第三章

离散傅里叶变换（DFT）

Discrete Fourier Transforms

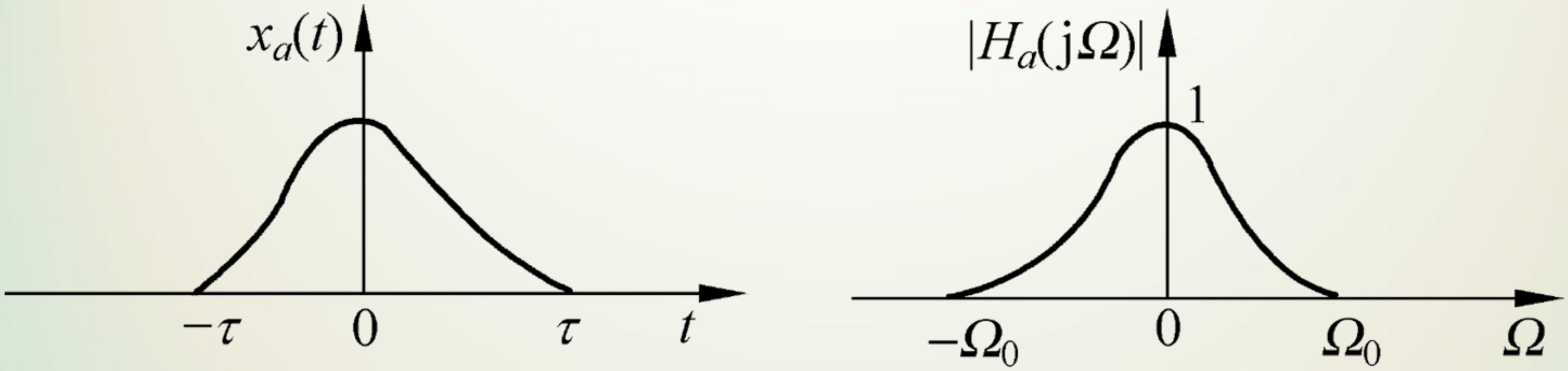
第三章 离散傅立叶变换（DFT）

- 离散傅立叶变换的定义
- 离散傅立叶变换的物理意义
- 离散傅立叶变换的基本性质
- 频率域采样
- DFT的应用举例

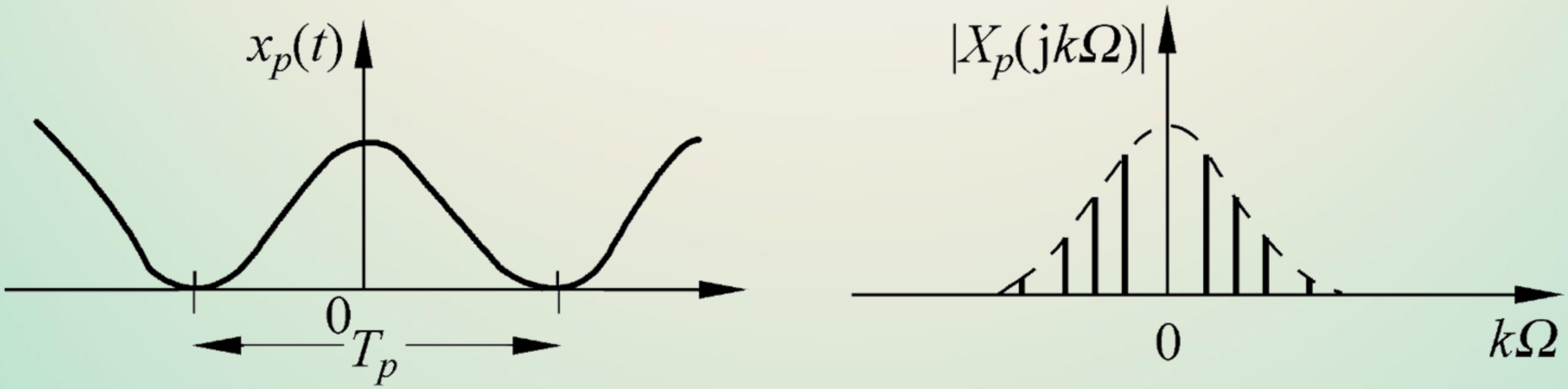
3.1 引言

- 各种形式的傅里叶变换
  - 非周期实连续时间信号的傅里叶变换：频谱是一个非周期的连续函数
  - 周期性连续时间信号的傅里叶变换：频谱是非周期性的离散频率函数
  - 非周期离散时间信号的傅里叶变换:频率函数是周期的连续函数
  - 离散周期序列的傅里叶变换:频谱既是周期又是离散的，即时域和频域都是离散的、周期的

各种形式的傅里叶变换示意图

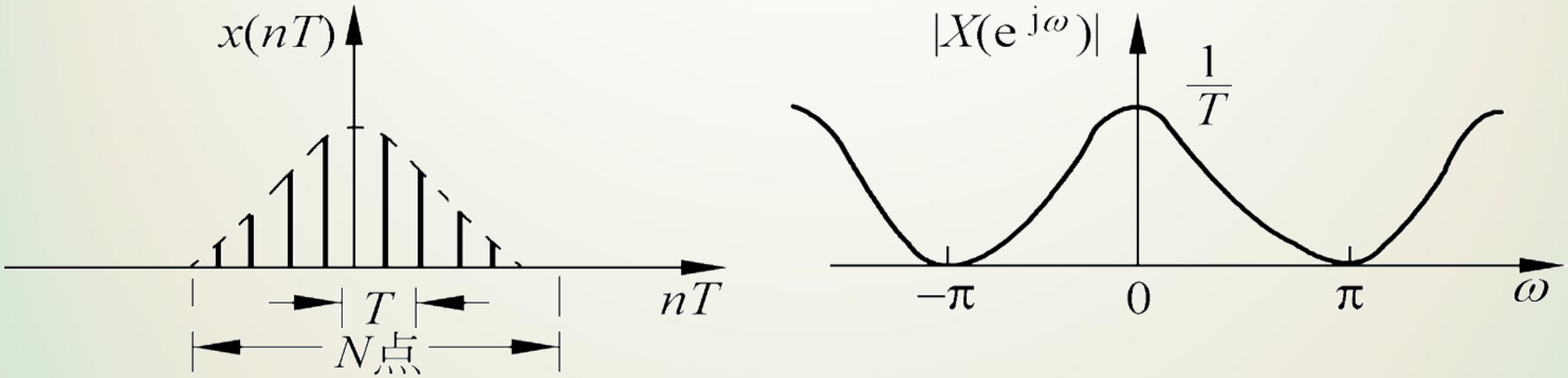


(a) 非周期连续时间信号的傅里叶变换

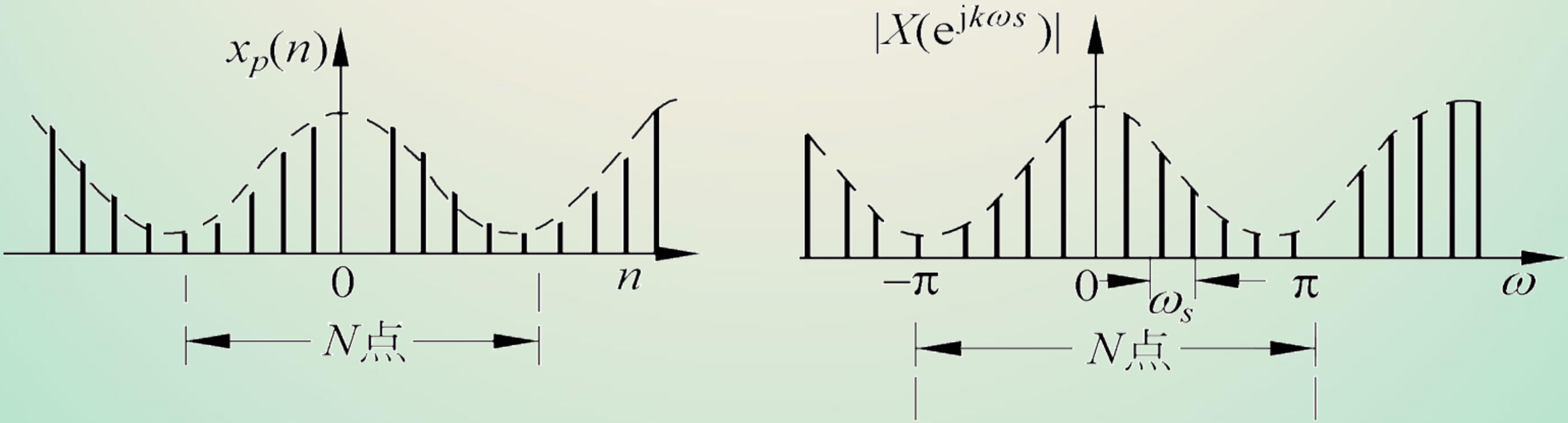


(b) 周期连续时间信号的傅里叶变换

各种形式的傅里叶变换示意图



(c) 序列的傅里叶变换



(d) 周期序列的傅里叶级数

傅里叶变换的一般规律

- 如果信号频域是离散的，则该信号在时域就表现为周期性的时间函数。
- 相反，在时域上是离散的，则该信号在频域必然表现为周期性的频率函数。
- 如果时域信号离散且是周期的，由于它时域离散，其频谱必是周期的，又由于时域是周期的，相应的频谱必是离散的，
- 离散周期序列一定具有既是周期又是离散的频谱，即时域和频域都是离散周期的。

• 得出一般的规律：一个域的离散就必然造成另一个域的周期延拓。

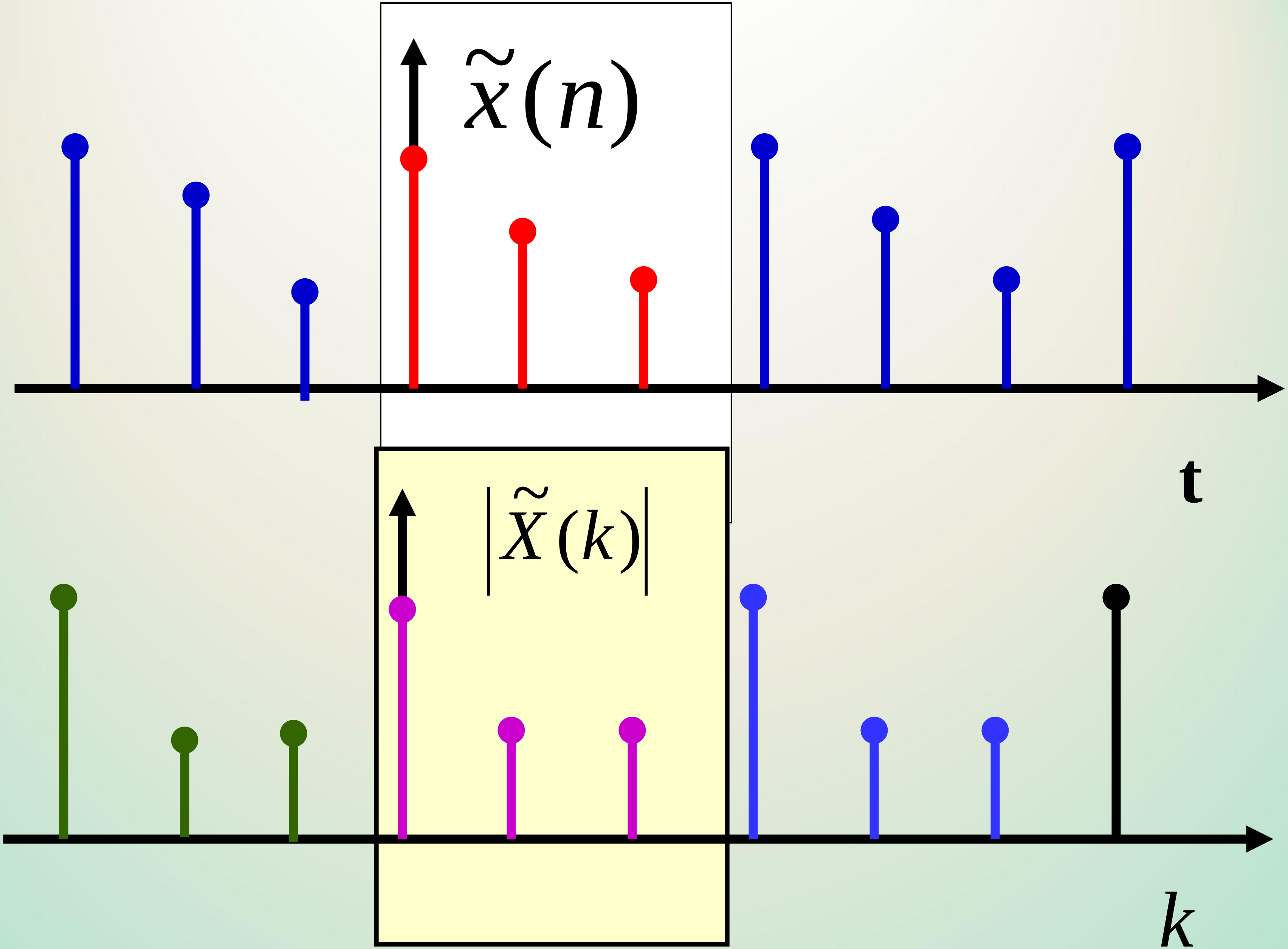
离散傅里叶变换的导出

- 由于数字计算机只能计算有限长离散的序列，因此有限长序列在数字信号处理中就显得很重要。
- Z变换和傅里叶变换无法直接利用计算机进行数值计算。
- 针对有限长序列“时域有限”这一特点，导出一种更有用的离散傅里叶变换DFT (Discrete Fourier Transform)。

离散傅立叶级数

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & -\infty < k < \infty \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & -\infty < n < \infty \end{cases}$$

时域、频域都是离散的、周期的



时域（离散、周期） ⟷ 频域（周期、离散）

3.1 离散傅里叶变换的定义

- DFT的定义
- DFT和z变换、序列的傅里叶变换的关系
- DFT的隐含周期性

3.1 离散傅立叶变换(DFT)

——有限长序列的离散频域表示

（一）DFT的定义

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} R_N(k)$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} R_N(n)$$

§3.1离散傅立叶变换(DFT)

（一）DFT的定义

引入一个常用的符号

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

N为离散傅立叶变换(DFT)的变换区间长度。

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & other \quad n \end{cases}$$

DFT的矩阵关系

令 $\boldsymbol{x} = \left[x(0),\ x(1), \cdots,\ x(N-1)\right]^T$，

$\boldsymbol{X} = \left[X(0),\ X(1), \cdots,\ X(N-1)\right]^T$

DFT的定义 $X(k) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le N-1$

可以重写为：$\boxed{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}_N \boldsymbol{x}}$

DFT的矩阵关系

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\quad 0\le k\le N-1$$

$$X=D_N x$$

其中 $$D_N=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & W_N^{1} & W_N^{2} & \cdots & W_N^{N-1}\\ 1 & W_N^{2} & W_N^{4} & \cdots & W_N^{2(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)\times(N-1)}\end{bmatrix}$$

DFT的矩阵关系

类似的， IDFT 关系也可以表示为：

$IDFT$：

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_N^{-1}\mathbf{X}$$

其中

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}D_N^{*}$$

例3.1 ：设有限长序列为$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的傅里叶变换，以及4点、8点、16点DFT。

解（1）$x(n)$的傅里叶变换

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_4(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega})}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2})}$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega/2}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

（2）$x(n)$的4点DFT

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_4^{kn}=\begin{cases}4, & k=0\\ 0, & k=1,2,3\end{cases}$$

（3）$x(n)$的8点DFT

$$X_2(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_8^{kn}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}\qquad k=0,1,\ldots,7$$

