

第六章

无限脉冲响应数字滤波器的设计



网络结构的分类

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$1. N = 0 (a_k = 0), \quad y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

结构类型：非递归

系统的 $h(n)$ ：有限长序列，称为有限长单位脉冲（冲激）响应系统（**Finite Impulse Response**），简称FIR系统。



网络结构的分类

2. $N \neq 0 (a_k \neq 0)$,

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

结构类型：递归型

系统的 $h(n)$ ：无限长序列，称为无限长单位脉冲（冲激）响应系统（**Infinite Impulse Response**），简称IIR系统。



本章目录

- 数字滤波器的**技术指标与设计方法**
- 用**模拟**滤波器设计IIR**数字**滤波器
- IIR数字滤波器的**优化**设计
- IIR数字滤波器的**Matlab**仿真实现



6.1 概述

数字信号处理中的两类重要系统：

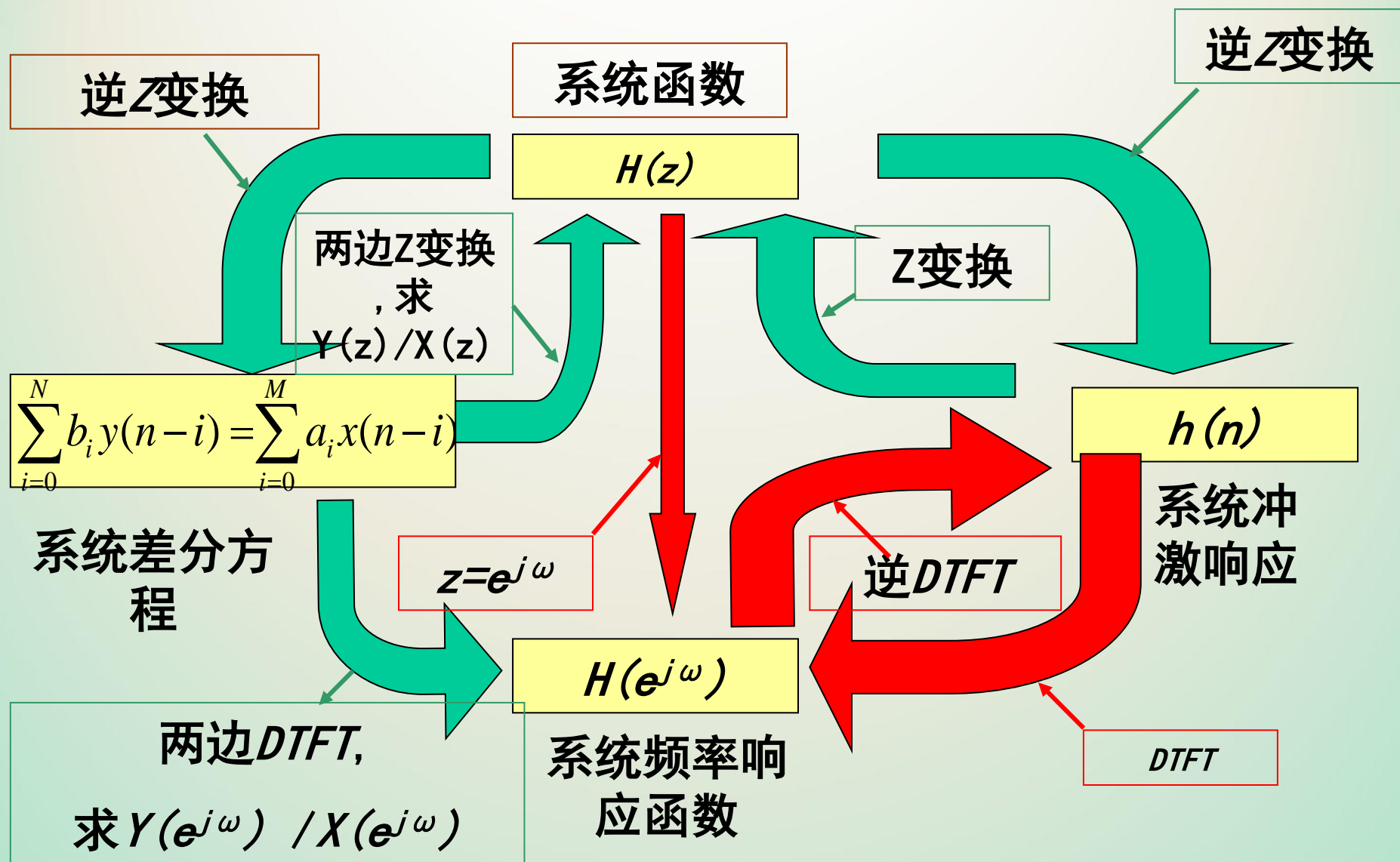
- ***频谱分析器**：提供频域内信号表示；
- ***数字滤波器**：完成时域内信号滤波；

数字滤波器的设计受如下因素影响：

- ***数字滤波器的类型即 IIR 或 FIR ；**
- ***数字滤波器的表示形式即结构；**

- 关于离散系统（滤波器）各种表示之间的关系
下图中，红线表示仅当系统稳定是成立。

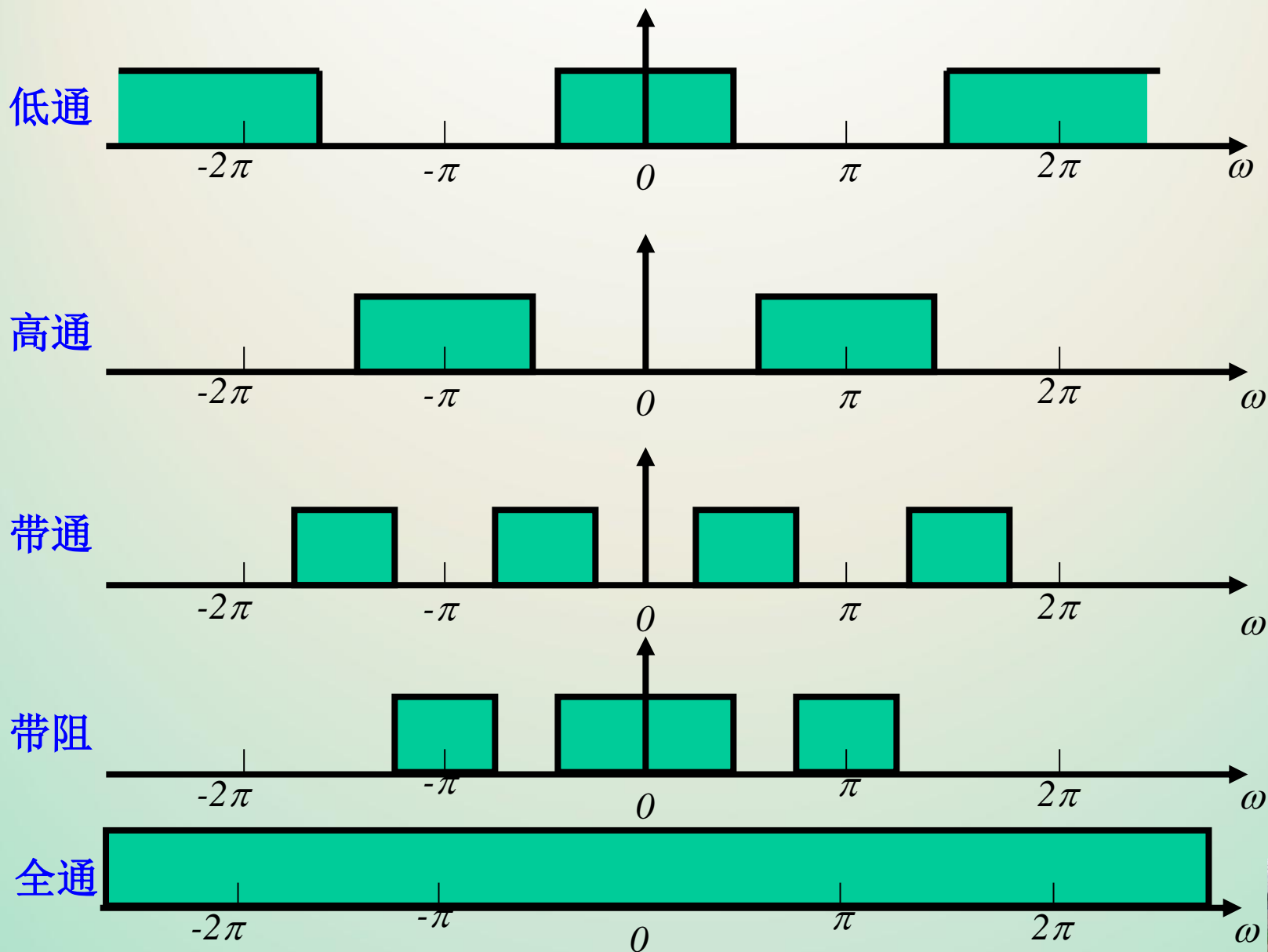




注: 只有在系统稳定时红箭头才成立



- 数字滤波器按频率选择功能分类：



6.1.2 IIR滤波器设计的基本思想

设计数字 $H(z)$ ，其指标通常在频域内给出。数字滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 一般为复数，即 $H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$

