

第二章 时域离散信号和系统的频域分析

主要内容:

§ 2.1 引言

§ 2.2 序列的傅立叶变换

§ 2.3 周期序列的离散傅立叶级数及傅立叶变换

§ 2.4 离散信号的傅立叶变换与模拟信号傅立叶变换关系

§ 2.5 序列的 Z 变换

§ 2.6 利用 Z 变换分析信号和系统的频域特性



2.2 离散时间信号傅立叶变换

Discrete-Time Fourier Transform

- 2.2.1 定义

序列 $x[n]$ 的离散时间傅立叶变换 (**DTFT**) $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = IDFT[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$



- 例 因果指数序列 $x[n] = \alpha^n \mu[n]$, $|\alpha| < 1$

其DTFT 如下:

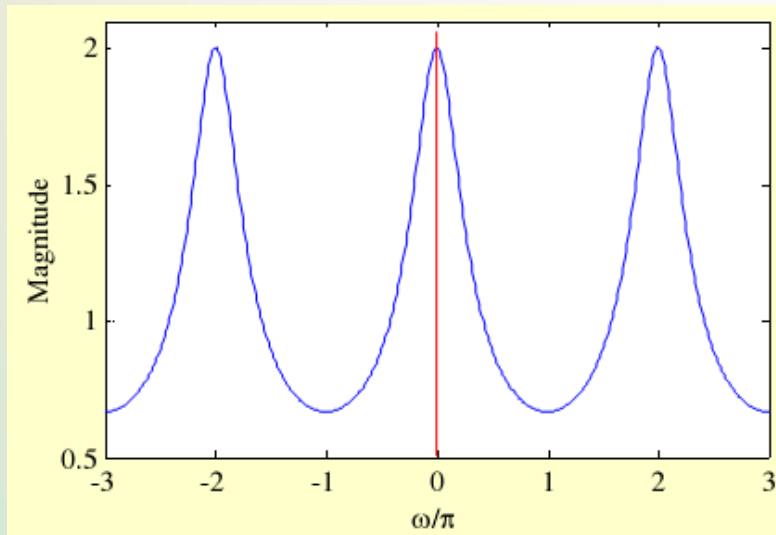
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n}$$

当 $|\alpha e^{-j\omega}| = |\alpha| < 1$

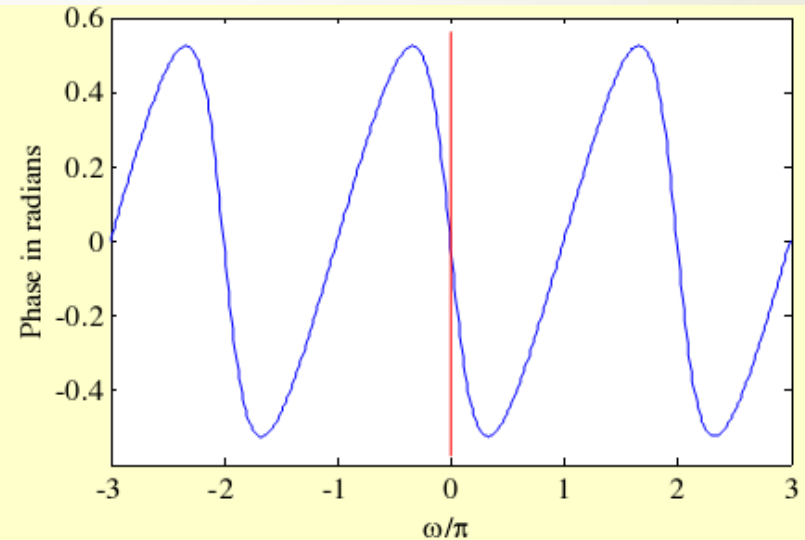
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$



- $X(e^{j\omega}) = 1/(1 - 0.5e^{-j\omega})$ 的幅度谱和相位谱



$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$



$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$

- $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续周期函数，周期是 2π

$$X(e^{j(\omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi k)n} = X(e^{j\omega})$$

• 2.2.2 序列傅立叶变换的性质

1. FT的周期性

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

M取整数

由上式可知，序列的傅立叶变换是 ω 的周期函数，周期为 2π 。



2. FT的线性

若 $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$

$$X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)]$$

则

$$FT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$



3. 时移与频移性质

设

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$$

则:

$$FT[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$



4 对称关系 (Symmetry Relations)