（4）$x(n)$的16点DFT

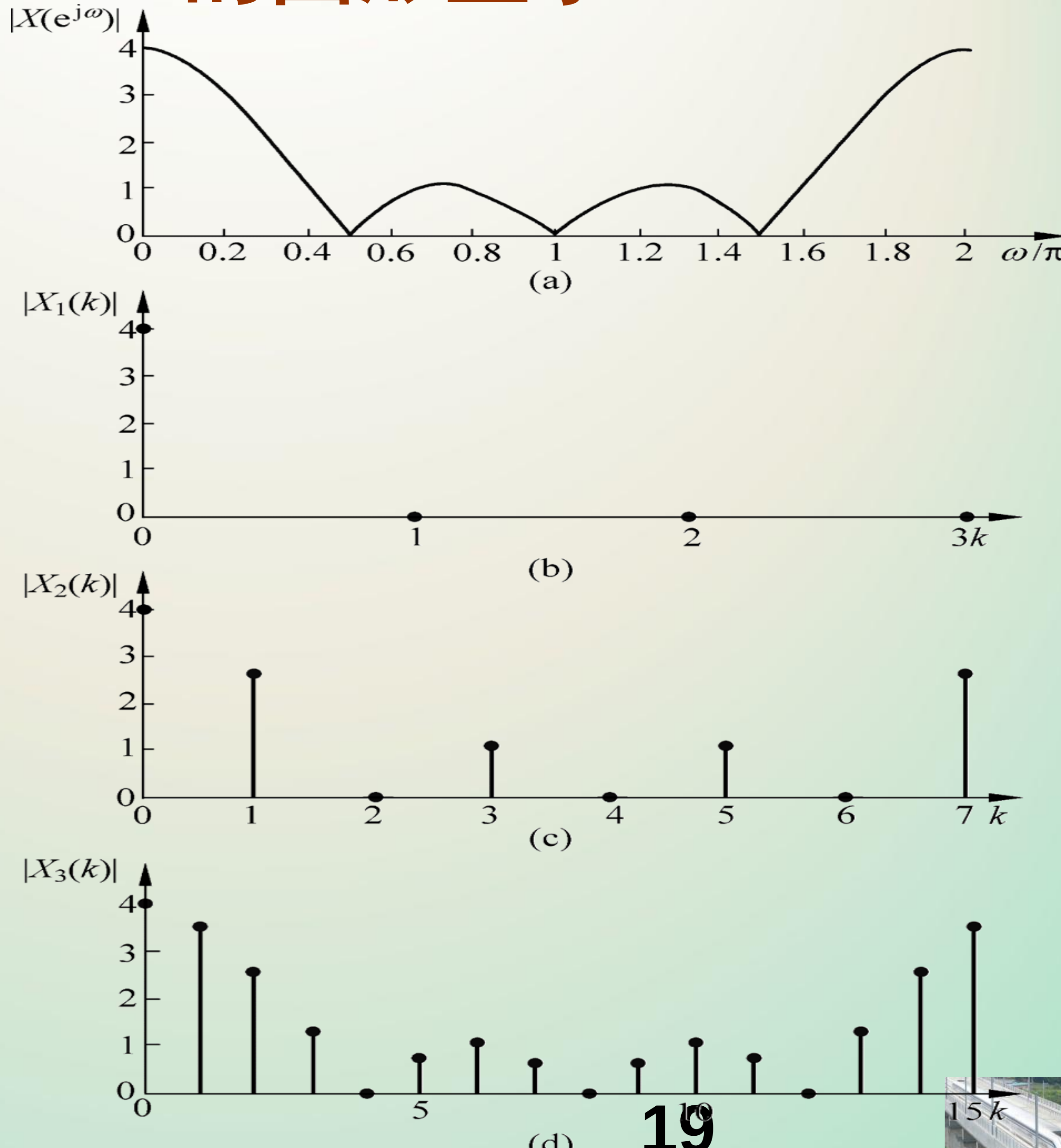
$$X_3(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_{16}^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{16}kn}$$

$$=e^{-j\frac{3}{16}\pi k}\frac{\sin\frac{\pi}{4}k}{\sin\frac{\pi}{16}k}$$

k=0，1，…，15

例3. 1 的图形显示

- 同一序列不同点数的DFT是不相同的。
- *x*(*n*)的N点DFT是*x*(*n*)的傅里叶变换*X*(e^{jw})在区间[0, 2π]上的*N*点等间隔取样。



§3.1离散傅立叶变换(DFT)

（二）DFT与Z变换的关系

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}R_N(k)$$

$$X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},0\le k\le N-1$$

§3.1离散傅立叶变换(DFT)

（二）DFT与Z变换的关系

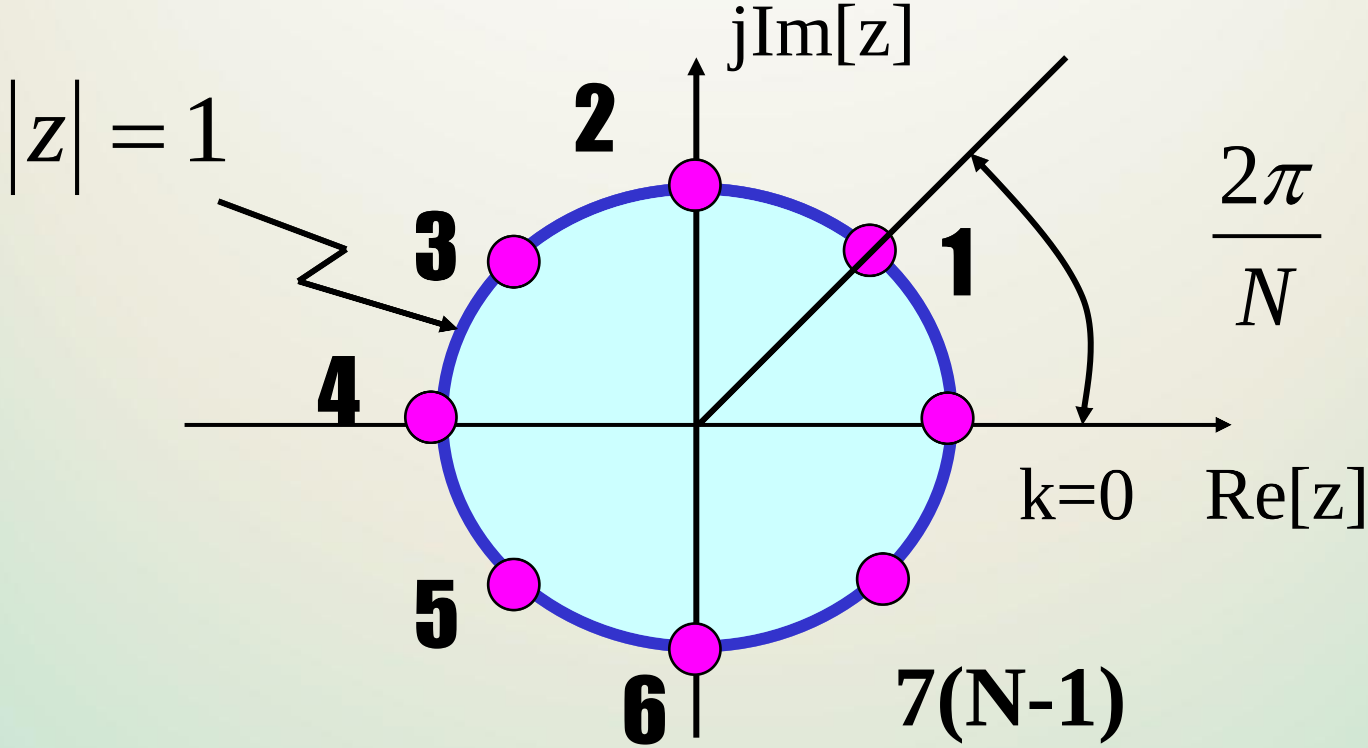
$$\boxed{X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, 0 \le k \le N-1}$$

说明：

- x(n)的N点DFT是x(n)的Z变换在单位圆上的**N点等间隔采样**。
- X(k)为x(n)的傅立叶变换X($e^{j\omega}$)在区间[0，2π]上的**N点等间隔采样**。

§3.1离散傅立叶变换(DFT)

（二）DFT与Z变换的关系



•X(k)是在 z平面单位圆上的 N个等间隔角点上对X(z)的抽样；第一个抽样点为 k=0；即出现在z=1处。

§3.1离散傅立叶变换(DFT)

（三）DFT的隐含周期性

因为

$$W_N^k = W_N^{(k+mN)}, k, m, N$$ 均为整数，N为自然数

所以

$$\boxed{\begin{aligned} X(k+mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k) \end{aligned}}$$

§3.1离散傅立叶变换(DFT)

(三)DFT的隐含周期性

有限长序列与周期序列的关系

$$\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN) \qquad (3.1.5)$$

$$x(n)=\tilde{x}(n)\cdot R_N(n) \qquad (3.1.6)$$

说明:

任何周期为N的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 都可以看成长度为N的有限长序列$x(n)$的周期延拓;

$x(n)$称为 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列。

§3.1离散傅立叶变换(DFT)

（三）DFT的隐含周期性

周期序列的术语

- 主值区间：周期序列 $\tilde{x}(n)$ 中从n=0到N-1的第一个周期。

- 主值序列：主值区间上的序列。

- 主值序列与相应的周期序列的关系可以简写如下

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

周期序列与周期延拓序列

为了简单，引入运算符$((n))_N$，表示模N对n求余数，即如果

$$n = mN + n_1，\quad 0 \le n_1 \le N-1，\quad \text{m为整数}$$

则 $$((n))_N = ((n_1+mN))_N = n_1$$

$x((n))_N$ 表示x(n)是**以N为周期的周期延拓**序列

$((n))_N$ 表示n对N求余。

例: 序列的周期延拓

例如，N=8，　$\tilde{x}(n)=x((n))_8$ ，则有

$$\tilde{x}(-1)=x((-1))_8=x((7-8))_N=x(7)$$

$$\tilde{x}(9)=x((9))_8=x(1)$$

于是

$$\boxed{\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN)=x((n))_N}$$

§ 3.2 DFT的基本性质

- 线性性质
- 循环移位性质
- 循环卷积定理
- 复共轭序列的DFT
- DFT的共轭对称性

§3.2　DFT的基本性质

3.2.1线性性质

设$x_1(n)$和$x_2(n)$ 长度分别为N_1和N_2，且

$$y(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$$

取$N=\max[N_1，N_2]$，则$y(n)$的N点DFT为

$$Y(k)=DFT[y(n)]=aX_1(k)+bX_2(k) \qquad 0\le k\le N-1$$

注意：如果N_1和N_2不相等，则以N为DFT变换长度时，其中相对较短的序列就通过补零增加到长度为N。

3.2.2 循环移位性质

1. 序列的循环移位（圆周移位）

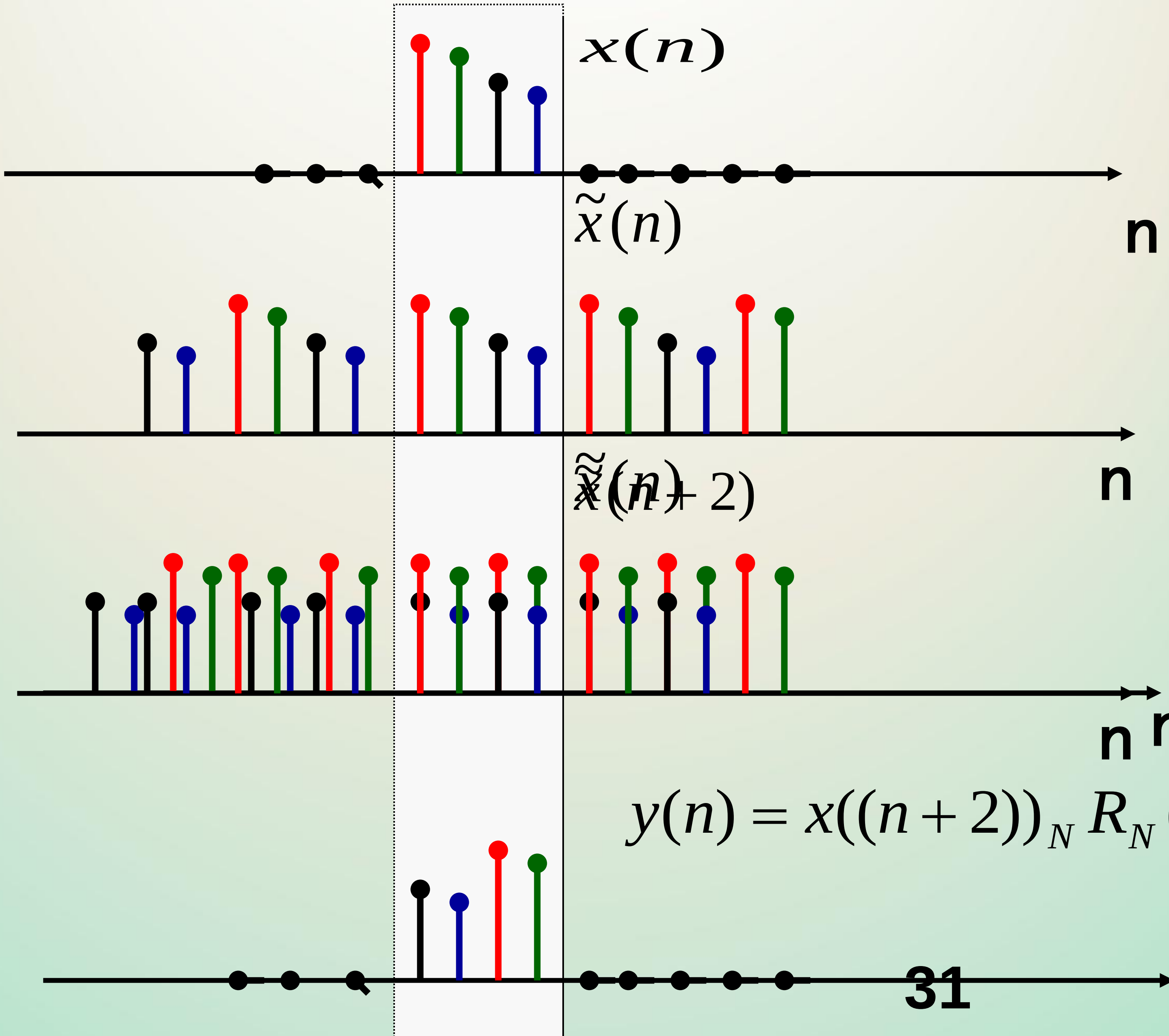
设x(n)为有限长序列，长度为N，则x(n)的循环移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