其中， $H(\omega)$ 为幅频特性函数；

$\theta(\omega)$ 为相频特性函数。

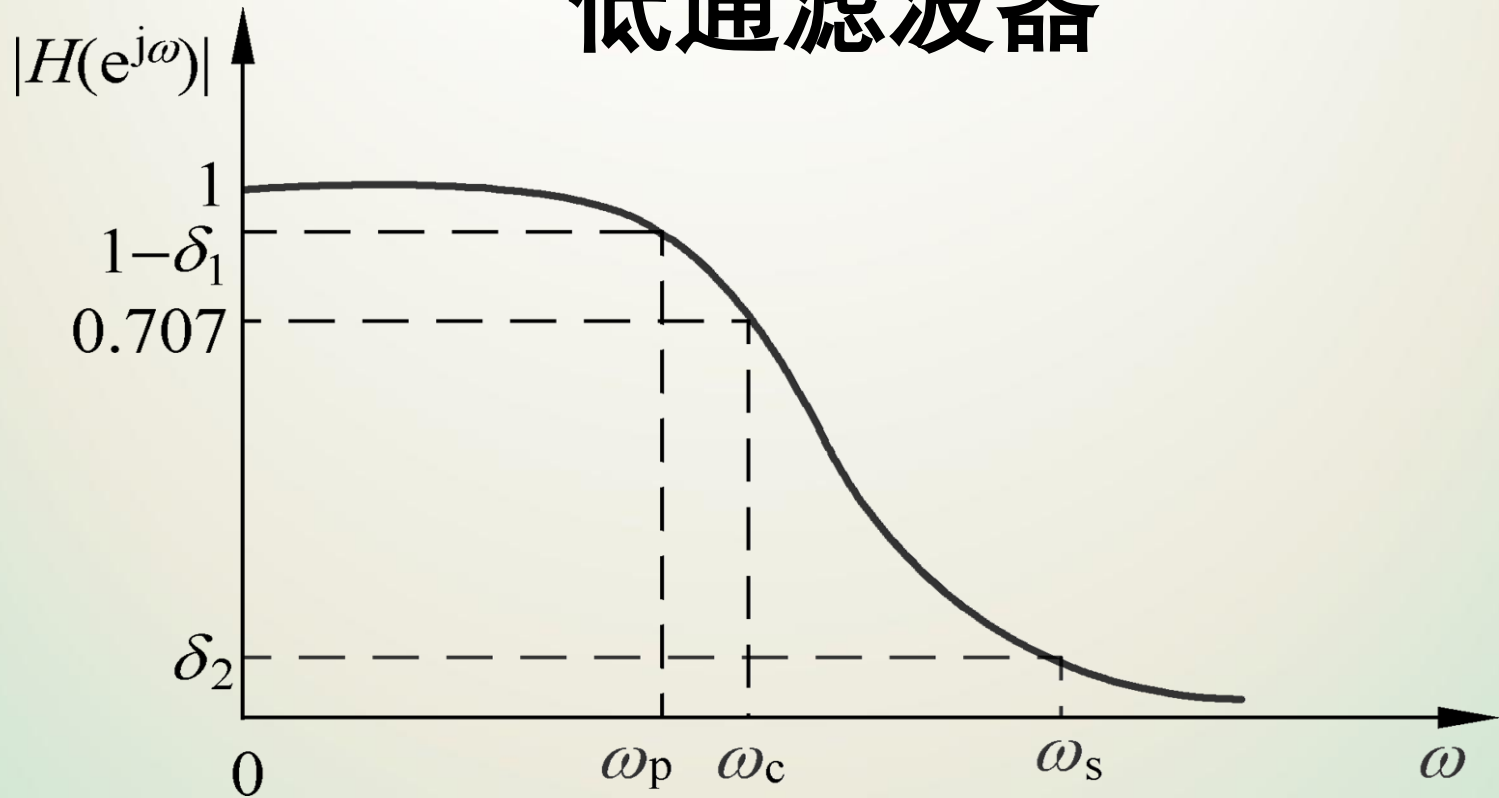
对 IIR 滤波器，一般用幅频特性来描述设计指标；
对 FIR 滤波器，不仅用幅频特性来描述设计指标，
一般还要考察其相位特性滤波器。



- 理想滤波器是**非因果**的，物理上**不可实现**。
- 为了物理上可实现，在**通带与阻带之间**应设置一定宽度的**过渡带**，并且在通带和阻带都允许一定的**误差容限**，
- 即**通带不一定是完全水平的**，**阻带不一定都绝对衰减到零**。



低通滤波器



• 通帶 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ $(1 - \delta_1) < |H(e^{j\omega})| \leq 1$

• 阻帶 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ $|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2$



- 通带内允许的最大衰减

$$a_p = 201g \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} dB \quad a_p = -201g |H(e^{j\omega_p})| dB$$

- 阻带内允许的最小衰减

$$a_s = 201g \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} dB \quad a_s = -201g |H(e^{j\omega_s})| dB$$

- 3dB通带截止频率

当幅度下降到 $\sqrt{2}/2$ 时, 即 $|H(e^{j\omega})|$ 下降为 0.707, $a = 3dB$, 对应的频率

$$\omega = \omega_c$$



6.1.3 IIR 设计方法概述

对于 IIR 滤波器，其系统函数为 z^{-1} 的有理分式：

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - d_i z^{-1})}$$

寻找滤波器的各系数 a_i , b_i 或 c_i , d_i 使其系统特性逼近一个要求的性能。设计分间接方法和直接方法。



IIR 数字滤波器设计

- 模拟滤波器转换成数字滤波器的方法（利用复数映射，最常用）

- 冲激响应不变法

- 阶跃响应不变法

- 匹配Z变换法

- 微分映射法

- 双线性变换法

- 直接法：直接在时域或频域设计 IIR 滤波器（利用计算机的最优化设计）

- 零极点累试法

- 频域逼近法

- 时域逼近法



6.1.3 IIR 数字滤波器设计的模拟—数字转换方法

- 模拟——数字转换法的主要步骤：

- 1) 先设计一模拟滤波器（参考模拟滤波器），使其平方幅度函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 满足要求的特性（平方幅度特性要求），由此得到参考模拟滤波器的转移函数 $H_a(s)$ ；
- 2) 找出一种能按 $H_a(s)$ 确定待设计数字滤波器系统函数 $H(z)$ 各系数的方法（模拟—数字转换方法）；



6.1.3 IIR 数字滤波器设计的模拟—数字转换方法

3) 此数字滤波器频率函数的平方幅度特性

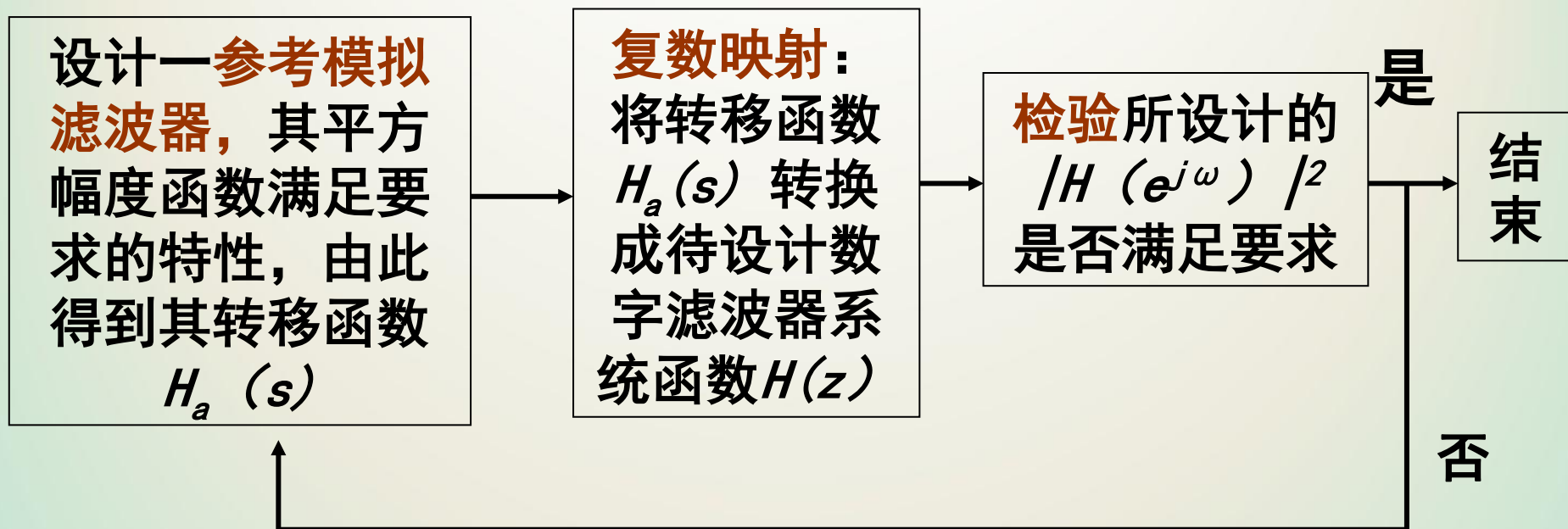
$|H(e^{j\omega})|^2$ 应与参考模拟滤波器的平方幅度特性

$|H_a(j\Omega)|^2$ 足够近似。

再检验所设计的 $|H(e^{j\omega})|^2$ 是否满足要求，
若不能，则重来（重复 1) ~ 3)）。



6.1.3 IIR 数字滤波器设计的模拟—数字转换方法



$$H_a(s) \longrightarrow H(z)$$

s 平面映射到 z 平面



6.1.3 IIR 数字滤波器设计的模拟—数字转换方法

△模拟滤波器的理论与设计方法已很成熟：

常用的参考模拟滤波器（如巴特沃斯滤波器、切比雪夫滤波器、椭圆滤波器、贝塞尔滤波器）不仅有简单而严格的设计公式，而且设计参数已经表格化了，设计起来非常方便、很准确；（稍后将介绍）