1. 复序列

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

则

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$$

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{j\omega})$$



4. 序列 FT 的对称性

准备知识:

A 共轭对称序列:
$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

共轭对称序列（函数）实部是偶函数，虚部是奇函数。

B 共轭反对称序列:
$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

共轭反对称序列（函数）实部是奇函数，虚部是偶函数。



C 一般序列 $x(n)$ 可分解为共轭对称分量和反共轭对称分量组成，即：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

式中

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

对于频域函数 $X(e^{j\omega})$ ，也有同上面类似的概念和结论。



傅立叶变换的对称性表现为

$$(1) \quad x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

则

$$X_e(e^{j\omega}) = FT[x_r(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)e^{-j\omega n}$$

$$X_o(e^{j\omega}) = FT[jx_i(n)] = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(n)e^{-j\omega n}$$



4. 序列 FT 的对称性

一般序列**实部**对应的**傅立叶变换**具有**共轭对称**性质，
虚部（包括j）对应的**傅立叶变换**具有**共轭反对称**性质

结论：**实序列的傅立叶变换具有共轭对称性，**
虚数序列的傅立叶变换具有共轭反对称性



4. 序列 FT 的对称性

$$(2) \quad x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

式中

$$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = X_R[e^{j\omega}] = FT[x_e(n)]$$

$$j\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = jX_I[e^{j\omega}] = FT[x_o(n)]$$

结论： 序列的共轭对称部分 $x_e(n)$ 的傅立叶变换是 $X(e^{j\omega})$ 的实部。

序列的共轭反对称部分 $x_o(n)$ 的傅立叶变换是 $X(e^{j\omega})$ 的虚部。



5. 时域卷积定理

设 $y(n) = x(n) * h(n)$

则: $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$

6. 频域卷积定理

设 $y(n) = x(n) \cdot h(n)$

则: $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



7. 帕斯维尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

其中 $|X(e^{j\omega})|^2$ 称为 $x(n)$ 的能量密度谱

信号的时域总能量等于频域的总能量



2.3 周期序列的离散傅立叶级数及傅立叶变换

一、周期序列的离散傅立叶级数

- 设 $\tilde{x}(n)$ 是以N为周期的周期序列，将其展成傅立叶级数，得

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

式中 a_k 是傅立叶级数的系数。

为求 a_k ，将上式两边乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ ，并对n在一个周期N中求和。



推导过程:

§ 2.3 周期序列的离散傅立叶级数

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}nm}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

正交函数集的条件

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

所以

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, -\infty < k < \infty$$

因为 $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n}$, 其中 l 是整数。

是周期为 N 的周期函数, 所以 $a_k = a_{k+lN}$

也是周期为 N 的周期函数。

设 $\tilde{X}(k) = Na_k$ 则: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, -\infty < k < \infty$

将上式两边乘以 $e^{j\frac{2\pi}{N}kl}$, 并对 k 在一个周期 N 中求和:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kl} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kl}$$



$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kl} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kl}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(l-n)k}$$

所以

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$



离散周期序列的傅立叶级数 DFS

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & -\infty < k < \infty \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & -\infty < n < \infty \end{cases}$$

DFS 在时域和频域都是周期的且是离散的。

只要知道周期序列的一个周期的内容，则该序列的全部内容也就都知道了。



连续傅立叶级数与离散傅立叶级数的比较

连续傅立叶级数的基波成分为 $e^{j\Omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{T})t}$

k次谐波成分有无穷多个

$$e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

• 离散傅立叶级数的基波成分为 $e^{j\omega_0 n} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$

k次谐波成分只有N个独立分量

$$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$



§ 2.4 离散信号 与模拟信号傅立叶变换之间的关系

模拟信号 $x_a(t)$ 的一对傅立叶变换式为：

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$x(n)$ 的傅立叶变换式为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$



§ 2.4 离散信号 与模拟信号傅立叶变换之间的关系

采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 是对 $x_a(t)$ 采样得到的，采样周期为 T ：

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$$

采样信号的傅立叶变换与连续信号的傅立叶变换之间的关系满足采样定理

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$



§ 2.4 离散信号 与模拟信号傅立叶变换之间的关系

若离散信号 $x(n)$ 是对 $x_a(t)$ 采样产生的,

在数值上有: $x(n) = x_a(nT)$

$x(n)$ 的傅立叶变换式为:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

那么, $X(e^{j\omega})$ 与 $X_a(j\Omega)$ 之间有什么关系?