循环移位的过程：

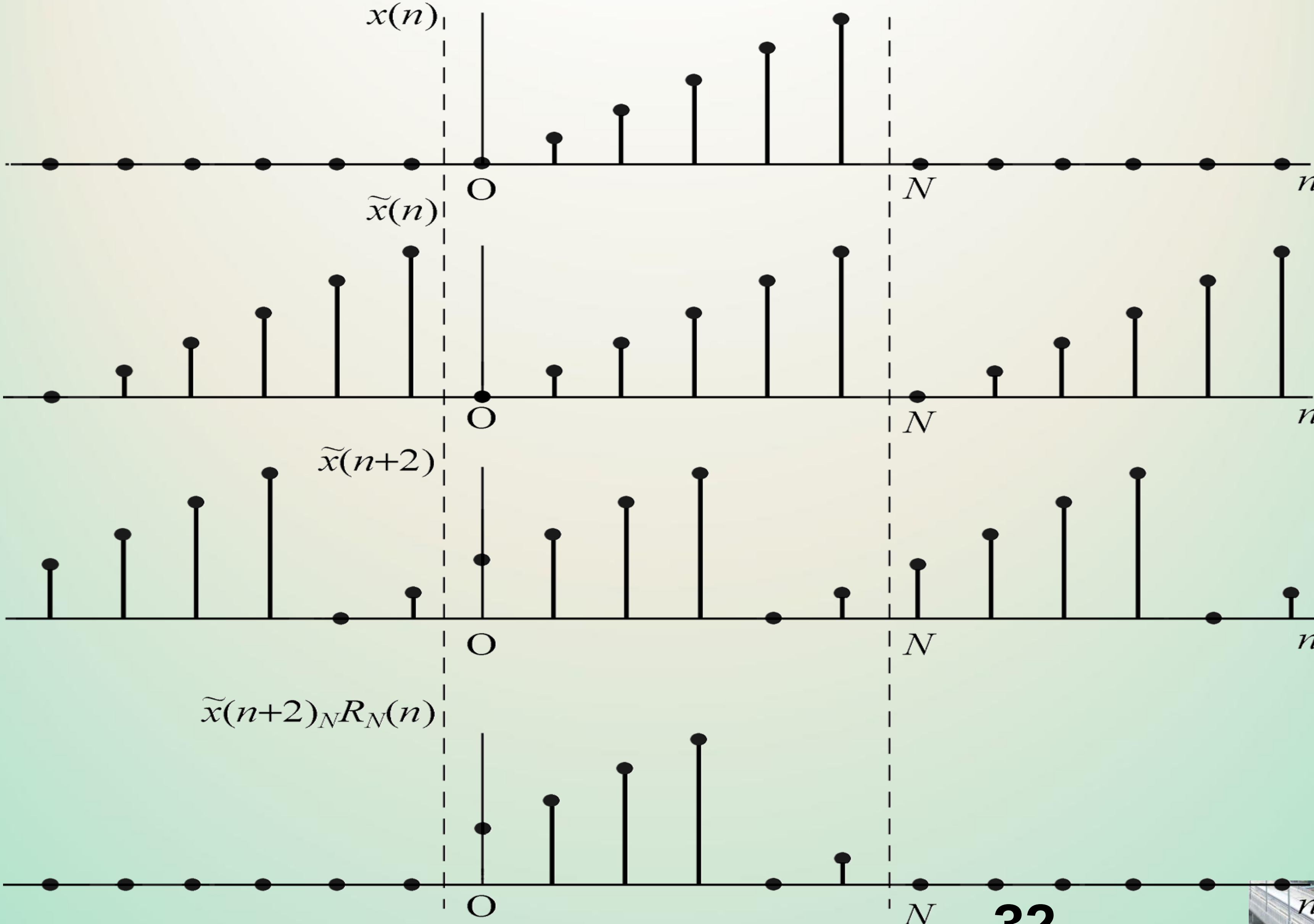
用序列的长度N为周期将其延拓成周期序列，将此周期序列加以移位，然后取主值区间上的序列值。

循环移位的过程示意图



$$y(n)=x((n+2))_N R_N(n)$$

- 1、序列的循环移位



$x(n)$
O
N
n
$\widetilde{x}(n)$
O
N
n
$\widetilde{x}(n+2)$
O
N
n
$\widetilde{x}(n+2)_N R_N(n)$
O
N
n

3.2.2 循环移位性质

2. 时域循环移位定理

若

$$y(n)=x((n+m))_N R_N(n)$$

则

$$Y(k)=DFT[y(n)]=W_N^{-km}X(k)$$

有限长序列的圆周移位在频域中只引入一个和频率成正比的线性相移

$$W_N^{-km}=e^{j\frac{2\pi}{N}km}$$

对频谱的幅度没有影响。

时域循环移位定理证明

- 证明

$$Y(k)=DFT[y(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x((n+m))_N R_N(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x((n+m))_N W_N^{kn}$$

令$n+m=n'$，则有

$$Y(k)=\sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{k(n'-m)}=W_N^{-km}\sum_{n'=m}^{N-1+m}x((n'))_N W_N^{kn'}$$

$$=W_N^{-km}\sum_{n'=0}^{N-1}x(n')W_N^{kn'}=W_N^{-km}X(k)$$

3.2.2 循环移位性质

3. 频域循环移位定理

如果 $X(k)=DFT[x(n)]R_N(k)$

$Y(k)=X((K+l))_N R_N(k)$

则 $$\boxed{y(n)=IDFT[Y(k)]=W_N^{nl}x(n)}$$

•时域序列的调制等效于频域的圆周移位。

•即 x(n) 乘以 W_N^{nl} ，则离散傅立叶变换向左圆周移位 l 位，$W_N^{nl}x(n)$ 相当于将x(n)进行复调制，其结果使整个频谱产生搬移。

3.2.3 循环卷积定理

1、两个有限长序列的循环卷积

设序列$h(n)$和$x(n)$的长度分别为N和M。

$h(n)$与$x(n)$的L点循环卷积定义为

$$y_c(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x((n-m))_L\right]R_L(n)$$

$$y_C(n)=x(n)\;\textcircled{\scriptsize L}\;h(n)$$

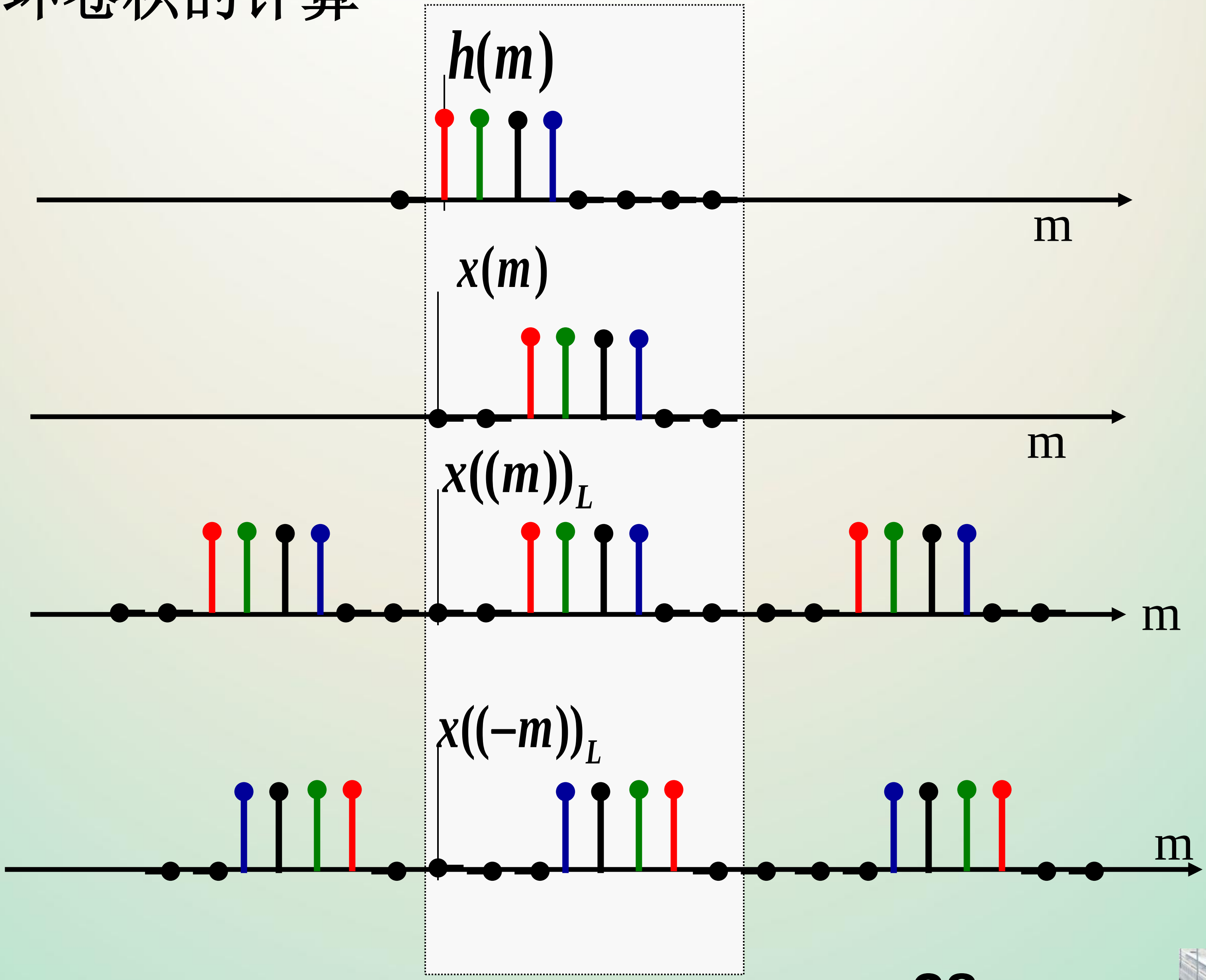
式中，$L\geq\max[N，M]$。

图解法：

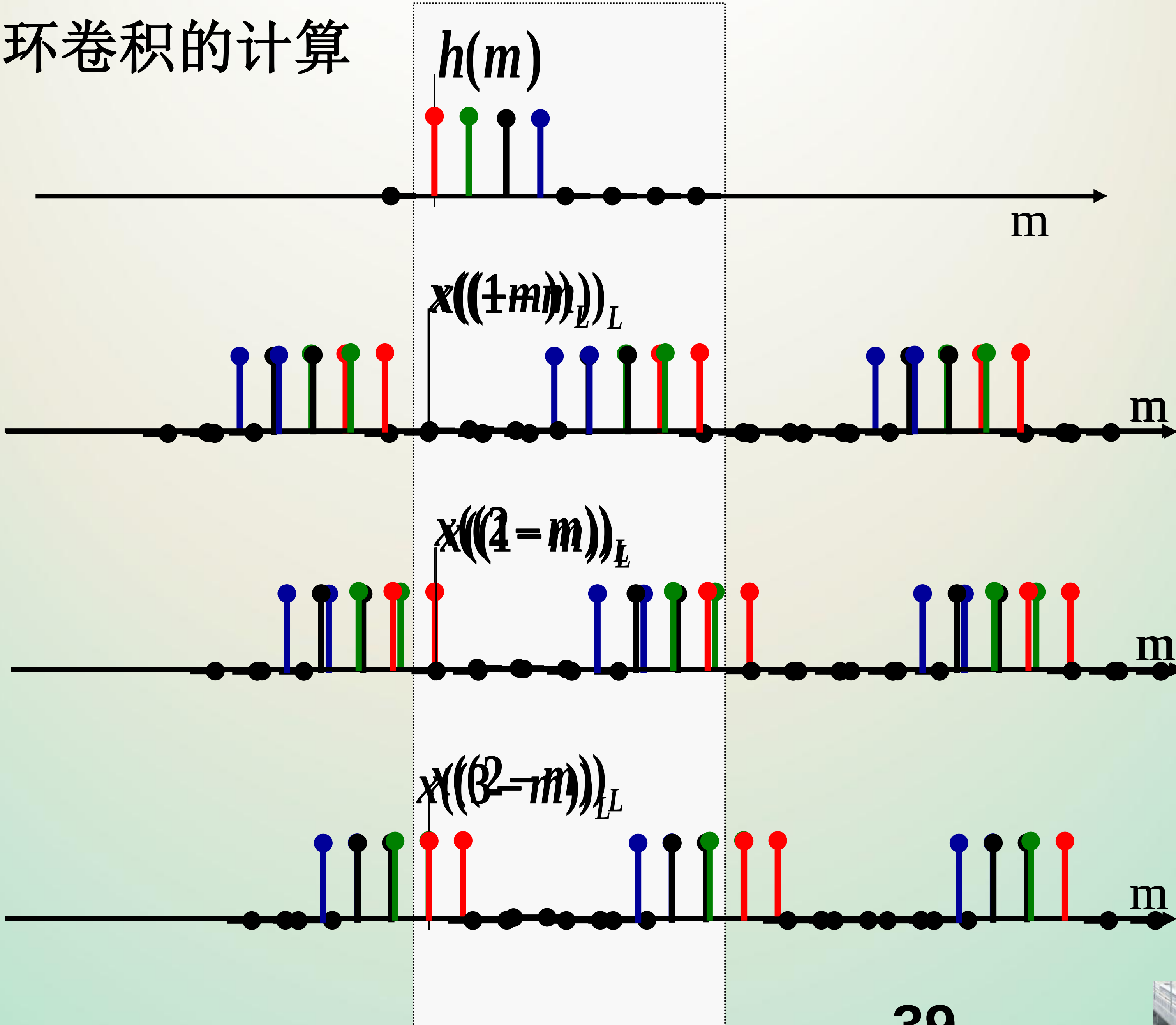
$$y_c(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x((n-m))_L\right]R_L(n)$$

- 画出$h(m)$与$x(m)$
- 将$x(m)$周期化得到$x((m))_L$
- 再反转形成$x((-m))_L$
- 取主值序列得到$x((-m))_L R_L(m)$
- 对$x(m)$ 循环反转序列循环移位n, 得到$x((n-m))_L R_L(m)$
- 当$n=0,1,\ldots N-1$时，分别将$h(m)$与$x((n-m))_L R_L(m)$相乘，并对m在$0\sim(N-1)$区间上求和，得到的$h(n)$与$x(n)$循环卷积

循环卷积的计算



循环卷积的计算



矩阵法：

$$y_c(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x((n-m))_L\right]R_L(n)$$

$$\begin{bmatrix} y_C(0) \\ y_C(1) \\ y_C(2) \\ \vdots \\ y_C(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}$$

矩阵中每一行的元素，都是将上一行元素向右圆周移位一位得到的。

【例3. 2. 1】计算下面给出的两个长度为4的序列$h(n)$与$x(n)$的4点和8点循环卷积。

$$x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3)\}=\{1,2,3,4\}$$

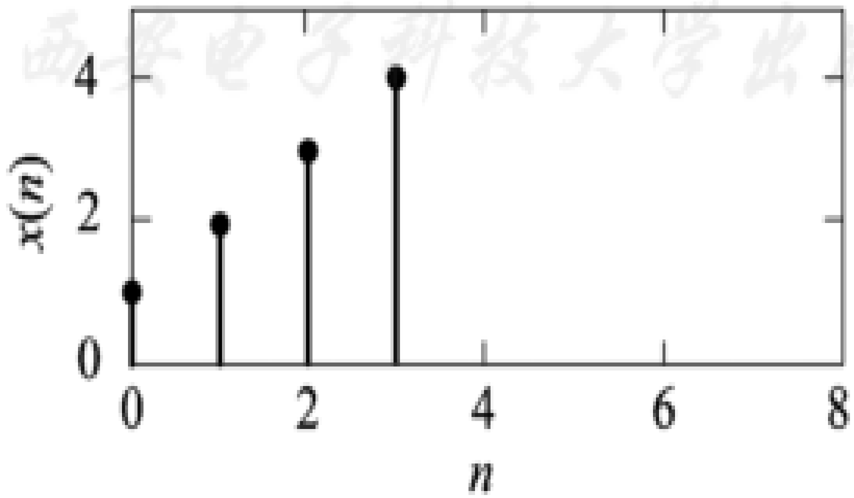
$$h(n)=\{h(0),h(1),h(2),h(3)\}=\{1,1,1,1\}$$