△各种复数映射方法也非常成熟：



6.1.3 IIR 数字滤波器设计的模拟—数字转换方法

复数变换需具备两个基本条件：

○因果稳定的 $H_a(s)$ 应能映射成因果稳定的 $H(z)$

$$\text{Re}[s] < 0 \longleftrightarrow |z| < 1$$

○数字滤波器的频率响应模仿模拟滤波器的频响

$$s \text{ 平面虚轴} \longleftrightarrow z \text{ 平面单位圆上}$$

最常用的变换方法：

脉冲响应不变法

双线性变换法



6.2 模拟滤波器的设计

- 常用的模拟滤波器

- 巴特沃斯 (Butterworth) 滤波器

具有单调下降的幅频特性

- 切比雪夫 (Chebyshev) 滤波器

幅频特性在通带或者阻带内有波动，
可以提高选择性；

- 椭圆 (Ellipse) 滤波器

在通带和阻带内都有纹波

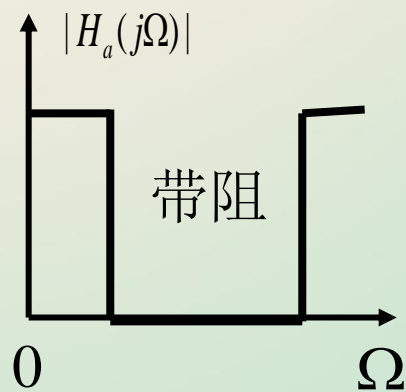
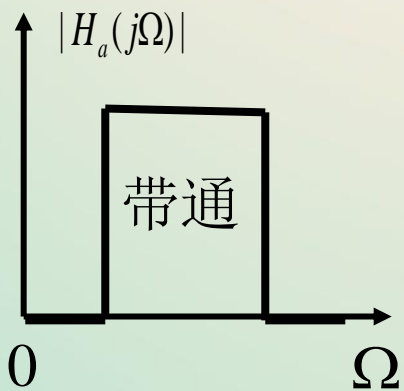
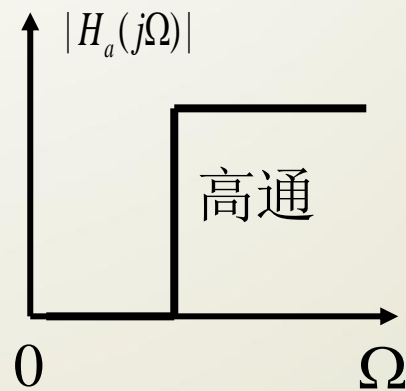
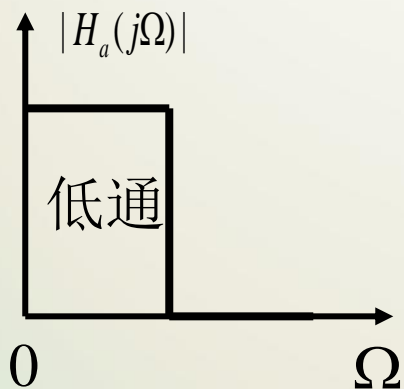
- 贝塞尔 (Bessel) 滤波器等

通带内有较好的线性相位特性

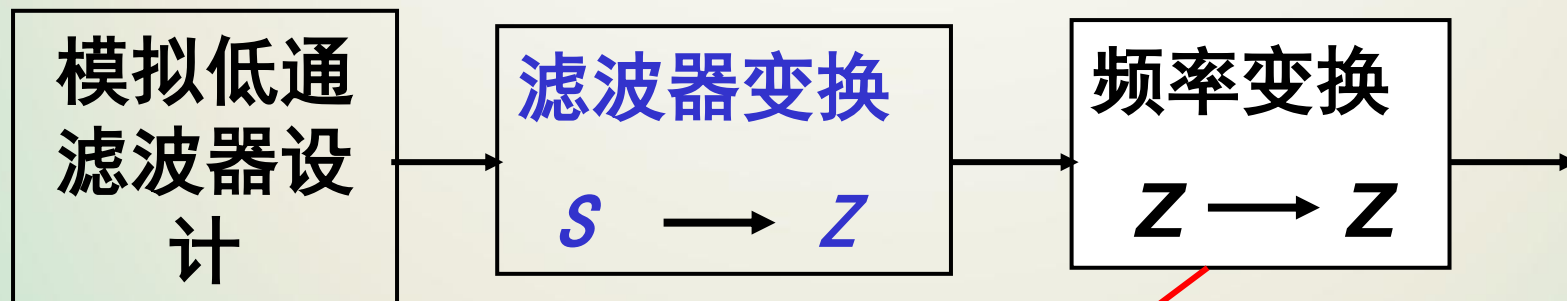


6.2 模拟滤波器的设计

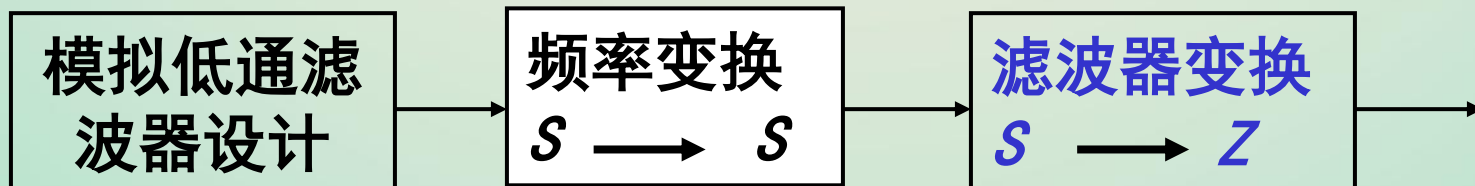
- 模拟滤波器按幅度特性分成低通、高通、带通和带阻滤波器：



- 各种**频率选择模拟滤波器**的设计总是先设计**模拟低通滤波器**，再通过**频率变换**或**滤波器变换**转成希望的滤波器。

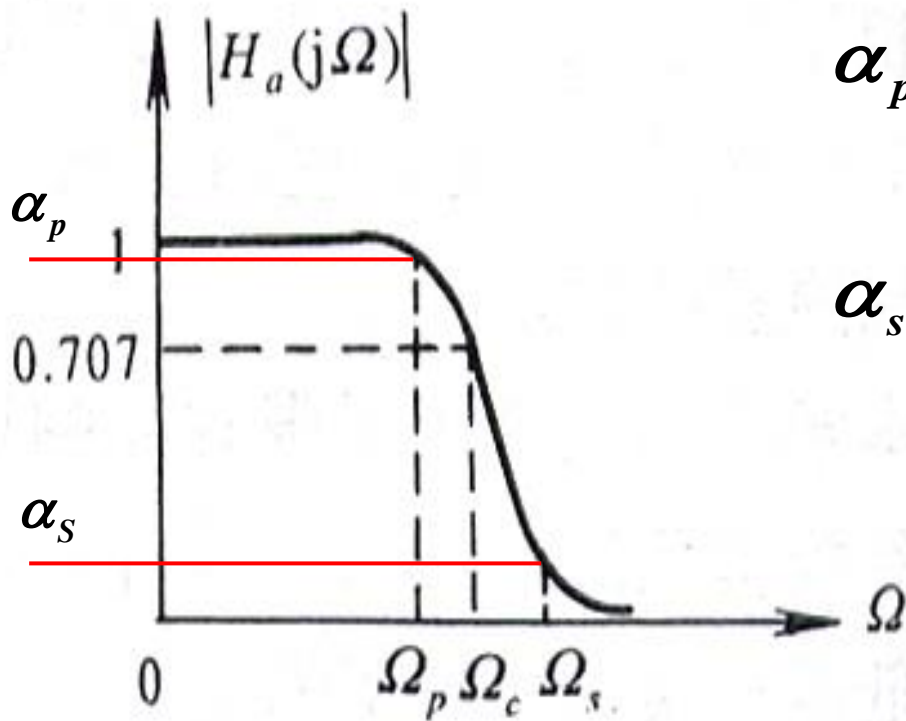


数字低通 \longrightarrow 数字高通、数字带通、数字带阻
或



6.2.1 模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法：

△ 假定**总是可以获得**模拟低通滤波器特性要求（依赖于滤波器变换）： Ω_p , Ω_s , α_p 和 α_s , 如下图所示。



$$\alpha_p = 10 \log_{10} \frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_p)|^2}$$

$$\alpha_s = 10 \log_{10} \frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_s)|^2}$$

Ω_c 为 3dB 截止频率，因为 $-20 \log_{10} |H_a(j\Omega_c)| = 3dB$ 。



6.2.1 模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法：

△由幅度平方函数确定模拟低通滤波器传输函数：

模拟低通滤波器的特性要求给定后，需要设计一个传输函数为 $H_a(s)$ 的模拟低通滤波器，希望其平方幅度函数满足给定的指标 α_p 和 α_s 。由于一般滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 为实数，有

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) = H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega}$$

$$H_a(-s) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_a(t)e^{-st} dt \right]^* = H_a^*(s) \longrightarrow H_a(-s) = H_a^*(s)$$



6.2.1 模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) = H_a(s)H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

如果能由 Ω_p , Ω_s , α_p 和 α_s 求出 $|H_a(j\Omega)|^2$, 那么就可以求出 $H_a(s)$ 。

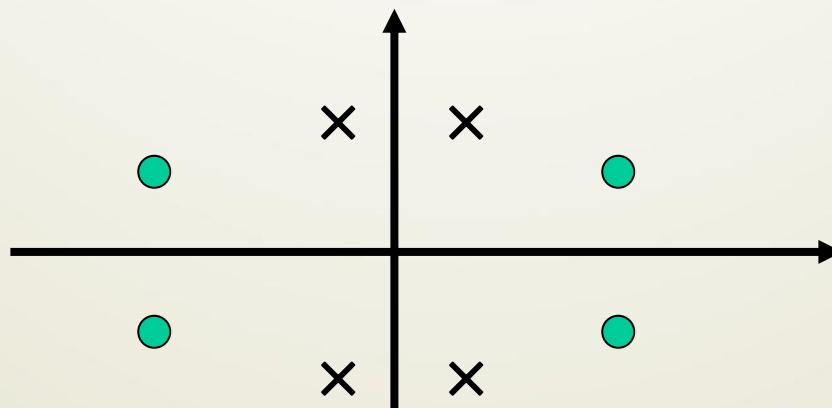
几种典型的模拟滤波器（如巴特沃斯滤波器、切比雪夫滤波器、椭圆滤波器等）都有自己的幅度平方函数表达式，可以直接引用。

△传输函数的零极点分布特点（象限对称）：

$H_a(s)$ 必须稳定，其极点分布于 s 平面左半面。 $H_a(-s)$ 的极点分布于 s 平面右半面



$H_a(s)H_a(-s)$ 的零、极点分布(象限对称):



