第5讲 随机过程与白噪声

Dr. Li Hao
Email: lhao@home.swjtu.edu.cn
School of Information Science and Technology
Southwest Jiaotong University
2023 Autumn

第5讲 随机过程与白噪声

一、随机变量
1、概率分布函数与概率密度函数
2、集合平均与随机变量统计特性
3、高斯分布随机变量
二、随机过程
三、白噪声

1、概率分布函数与概率密度函数

- 对于随机变量X，累计分布函数（***cumulative distribution function***，CDF)为

$$P_X(x) \triangleq \Pr(X \le x)$$

- 性质:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ 0 \le P_X(x) \le 1 \\ 2.\ P_X(x_1) \le P_X(x_2), \text{ if } x_1 \le x_2 \\ 3.\ P_X(-\infty) = 0 \\ 4.\ P_X(\infty) = 1 \end{array}}$$

1、概率分布函数与概率密度函数

- 对于随机变量X，概率密度函数（***probability density function***，PDF) 为

$$p_X(x)=\frac{dP_x(x)}{dx}$$

$$\Pr\left(x_1\le X\le x_2\right)=\Pr\left(X\le x_2\right)-\Pr\left(X\le x_1\right)$$

$$=P_X\left(x_2\right)-P_X\left(x_1\right)=\int_{x_1}^{x_2}p_X(x)dx$$

$$\Pr\left(x\le X\le x+\Delta x\right)=\int_x^{x+\Delta x}p_X(x)dx\approx p_X(x)\Delta x$$

$$\Delta x\to 0,\qquad \Pr\left(X=x\right)=p_X(x)dx$$

- 性质

$$1.\ p_X(x)\ge 0$$

$$2.\ \int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)dx=1$$

2、集合平均与随机变量统计特性

- 【复习】时间平均算子

$$\overline{g(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt$$

- 随机变量X的期望值（*expected value*）或者集合平均（*ensemble average*）为

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

期望值

- 用来求取随机变量X的均值或者随机变量X某函数$Y=h(X)$的均值。

$$\mathrm{E}\left[Y\right]=\mathrm{E}\left[h(X)\right]\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}\left[h(X)\right]p_X(x)dx$$

- 如果X为离散分布的随机变量，则

$$\mathrm{E}\left[Y\right]=\mathrm{E}[h(X)]=\sum_{i=1}^{M}h(x_i)\,\mathrm{Pr}(x_i)$$

其中M为离散分布X取值的个数。

矩

- **矩:** 随机变量X的特殊函数的期望值。
- 随机变量X的关于值x_0的r阶中心矩为

$$\mathrm{E}\left[(X-x_0)^r\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^r p_X(x)dx$$

- 均值m_X：一阶原点矩(i.e. x_0=0)

$$m_X \triangleq \mathrm{E}[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx$$

- 均方值：二阶原点矩(i.e. x_0=0)

$$\mathrm{E}\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx$$

矩

- 方差 σ_x^2：关于均值的二阶中心矩(i.e. $x_0=m_X$)

$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}\left[X - m_X\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - m_X\right]^2 p_X(x)dx = E\left[X^2\right] - m_X^2$$

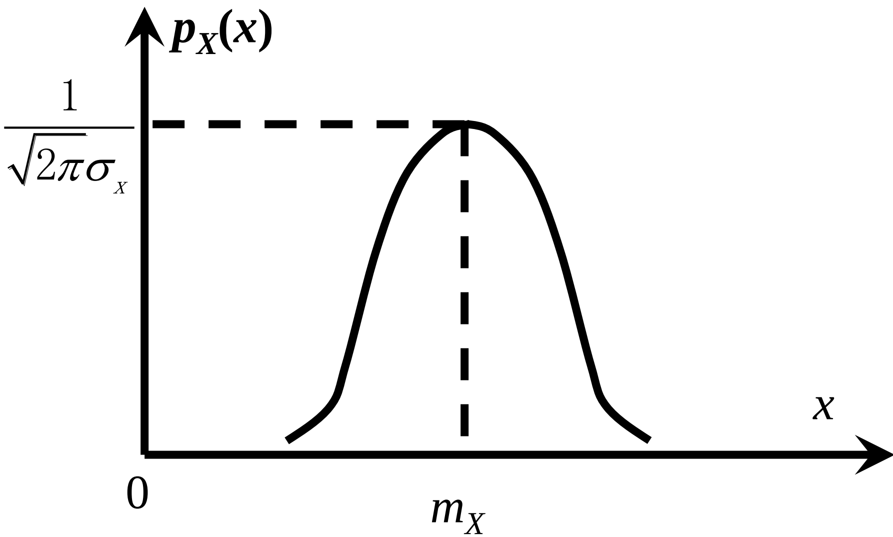
- 标准偏差σ_x：为方差的平方根

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left[x - \mathrm{E}(x)\right]^2 p_X(x)dx}$$

