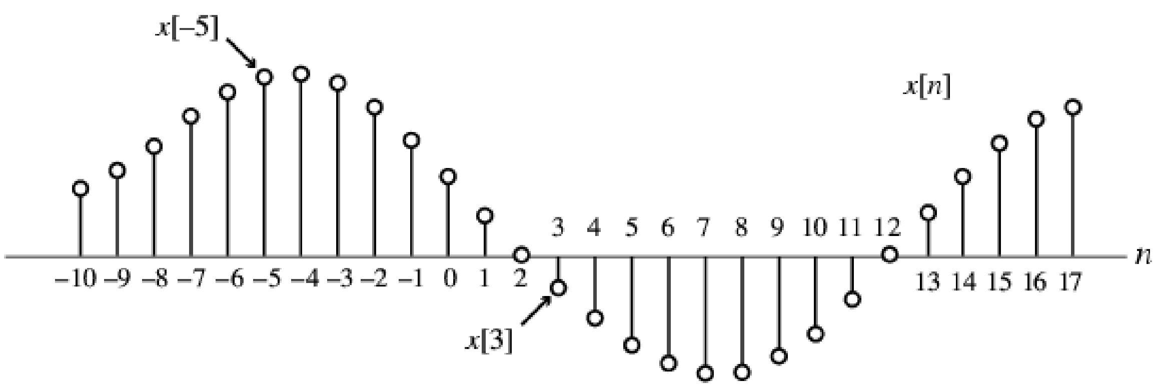
$$x[n]=\{x_n, \quad n=\cdots,-2,-1,0,1,2\cdots\}$$

$$x[n]=\{\cdots,1,2,\underline{3},4,5,\cdots\}$$

2. 用公式表示序列:

$$x(n)=a^{|n|},0<a<1,-\infty<n<+\infty$$

3. 用图形表示序列:



Matlab语言表示序列：

如 $x(n) = \sin(\pi n/5) \quad -5 \le n \le 5$

N=-5:5;

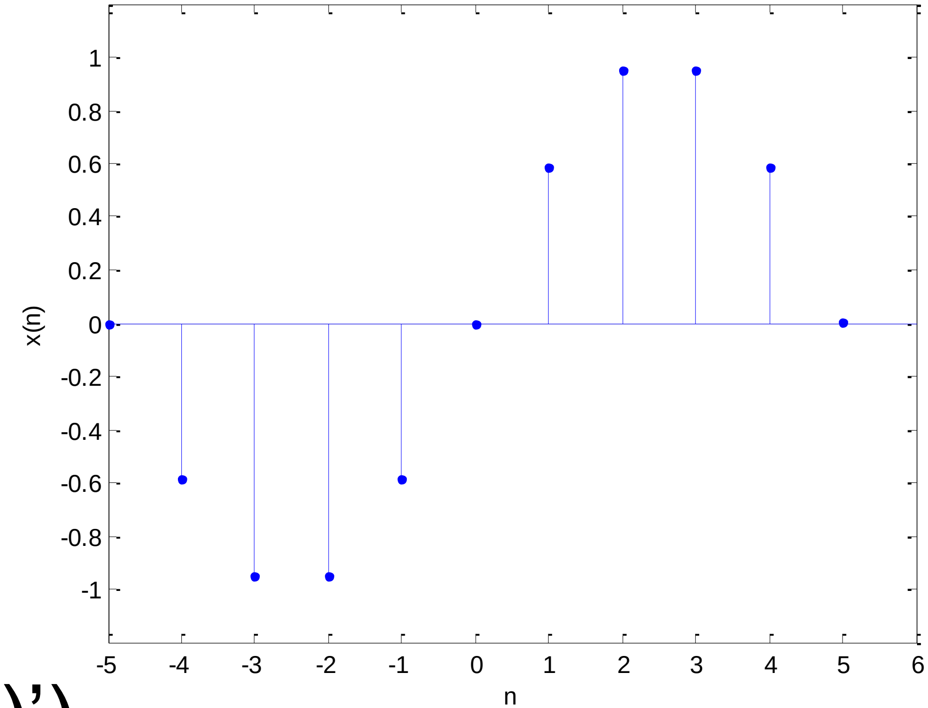
X=sin(pi*n/5);

stem(n,x,'.');

Line([-5,6],[0,0])

axis([-5,6,-1.2,1.2]);

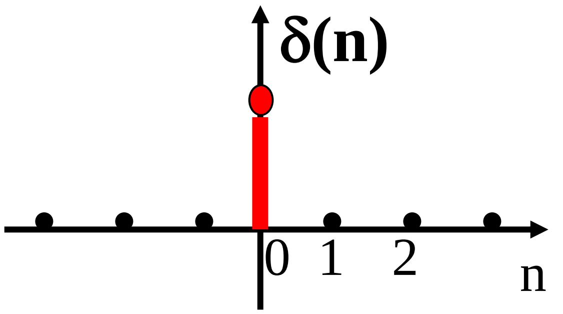
xlabel('n');ylabel('x(n)')



常用的典型序列：

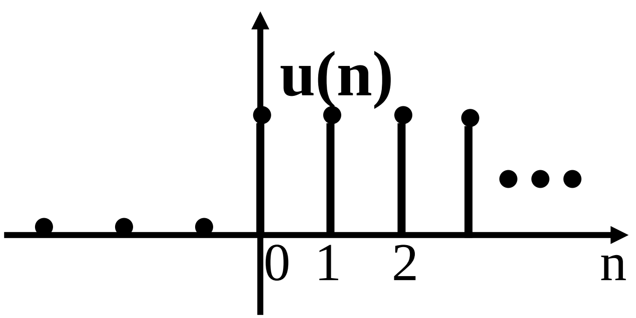
1、单位函数序列δ(n)

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}$$



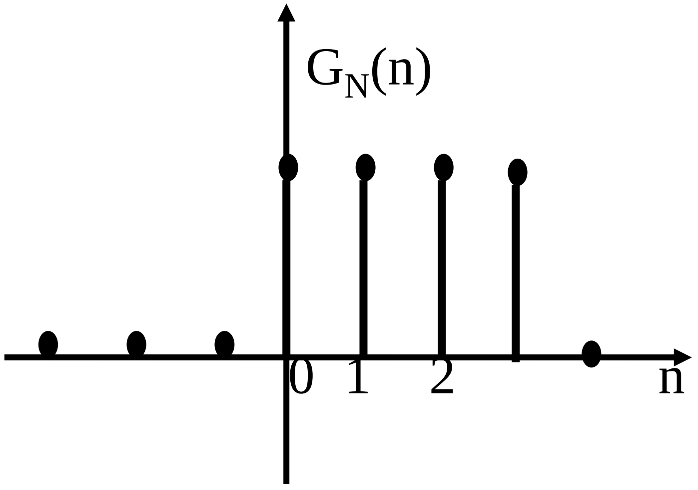
2、单位阶跃序列u(n)