解 $h(n)$与$x(n)$的4点循环卷积矩阵形式为

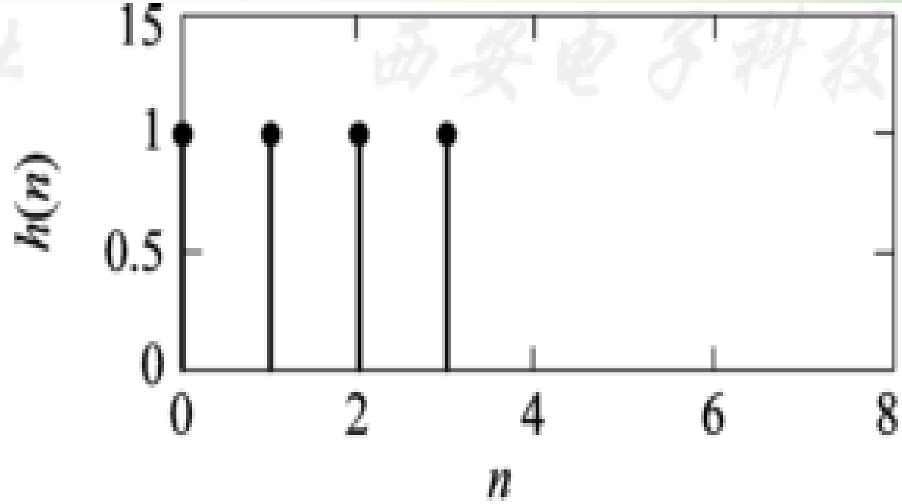
$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$h(n)$与$x(n)$的8点循环卷积矩阵形式为

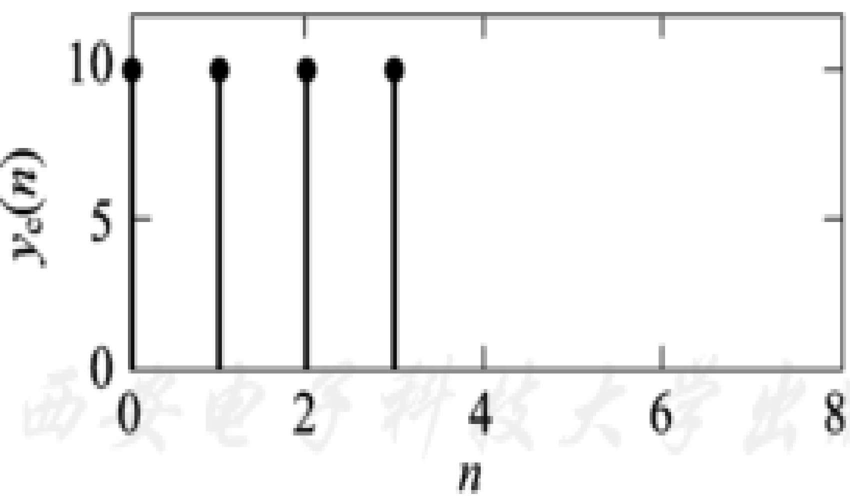
$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(4) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



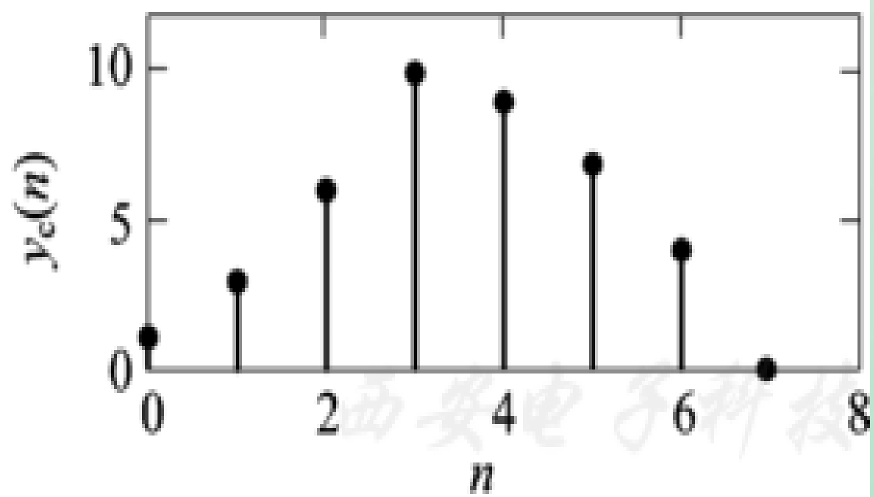
(a) $x(n)$



(b) $h(n)$



(c) 4 点循环卷积



(d) 8 点循环卷积

【例3.2.1】的另一种解法：

$$x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3)\}=\{1,2,3,4\}$$

$$h(n)=\{h(0),h(1),h(2),h(3)\}=\{1,1,1,1\}$$

$$y_C(n)=x(n)④h(n)=\sum_{m=0}^{3}h(m)\,x((n-m))_4],\ \ 0\le n\le 3$$

由上我们得到：

$$x((-m))_4=\begin{bmatrix}x[0] & x[3] & x[2] & x[1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$y_C(0)=\sum_{m=0}^{3}h(m)x((-m))_4$$

$$=h(0)\,x(0)+h(1)\,x(3)+h(2)\,x(2)+h(3)\,x(1)$$

$$=(1\times 1)+(1\times 4)+(1\times 3)+(1\times 2)=10$$

- **同样** $x((1-m))_4=\begin{bmatrix}x[1] & x[0] & x[3] & x[2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

$$y_C(1)=\sum_{m=0}^{3}h(m)\,x((1-m))_4$$

$$=h[0]\,x[1]+h[1]\,x[0]+h[2]\,x[3]+h[3]\,x[2]$$

$$=(1\times 2)+(1\times 1)+(1\times 4)+(1\times 3)=10$$

$$x((2-m))_4=\begin{bmatrix}x[2] & x[1] & x[0] & x[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$y_C(2)=\sum_{m=0}^{3}h(m)\,x((2-m))_4$$

$$=h[0]\,x[2]+h[1]\,x[1]+h[2]\,x[0]+h[3]\,x[3]$$

$$=(1\times 3)+(1\times 2)+(1\times 1)+(1\times 4)=10$$ …略

§3.2.3循环卷积定理

2. 时域循环卷积定理

有限长序列$x_1(n)$和$x_2(n)$的长度分别为N_1和N_2，

$N=\max[N_1, N_2]$，$x_1(n)$和$x_2(n)$的N点循环卷积为

$$\boxed{\begin{aligned} x(n) = x_1(n) \; N \; x_2(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n) \end{aligned}}$$

则$x(n)$的N点DFT为

$$\boxed{X(k) = DFT[x(n)] = X_1(k) \cdot X_2(k)}$$

其中，$X_1(k) = DFT[x_1(n)], X_2(k) = DFT[x_2(n)]$

循环卷积定理证明

- **证明** $X(k)=DFT[x(n)]$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)\right]W_N^{kn}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{n=0}^{N-1}x_2((n-m))_N W_N^{kn}$$

令$n-m=n'$，则有 $$X(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{n'=-m}^{N-1-m}x_2((n'))_N W_N^{k(n'+m)}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)W_N^{km}\cdot\sum_{n'=-m}^{N-1-m}x_2((n'))_N W_N^{kn'}$$

时域循环移位定理讨论

$$=\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \cdot \sum_{n'=-m}^{N-1-m} x_2((n'))_N W_N^{kn'}$$

因为上式中 $x_2((n'))_N W_N^{kn'}$ 以*N*为周期，所以对其在任一周期上的求和结果不变，因此

$$X(k)=\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \cdot \sum_{n'=0}^{N-1} x_2(n') W_N^{kn'}$$

$$= X_1(k) \cdot X_2(k) \quad 0 \le k \le N-1$$

§3.2.3循环卷积定理

3. 频域循环卷积定理

如果 $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$

则

$$X(k) = DFT[x(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \textcircled{\scriptsize N} X_2(k)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N R_N(k)$$

或

$$X(k) = \frac{1}{N} X_2(k) \textcircled{\scriptsize N} X_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N R_N(k)$$

§3.2 DFT的基本性质

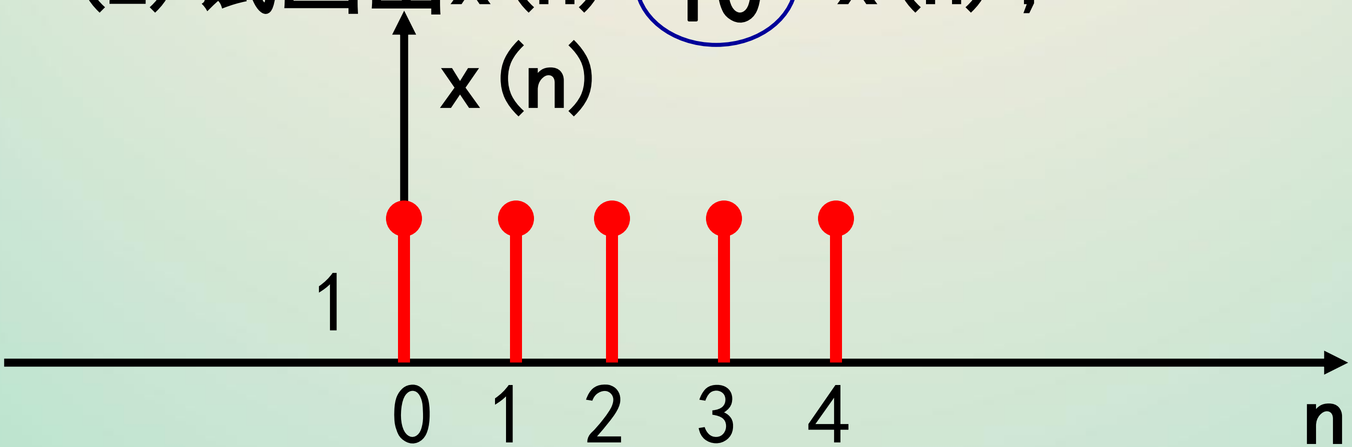
练习

- 如下图所示的5点序列x(n)

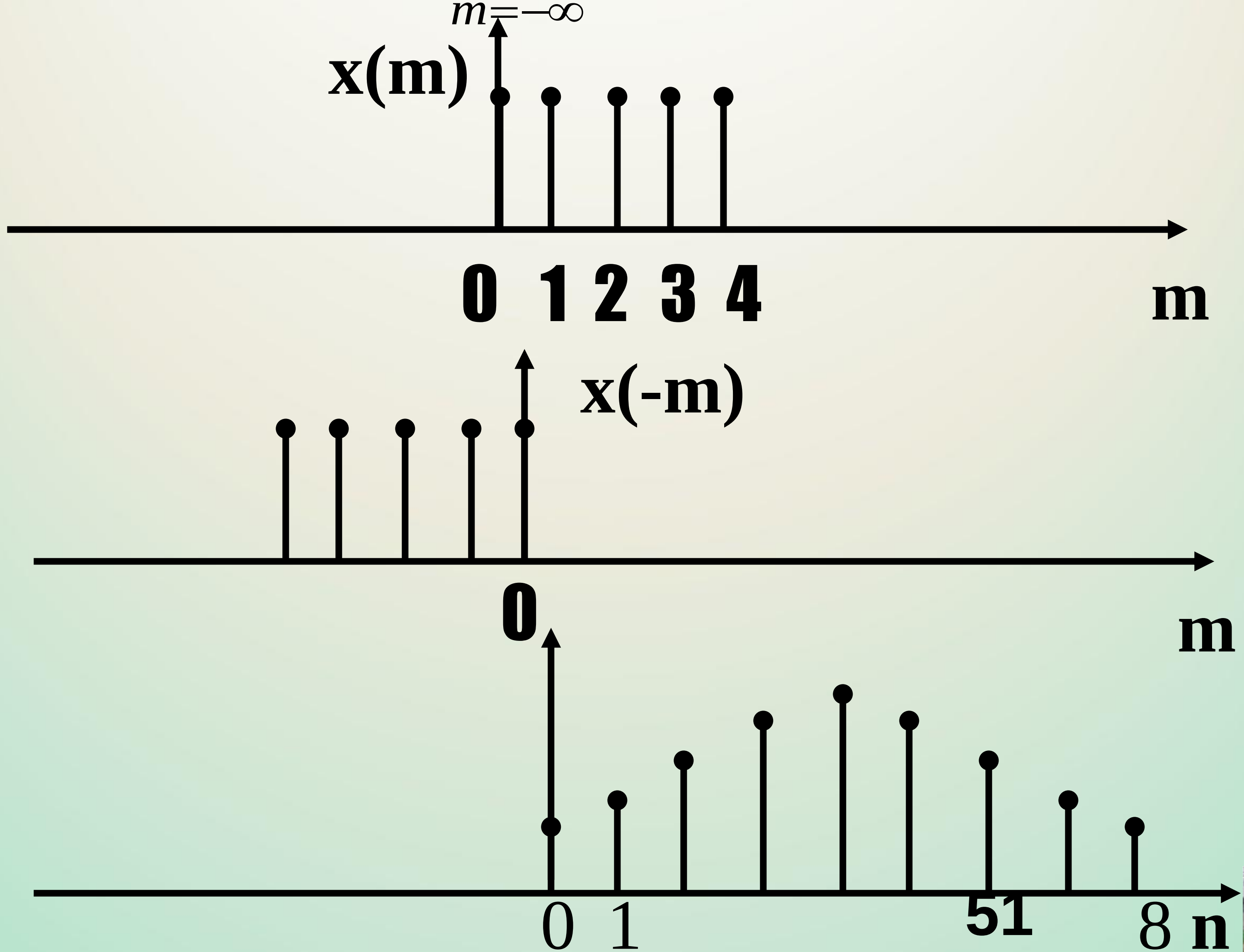
(1) 试画出x(n)*x(n);

(2) 试画出x(n) 5 x(n);

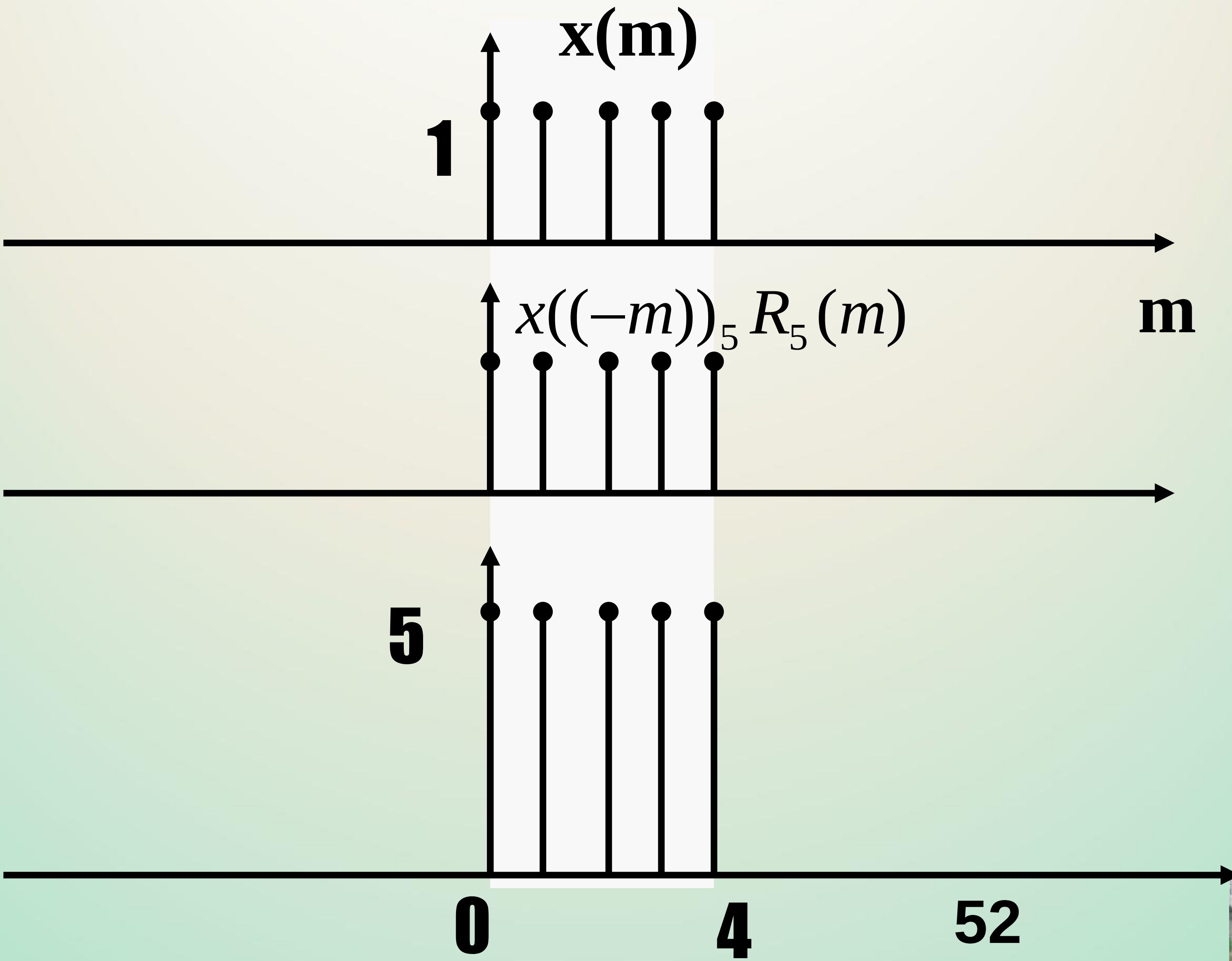
(2) 试画出x(n) 10 x(n);