- 均方根值：均方值的平方根

$$\sqrt{\mathrm{E}\left[X^2\right]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx}$$

3、高斯分布随机变量



$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}exp\left[-\frac{(x\text{-}m_x)^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

$$P_X(m_X)=\frac{1}{2}, P_X(-\infty)=0, P_X(\infty)=1$$

- ✓ $p(x)$关于$x=m_X$对称
- ✓ $p(x)$在（$-\infty, m_X$）内单调上升，在（m_X,∞）内单调下降，且在m_X点最大。
- ✓ 对不同的m_X，表现为$p(x)$的左右平移
- ✓ 对不同的σ_X，$p(x)$图形随σ_X的减小而变高变窄

$$x\to\infty \text{或} x\to-\infty, p(x)\to 0$$

3、高斯分布随机变量

- 标准正态分布

$$m_X=0,\sigma_X^2=1\Rightarrow p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

- 概率积分函数
  - Definition

$$\mathrm{Q}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\infty e^{-y^2/2}dy$$

  - Q函数的主要性质
    - 均值为0，方差为1的高斯变量落到[α,+∞)区间内的概率
    - Q(0)=1/2;
    - Q(-α）=1-Q(α)，α>0;

3、高斯分布随机变量

- 误差函数

$$\operatorname{erf}(\beta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\beta} e^{-y^2}dy$$

- 补误差函数

$$\operatorname{erfc}(\beta)=1-erf(\beta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\beta}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

- 误差函数和概率积分函数的关系

$$\mathrm{Q}(\alpha)=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\operatorname{erfc}(\alpha)=2\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\alpha\right)$$

$$\operatorname{erf}(\alpha)=1-2\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\alpha\right)$$

3、高斯分布随机变量

- 误差函数和概率积分函数的关系

$$erf(\alpha)=1-2Q\left(\sqrt{2}\alpha\right)$$

$$Q(\alpha)=\frac{1}{2}erfc\left(\alpha/\sqrt{2}\right)$$

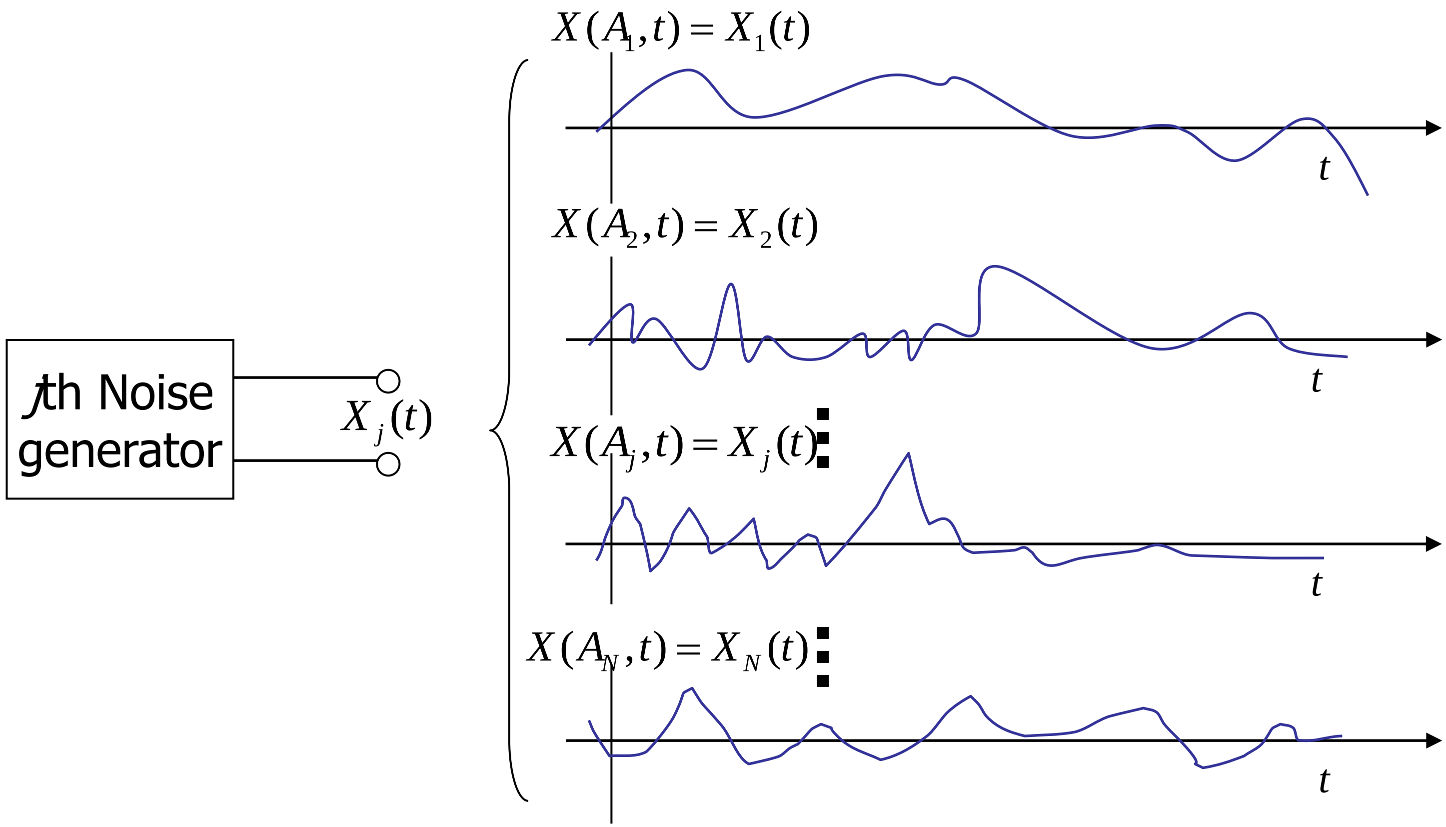
$$erfc(\alpha)=2Q\left(\sqrt{2}\alpha\right)$$