$H_a(s)$ 的极点 (零点)	$-\sigma_0 \pm j\Omega_0$	$-\sigma_0$	$-j\Omega_0$
$H_a(-s)$ 的极点 (零点)	$\sigma_0 \mp j\Omega_0$	σ_0	$j\Omega_0$



6. 2. 2巴特沃斯低通滤波器的设计方法

- 巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数为：

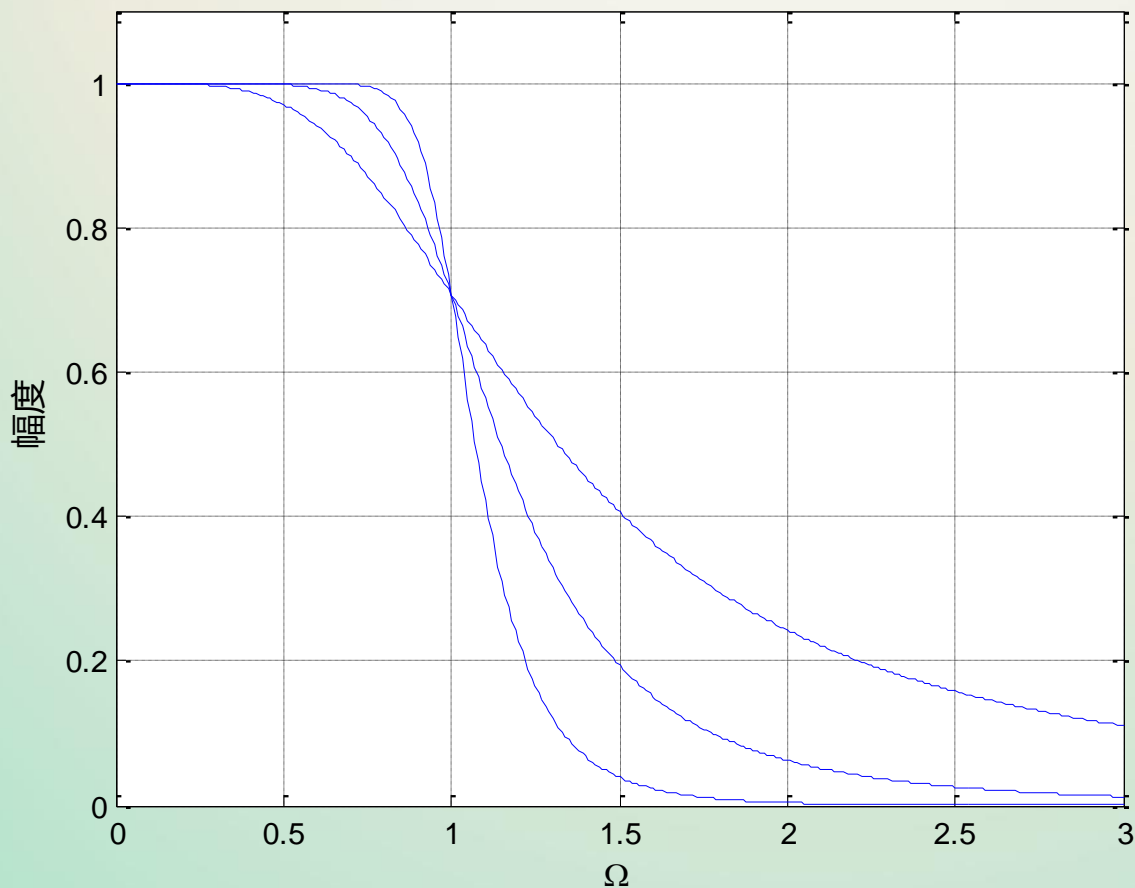
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

- N 为滤波器阶数
- Ω_c 为3dB截止频率



这里 N 为低通滤波器的阶数； Ω_c 为截止频率。

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



巴特沃斯低通滤波器的特点

- 幅度特性随着 Ω 增加 **单调下降**，下降的速度与阶数有关。
- 随着 N 增大，幅度下降的速度越快，过渡带越窄，在通带内更接近于1，在阻带内迅速接近于零，因而幅度特性更接近于理想的矩形频率特性。
- 不管 N 的取值是多少，都经过 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 点。



幅度平方函数的极点分布

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}}$$

- 幅度平方函数有 $2N$ 个极点

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$$

- 这 N 个极点等间隔分布在半径为 Ω_c 的圆上（该圆称为巴特沃斯圆），间隔是 π/M rad。
- 这些极点以虚轴为对称轴，而且不会落在虚轴上。
 - 当 N 是奇数时，实轴上有两个极点；
 - 当 N 是偶数时，实轴没有极点。



Ha(s) 的表达式

- 为了保证所设计的滤波器是稳定的,
- 将s平面左半平面的N个极点分配给Ha(s),
- 而将右半平面的N个极点分配给Ha(-s)

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)}$$

$$s_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, k = 0, 1, \dots, N-1$$



频率归一化的表达式

为使设计公式和图表统一，将频率归一化。巴特沃斯滤波器采用对3dB截止频率 Ω_c 归一化。

$$H_a\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} \left(\frac{s}{\Omega_c} - \frac{s_k}{\Omega_c}\right)}$$

$$\text{或作 } H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)}$$

上式中， $p = s/\Omega_c$ ， 归一化极点

$$p_k = e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N})}, k = 0, 1, \dots, N-1$$



归一化原型滤波器

N确定后，可查表6.2.1 (157页) 可求得系统函数表达式

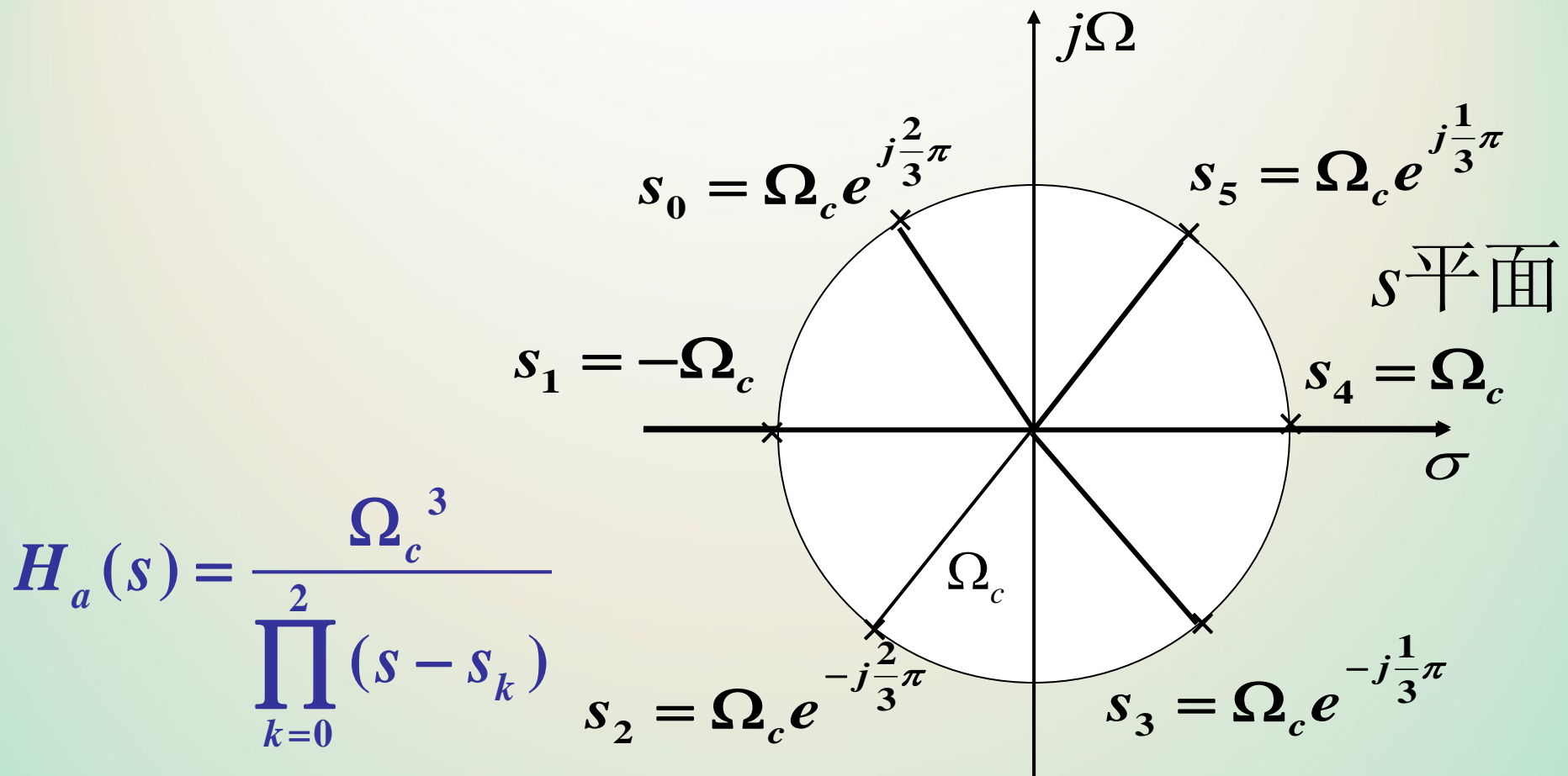
将截止频率 Ω_c 归一化的低通滤波器

$$H_a(p) = \frac{1}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_{N-1} p^{N-1} + p^N}$$

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p = \frac{s}{\Omega_c}}$$



例如，一个稳定的3阶巴特沃兹低通滤波器



$$s_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, k = 0, 1, 2$$

$H_a(s)H_a(-s)$ 的极点分布



$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s + \Omega_c)(s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{\prod_{k=0}^2 (s - s_k)}$$