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\0 & n<0\end{cases}$$



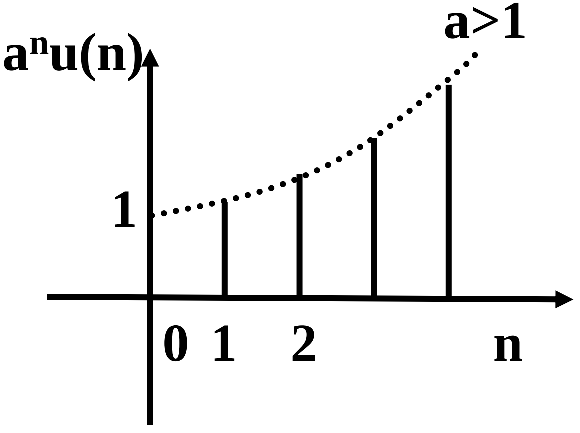
3、矩形序列

$$G_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{n为其它值}\end{cases}$$



4、实指数序列

$$x(n)=a^n u(n)$$



|a|>1时，为发散序列

|a|<1时，为收敛序列

a>0时，序列取正值

a<0时，序列值在正负之间摆动

5、正弦序列

$$x(n) = \sin \omega n$$

ω为正弦序列的数字域频率，单位是弧度。

表示：序列变化的速率。

两个相邻序列值之间变化的弧度数。

6、复指数序列

$$\boxed{x(n) = e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n}$$

由于n取整数，则 $\boxed{e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 + 2\pi M)n}}$

7、周期序列

对所有n存在一个最小的正整数N，使

$$x(n)=x(n+N),\quad -\infty<n<+\infty$$

问题：序列 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$ 一定是周期性的吗？

设 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$ 为周期的，则有：

$$e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n}\cdot e^{j\omega_0 N}=e^{j\omega_0 n}\qquad \therefore e^{j\omega_0 N}=1$$

$\omega_0 N = 2\pi k$ 于是有 $\boxed{N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}k}$

$$\boxed{N=\frac{2\pi}{\omega_0}k}$$

表明只有在 ω_0 与 2π 的比值是一个有理数时， $e^{j\omega_0 n}$ 才具有周期性。

1、当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数

$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{P}{Q}=\frac{N}{k}$其中，**P**，**Q**为互质的整数

则： $\boxed{N=P}$

2、当$\frac{2\pi}{\omega_0}$是**无理数**时，任何**k**皆不能使**N**为正整数，此时正弦序列是非周期的。

任意序列表征方式：

可用单位采样序列的移位加权和表示

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

1.2.2 序列的运算

相乘（product） $w[n]=x[n]y[n]$ 调制、加窗

相加（addition） $w[n]=x[n]+y[n]$

数乘（multiplication） $w[n]=Ax[n]$

时移（time-shifting） $w[n]=x[n-N]$

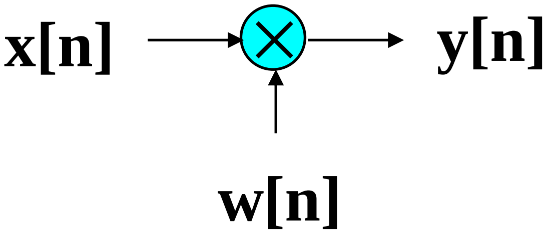
时反（time-reversal） $w[n]=x[-n]$

也称为折叠

输出节点（pick-off）

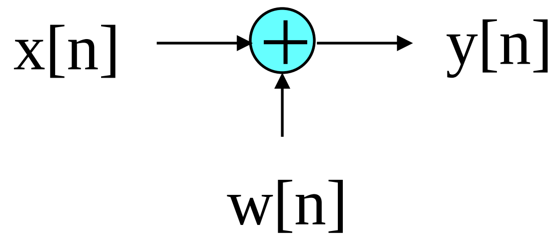
1.2.2 序列的运算

基本运算



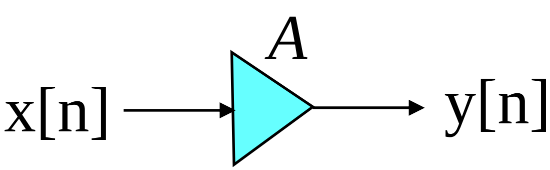
y[n]=x[n].w[n]

调制器



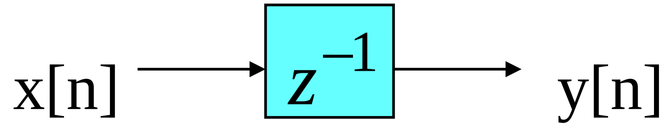
y[n]=x[n]+w[n]

加法器



y[n]=A.x[n]

乘法器

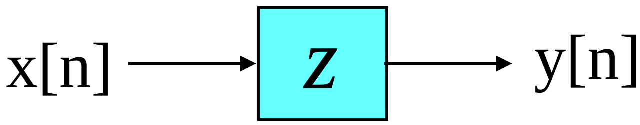


y[n]=x[n-1]

单位延时

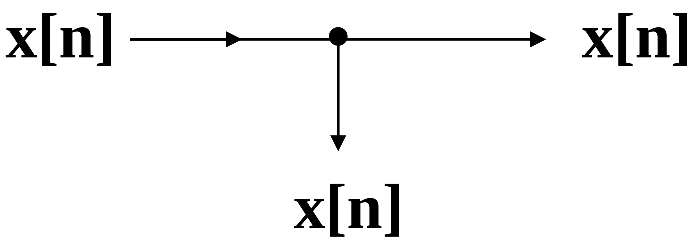
1.2.2 序列的运算

基本运算



y[n]=x[n+1]