二、随机过程

1、概念与定义
2、平稳性与遍历性
3、相关函数与广义平稳
4、遍历随机过程的DC与RMS

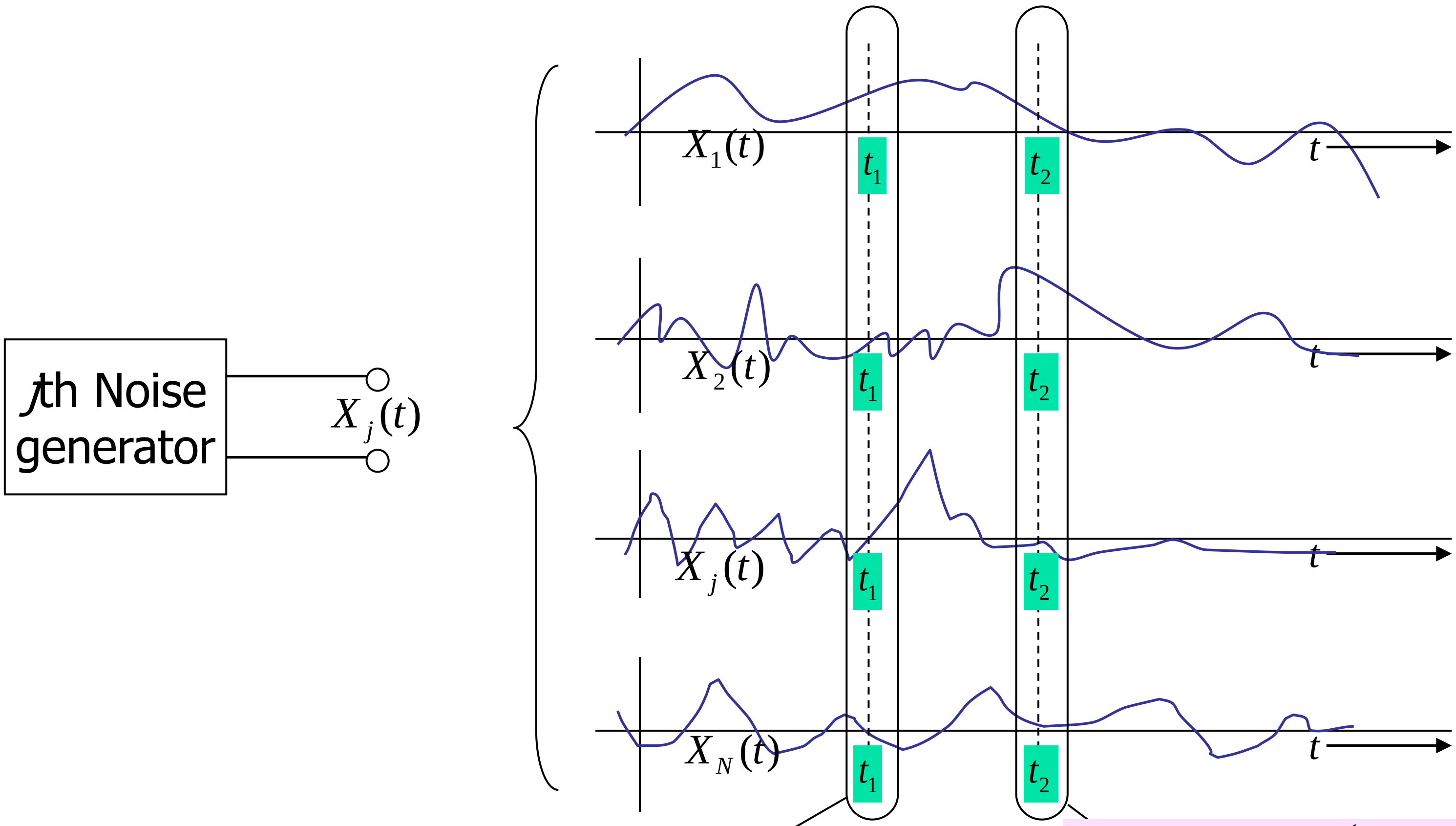
1、如何理解随机过程？

- 随机过程可以看成一系列关于某个参数（通常为时间）并具有一定统计特性的函数的集合。



1、如何理解随机过程?

- 随机过程可以看成是一系列随机变量的集合



$X(t_1) = X(\mathrm{A}, t_1) = \{\mathrm{X}(\mathrm{A}_j, \mathrm{t}_1), all\ j\}$

$X(t_2) = X(\mathrm{A}, t_2) = \{\mathrm{X}(\mathrm{A}_j, \mathrm{t}_2), all\ j\}$

Random-noise and some sample functions of the random-noise process

2、平稳性与遍历性

- 如果随机过程$X(t)$对于任意的时刻$t_1,t_2,\ldots,t_N$，都有其N维联合概率密度函数

$$g_X\left(x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_N)\right)=g_X\left(x(t_1+t_0),x(t_2+t_0),\ldots,x(t_N+t_0)\right)$$

其中t_0 为任意时刻，则称$X(t)$为N阶平稳. 此外，如果$X(t)$ 对于 $N\to\infty$阶平稳，则称$X(t)$为严格平稳。

- 如果一个随机过程的任意样本函数的时间平均等于相应的集合平均，则我们称该随机过程为遍历的（或各态历经的），并且
  - 如果一个随机过程是遍历的，则所有的时间平均和集合平均可以互换。
  - 遍历的随机过程一定是平稳的。

2、自相关函数与广义平稳

- 实随机过程 $X(t)$的自相关函数(auto-correlaton function, ACF)为

$$R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_X(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

- 如果随机过程$X(t)$满足

1. $E\left[X(t)\right]$=constant and
2. $R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)$

则称X(t)为广义平稳（wide-sense stationary，W.S.S.)

- W.S.S 随机过程ACF的特性

1. $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$
2. $R_X(0)\geq\left|R_X(\tau)\right|$
3. $R_X(0)=E\left[X^2(t)\right]$

2、功率谱密度

- 随机过程$\xi(t)$的功率谱密度为