若令3dB截止频率 $\Omega_c = 1$ ，得归一化传输函数。

$$H_a(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1},$$



巴特沃斯低通滤波器的设计

(一) 根据性能指标 $\Omega_p, \alpha_p, \Omega_s, \alpha_s$ 设计:

通带中允许的最大衰减 α_p 和通带截止频率 Ω_p ;

阻带中允许的最小衰减 α_s 和阻带截止频率 Ω_s ;

$$\alpha_p = 10 \lg \frac{1}{|H_a(j\Omega_p)|^2}$$

$$\alpha_s = 10 \lg \frac{1}{|H_a(j\Omega_c)|^2}$$



巴特沃斯低通滤波器的设计

1. 确定阶数N:

$$\alpha_p = 10 \lg \frac{1}{|H_a(j\Omega_p)|^2} \Rightarrow \frac{1}{|H_a(j\Omega_p)|^2} = 10^{0.1\alpha_p} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\alpha_p/10}$$

同理 $1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\alpha_s/10}$ 可推出 $\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^N = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}$

$$\text{令 } \lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}, K_{sp} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}$$

滤波器的阶数

$$N = \frac{\lg K_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$



巴特沃斯低通滤波器的设计

2. 3dB通带截止频率 Ω_c :

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{0.1a_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

阻带指标有富裕量

或
$$\Omega_c = \Omega_s (10^{0.1a_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

通带指标有富裕量

3. 确定归一化传递函数 $H_a(p)$ 。

4. 去归一化。 $H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$



巴特沃斯低通滤波器的设计

(二) 根据通带边界频率 Ω_p ，通带最小幅度 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$
阻带边界频率 Ω_s ，阻带最大波纹 $\frac{1}{A}$ 设计

由幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$ 可得：

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right)^N = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \Rightarrow N = \frac{\lg \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \right)}{\lg \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right)}$$



巴特沃斯低通滤波器的设计

由 $|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ 可得：

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\varepsilon^{1/N}}$$

由 $|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$ 可得：

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{(A^2 - 1)^{1/2N}}$$



例6.2.1: 已知通带截止频率 $f_p=5kHz$, 通带最大衰减 $\alpha_p=2dB$, 阻带截止频率 $f_s=12kHz$, 阻带最小衰减 $\alpha_s=30dB$, 设计一巴特沃兹模拟低通滤波器。

解 (1) 确定阶数N

$$K_{sp} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}} = 41.3223$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{2\pi f_s}{2\pi f_p} = 2.4$$

$$N = \frac{\lg K_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = \frac{\lg 41.3223}{\lg 2.4} = 4.25 \quad \text{取 } N=5$$



(2) 查表确定归一化原型函数

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^4 (p - p_k)} = \frac{1}{p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

其中 $b_0 = 1, b_1 = 3.2361, b_2 = 5.2361, b_3 = 5.2361, b_4 = 3.2361$ 。

(3) 确定3dB截止频率 Ω_c

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{(10^{\alpha_p/10} - 1)}} = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{\sqrt[10]{(10^{2/10} - 1)}} = 2\pi \times 5.2755 \text{krad} / \text{s}$$



(4) 去归一化

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

$$= \frac{\Omega_c^5}{\prod_{k=0}^4 (s - s_k)}$$

$$= \frac{\Omega_c^5}{s^5 + b_4 \Omega_c s^4 + b_3 \Omega_c^2 s^3 + b_2 \Omega_c^3 s^2 + b_1 \Omega_c^4 s + b_0 \Omega_c^5}$$

其中 $b_0 = 1, b_1 = 3.2361, b_2 = 5.2361, b_3 = 5.2361, b_4 = 3.2361$ 。



用matlab工具箱函数设计巴特沃斯滤波器

1. $[Z, P, K]=\text{buttap}(N)$

用于计算N阶巴特沃斯模拟低通原型滤波器系统函数的零、极点和增益因子。Z和P是长度为N的列向量。

2. $[N, w_c]=\text{buttord}(w_p, w_s, R_p, A_s)$

用于计算巴特沃斯模拟低通原型滤波器的阶数N和3dB截止频率 w_c 。

其中 w_p 和 w_s 分别是通带和阻带的截止频率，其值 $0 \leq W_p(or W_s) \leq 1$ ，当其值为1时，表示0.5 f_s

R_p, R_s 分别是通带和阻带区的衰减。



3. $[N, wc]=\text{buttord}(wp, ws, Rp, As, 's')$

其中 W_p 和 W_s 模拟角频率。

4. $[B, A]=\text{butter}(N, wc, 'ftype')$

计算 N 阶巴特沃斯滤波器系统函数的分子、分母多项式的系数向量 B 和 A 。

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n+1)z^{-n}}{a(1) + a(2)z^{-1} + \dots + a(n+1)z^{-n}}$$

5. $[B, A]=\text{butter}(N, wc, 'ftype', 's')$

计算 N 阶模拟巴特沃斯滤波器系统函数的分子、分母多项式的系数向量 B 和 A 。

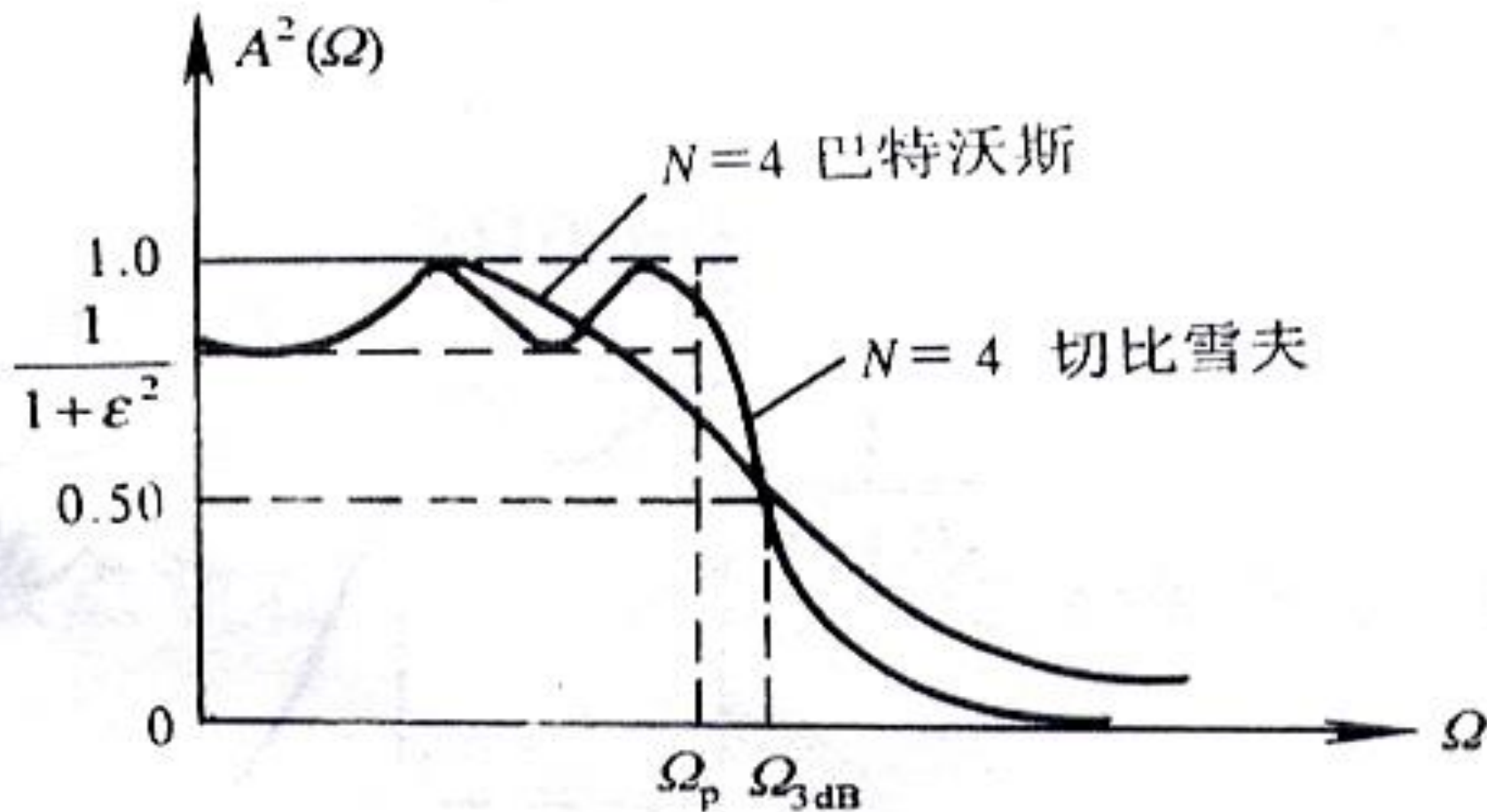


切比雪夫 (*Chebyshev*) 低通滤波器

1. 切比雪夫-I型低通滤波器的频率响应其通带内是等波纹的
 2. 切比雪夫-II型低通滤波器的频率响应其阻带内是等波纹的
- (巴特沃兹低通滤波器的频率响应在通带和阻带内都是单调的)
3. 对相同的频带要求，切比雪夫低通滤波器比巴特沃兹低通滤波器需要更低的阶数 (牺牲单调性)



相同的阶数情况下，同样的边界频率，切比雪夫滤波器具有更好的幅度指标



•切比雪夫 I 型低通滤波器幅度平方函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)}$$

N 为滤波器的阶数, ε 为通带内波纹因子

Ω_p 截止频率

N 阶切比雪夫多项式

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)), & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(\cosh^{-1}(x)), & 1 < x < \infty \end{cases}$$



切比雪夫多项式

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ ch(Nch^{-1}x) & |x| > 1 \end{cases}$$