单位超前



输出节点

1.3　时域离散系统

一、线性系统：满足齐次性与叠加性原理

设　$y_1(n)=T[x_1(n)],\quad y_2(n)=T[x_2(n)]$

则　$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$

二、时不变系统：系统对输入信号的响应与信号加于系统的时间无关

若　$y(n)=T[x(n)]$

则　$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

在时域离散系统中，最重要的是线性时不变系统。因为很多物理过程都可用这类系统表征。

三、线性时不变系统输入与输出之间的关系

设系统的冲激响应为 $h(n)=T[\delta(n)]$

系统输入表示为单位采样序列的移位加权：

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

则系统输出为 $y(n)=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]$

根据线性系统的叠加性质

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T\left[\delta(n-m)\right]$$

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T\left[\delta(n-m)\right]$$

根据系统的时不变性

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

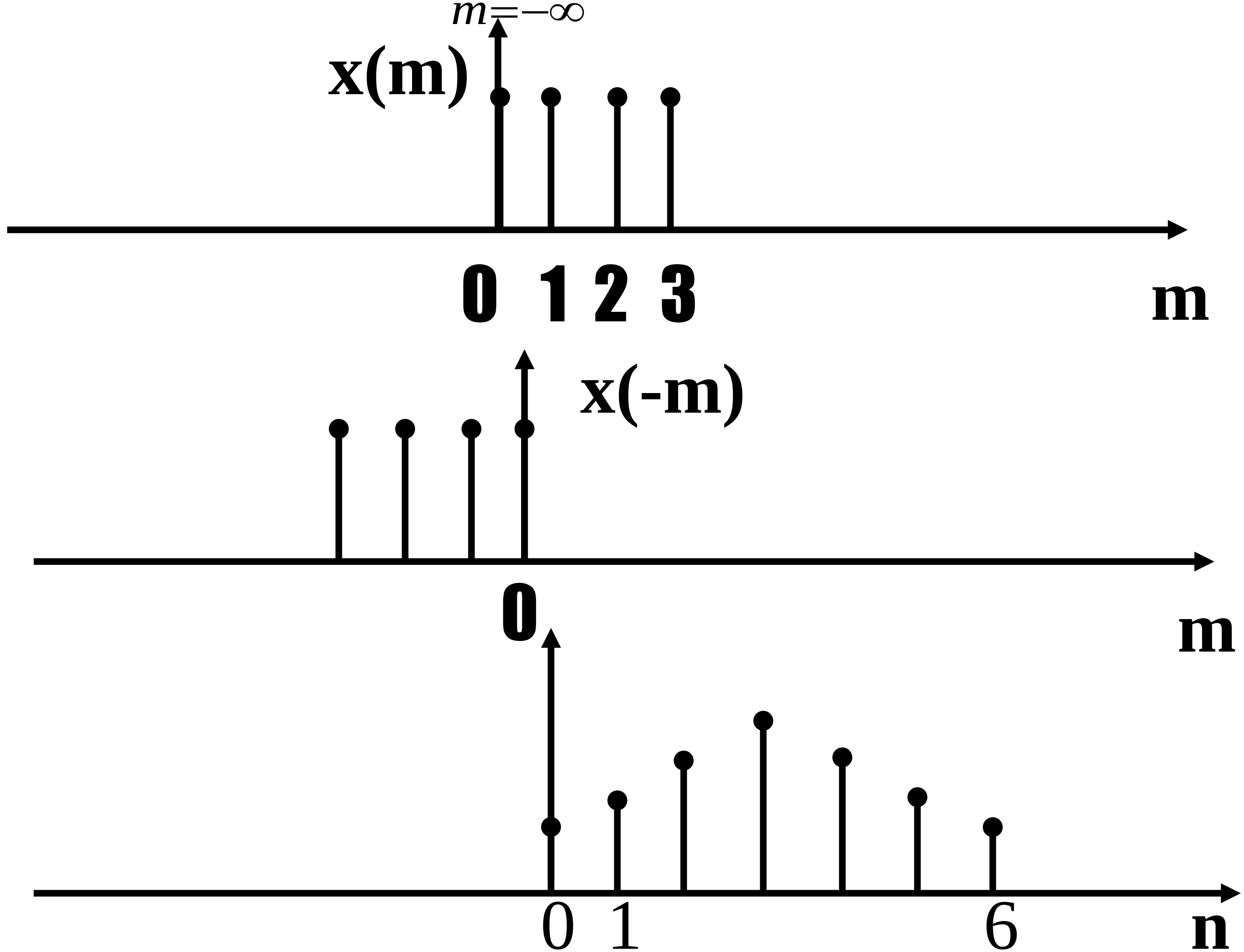
$$=x(n)*h(n)$$

则线性时不变系统的响应表示为：

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

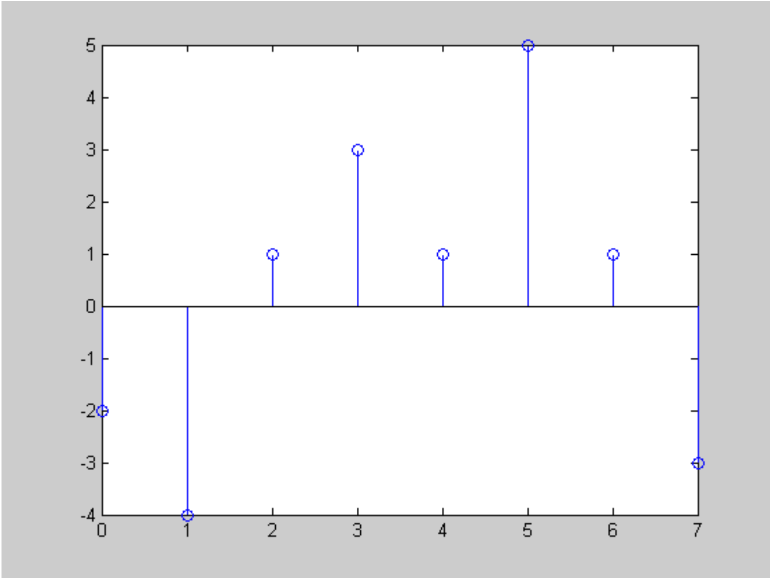
四. 卷积和的计算

$$x(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)x(n-m)$$



例：　　信号的卷积

```
a=input('输入第一个序列=');
b=input('输入第二个序列=');
c=conv(a,b);
M=length(c)-1;
n=0:1:M
disp('输出序列=');disp(c);
stem(n,c);
xlable('时间序号n');ylable('振幅');
```



a=[-2 0 1 –1 3]