$$P_{\xi}(f)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{E\left[\left|X_T(f)\right|^2\right]}{T}\right)$$

其中

$$X_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Wiener-Khintchine 定理

- 如果$x(t)$为W.S.S. 随机过程, 其 PSD为自相关函数的傅立叶变换, 即

$$R_X(\tau) \leftrightarrow P_X(f)$$

PSD的性质

1. $P_X(f)$ 总是实数.
2. $P_X(f) \geq 0$.
3. 如果$X(t)$为实数, 则$P_X(-f) = P_X(f)$.
4. $$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)df = P$$.

如果 $X(t)$为W.S.S.随机过程,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)df = P = E[X^2] = R_X(0)$$

5. $P_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)d\tau$

遍历随机过程的DC与RMS

1. 直流:

$$X_{dc} \triangleq E[X(t)] = \langle \xi(t) \rangle = m_X$$

2. 归一化直流功率

$$P_{dc} \triangleq \langle \xi(t) \rangle^2 \equiv \{E[X(t)]\}^2 = m_X^2$$

3. Rms:

$$X_{rms} \triangleq \sqrt{\langle \xi^2(t) \rangle} = \sqrt{E[X^2(t)]} = \sqrt{R_X(0)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)df}$$

4. 交流部分的均方根值（Rms value of the ac part）

$$(X_{rms})_{AC} \triangleq \sqrt{\langle [\xi(t) - X_{dc}]^2 \rangle} = \sqrt{E[X(t) - m_X]^2} = \sqrt{E[X^2(t)] - m_X^2}$$

遍历随机过程的DC与RMS

1. 归一化总平均功率

$$P \triangleq \left\langle \xi^2(t) \right\rangle \equiv E\left[X^2(t) \right] = R_X(0) = R_\xi(0) = E\left[X^2 \right]$$

2. 归一化交流平均功率

$$P_{ac} \triangleq \left\langle \xi^2(t) - X_{dc} \right\rangle \equiv E\left[X^2(t) - m_X^2 \right] = \sigma_X^2$$