当 $N = 0$ $C_0(x) = 1$

$$N = 1 \quad C_1(x) = x$$

$$N = 2 \quad C_2(x) = 2x^2 - 1$$

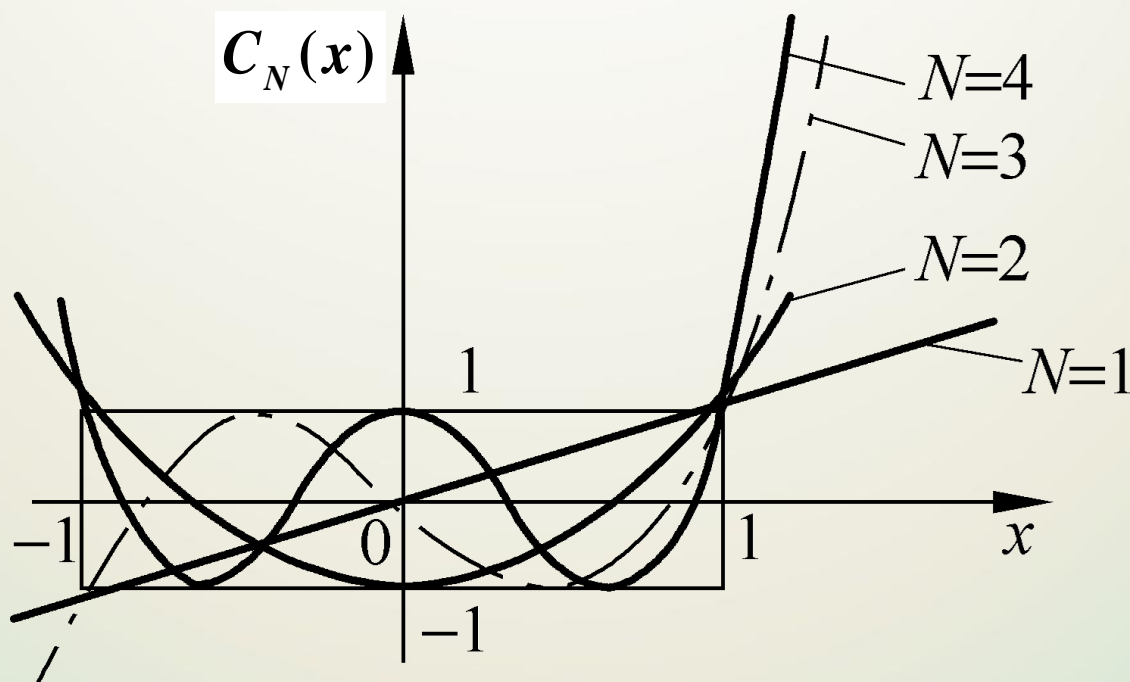
$$N = 3 \quad C_3(x) = 4x^3 - 3x$$

归纳出高阶切比雪夫多项式的递推公式：

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x)$$



不同 N 值的切比雪夫多项式的曲线



- 切比雪夫多项式的零点在 $|x| \leq 1$ 区间内；
- 当 $|x| \leq 1$ 时，曲线具有等纹波特性；
- 当 $|x| > 1$ 时，曲线按双曲余弦函数单调上升。



$$\text{当 } |x| \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon^2 C_N^2(x) \leq \varepsilon^2$$

$$1 \leq 1 + \varepsilon^2 C_N^2(x) \leq 1 + \varepsilon^2$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(x)} \leq 1$$

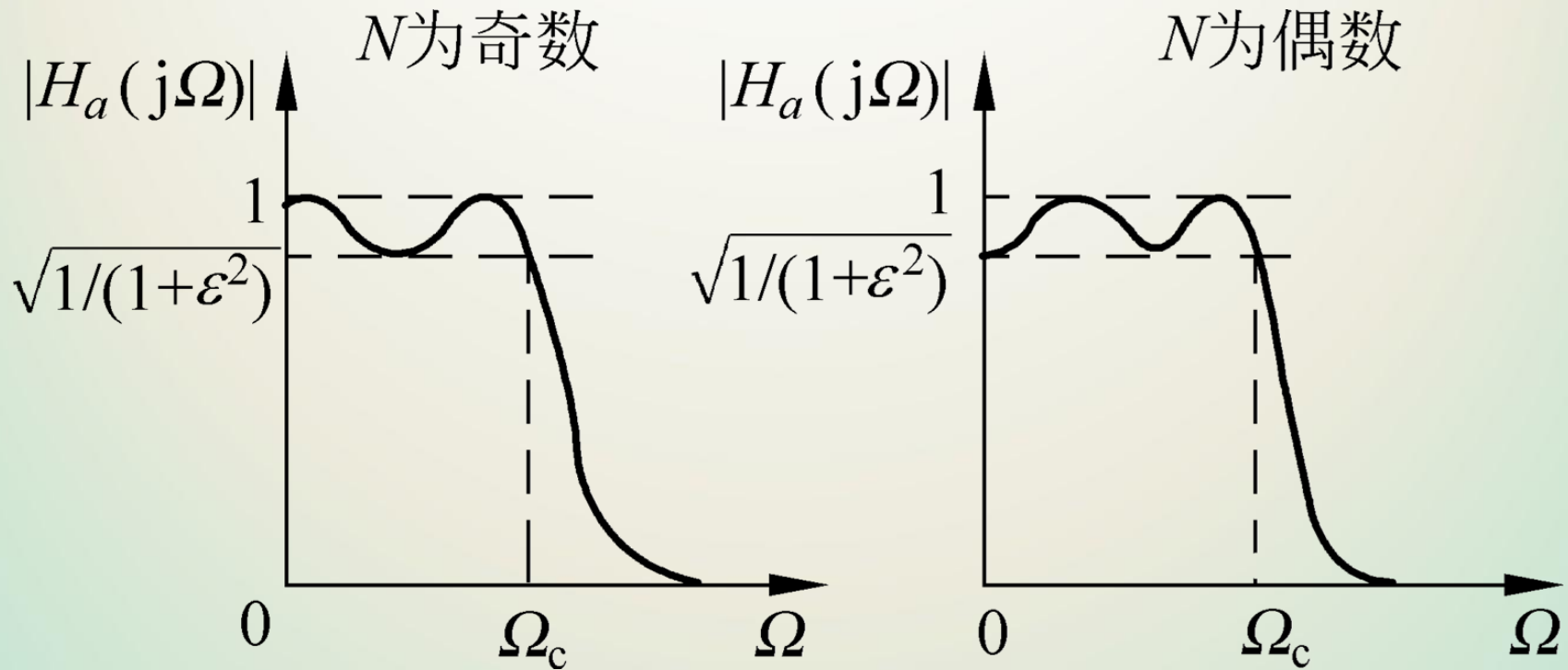
$$\text{而 } |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(x)}, \text{ 由 } \left| \frac{\Omega}{\Omega_p} \right| \leq 1 \Rightarrow \Omega \leq \Omega_p$$

$$\text{即在 } [0, \Omega_p] \text{ 范围内, } \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq 1$$

$$\text{当 } \Omega > \Omega_p, \quad |H_a(j\Omega)|^2 \rightarrow 0$$



切比雪夫滤波器的幅频特性



当 $\Omega=0$

$$N \text{ 奇数: } |H_a(j0)| = 1 \quad ; \quad N \text{ 偶数 } |H_a(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$



切比雪夫滤波器的幅度平方函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

其幅度平方函数与三个参数有关： ε ， Ω_p ， N

1. 确定 ε ε 与通带内允许的波动大小。

定义 $\alpha_p = 10 \lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}^2}{|H_a(j\Omega)|_{\min}^2} \quad |\Omega| \leq |\Omega_p| \quad \because \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq 1$

$$\therefore \alpha_p = 10 \lg (1 + \varepsilon^2) \quad \rightarrow$$

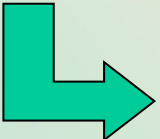
$$\varepsilon^2 = 10^{0.1\alpha_p} - 1$$



2. 确定阶数N

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \quad \text{令 } \lambda_s = \Omega_s / \Omega_p \quad \text{由 } \lambda_s > 1$$

$$C_N(\lambda_s) = ch[N \cdot Arch(\lambda_s)] = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} - 1}$$


$$N = \frac{Arch\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} - 1}\right]}{Arch(\lambda_s)}$$

或

$$\Omega_s = \Omega_p ch\left\{\frac{1}{N} Arch\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} - 1}\right]\right\}$$



3. 确定3dB截止频率 Ω_c

由 $|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\lambda_c)}$, $\lambda_c = \frac{\Omega_c}{\Omega_p} \rightarrow \varepsilon^2 C_N^2(\lambda_c) = 1$

通常 $\lambda_c > 1 \quad \therefore C_N(\lambda_c) = \pm \frac{1}{\varepsilon} = ch[N \cdot Arch(\lambda_c)]$

上式仅取正号，得

$$\Omega_c = \Omega_p ch\left[\frac{1}{N} Arch\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

以上参数确定后，可以求出N个极点的位置，从而综合出传递函数 $H_a(s)$ 。



求 $H_a(s)$ $H_a(-s)$ 的极点可以通过求

$$1 + \varepsilon^2 C_N^2 \left(\frac{s}{j\Omega_p} \right)$$

的根得到。

选择上述多项式在左半平面的根作为 $H_a(s)$ 的极点。

$$s_i = \sigma_i + j\Omega_i, i = 0, 1, \dots, N-1$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_i = -\Omega_p \operatorname{sh} \xi \sin \frac{2i-1}{2N} \\ \Omega_i = \Omega_p \operatorname{ch} \xi \cos \frac{2i-1}{2N} \end{cases} \quad \xi = \frac{1}{N} \operatorname{sh}^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$



归一化切比雪夫滤波器 $H_a(p)$

$$H_a(p) = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (p - p_i)}$$

$$p_i = -sh\xi \sin\left[\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right] + jch\xi \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right]$$

$$\text{式中 } \xi = \frac{1}{N} \text{Arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

去归一化切比雪夫滤波器 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_p^N}{\varepsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (s - p_i \Omega_p)}$$



切比雪夫滤波器的设计步骤:

1. 确定技术要求 $a_p, \Omega_p, a_s, \Omega_s,$

$$a_p = 10 \lg \frac{1}{|H_a(j\Omega_p)|^2}, a_s = 10 \lg \frac{1}{|H_a(j\Omega_s)|^2}$$

2. 确定 ε

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1a_p} - 1$$

3. 确定 N

$$N = \frac{\text{Arch} \left[\sqrt{\frac{10^{0.1a_s} - 1}{10^{0.1a_p} - 1}} \right]}{\text{Arch}(\lambda_s)}$$



切比雪夫滤波器的设计步骤:

4. 归一化切比雪夫滤波器 $H_a(p)$

$$H_a(p) = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (p - p_i)}$$

$$p_i = -sh\xi \sin\left[\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right] + jch\xi \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right]$$

$$\text{式中 } \xi = \frac{1}{N} \text{Arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

5. 去归一化

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}$$



用matlab函数设计切比雪夫滤波器

1. $[Z, P, K]=\text{cheb1ap}(N, R_p)$

用于计算N阶切比雪夫1型模拟低通原型滤波器系统函数的零、极点和增益因子。Z和P是长度为N的列向量。

2. $[N, w_{po}]=\text{cheb1ord}(w_p, w_s, R_p, A_s)$

用于计算切比雪夫1型模拟低通原型滤波器的阶数N和通带截止频率 w_{po} 。

其中 w_p 和 w_s 分别是数字域通带和阻带的截止频率，其值 $0 \leq W_p(or W_s) \leq 1$ ，当其值为1时，表示0.5 f_s

R_p, R_s 分别是通带和阻带区的衰减。



3. $[N, wpo]=\text{cheb1ord}(wp, ws, Rp, As, 's')$

其中 w_p 和 w_s 模拟角频率, 单位rad/s。

4. $[B, A]=\text{cheby1}(N, Rp, wpo, 'ftype')$

计算N阶切比雪夫1型滤波器系统函数的分子、分母多项式的系数向量B和A。

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n+1)z^{-n}}{a(1) + a(2)z^{-1} + \dots + a(n+1)z^{-n}}$$

5. $[B, A]=\text{butter}(N, Rp, wpo, 'ftype', 's')$

计算N阶模拟切比雪夫1型滤波器系统函数的分子、分母多项式的系数向量B和A。



6.2.6 频率变换与模拟高通、带通、带阻滤波器的设计

- 设计步骤:

Step 1: 从要设计的模拟滤波器 $H_d(s)$ 的指标生成低通滤波器 $Q(p)$ 原型指标

Step 2: 设计原型模拟滤波器

Step 3: 由确定低通滤波器原型指标的频率变换的逆变换，从原型模拟滤波器 $Q(p)$ 得到需要的滤波器 $H_d(s)$.



6.2.6 频率变换与模拟高通、带通、带阻滤波器的设计

p : 模拟低通滤波器原型 $Q(p)$ 的拉普拉斯变量

s : 待设计的模拟低通滤波器 $H_d(s)$ 的拉普拉斯变量

s 与 p 的映射关系: $p = F(s)$

$$H_d(s) = Q(p) \Big|_{p=F(s)}$$

$$Q(p) = H_d(s) \Big|_{s=F^{-1}(p)}$$



1.模拟高通滤波器设计

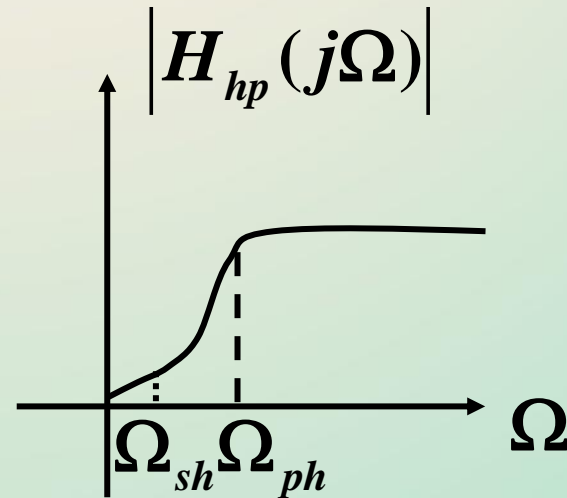
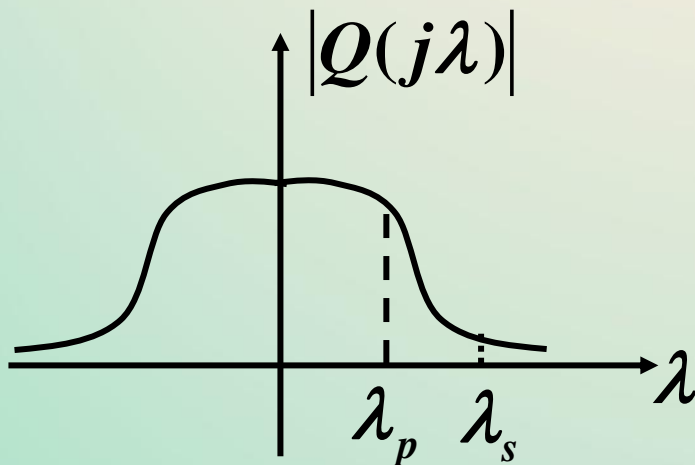
设 λ 为低通滤波器归一化频率, $p=\eta+j\lambda$, $s=\sigma+j\omega$

$$p = \frac{\lambda_p \Omega_{pH}}{s}$$

频率变换:

$$\lambda = -\frac{\lambda_p \Omega_{pH}}{\Omega}$$

$$H_{HP}(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\lambda_p \Omega_{pH}}{s}}$$

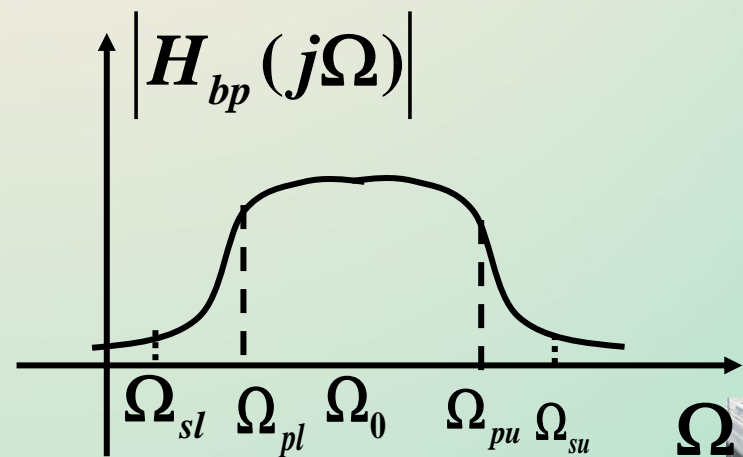
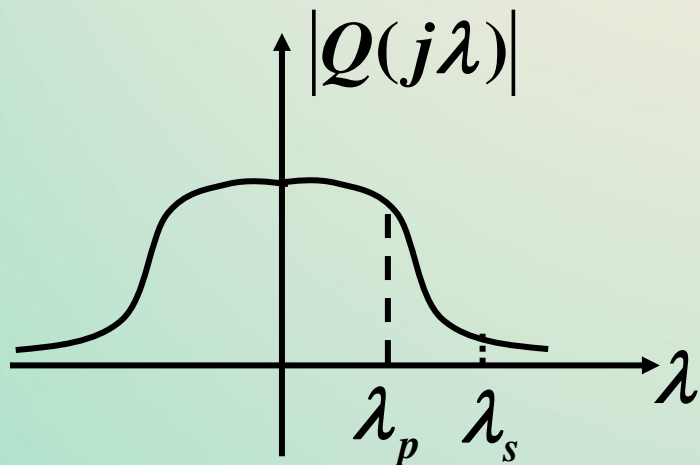


2.模拟带通滤波器设计

$$\lambda = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega B_w}, \quad B_w = \Omega_{pu} - \Omega_{pl}$$

$$\Omega_{pl} \Omega_{pu} = \Omega_{sl} \Omega_{su} = \Omega_0^2$$

$$p = \lambda_p \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s \cdot B_w} \quad H_{BP}(s) = Q(p) \Big|_{p = \lambda_p \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s \cdot B_w}}$$



6.3 脉冲响应不变法设计IIR数字滤波器

- 从模拟滤波器设计IIR数字滤波器就是按照一定的转换关系将s平面上的 $H_a(s)$ 转换成z平面上的 $H(z)$ 。

- 脉冲响应不变法

- 双线性变换法



6.3 用脉冲响应不变法设计IIR数字滤波器

设计思路：

1. 先根据给定的指标设计一个模拟滤波器。
2. 所要设计的数字滤波器的时间特性尽可能逼近模拟滤波器。



为了达到时间特性的最佳逼近，把 $h_a(t)$ 进行等间隔采样，作为数字滤波器的 $h(n)$

3. 将 $h(n)$ 做Z变换得到 $H(z)$ 。

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h(n) = h_a(nT) \rightarrow H(z)$$



变换原理 $h(n) \xrightarrow{\text{模仿}} h_a(t)$

对 $h_a(t)$ 进行抽样，则

$$h(n) = h_a(nT)$$

若 $h_a(t) \longleftrightarrow H_a(s)$, $h(n) \longleftrightarrow H(z)$

则

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

上式说明，将模拟信号 $h_a(t)$ 的拉氏变换 $H_a(s)$ 在 s 平面沿虚轴周期延拓后，再按照 $z=e^{sT}$ 的映射关系映射到 z 平面，就得到 $H(z)$ 。