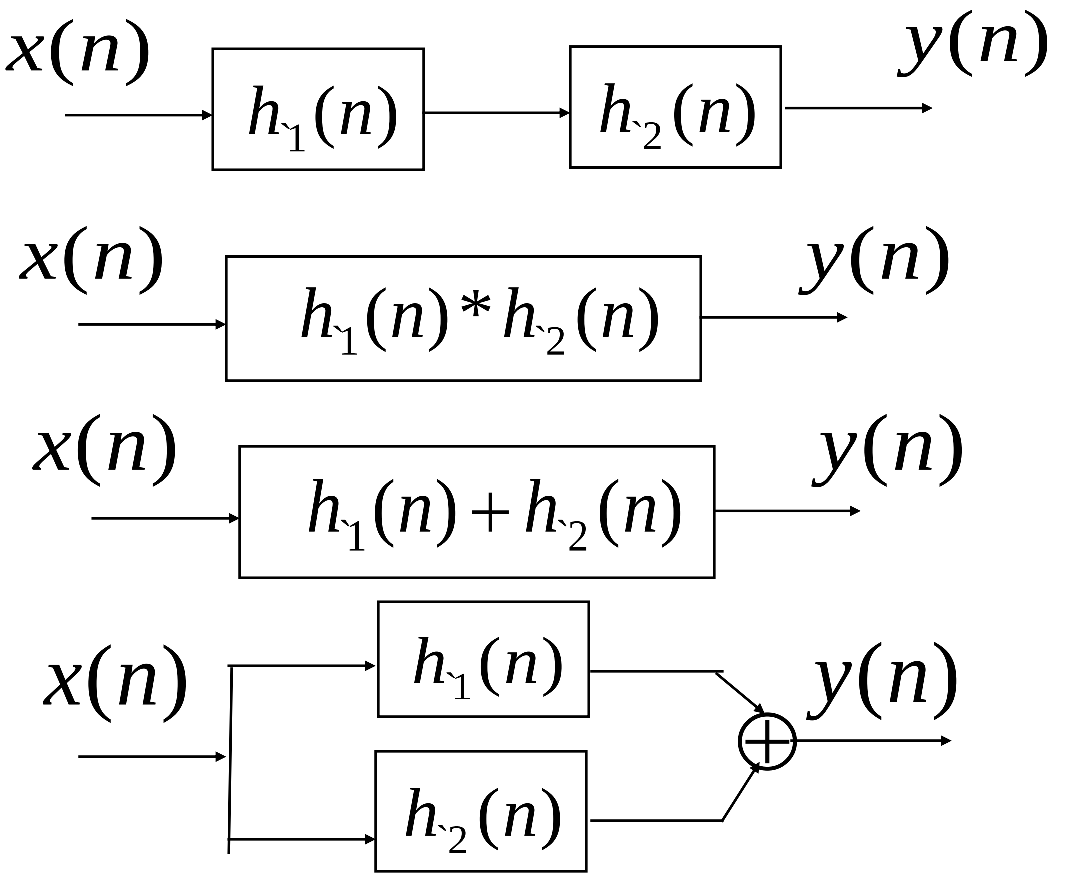
b=[1 2 0 –1]

线性卷积服从交换率、结合率、分配率

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

$$x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)$$

$$x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$



四、系统的因果性和稳定性

因果性：系统n时刻的输出，只取决于n时刻以及n时刻以前的输入序列，和n时刻以后的输入序列无关。

充要条件：$h(n)=0, \quad n<0$

其Z变换 的收敛域定包括∞点，收敛域是圆外的Z平面

稳定性：对于系统有界的输入，系统输出也是有界的。

充要条件：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$

对照Z变换定义，系统稳定，系统函数收敛域包含单位圆；若系统函数收敛域包含单位圆，系统一定稳定。

1.4　时域离散系统的输入输出描述法

——线性常系数差分方程

一、阶数：输出序列中自变量的最高序号与最低序号的差

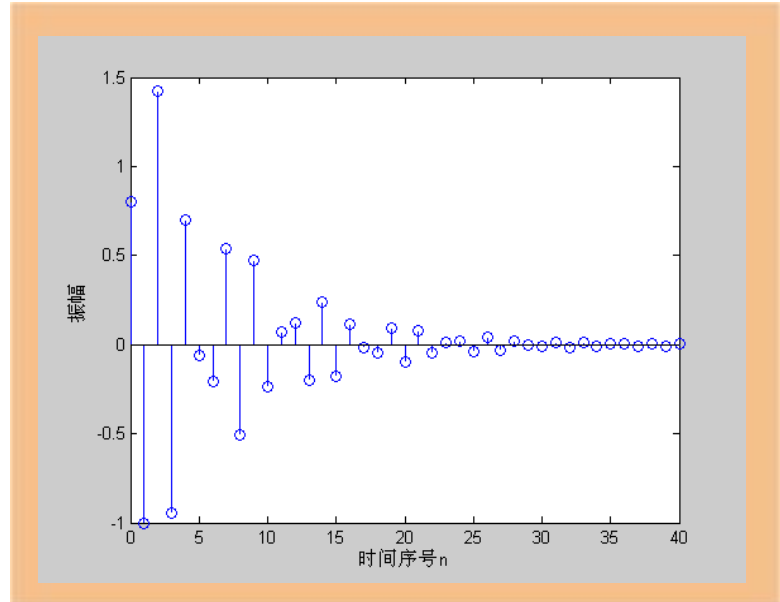
$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j), \quad a_0 = 1$$

二、解法：

1. 经典法
2. 递推法
3. 变换域法

● 用MATLAB计算系统的输出

```
N=input('目标冲激响应长度=');
B=input('输入向量B=');
A=input('输入向量A=');
x=[1 zeros(1,N-1)];
y=filter(B,A,x);
k=0:1:N-1;
stem(k,y);
xlabel('时间序号n');ylabel('振幅' );
```



N=41

B=[0.8 -0.44 0.36 0.02]

A=[1 0.7 -0.45 -0.6]

§1.5 模拟信号数字处理

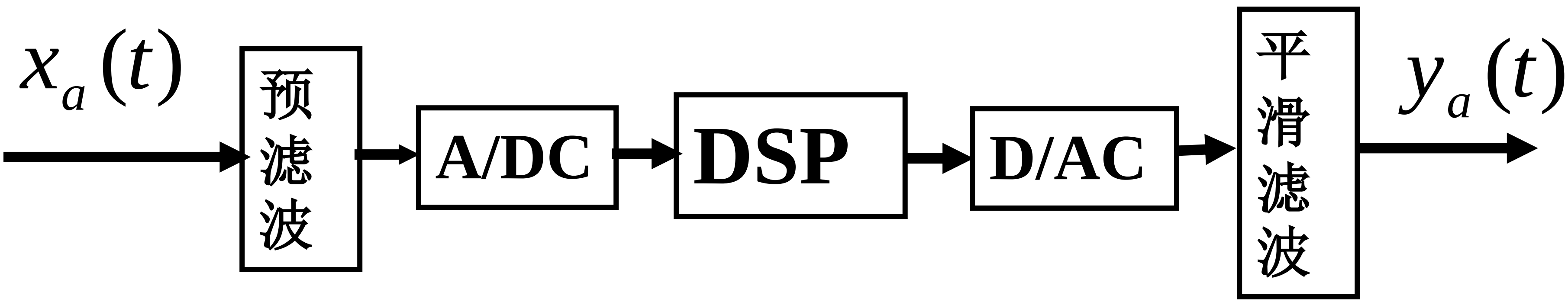
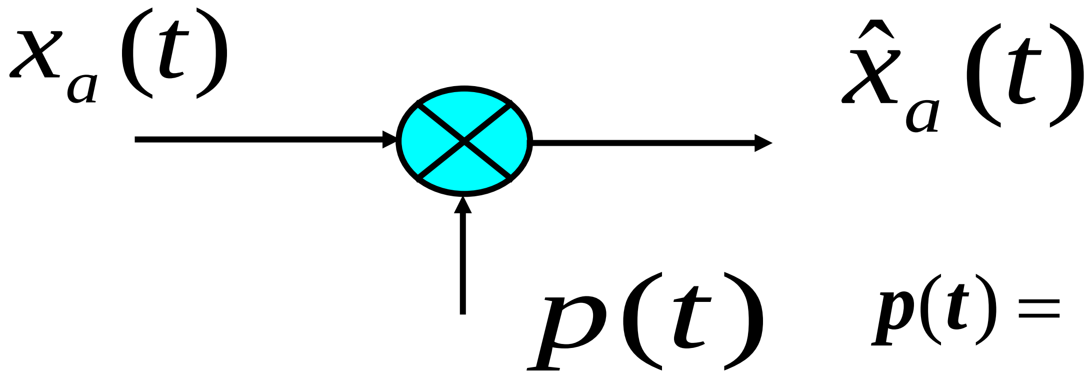


