

# 西南交通大学 2021—2022 学年第 1 学期半期测试卷

课程代码 MATH000812、ISCT010111 课程名称 高等数学 I 考试时间 90 分钟

注意：本试卷共 4 大题，17 小题。答案一律写在答题卡指定位置，在本试卷上作答视为无效。考试结束后将答题卡交回，本试卷自行留存。

## 一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 关于函数  $f(x)$  和  $|f(x)|$ ，以下说法正确的个数是（ ）个。

- (1) 当  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  极限存在的充要条件是当  $x \rightarrow x_0$  时  $|f(x)|$  极限存在
- (2) 当  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  为无穷小的充要条件是当  $x \rightarrow x_0$  时  $|f(x)|$  为无穷小
- (3)  $f(x)$  在点  $x_0$  连续的充要条件是  $|f(x)|$  在点  $x_0$  连续
- (4)  $f(x)$  在点  $x_0$  可导的充要条件是  $|f(x)|$  在点  $x_0$  可导

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. 已知  $x \rightarrow 0$  时  $(1+kx^3)^{\frac{1}{2}} - 1$  与  $\sin x - x$  是等价无穷小，则  $k =$ （ ）。

(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{3}{2}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $-\frac{1}{3}$

3. 设  $f(x)$  在  $x=0$  连续， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} =$ （ ）。

(A) 无穷大 (B) 2 (C) 1 (D) 0

4. 函数  $f(x) = \frac{x-x^3}{\tan x}$  的可去间断点的个数为（ ）。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷多个

5. 函数  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x^2)}$  在下列哪个区间上不满足罗尔中值定理条件（ ）。

(A)  $[-1, 1]$  (B)  $[0, 1]$  (C)  $[-1, 0]$  (D)  $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

6. 设函数  $f(x) = x \sin x + \cos x$ ，则（ ）。

(A)  $f(0)$  是极大值， $f(\frac{\pi}{2})$  是极小值 (B)  $f(0)$  和  $f(\frac{\pi}{2})$  都是极小值

(C)  $f(0)$  是极小值， $f(\frac{\pi}{2})$  是极大值 (D)  $f(0)$  和  $f(\frac{\pi}{2})$  都是极大值

## 二、填空题（每小题4分，共20分）

7. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+3n+1} + \frac{2}{n^2+3n+2} + \frac{3}{n^2+3n+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+3n+n} \right) =$  \_\_\_\_\_.
8. 已知  $y = f(e^{2x})$ ,  $f'(x) = \arccos(x-0.5)$ , 则  $y'|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.
9. 由参数方程  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} (a > 0)$  确定的函数的导数  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.
10. 方程  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  在  $[0, 1]$  上有 \_\_\_\_\_ 个实根.
11. 设函数  $f(x) = x^2 e^{2x}$ , 则  $f^{(6)}(0) =$  \_\_\_\_\_.

## 三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

12. 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$ .
13. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{\cos x}{x^2} \right)$ .
14. 已知  $y = \tan(\ln x) - \frac{\arctan x}{1+x^2}$ , 求  $dy$ .

## 四、解答题（15 题 10 分，16、17 题每题 11 分，共 32 分）

15. 求曲线  $x \sin y + e^{\frac{2y}{\pi}} = e$  在与  $y$  轴交点处的法线方程.
16. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x \leq 0 \\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性与可导性.
17. 设函数  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ , 讨论  $f(x)$  的单调区间, 曲线  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$  的凹、凸区间和拐点.

## 参考答案

### 一、选择题

1. B   2. D   3. C   4. D   5. A   6. C

### 二、填空题

7. 0.5      8.  $\frac{2\pi}{3}$       9.  $\tan t$       10. 1      11. 480

### 三、计算题

$$12. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{-\sqrt{2}}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{\cos x}{x^2} \right) = \frac{2}{3}.$$

$$14. dy = \left( \frac{\sec^2(\ln x)}{x} - \frac{1 - 2x \arctan x}{(1+x^2)^2} \right) dx.$$

### 四、解答题

$$15. \text{法线方程为: } y = \frac{2e}{\pi}x + \frac{\pi}{2}.$$

16. 函数在  $x=0$  处连续; 在  $x=0$  处不可导.

17. 在  $(-\infty, 1)$  上函数单调递增; 在  $(1, 3)$  上函数单调递减; 在  $(3, +\infty)$  上函数单调递增.

在  $(-\infty, 2)$  上曲线是凸的; 在  $(2, +\infty)$  上曲线是凹的; 拐点为  $(2, 6)$ .