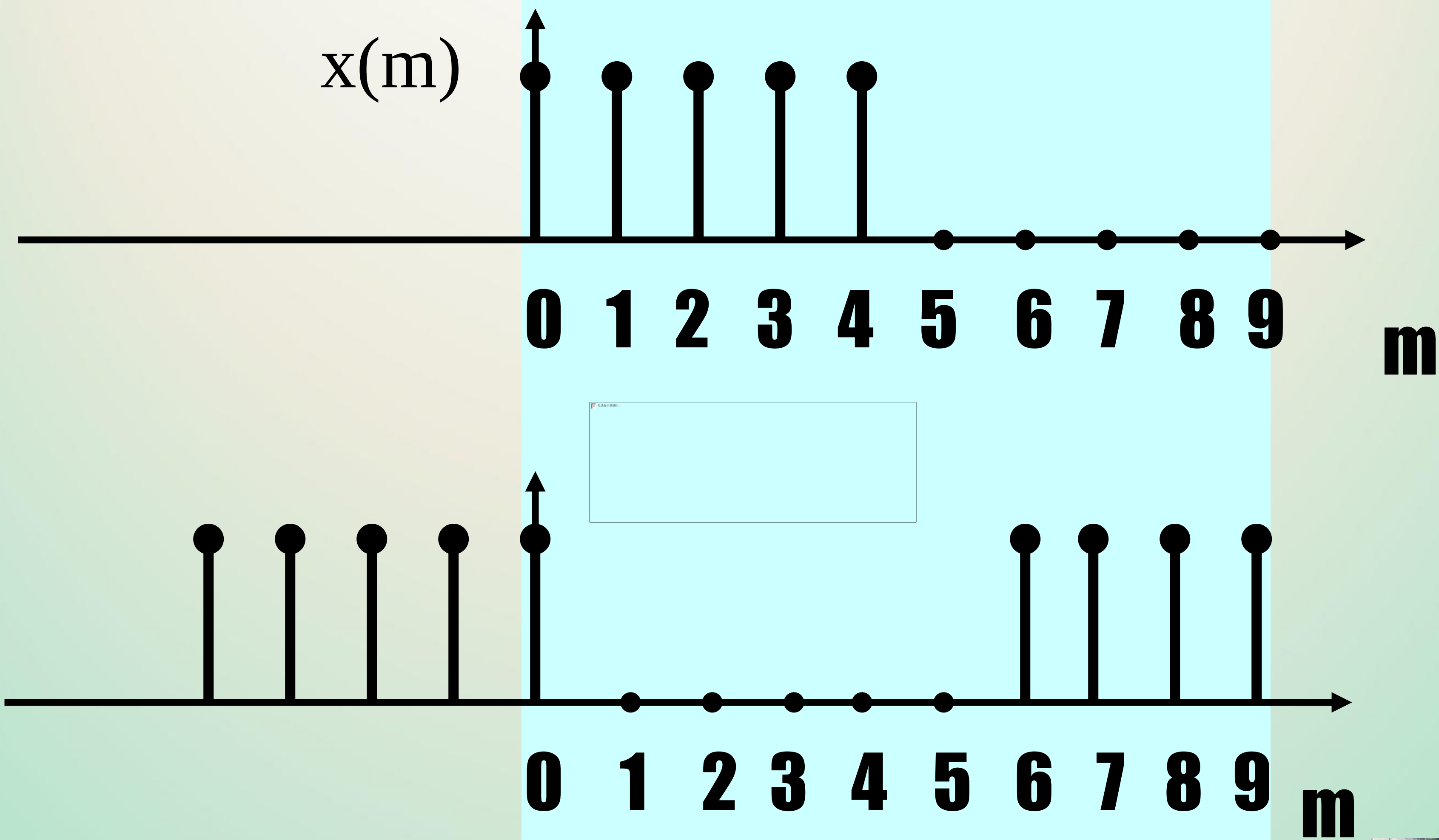
$$x(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)X(n-m)$$



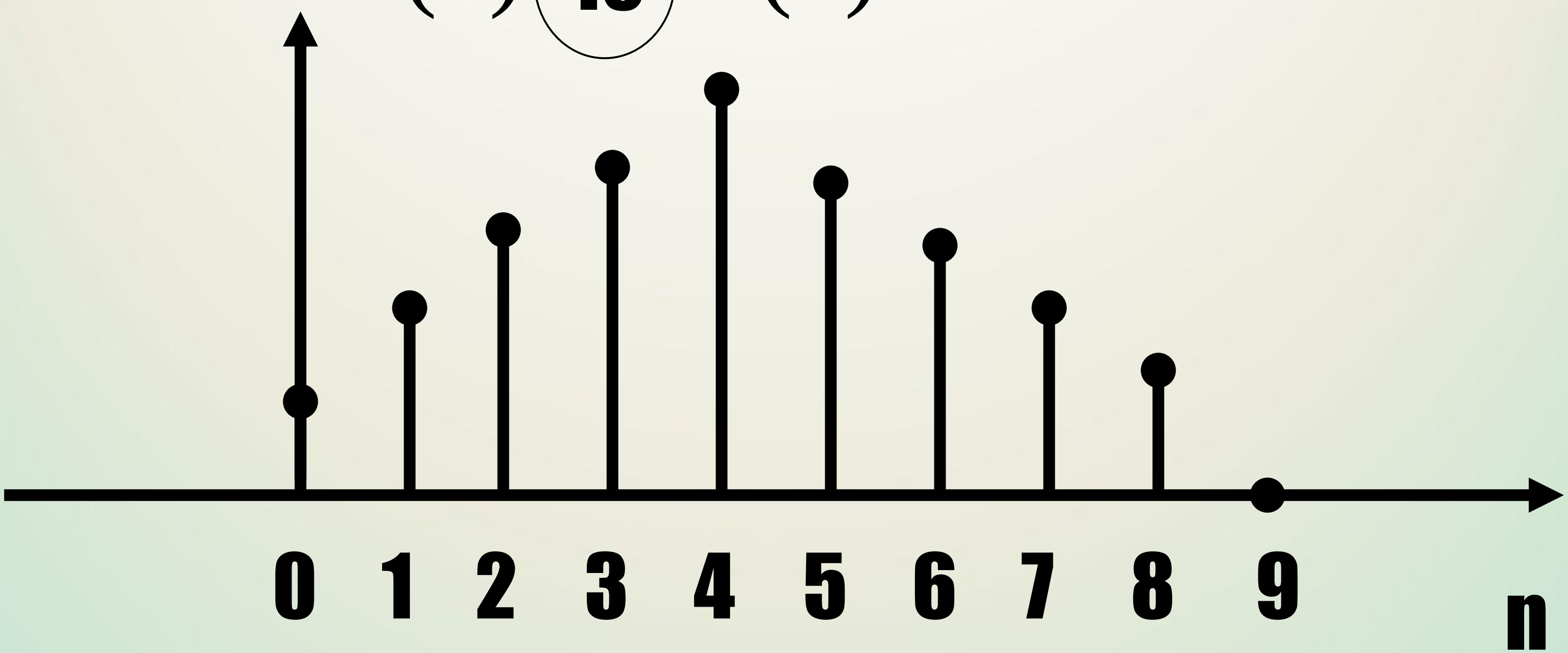
$x(n)$ ⑤ $x(n)$



$$x(n) \quad 10 \quad x(n)$$



$x(n)$ 10 $x(n)$



3.2.4复共轭序列的DFT

- 设 $x^*(n)$ 是x(n)的复共轭序列，长度为N

$$X(k)=DFT[x(n)]$$

则 $\boxed{DFT[x^*(n)]=X^*(N-k),\quad 0\le k\le N-1}$

且 $\boxed{X(N)=X(0)}$

同理 $\boxed{DFT[x^*(N-n)]=X^*(k)}$

3.2.5 DFT的共轭对称性

1． 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

有限长共轭对称序列

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^{*}(N-n), 0 \le n \le N-1$$

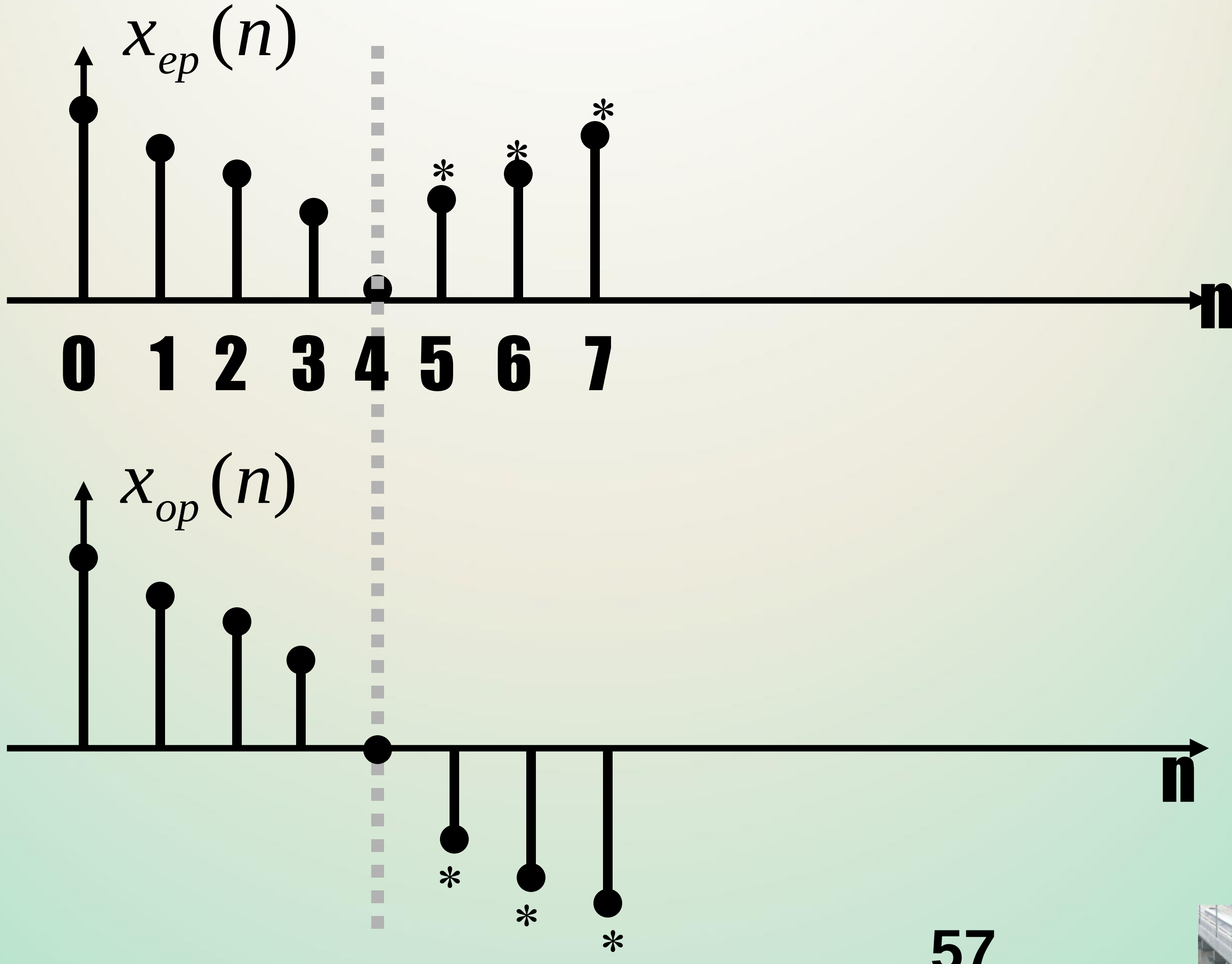
$$x_{op}(n) = -x_{op}^{*}(N-n), 0 \le n \le N-1$$

当N为偶数时，将上式中的n换成N/2-n，得

$$x_{ep}(N/2-n) = x_{ep}^{*}(N/2+n), 0 \le n \le N/2-1$$

$$x_{op}(N/2-n) = -x_{op}^{*}(N/2+n), 0 \le n \le N/2-1$$

3.2.5 DFT的共轭对称性



3.2.5 DFT的共轭对称性

任一有限长序列x(n)可以表示如下

$$\boxed{x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n),\quad 0 \le n \le N-1}$$

其中，

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

3.2.5　DFT的共轭对称性

2. DFT的共轭对称性

（1）如果 $$x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$$

其中

$$x_r(n)=\mathrm{Re}[x(n)]=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$$

$$jx_i(n)=j\,\mathrm{Im}[x(n)]=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(n)]$$

则

$$\begin{aligned}X(k)&=DFT[x(n)]\\&=DFT[x_r(n)]+DFT[jx_i(n)]\\&=X_{ep}(k)+X_{op}(k)\end{aligned}$$

3.2.5　DFT的共轭对称性

2. DFT的共轭对称性

（2）如果 $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n),\quad 0\le n\le N-1$

其中

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$$

则

$$\begin{aligned}X(k)&=DFT[x(n)]=DFT[x_{ep}(n)]+DFT[x_{op}(n)]\\&=\mathrm{Re}[X(k)]+j\,\mathrm{Im}[X(k)]=X_R(k)+jX_I(k)\end{aligned}$$

3.2.5　DFT的共轭对称性

总结:

如果x(n)的DFT为X(k),

则

x(n)的实部和虚部（包括j）的DFT分别为X(k)的共轭对称分量和共轭反对称分量;

x(n)的共轭对称分量和共轭反对称分量的DFT分别为X(k)的实部和虚部（包括j）；

重要性质

当x(n)为长度为N的实序列时，且

X(k)=DFT[x(n)], 则

$$(1)\,X(k)=X^{*}(N-k),0\le n\le N-1$$

$$(2)\,if \quad x(n)=x(N-n)$$
$$Then \quad X(k)=X(N-k)$$

X(k)实偶

$$(3)\,if \quad x(n)=-x(N-n)$$
$$Then \quad X(k)=-X(N-k)$$

X(k)虚奇

3.4 频域采取样

- 频域采样

  指对序列的傅里叶变换进行取样。

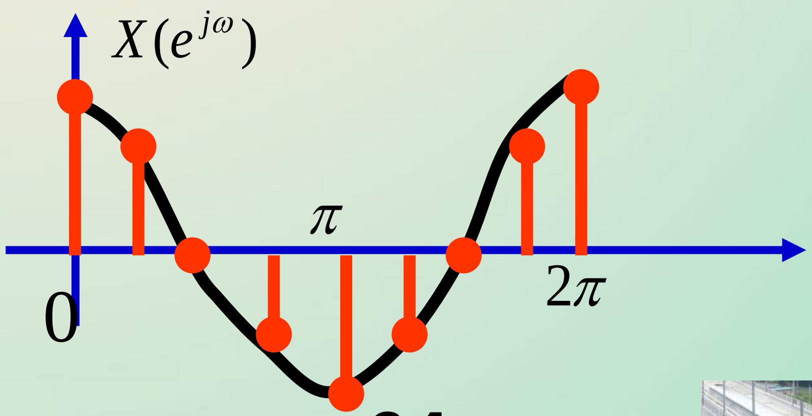
- 由时域取样定理，在一定的条件下，可以通过时域离散取样信号恢复原来的连续信号。
- 对有限长序列而言，由DFT的讨论可知，N点DFT就是在频域对序列傅里叶变换$X(e^{j\omega})$在[0,2π]上的N点等间隔取样，即实现了频域取样。

3.4　频域采取样

傅立叶变换的抽样——频域采样定理

- 为了便于计算机计算,一般采取在频率域采样的方法,来计算有限长序列的傅立叶变换。

- 那么,是否任何一个序列的频谱（或任何一个频率 特性）都能用频率抽样的方法去逼近呢?其限制条件是什么?