数字域频率 ω 与模拟域频率 Ω (或 f) 之间有什么关系?



已知 $\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$

对上式进行傅里叶变换，得：

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT}\end{aligned}$$



令： $\omega = \Omega T$ ， 且 $x(n) = x_a(nT)$

得： $X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega)$

或写成

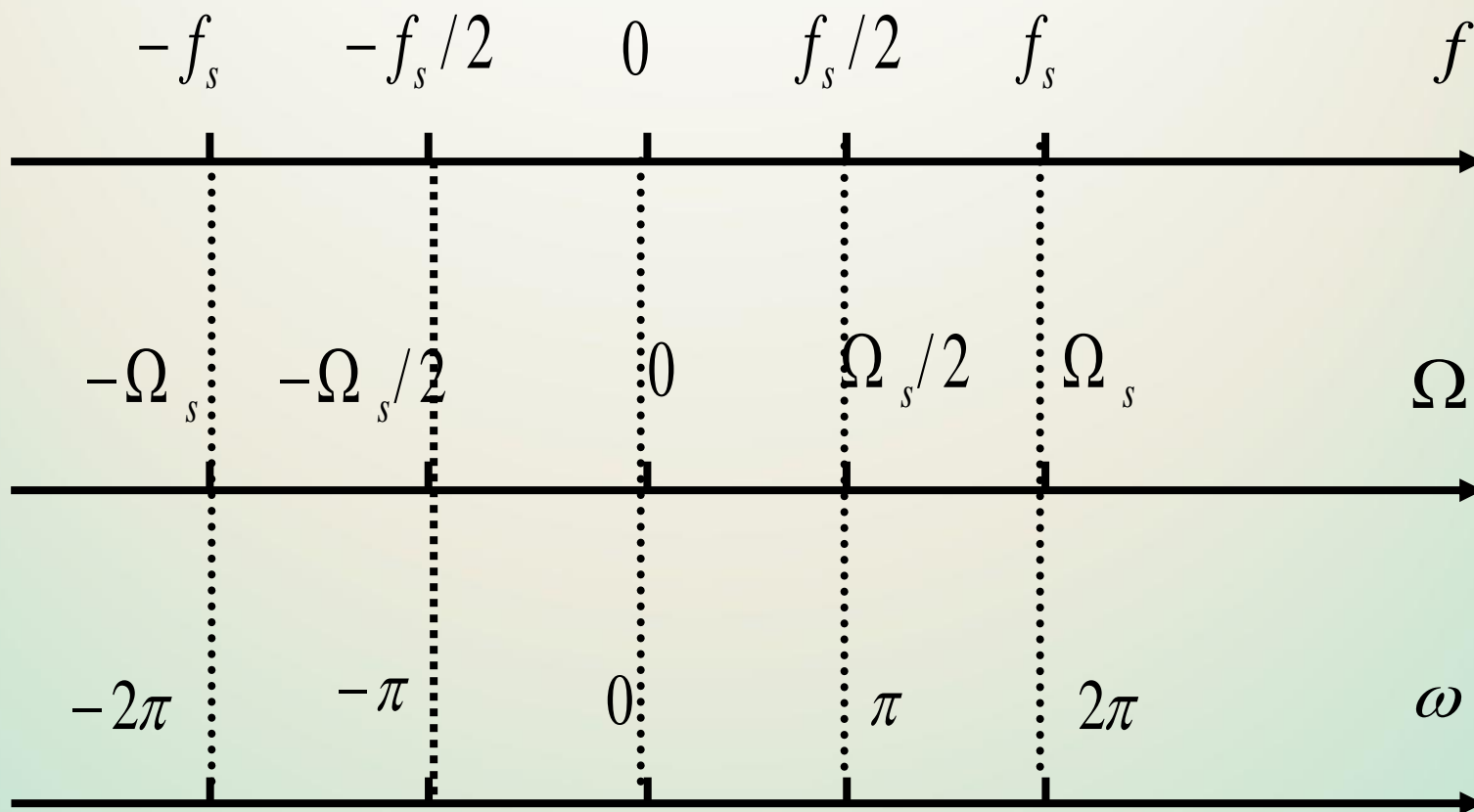
$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