三、白噪声

1 信道加性噪声的分类

- 按照来源分
  - 人为噪声：由电气装置产生的工业及无线电干扰
  - 自然噪声：宇宙辐射噪声、闪电、雷暴等
  - 通信系统内部噪声:热噪声、散弹噪声、电源噪声
- 按照噪声的性质分
  - 单频噪声：时域连续、频谱集中
  - 脉冲噪声：突发且持续时间短，幅度大
  - 起伏噪声：波形无规律、功率谱平坦

起伏噪声

- 热噪声
  - 大量自由电子热运动
  - 均值为零，但方差不为零
  - 高斯分布，功率谱平坦
  - 功率谱：从直流到10^{13}Hz频率的范围内具有均匀的功率谱密度

$$n_o = 2kTG, k = 1.3805 \times 10^{-23} J/K$$

起伏噪声(Cont’d)

- 散弹噪声
  - 二极管、三极管中是由载流子扩散的不均匀性与电子空穴对产生和复合的随机性引起的。
  - 大约在100MHz频率范围内可以被认为是恒定值
  - 高斯分布，功率谱平坦
- 宇宙噪声
  - 天体辐射波对接收机形成的噪声
  - 20 ~ 300MHz
  - 高斯分布，功率谱平坦

2 理想白噪声

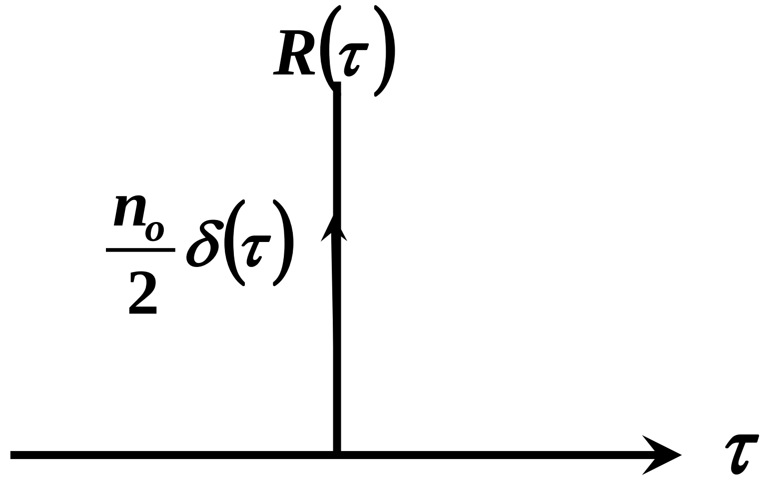
遍历(广义平稳)、零均值、高斯分布白噪声

- 若随机信号$n(t)$,它的功率谱密度$P_N(f)$在所有频率上为一常数,则称$n(t)$为白噪声.即

$$P_N(f)=\frac{n_0}{2} \qquad -\infty < f < \infty$$

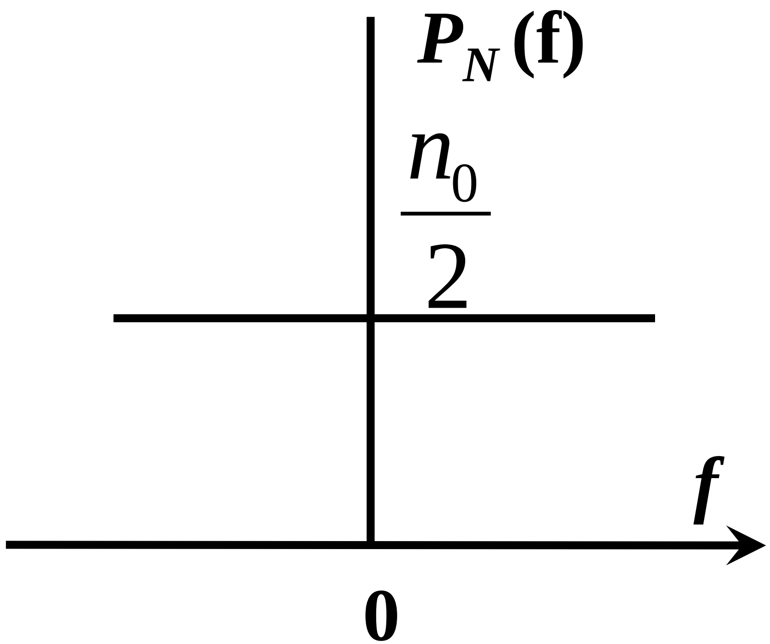
其中,n_0为正实常数,称为单边功率谱密度; $n_0/2$ 为$n(t)$的双边功率谱密度.