3.4　频域采取样

推导过程:

设任意序列 x(n) 存在Z变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

且X(z)的收敛域包括单位圆，　如果对X(z)在单位圆上的N个均分点采样，则得到

$$\boxed{X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},0\le k\le N-1}$$

$$\boxed{x_N(n)=IDFT[X(k)],0\le n\le N-1}$$

问题在于这样采样以后是否能恢复出原序列x(n)

$$x_N(n)=IDFT[X(k)],0\le n\le N-1$$

经推导得

$$x_N(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)R_N(n)$$

说明：

X(z) 在单位圆上的N点等间隔采样 X(k)的 IDFT 为：原序列x(n) 以N为周期的周期延拓序列的主值序列.

频域抽样造成时域信号的周期延拓，其延拓周期为采样点数N.

若x(n)不是有限长的，则延拓后必然造成混迭现象，若x(n) 是有限长的，长度为M，当抽样点数不够密时(N<M),也会造成混迭现象.

频域抽样定理

如果序列x(n)的长度为M，则只有当频域抽样点数 N 满足

$$\boxed{N \geq M}$$

才有

$$\boxed{x_N(n) = IDFT[X(k)] = x(n)}$$

即可由X(k)恢复出原序列x(n)

时域抽样与频域抽样的比较

- 时域抽样 ⟶ 造成频域函数的周期延拓，周期为

$$\Omega_s \geq 2\Omega_c$$

- 频域抽样 ⟶ 造成时域函数的周期延拓，周期为

$$\boxed{N \geq M}$$

2. 用有限长序列的X(k)表示X(z)

由傅立叶反变换公式 $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$

代入Z变换定义式得

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)Z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(W_N^{-k}z^{-1})^n\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\frac{1}{N}\frac{1-(W_N^{-k}z^{-1})^N}{1-W_N^{-k}z^{-1}}\right]$$

因为 $W_N^{-kN}=e^{j\frac{2\pi}{N}kN}=1$

所以 $$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}\right]$$

令

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$ 称为内插函数

则

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z)$$ X(z)的内插公式

X(z)的内插公式

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z)$$

说明:由N点X(k)可内插恢复X(z).

即已知X(k)时,可根据内插公式求任意Z点的X(z).

因为X(z)的N个采样点X(k),包含了X(z)的全部信息.

自学例3.3.1

3.4　离散傅里叶变换的应用

- 用DFT计算线性卷积
- 用DFT对连续信号进行谱分析
- 用DFT对序列进行谱分析

3.4.1　用DFT计算线性卷积

设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是长度为L的有限长因果序列，它们的L点循环卷积为

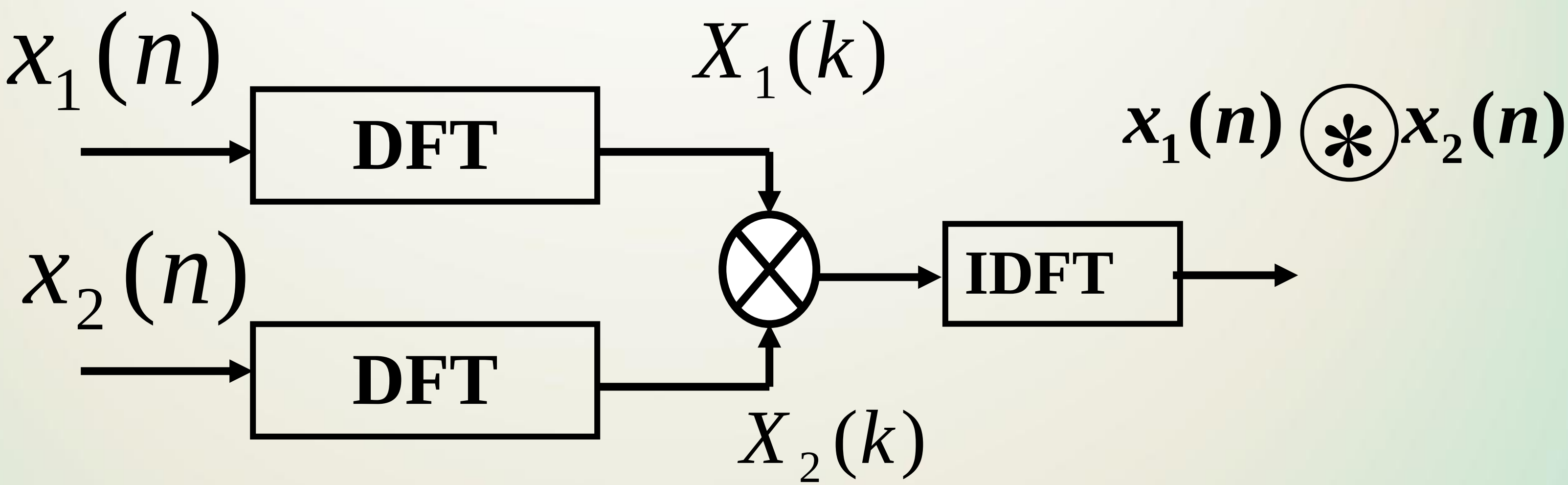
$$y(n)=x_1(n)\,ⓛ\,x_2(n)=\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)x_2((n-m))_L R_L(n)$$

且 $X_1(k)=DFT[x_1(n)]$　$X_2(k)=DFT[x_2(n)]$

由时域循环卷积定理有

$$Y(k)=DFT\left[y(n)\right]=X_1(k)\cdot X_2(k)\qquad 0\le k\le L-1$$

用DFT计算循环卷积方框图



$$x_1(n) \circledast x_2(n) = IDFT[X_1(k)X_2(k)], \quad 0 \le k \le L-1$$

用DFT计算循环卷积方框图

理由：DFT运算存在快速算法（FFT）。

循环卷积与线性卷积相等的条件

- 条件：

两个长度分别为N和M的序列，其线性卷积可用L点循环卷积来代替，但必满足条件

$$L \geqslant N+M-1$$

下面证明该条件。

有限长序列存在两种形式的卷积

线性卷积：实际系统的输出y(n)=x(n)*h(n)

循环卷积：与DFT相对应，有快速算法

问题： 如何用循环卷积代替线性卷积？

设h(n)和x(n)都是有限长序列，长度分别为N和M。

$$y_l(n) = h(n) * x(n)$$

长度为N+M -1的有限长序列

$$y_c(n) = h(n) \ L \ x(n)$$

L>=max[N,M]

将h(n)和x (n)均视为长度为L的有限长序列

循环卷积　和线性卷积　的关系

设h(n)和x(n)都是有限长序列，长度分别为N和M。

$$y_l(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

$$y_c(n) = h(n) \; L \; x(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

其中，L>=max[N, M]，　$x((n))_L = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n+qL)$

所以，$\boxed{y_c(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n-m+qL) R_L(n)}$

$$y_c(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)\sum_{q=-\infty}^{\infty}x(n-m+qL)R_L(n)$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n+qL-m)R_L(n)$$

对照式 $y_l(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)$

可知， $\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n+qL-m)=y_l(n+qL)$

即 $$y_c(n)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}y_l(n+qL)R_L(n)$$

循环卷积 $y_c(n)$ 和线性卷积 $y_l(n)$ 的关系

经推导

$$y_c(n)=\sum_{q=-\infty}^{\infty} y_l(n+qL)R_L(n)$$

可见 $y_c(n)$ 是 $y_l(n)$ 以 L 为周期，进行延拓后，在 0～L-1 范围内所取的主值序列。

若 $L \geq N+M-1$

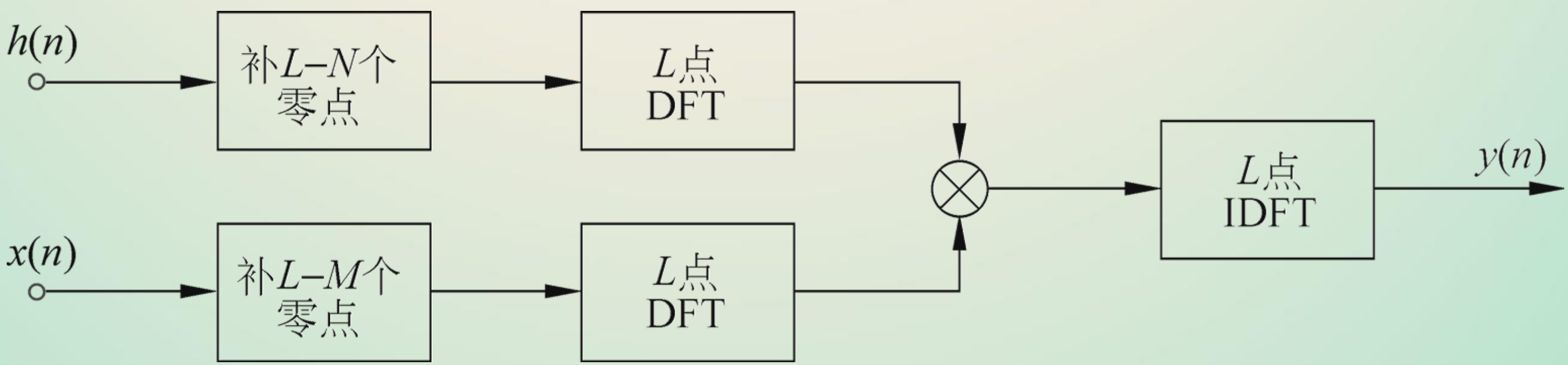
则 $y_c(n)=y_l(n)$

$$y_c(n)=\sum_{q=-\infty}^{\infty} y_l(n+qL)R_L(n)$$

说明：

$y_c(n)$是$y_l(n)$以L为周期的周期延拓序列的主值序列。

由于卷积$y_1(n)$的长度为$N+M-1$，因此当循环卷积的长度$L\geq N+M-1$时，以L为周期的周期延拓才不会出现混叠现象，此时取主值序列显然满足$y_c(n)=y_l(n)$ 。

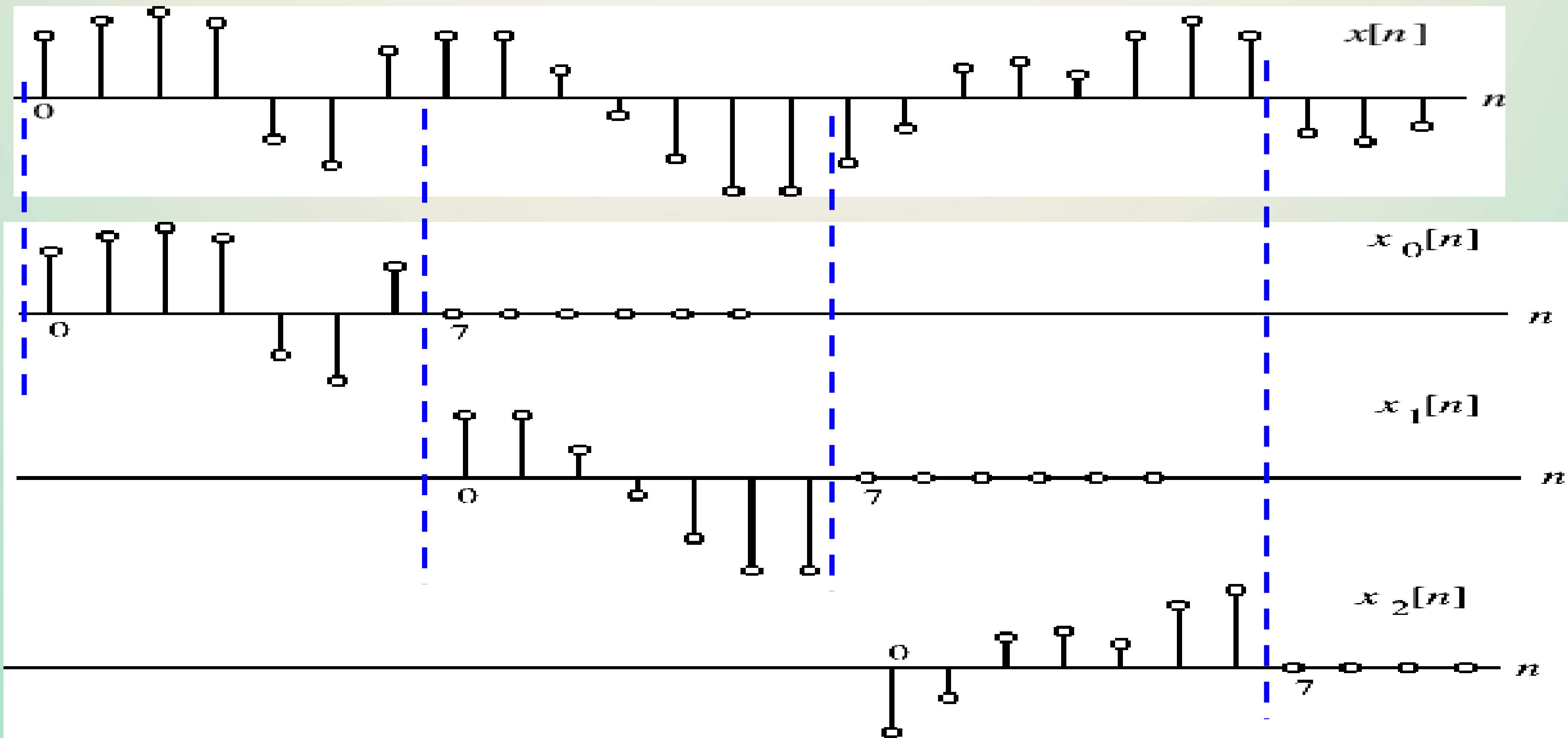


用**DFT**计算线性卷积的原理框图（ $L\geq N+M-1$)

两个序列的长度相差很大的情况

设序列$h(n)$长度为N，$x(n)$为无限长序列。将$x(n)$等长分段，每段长度取M，则

$$x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(n) \qquad x_k(n)=x(n)R_M(n-kM)$$