也可写成

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j \frac{\omega - 2k\pi}{T})$$



模拟频率和数字频率之间的定标关系(数字频率中高频低频的概念)



§ 2.5 序列的 Z 变换

一、Z变换定义

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

二、Z变换的收敛域

1、定义 对任意给定的有界序列 $x(n)$ ，使其Z变换式收敛的所有 z 值的集合，称为Z变换 $X(z)$ 的收敛域

2、级数收敛的充分必要条件为

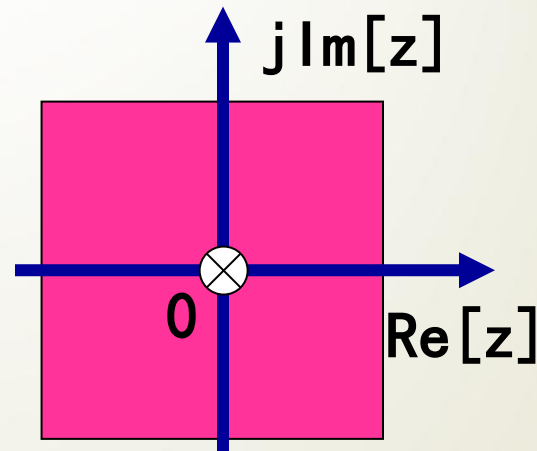
$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n) z^{-n}| < \infty$$



§ 2.5 序列的 Z 变换

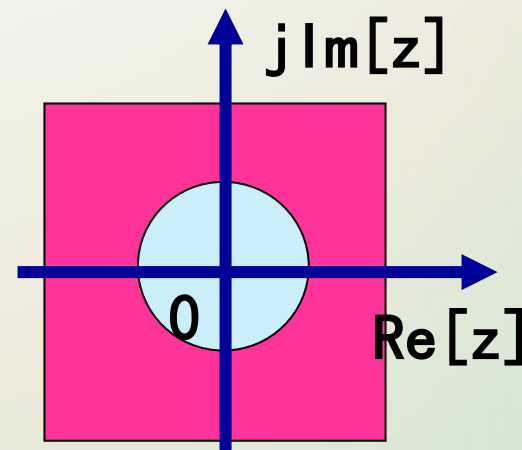
有限长序列 收敛域为：

$$0 < |z| < \infty$$



右边序列 收敛域为：

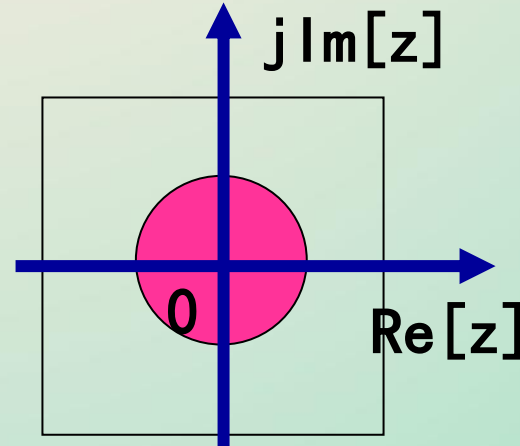
$$R_{x1} < |z| < \infty$$



因果序列是一种特殊的右边序列，其 Z 变换收敛域包括 $|z| = \infty$

左边序列 收敛域为：

$$0 < |z| < R_{x2}$$

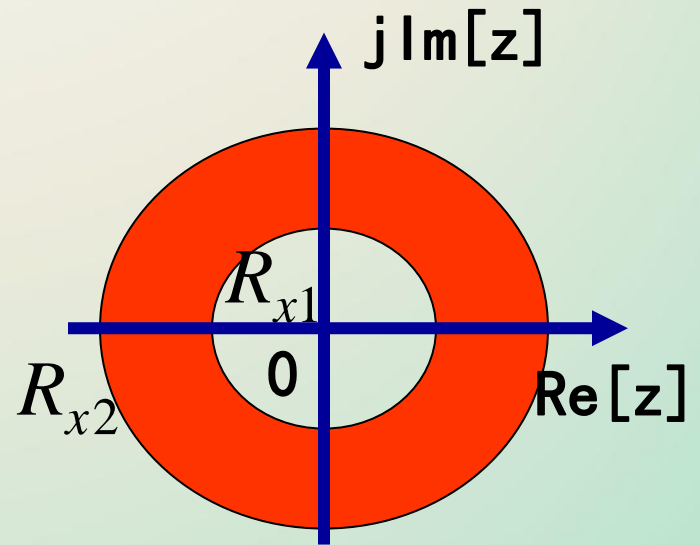


§ 2.5 序列的 Z 变换

双边序列:

如果 $R_{x1} < R_{x2}$ 则存在公共区域, 即

$$R_{x1} < |z| < R_{x2}$$



三、Z反变换

(一) 幂级数展开法 (长除法)

(二) 部分分式展开法

当 $X(z)$ 只含单极点

$$X(z) = A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - z_i}$$

$$A_0 = [X(z)]_{z=0} \quad A_i = \left[(z - z_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_i}$$

当 $X(z)$ 含有一 r 重极点

$$X(z) = A_0 + \sum_{j=1}^r \frac{B_j z}{(z - z_1)^j} + \sum_{i=r+1}^N \frac{A_i z}{z - z_i}$$

$$B_j = \frac{1}{(r-j)!} \left[\frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z - z_1)^r \frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_1}$$



(三)、留数法

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_i \text{Res} [X(z) z^{n-1}, z_i]$$

其中c是包围 $X(z) z^{n-1}$ 所有极点的闭合积分路线

z_i 是 $X(z) z^{n-1}$ 的极点

1、当 $z=z_i$ 是一阶极点时

$$\text{Res} [X(z) z^{n-1}, z_i] = \left[(z - z_i) X(z) z^{n-1} \right]_{z=z_i}$$

2、当 $z=z_i$ 是r阶极点时

$$\text{Res} [X(z) z^{n-1}, z_i] = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[(z - z_i)^r X(z) z^{n-1} \right] \right\}_{z=z_i}$$



四、Z变换性质

五、利用Z变换解差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k),$$

(一)、求稳态解

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$y(n) = Z^{-1} [Y(z)]$$



(二)、求暂态解 对差分方程作单边Z变换。

单边Z变换、移位序列单边Z变换公式为：

$$ZT[y(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

$$ZT[y(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[Y(z) + \sum_{k=-m}^{-1} y(k) z^{-k} \right]$$

所以，

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$



§ 2.6 利用Z变换分析信号和系统的频域特性

(一) 系统函数 $H(z)$ 与频率响应 $H(e^{j\omega})$

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$



(二) 系统的因果性和稳定性

1. 因果可实现系统：满足 $h(n)=0, n<0$ ，其Z变换的收敛域定包括 ∞ 点，收敛域是圆外的Z平面
2. 系统稳定：要求 单位函数响应绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