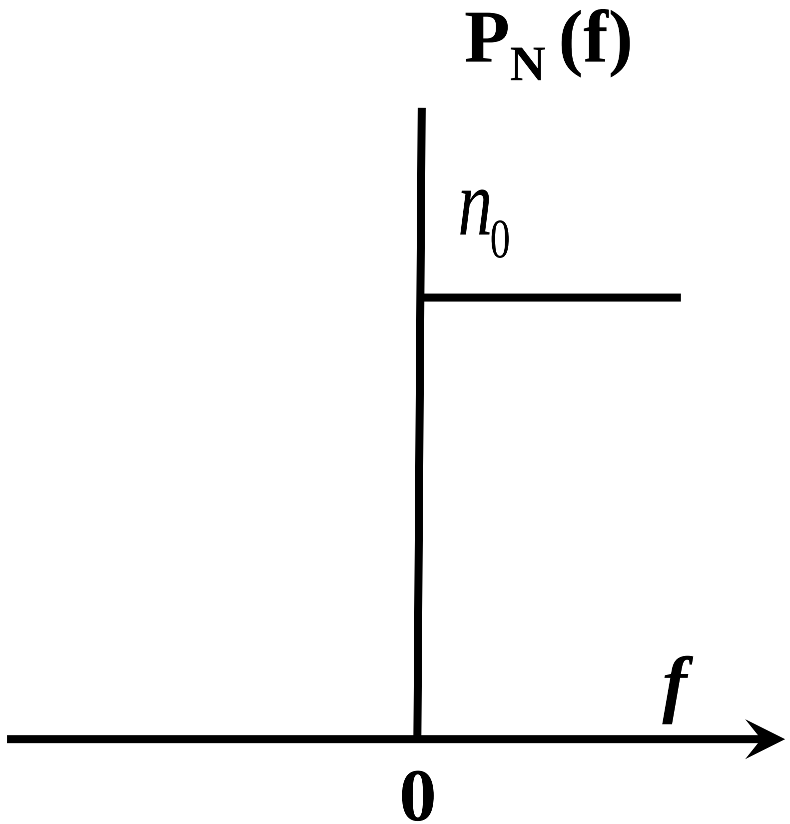
- 白噪声只有在$\tau=0$点是相关的,而在任何两个时刻上的随机变量都是不相关的。



$$R(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$

功率谱密度示意图

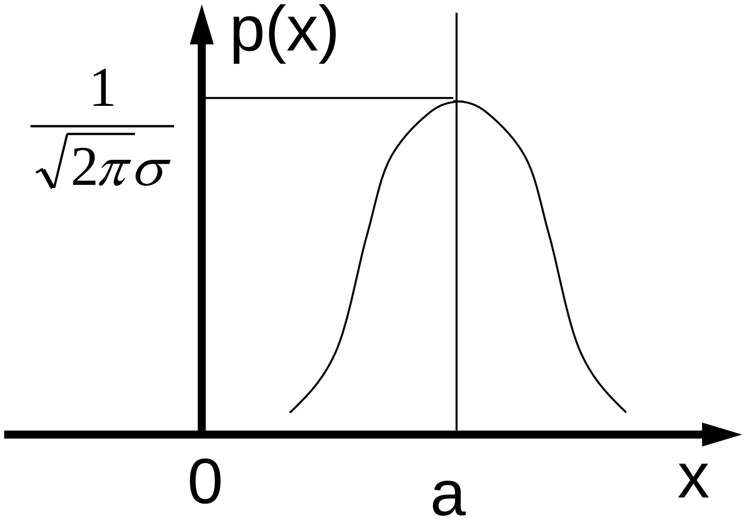




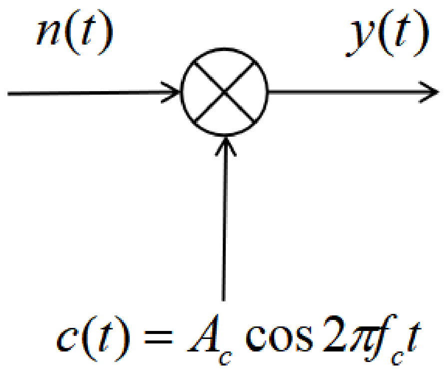
理想白噪声(续)

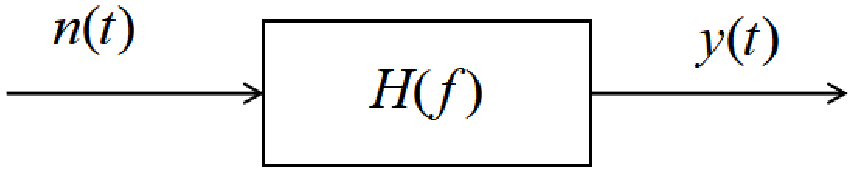
- 零均值平稳高斯随机过程
  - 均值为零
  - 方差与时间无关
  - 概率密度函数

$$p_N(n) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{n^2}{2}}$$



白噪声通过乘法器与滤波器





$$P_Y(f) = \frac{1}{4}\left[P_N(f - f_c) + P_N(f + f_c)\right]$$

$$P_Y(f) = P_N(f)\,|H(f)|^2$$

白噪声通过理想低通滤波器

- 传递函数

$$H(f)=\begin{cases} K_0\, e^{-j2\pi f t_d} & |f|\le f_m \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