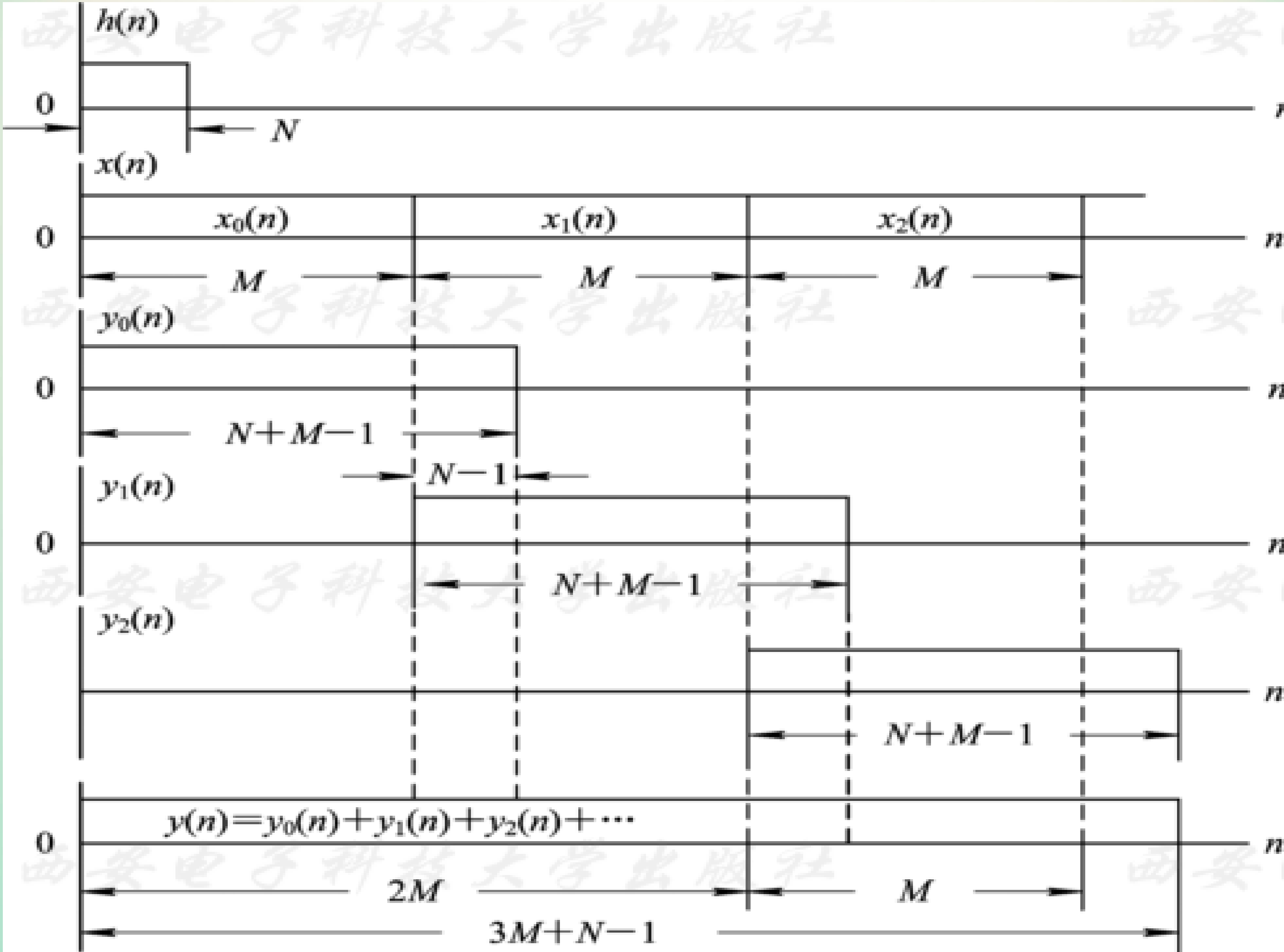
两个序列的长度相差很大的情况

$h(n)$与$x(n)$的线性卷积可表示为

$$y(n)=h(n)*x(n)=h(n)*\sum_{k=0}^{\infty}x_k(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n)*x_k(n)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k(n)$$

式中 $y_k(n)=h(n)*x_k(n)$

说明：计算$h(n)$与$x(n)$的线性卷积时，可先计算分段线性卷积$y_k(n)=h(n)*x_k(n)$，然后把分段卷积结果叠加起来即可，每一段卷积$y_k(n)$的长度为$N+M-1$，因此相邻分段卷积$y_k(n)$与$y_{k+1}(n)$有$N-1$个点重叠，必须把重叠部分的$y_k(n)$与$y_{k+1}(n)$相加，才能得到正确的卷积序列$y(n)$。所以，称之为重叠相加法。


h(n)
0
n
N
x(n)
x0(n)
x1(n)
x2(n)
M
M
M
y0(n)
N+M−1
N−1
y1(n)
N+M−1
y2(n)
N+M−1
y(n)=y0(n)+y1(n)+y2(n)+⋯
2M
M
3M+N−1

3.4.2　用DFT对信号进行谱分析

1. 用DFT对连续信号进行谱分析

2. 利用DFT 对序列进行谱分析

3. Chirp_z 变换

4. 用DFT进行谱分析的误差问题

3.4.2　用DFT对信号进行谱分析

1. 用DFT对连续信号进行谱分析

- **混迭现象**

带限信号的定义：

设 $f(t) \leftrightarrow F(j\Omega)$ ，且当 $|\Omega| \geq \Omega_c$ 时，有

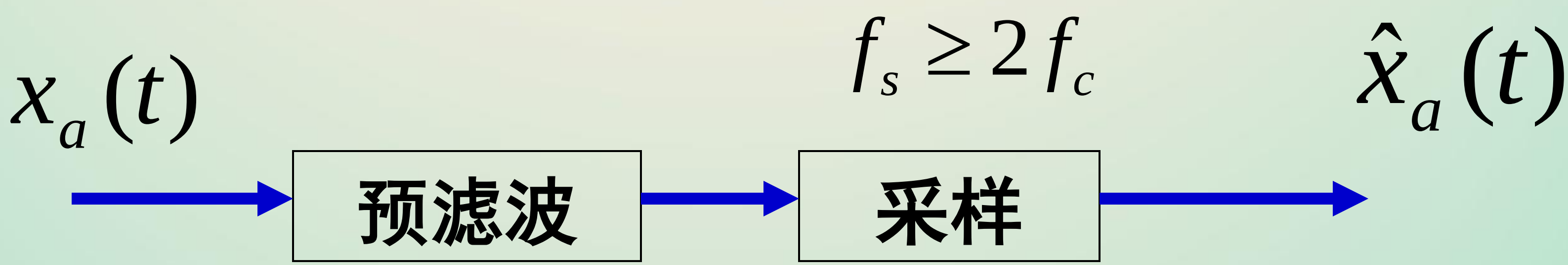
$F(j\Omega)=0$ ，则称f(t)为带宽为 Ω_c 的带限信号

时域内持续**无限长**的信号，其信号频带才是**有限的**，而时域内**有限长**的信号，其信号的频宽是**无限的**。

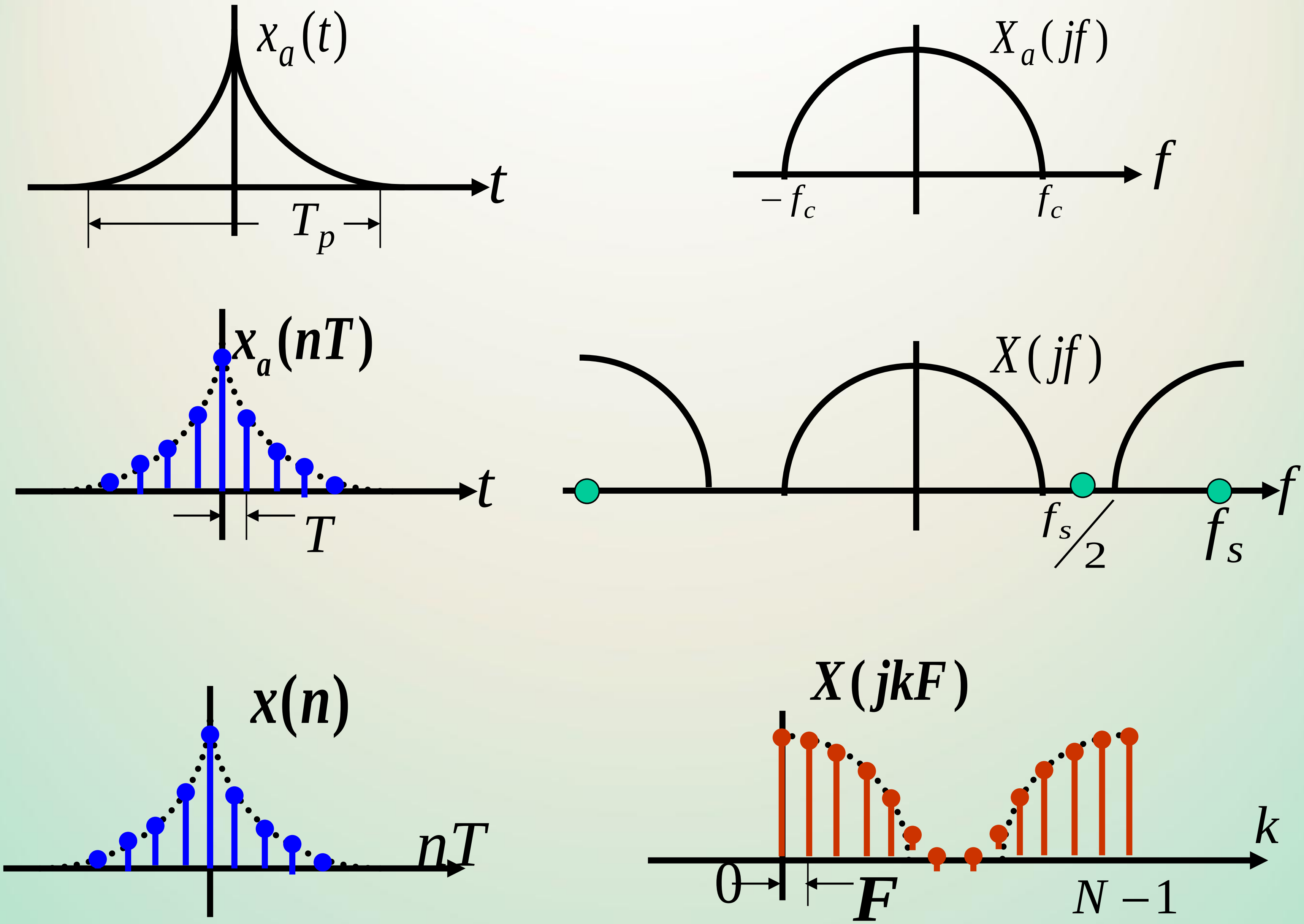
混迭现象的消除

实际中的信号持续时间都是有限的，因此频带无限宽，再高的采样频率也不能满足抽样定理，总要产生频谱混迭现象。

为使时域有限长信号满足采样定理，在采样之前需先对信号进行预滤波，将其频谱限制在一定范围内，然后再进行采样。



连续信号的采样过程


$x_a(t)$
t
T_p
$X_a(jf)$
f
$-f_c$
f_c
$x_a(nT)$
t
T
$X(jf)$
f
$f_s/2$
f_s
$x(n)$
nT
$X(jkF)$
k
0
F
$N-1$

设连续时间信号 $x_a(t)$持续时间为T_P，最高频率为 f_c 。

$$X_a(jf)=FT[x_a(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

对 $x_a(t)$ 以采样间隔T采样，得 $x(n)=x_a(nT)$，设共采样N点。

$$X(jf)=T\sum_{n=0}^{N-1}x_a(nT)e^{-j2\pi fnT}$$

对 $X(jf)$ 在区间（0，f_s）上等间隔采样N点，采样间隔为F。

$$F=\frac{f_s}{N}=\frac{1}{NT}=\frac{1}{T_P},\qquad T_p=\frac{1}{F}$$

将f=kF代入X(jf),

$$X(jkF) = T\sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT)e^{-j2\pi kFnT}$$

$$= T\sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

设 $x(n) = x_a(nT)$ ，则

$$X(jkF) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = T \bullet DFT[x(n)]$$

DFT参数的选择

为了避免时域抽样造成的频谱混迭，要求

$$f_s \geq 2f_c (T \leq 1/2f_c)$$

根据需要确定频率分辨率F

频率分辨率F：

频域中能辨认的频率。

即频域抽样中两相邻点间的频率间隔,

F越小，频率分辨率越高，F确定后可计算采样点数N。

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}, \quad T_p = \frac{1}{F}$$

时间函数周期（数据长度）

f_c 与 F之间的矛盾关系

f_c增加 T减少　f_s 增加 $\xrightarrow{N一定}$ F增加

F 减少 T_p 增加 $\xrightarrow{N一定}$ T增加 f_c 减少

当给定 f_c 和 F 时，N和T_p可以依下式选择：

$$N = \frac{f_s(\geq 2f_c)}{F} \geq 2f_c / F, \quad T_p \geq \frac{1}{F}$$

例3.4.1

已知 $F \le 10Hz, f_c = 2.5kHz$

求（1）$T_{p\min}, T_{\max}, N_{\min}$

（2）当 f_c 不变，F增加一倍时 $N_{\min}, T_{p\min}$

解：$\because T_p \ge \dfrac{1}{F} = 0.1s, \therefore T_{p\min} = 0.1s$

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_c} = 0.2\times10^{-3}s$$

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{F} = 500$$

例3.4.1（续）

（2） 当 f_c 不变， F增加一倍时

为使分辨率提高一倍

F=10/2=5Hz

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2\times 2500}{5} = 1000$$

$$T_{p\min} = \frac{1}{5} = 0.2s$$

3.4.2 用DFT对信号进行谱分析

2. 用DFT对序列进行谱分析

- 有限长序列 $x(n)$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

- 周期序列 $\tilde{x}(n)$

$$X(k) = DFT[\tilde{x}(n) R_N(n)] = \tilde{X}(k) R_N(n)$$

3.4.2 用DFT对信号进行谱分析

3.线性调频Z变换（Chirp-Z变换）

用DFT对序列进行谱分析，可以得到在区间[0，2π]上对序列单位圆上的Z变换的等间隔采样，即X(k)可以代表x(n)的频谱结构。

但在很多实际应用中，有时只需分析某一段频带的频谱，有时需要知道系统的极点对应的频率。

解决上述问题可以采用螺线抽样，可以用FFT快速计算。

3.线性调频Z变换（Chirp-Z变换）

算法原理

已知 $x(n), 0 \le n \le N$ 是有限长序列，

则 $$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

为了让Z沿Z平面的一段螺线作等分角抽样，Z的这些抽样点Z_K为

$$z_k = AW^{-k}, 0 \le k \le M-1$$

M为要分析的复频谱的点数，不一定等于N。

CZT的算法原理

$$z_k = AW^{-k}, 0 \le k \le M-1$$

其中，A, W都是任意复数，可表示为

$$A = A_0 e^{j\theta_0}, W = W_0 e^{-j\varphi_0}$$

则 $$\boxed{z_k = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\varphi_0)}}$$