图1.5.1 模拟信号数字处理框图

一、采样定理及A/DC



$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$\hat{x}_a(t)=x_a(t)\cdot P(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

若 $X_a(j\Omega)=FT[x_a(t)]$ $\hat{X}_a(j\Omega)=FT[\hat{x}_a(t)]$

$$P(j\Omega)=FT[p(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$

其中，$\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$

因此，

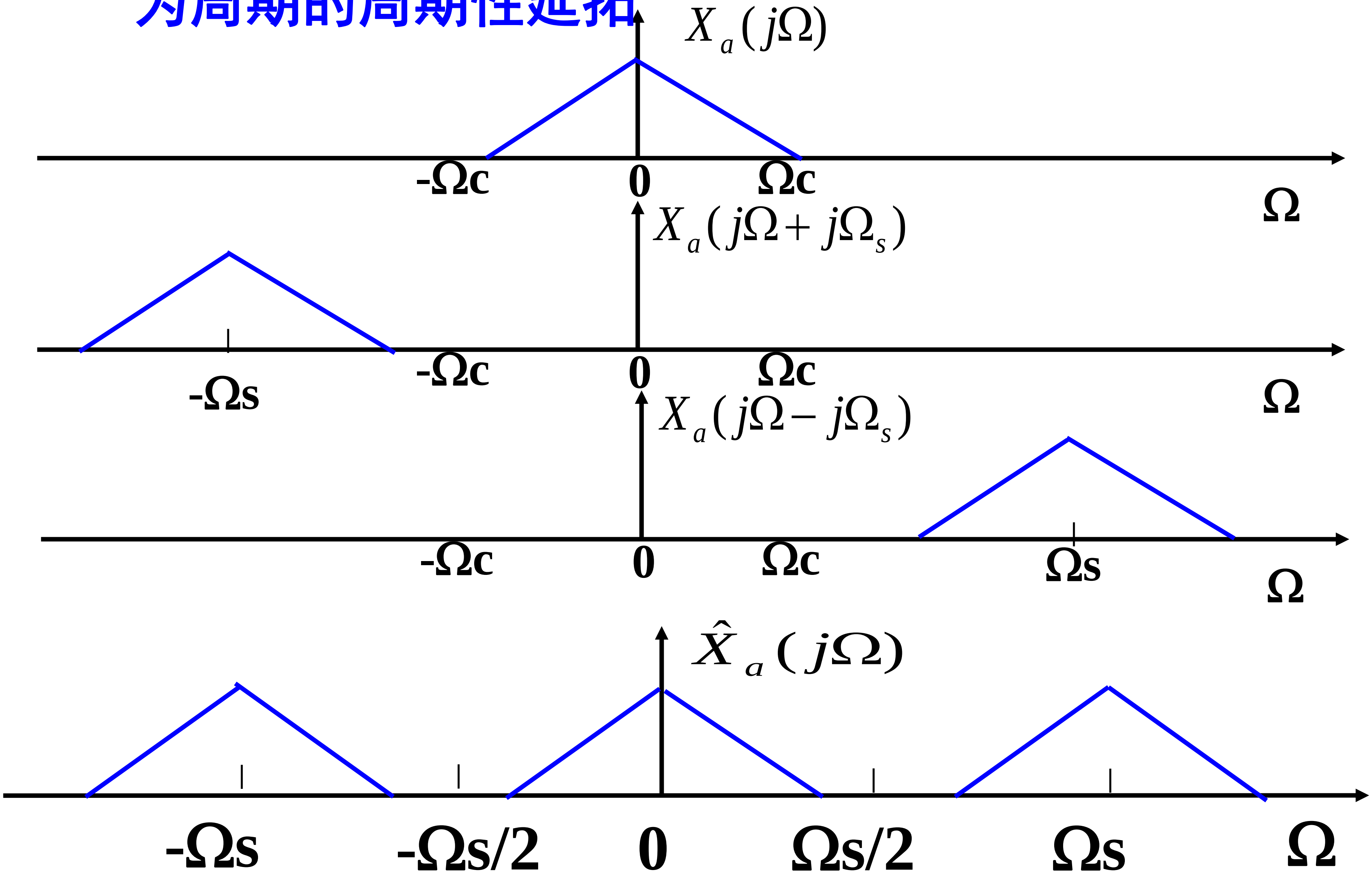
$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega)*P(j\Omega)$$