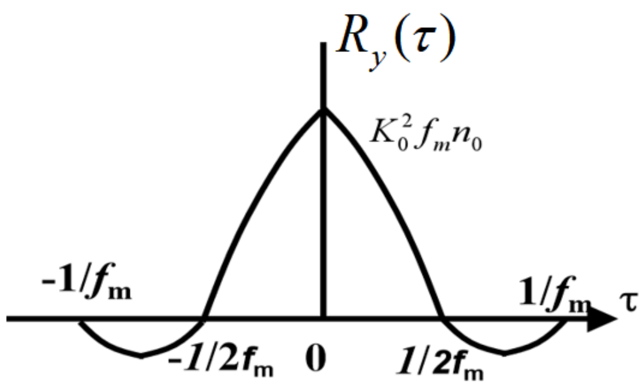
- 功率传递函数

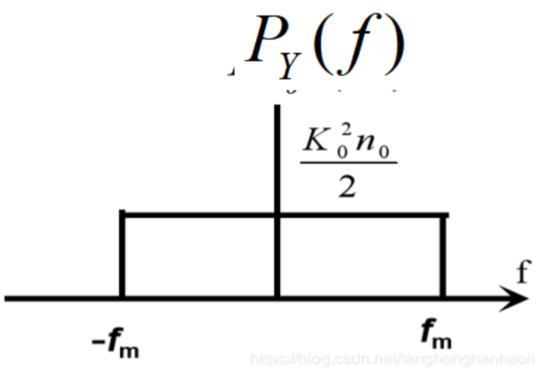
$$\left|H(f)\right|^2=\begin{cases} K_0^2 & |f|\le f_m \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 输出功率谱

$$P_Y(f)=|H(f)|^2\, P_N(f)=\begin{cases} \dfrac{K_0^2}{2} n_0 & |f|\le f_m \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

白噪声通过理想低通滤波器





- 输出功率

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f) df = K_0^2 n_0 f_m$$

白噪声通过理想带通滤波器

- 传递函数

$$H(f)=\begin{cases} K_0\,e^{-j2\pi f t_d} & f_l \le |f| \le f_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 功率传递函数

$$\left|H(f)\right|^2=\begin{cases} K_0^2 & f_l \le |f| \le f_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

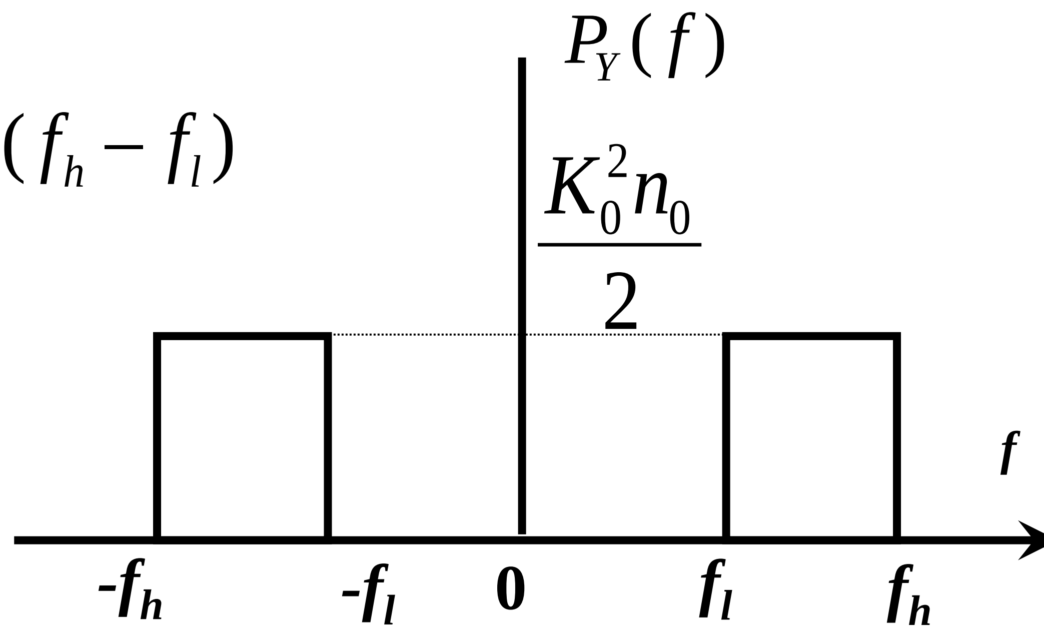
白噪声通过理想带通滤波器

- 输出功率谱

$$P_Y(f)=|H(f)|^2 P_N(f)=\begin{cases}\dfrac{K_0^2}{2}n_0 & f_l\le|f|\le f_h\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