对照Z变换定义，

- (1) 若系统稳定， $H(z)$ 的收敛域包含单位圆；
- (2) 若 $H(z)$ 收敛域包含单位圆，系统一定稳定。



(三) 频率响应的物理意义

设输入序列

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad -\infty < n < \infty$$

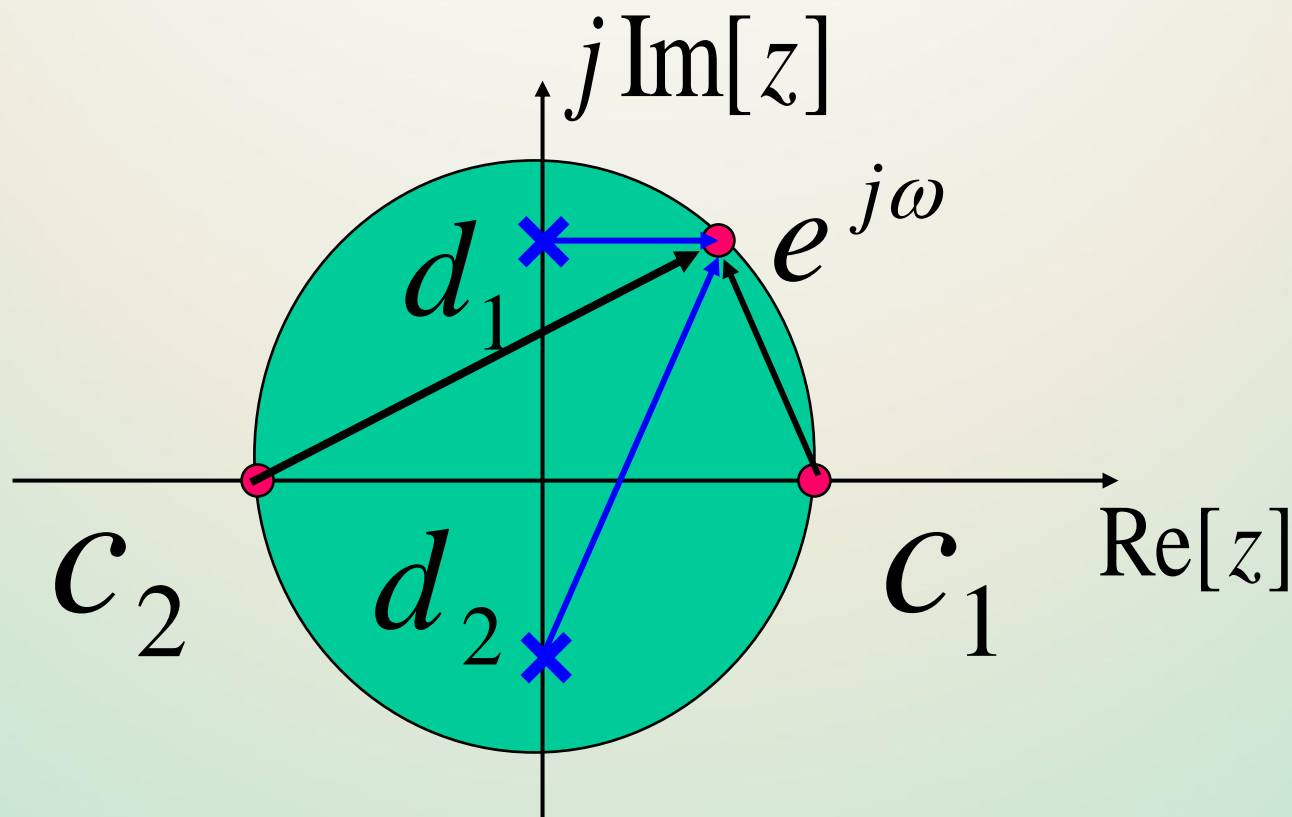
则

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j(n-m)\omega_0} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) \end{aligned}$$

它描述 复指数序列 通过线性时不变系统后,
复振幅的变化.



(四) 频率响应的几何确定法



§ 2.6 利用Z变换分析信号和系统的频域特性



相关matlab函数（课本65页）

- **freqz** 计算滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_M e^{-j\omega M}}{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_N e^{-j\omega N}}$$

比如，下面语句

$$H = \text{freqz}(B, A, w)$$

矢量 **B** 和 **A** 包含分子和分母的系数 $\{b_i\}$ 和 $\{a_i\}$ ，
矢量 **w** 是频率序列，范围0到 π



- 函数 `zplane` 可以用来画 $H(z)$ 的零极点图

`zplane(zeros, poles)`

其中 `zeros`, `poles` 分别是零点、极点列向量

`zplane(B, A)`

其中 `B`, `A` 分别是以 z 的降幂排列分子、分母系数行向量

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_M e^{-j\omega M}}{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_N e^{-j\omega N}}$$