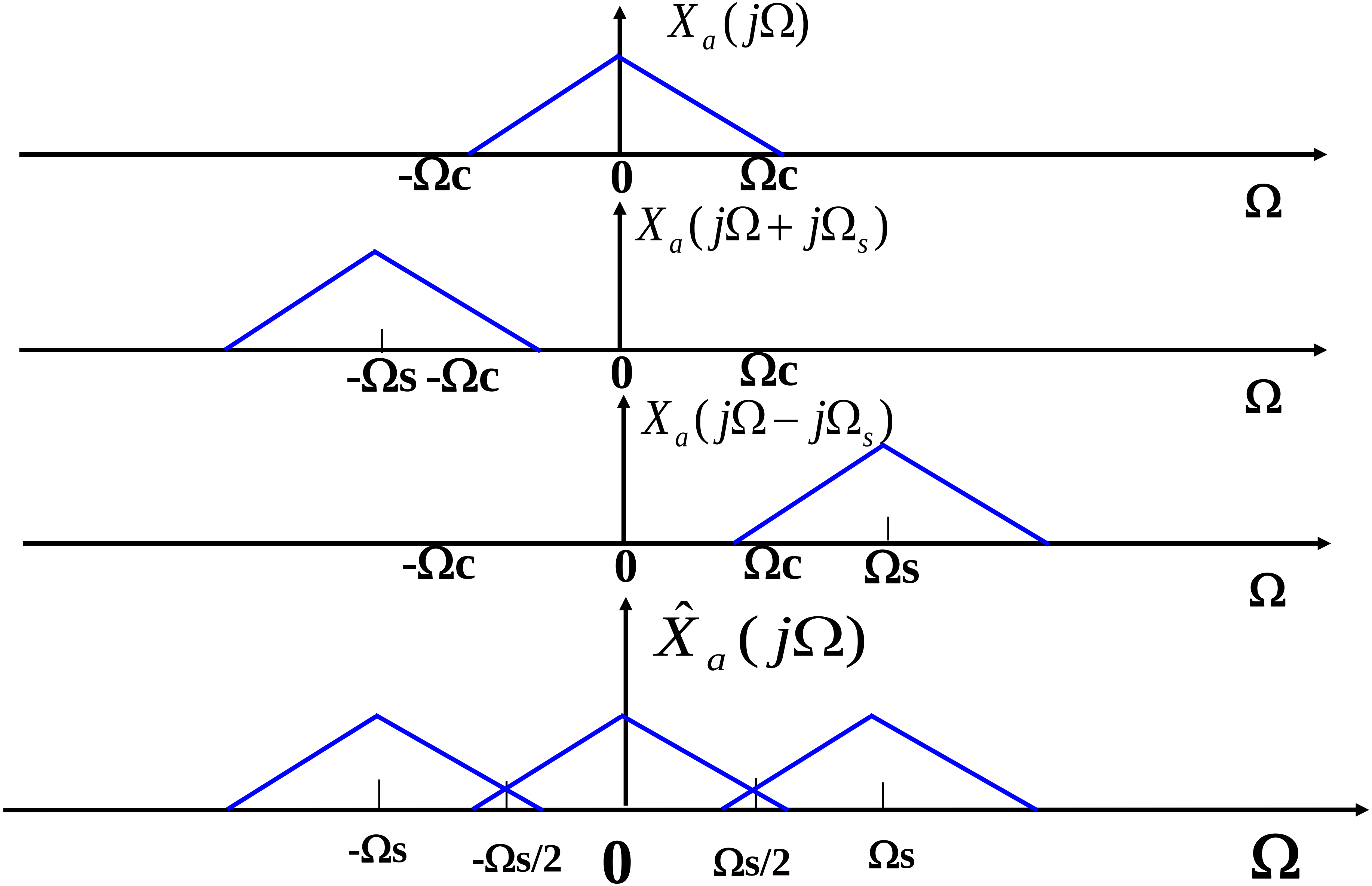
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot X_a(j\Omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

1. 采样信号的频谱

是原模拟信号的频谱以采样角频率 $\Omega_s\ (\Omega_s = 2\pi/T)$ 为周期的周期性延拓





若Ωs< 2Ωc， 采样信号的频谱会发生混叠

结论：

采样信号的频谱 是原模拟信号的频谱沿频率轴每间隔采样角频率Ωs重复出现一次。

采样信号的频率是原模拟信号的频率以Ωs为周期，进行周期延拓而成。

2、采样定理：

设 $x_a(t)$ 是带限信号，最高截止频率为Ωc ，如果采样频率Ωs≥ 2Ωc ，那么采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过一个增益为T，截止频率为 Ωs/2 的理想低通滤波器，可以唯一地恢复出原模拟信号。