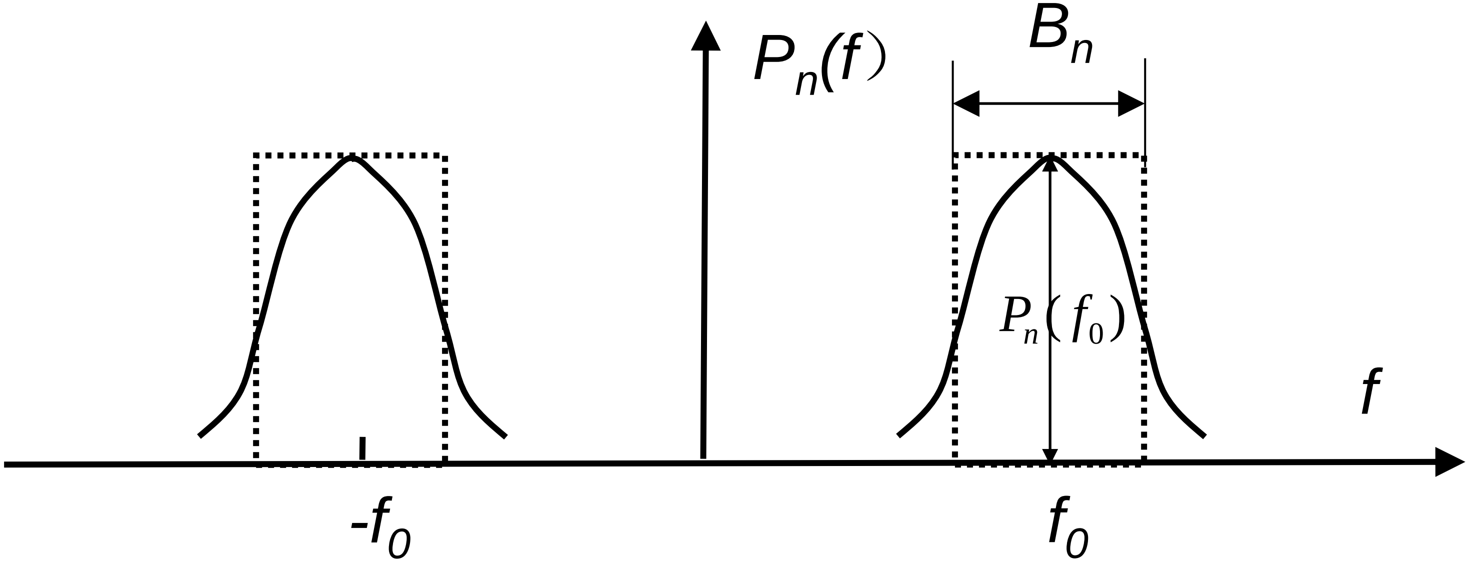
- 输出功率

$$P_Y=\int_{-\infty}^{\infty}P_Y(f)df=K_0^2 n_0(f_h-f_l)$$



4 等效噪声带宽

$$B_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P_n(f)df}{2P_n(f_0)} = \frac{\int_{0}^{\infty} P_n(f)df}{P_n(f_0)}$$



5 带通白噪声的等效低通表示

窄带高斯白噪声$n(t)$的解析信号为

$$z_n(t) = n(t) + j\hat{n}(t)$$

复包络信号： $n_{\mathrm{L}}(t) = z_n(t)e^{-j2\pi f_0 t} = n_{\mathrm{c}}(t) + n_{\mathrm{s}}(t)$

$$n(t) = \mathrm{Re}[z_n(t)] = \mathrm{Re}[n_{\mathrm{L}}(t)e^{\mathrm{j}2\pi f_c t}] = n_{\mathrm{c}}(t)\cos 2\pi f_c t - n_{\mathrm{s}}(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$\mathrm{E}\left[n(t)\right] = \mathrm{E}\left[n_{\mathrm{c}}(t)\right] = \mathrm{E}\left[n_{\mathrm{s}}(t)\right] = 0$$
$$\mathrm{E}\left[n^2(t)\right] = \mathrm{E}\left[n_{\mathrm{c}}^2(t)\right] = \mathrm{E}\left[n_{\mathrm{s}}^2(t)\right] = \sigma_n^2$$