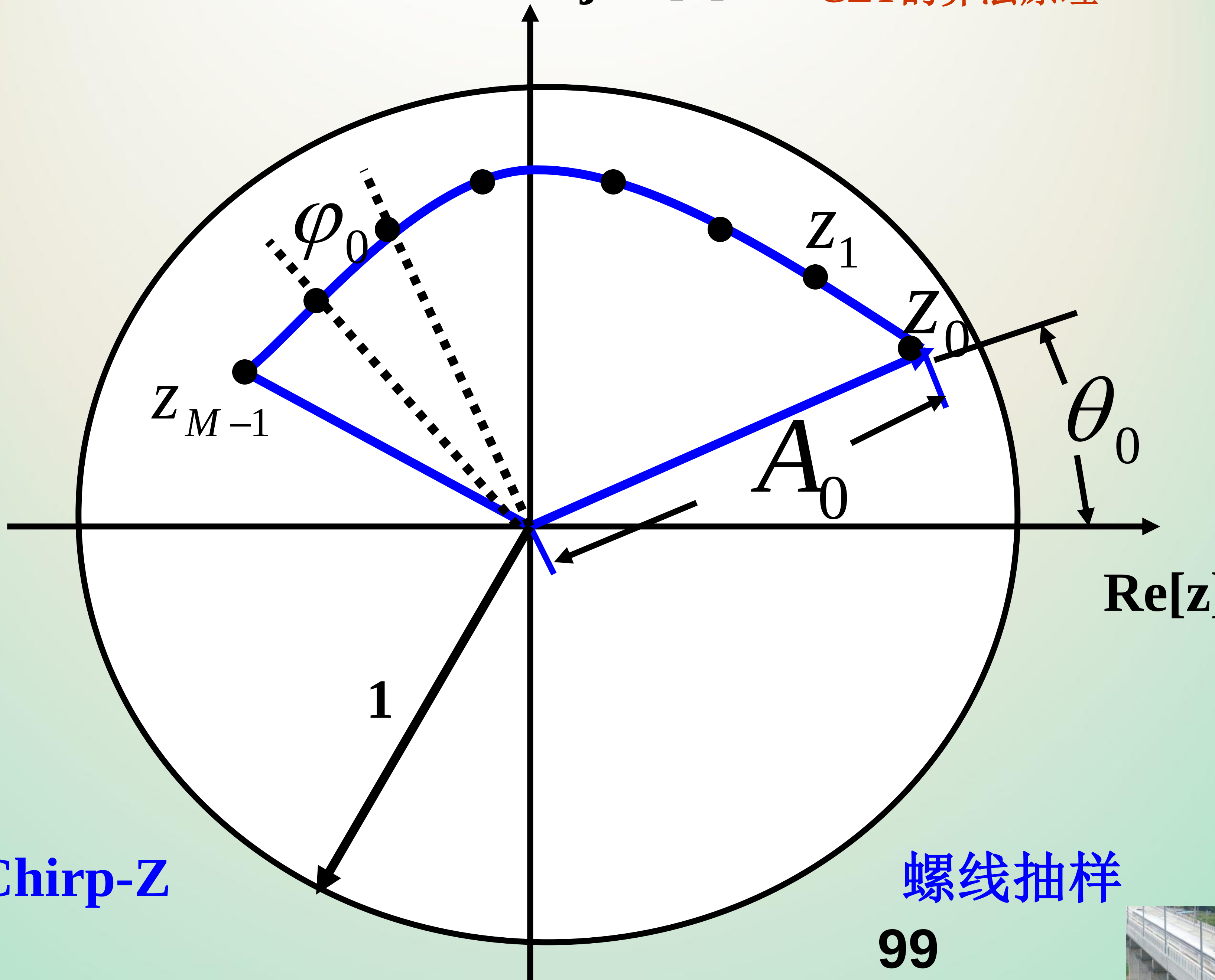
所以：

$$z_0 = A_0 e^{j\theta_0}, z_1 = A_0 W^{-1} e^{j(\theta_0+\varphi_0)}, \cdots$$

$$z_{M-1} = A_0 W^{-(M-1)} e^{j(\theta_0+(M-1)\varphi_0)}$$

CZT的算法原理

CZT的算法原理



Chirp-Z

螺线抽样

其中

$A_0 \le 1$ 起始抽样点z_0的 矢量半径，

θ_0 起始点的相角，可正，可负

φ_0 抽样间隔，相邻抽样点之间的角度差

W_0 螺线的伸展率　　$W_0 > 1$时，螺线内缩

$W_0 < 1$时，螺线外伸　　$W_0 = 1$时，半径为A_0的圆弧

当 $M = N, A = 1, W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 时，即为序列的DFT

将z_k代入Z变换表达式中

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z_k^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk}$$

$$0\le k\le M-1$$

因为 $nk=\frac{1}{2}[n^2+k^2-(k-n)^2]$　　布鲁斯坦等式

所以

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}W^{\frac{k^2}{2}}$$

进一步整理得

$$X(z_k)=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}[x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}]W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

令

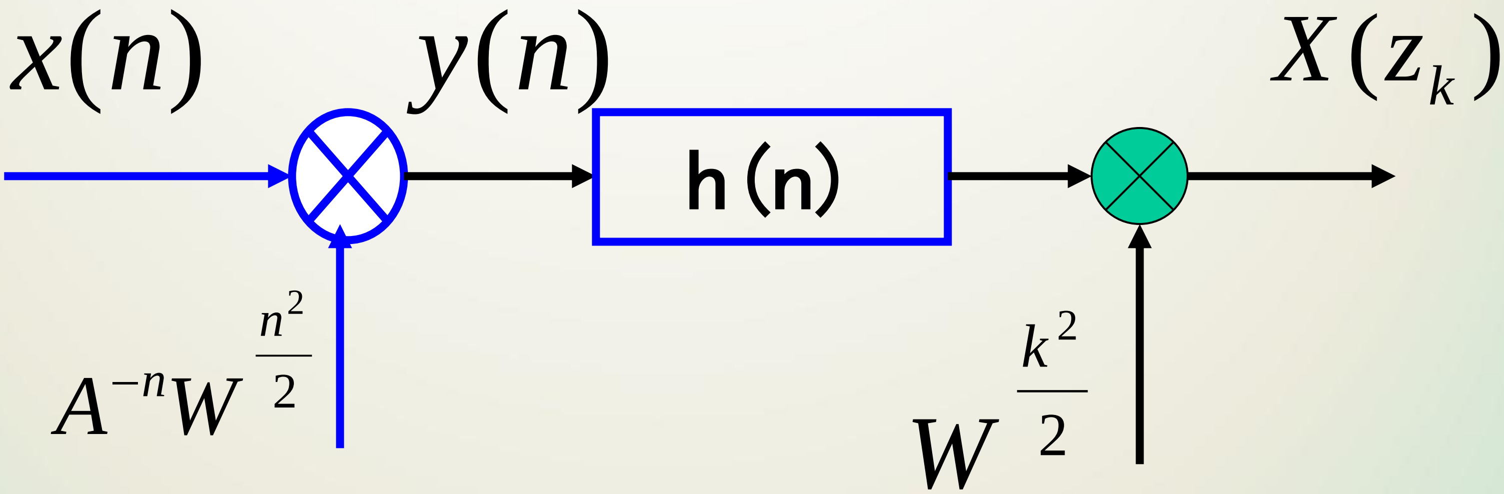
$$y(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}} \qquad h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}$$

则

$$X(z_k)=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}y(n)h(k-n)$$

$$=W^{\frac{k^2}{2}}[y(k)*h(k)],0\le k\le M-1$$

CZT的线性滤波计算步骤



$\boldsymbol{h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}}$ 为频率随时间增长的复指数序列。

在雷达系统中，这种信号称为线性调频信号，并

用专用词汇Chirp表示，故以上变换称为线性调频Z变换(CZT)。

用DFT计算CZT的原理

因为　h(n)是以n=0偶对称的无穷长的序列，y(n)是N点序列，

所以　h(n)与y(n)的卷积为无限长序列

然而　仅需分析M点的频谱，且希望用FFT计算。

因此　需要对h(n)和y(n)的长度作处理

CZT的实现步骤

1. 选择一个最小的整数L，使其满足

$$L \geq N + M - 1 \text{ 同时满足 } L = 2^m$$

2. 形成L点序列h(n)，并求H(k)

3. 将y(n)变为长度为L点的序列，并求Y(k)

4. 计算 $y(k) \bullet H(k)$

5. 计算 $V(n) = IDFT[Y(k)H(k)], 0 \leq n \leq L - i$

其中，前M个值等于h(n)与y(n)的线性卷积

6. 计算 $X(z_k) = W^{\frac{k^2}{2}} V(k), 0 \leq k \leq M - 1$

CZT的特点

- 算法灵活，输入序列的长度N和输出序列的长度不需要相等，且两者均可为素数。
- 频率分辨率是任意的，可进行窄带高分辨率的谱分析
- 谱分析路径可以是螺旋形的。
- 当 $A=1, N=M, W=e^{j\frac{2\pi}{N}}$ 时，

CZT就是DFT，因此，DFT是CZT的特例

3.4.2 用DFT对信号进行谱分析

4. 用DFT进行谱分析的误差问题

（1）混叠现象。 对连续信号进行谱分析时，首先要对其采样，变成时域离散信号后才能用DFT进行谱分析。

采样速率f_s必须满足采样定理，否则，

对于数字域频率，会在$\omega=\pi$附近发生频谱混叠现象；

对于模拟域频率，会在$f=f_s/2$附近发生频谱混叠现象

理论上必须满足：$f_s \geq 2f_c$ （f_c 是连续信号的最高频率）

实际应用中 ：$f_s=(3\text{~}5)f_c$ ；一般在采样前进行预滤波

（2）栅栏效应。N点DFT是在【0，2 π】上对离散信号的频谱进行N点等间隔采样，而采样点间的频谱函数值是不知道的。

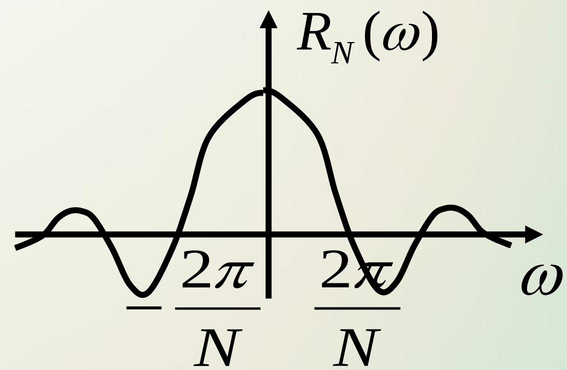
就像透过栅栏看频谱，仅得到N个缝隙中的频谱函数值

为了检出漏掉的某些大的频谱分量，可以采用在原序列尾部补零的方法，改变序列长度N，从而增加频域采样点数和采样点位置。

只要采样速率f_s足够高，且采样点数满足频率分辨率要求（ $N \geq 2f_c/F$ ）就可以认为所得的离散谱的包络近似代表原信号的频谱。

（3）截断效应。实际中遇到的序列x(n)可能无限长，用DFT进行谱分析时，必须截成有限长序列：

$$y(n)=x(n)\cdot R_N(n)$$



因为 $Y(e^{j\omega})=\dfrac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*R_N(e^{j\omega})$

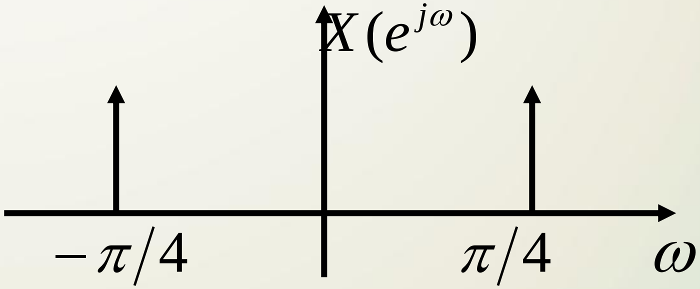
其中 $R_N(e^{j\omega})=FT[R_N(n)]$

$$=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}=R_N(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

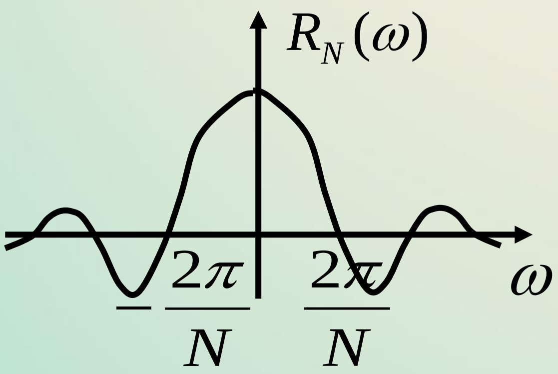
所以，截断后序列的频谱 $Y(e^{j\omega})$ 与原序列的频谱 $X(e^{j\omega})$ 必然有差别，称为截断效应。

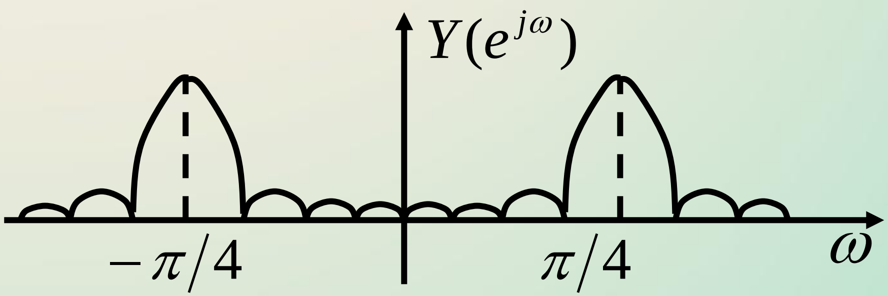
例如， $x(n)=\cos(\frac{\pi}{4}n)$ $\quad$ $y(n)=\cos(\frac{\pi}{4}n)R_N(n)$

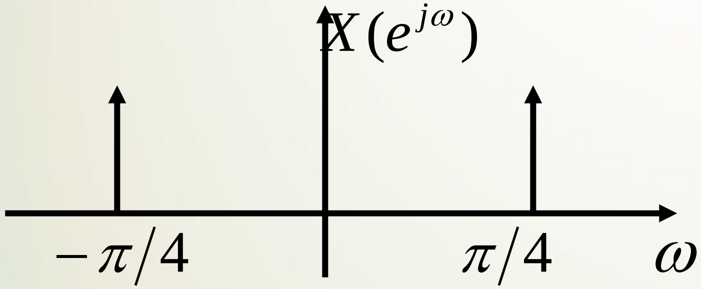
二者的幅频曲线如图

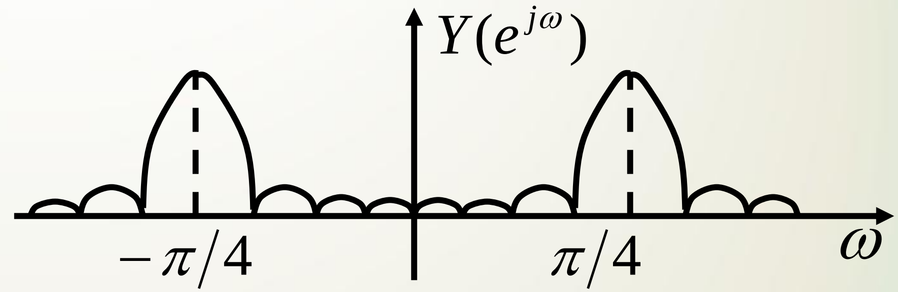


$$\boldsymbol{Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*R_N(e^{j\omega})}$$









截断效应对谱分析的影响主要表现在两个方面：

1. 泄漏。使原来的离散谱线向附近展宽。泄漏使频谱变模糊，谱分辨率降低。

2. 谱间干扰。在主谱线两边形成很多旁瓣，引起不同频率分量间的干扰，影响频谱分辨率。

强信号谱的旁瓣可能湮没弱信号的主谱线；或把强信号谱的旁瓣误认为另一信号的谱线 ，从而造成假信号。

作业：

书写题：1：（2），（3），（7）

3, 11，12，14, 15，18

实验：第十章的实验二，双面打印，抄袭为零分。