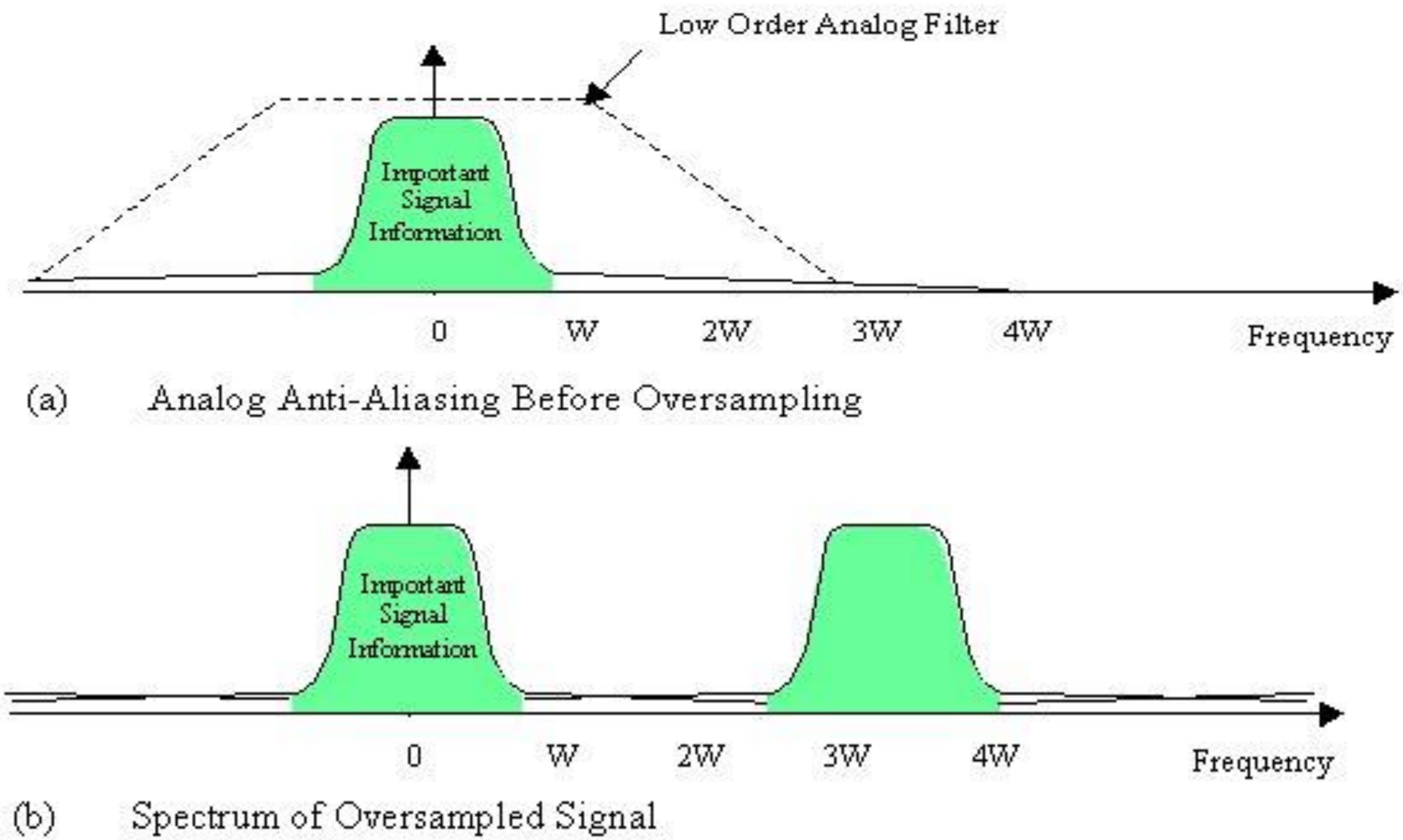
其中：

Ωs= 2Ωc 称为奈奎斯特速率（Nyquist rate）

Ωs/2 称为折叠频率

1. 实际中考虑到信号的频谱不是锐截至的，可选 $\Omega_s = (3 \sim 4)\Omega_c$

2. 在采样前加一模拟低通滤波器，滤除高于 $\Omega_s/2$的一些无用的高频分量。



(a) Analog Anti-Aliasing Before Oversampling

(b) Spectrum of Oversampled Signal

3、模数转换器（A/DC）

将模拟信号转化为数字信号，具体完成采样和量化编码的工作。

　　其中量化编码是将采样值用二进制编码表示后，并以舍入方法截成预先规定的长度，形成数字信号。

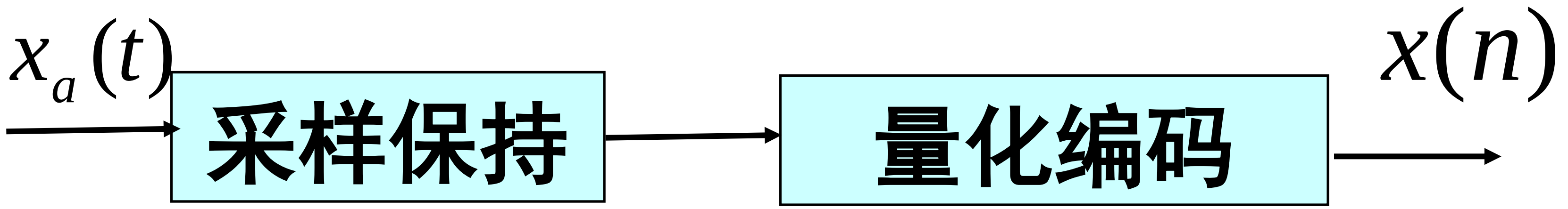
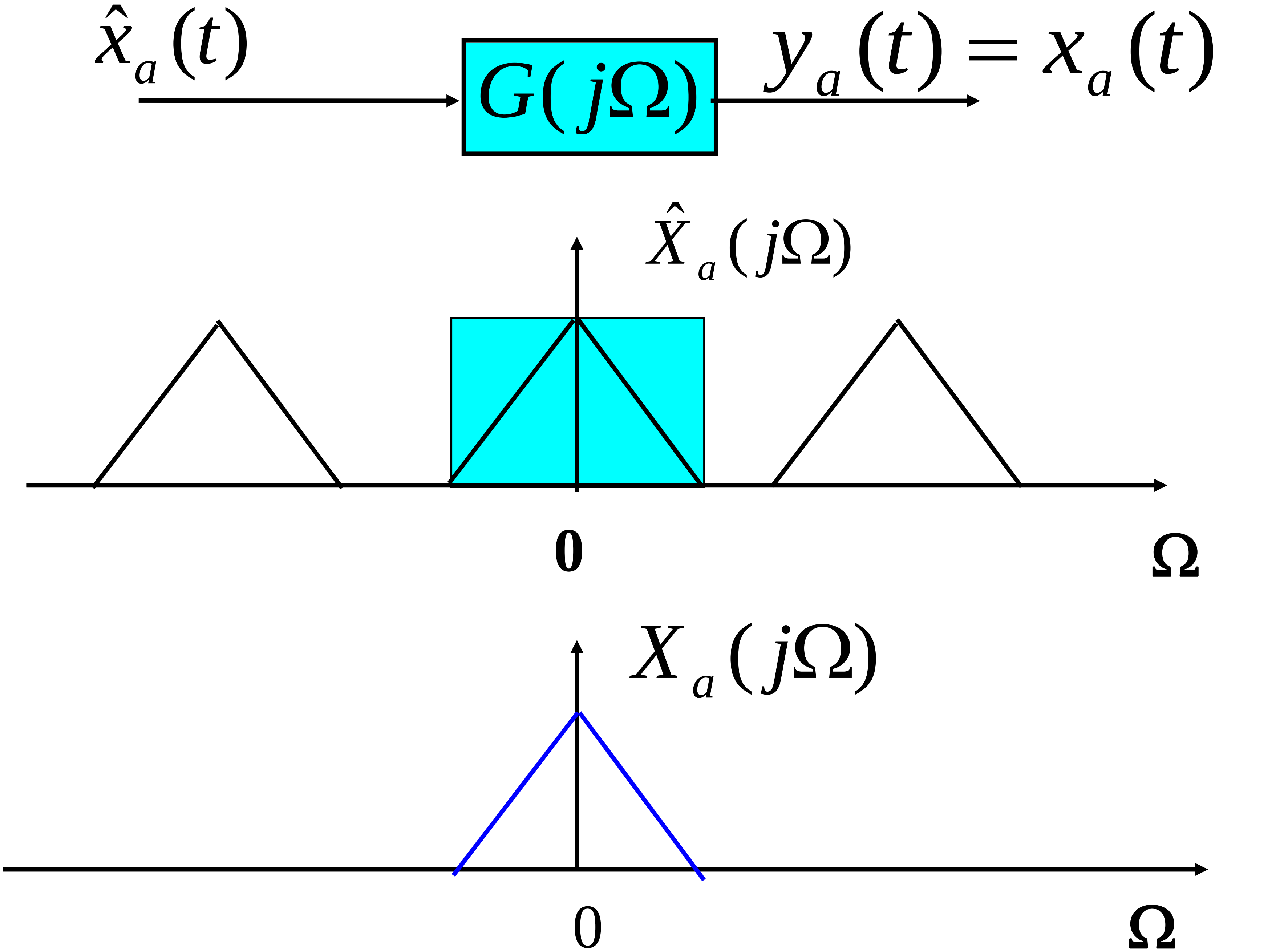


图1.5.5 A/DC 方框图

二、采样恢复及D/AC

- 在满足采样定理的条件下，数字信号经过解码，将二进制编码变成十进制数值，形成时域离散信号，再经过通过一个增益为 T，截止频率为 $\Omega_s / 2$ 的理想低通滤波器，可以唯一地恢复出原模拟信号。