例2.6.4 已知 $H(z) = 1 - z^{-N}$ ，定性画出系统的幅频特性。

解：

$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

零点： $z^N - 1 = 0$, $z^N = 1 = e^{j2\pi k}$

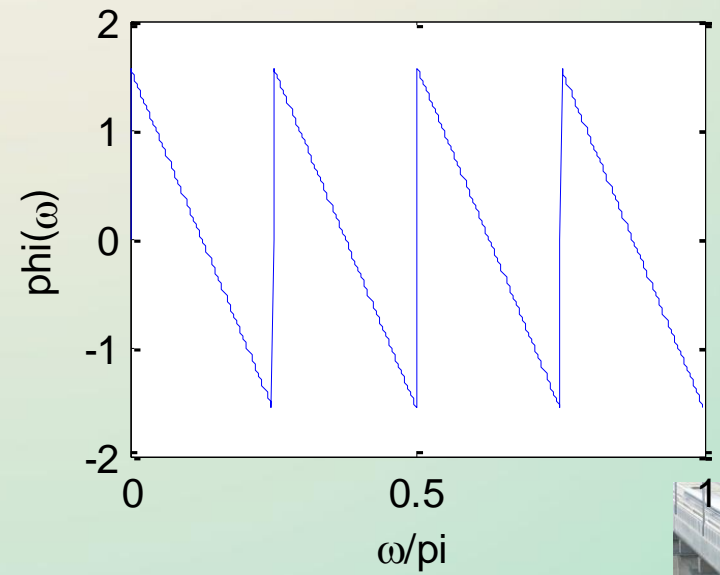
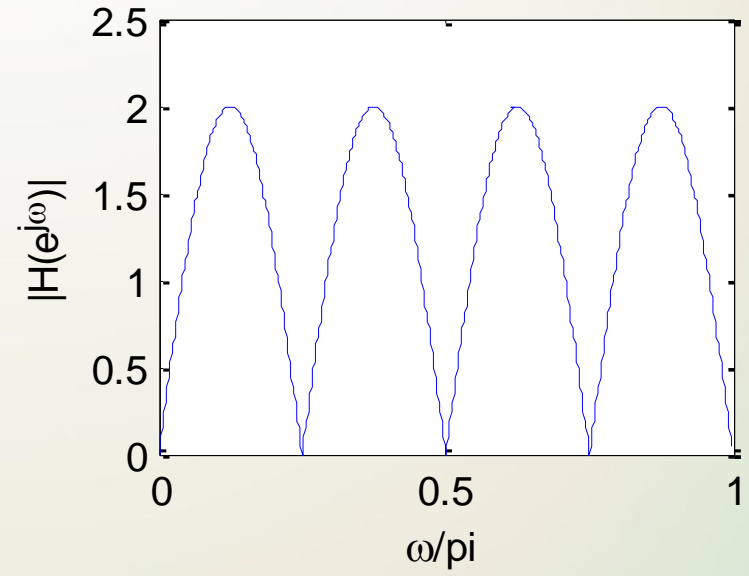
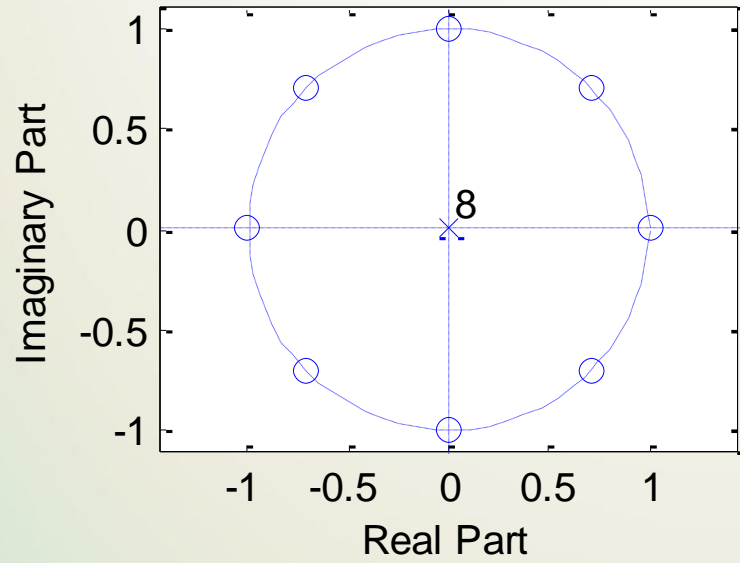
则有 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

极点： $z=0$, N 阶极点， 设 $N=8$



- $B=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1]$; $A=1$;
- `subplot(2,2,1);zplane(B,A);`
- `[H,w]=freqz(B,A);`
- `subplot(2,2,2);plot(w/pi,abs(H));`
- `xlabel('\omega/pi');`
- `ylabel('|H(e^{j\omega})|');`
- `axis([0, 1,0,2.5]);`
- `subplot(2,2,4);`
- `plot(w/pi,angle(H));`
- `xlabel('\omega/pi');`
- `ylabel('phi(\omega)');`





第二章作业

5、13、23、24、29