$\hat{x}_a(t)$
$G(j\Omega)$
$y_a(t) = x_a(t)$
$\hat{X}_a(j\Omega)$
0
Ω
$X_a(j\Omega)$
0
Ω

理想的低通滤波器的频率响应

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \Omega_s / 2 \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_s / 2 \end{cases}$$

$\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过上面的低通滤波器

$$Y_a(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega)G(j\Omega) = X_a(j\Omega)$$

$$y_a(t) = x_a(t)$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_2/2}^{\Omega_s/2}Te^{j\Omega t}d\Omega=\frac{\sin\Omega_s t/2}{\Omega_s t/2}=\frac{\sin(\pi/T)t}{(\pi/T)t}$$

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \hat{x}_a(t)*g(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)g(t-nT) \end{aligned}$$

由于满足采样定理，

$$y_a(t)=x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)g(t-nT)$$

内插函数 $g(t)$

内插公式：

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin\pi(t-nT)/T}{\pi(t-nT)/T}\qquad(1.5.9)$$

在采样点t=nT上，g（t-nT）=1，保证

$x_a(t)=x_a(nT)$ 在采样点之间，则是各采样值乘以内插函数的波形伸展叠加而成。

数模转换器（D/AC）

- 作用：通过解码将数字信号转换成时域离散信号，再经过零阶保持器和平滑滤波，最后得到模拟信号。

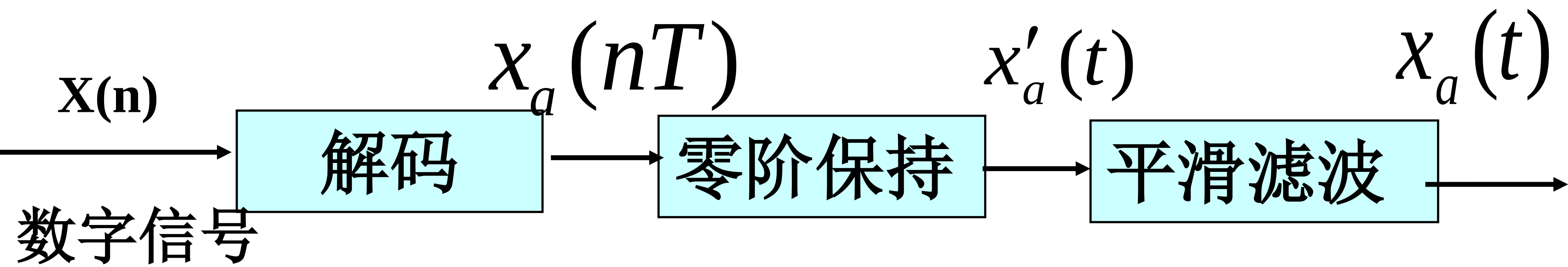
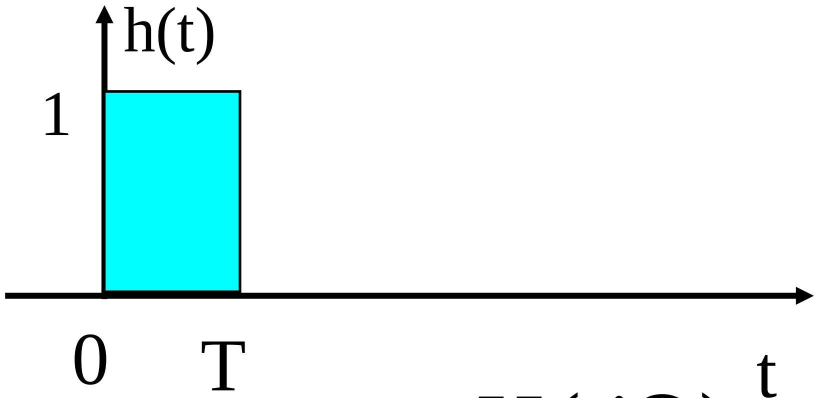
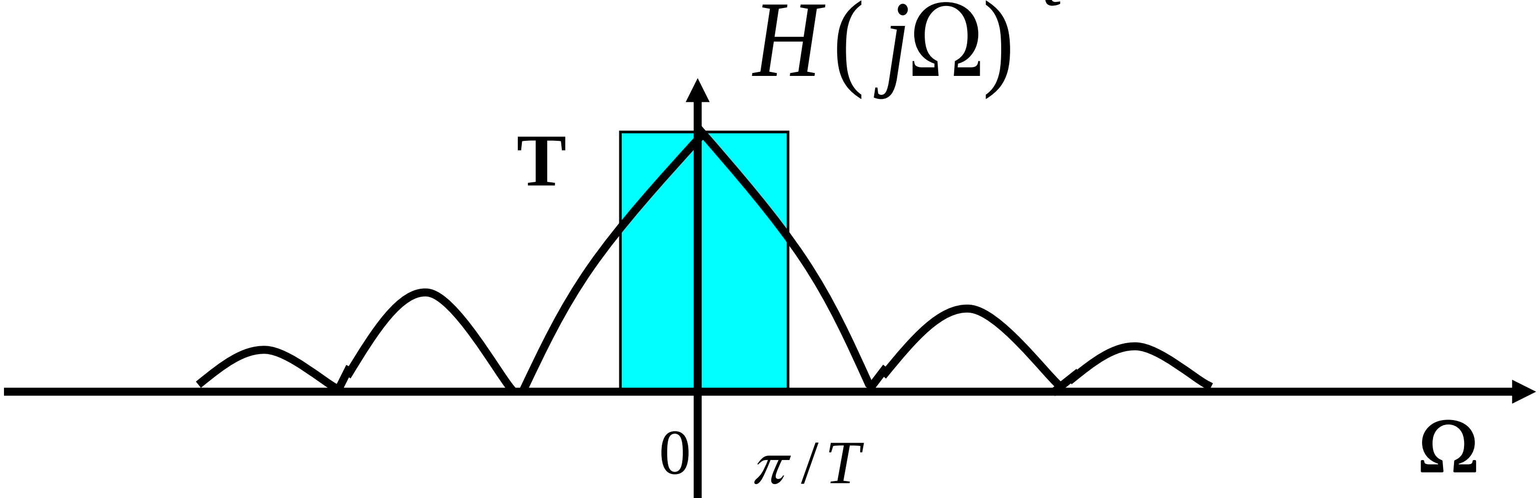


图1.5.8 采样恢复

零阶保持器

- 作用:将前一个采样值保持到下一个采样时刻,零阶保持器是一个低通滤波器,能起到将采样信号恢复成模拟信号的作用.





第一章作业

3、5、6、13