映射关系: $z = e^{sT}$

设 $s = \sigma + j\Omega$

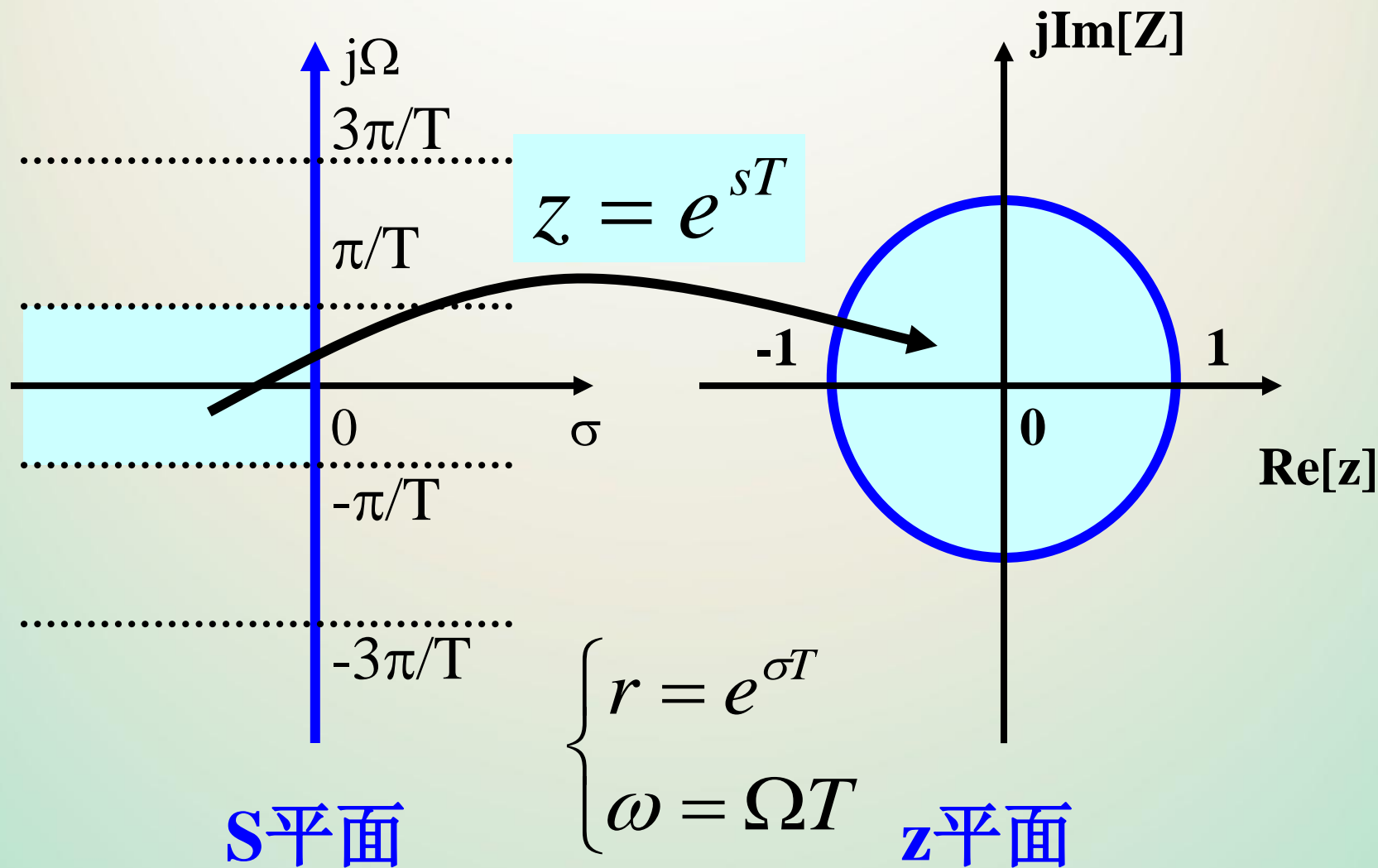
$$z = re^{j\omega}$$

→ $re^{j\omega} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$

因此得到:
$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$$



s平面与z平面的映射关系

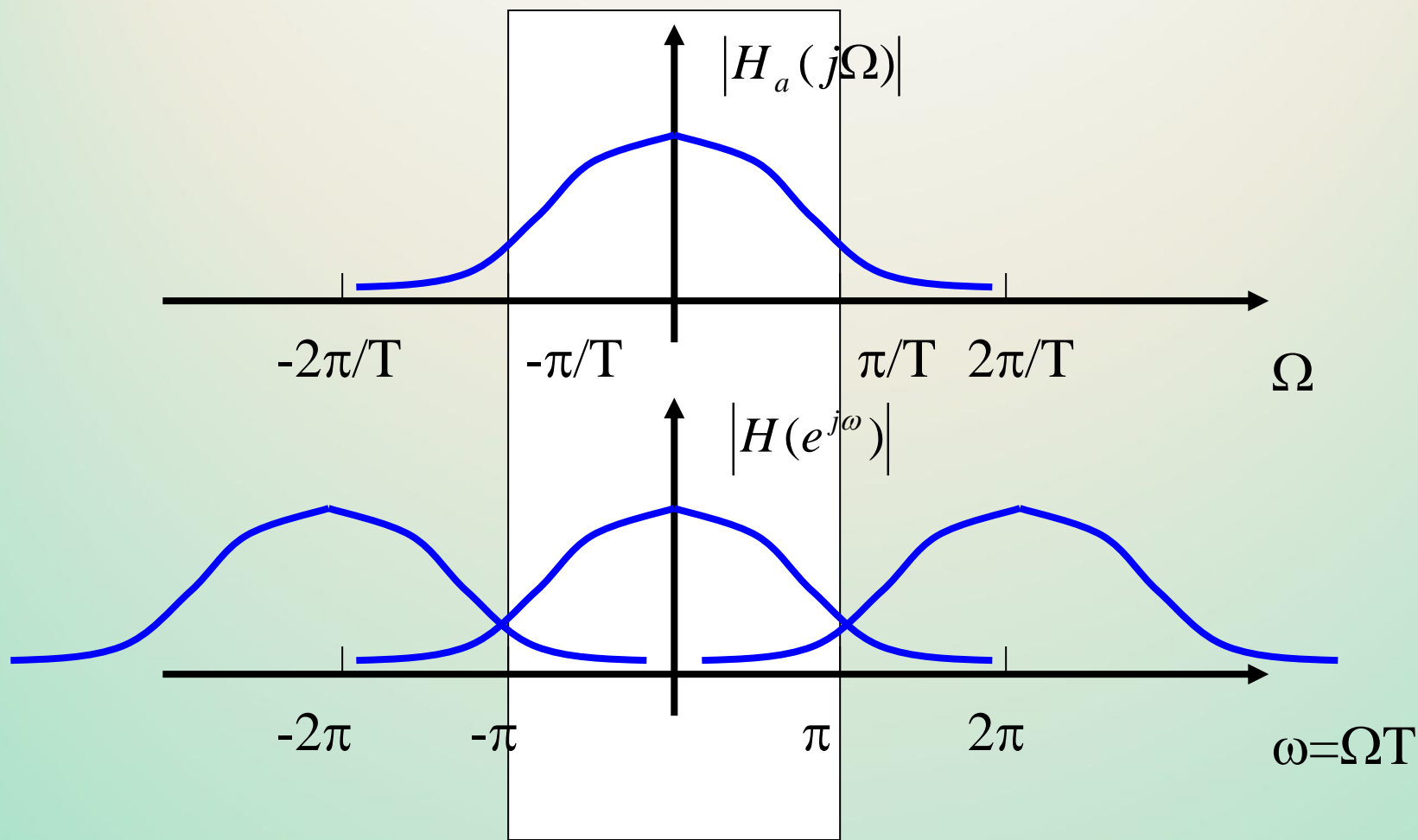


多值映射



混迭失真

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$$



混迭失真

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j \frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

说明数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓，根据抽样定理只有当模拟滤波器的频率响应是限带的，且带限于折叠频率以内时

$$\text{即 } H_a(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T = \Omega_s/2$$

才能使数字滤波器的频率响应在折叠频率以内重现模拟滤波器的频率响应，而不产生混迭失真，即

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j \frac{\omega}{T}), \quad |\omega| < \pi$$



模拟滤波器的数字化方法

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h(n) = h_a(nT) \rightarrow H(z)$$

设 系统函数 $H_a(s)$ 只有单阶极点，且假定分母的阶次大于分子的阶次

则

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t)$$

根据脉冲响应不变法

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i (e^{s_i T})^n u(n)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$



模拟滤波器的数字化方法

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

1. S平面单阶极点变换到z平面上 $z = e^{s_i T}$ 处的单阶极点；
2. $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 的部分分式系数是相同的；
3. 如果 $\text{Re}[s_i] < 0$, 则 $\left| e^{s_i T} \right| = e^{\text{Re}[s_i] T} < 1$
4. 虽然脉冲响应不变法能保证s平面极点与z平面极点有这种代数对应关系，但并不保证s平面与z平面有这种代数对应关系，如零点就没有这种对应关系。



修正后的数字滤波器的系统函数

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}), |\omega| < \pi$$

由上式可知，数字滤波器的频率响应与抽样间隔成反比，当T很小时，数字滤波器的增益会太高，

修正如下： $h(n) = T h_a(nT)$

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\omega/T) \quad |\omega| < \pi$$



修正后的数字滤波器的系统函数

因为 $h_a(t)$ 是实数

所以 $H_a(s)$ 的极点必成共轭对存在，一对复数共轭极点放在一起，形成一个二阶基本节

如果模拟滤波器的二阶基本节的形式为：

$$\frac{s + \sigma_1}{(s + \sigma_1)^2 + \Omega_1^2}, \text{极点为 } -\sigma_1 \pm j\Omega_1$$

相应的数字滤波器二阶基本节的形式为：

$$\frac{1 - z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \cos \Omega_1 T}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \cos \Omega_1 T + z^{-2} e^{-2\sigma_1 T}}$$



修正后的数字滤波器的系统函数

如果模拟滤波器的二阶基本节的形式为：

$$\frac{\Omega_1}{(s + \sigma_1)^2 + \Omega_1^2}, \text{极点为 } -\sigma_1 \pm j\Omega_1$$

相应的数字滤波器二阶基本节的形式为：

$$\frac{z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \sin \Omega_1 T}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \cos \Omega_1 T + z^{-2} e^{-2\sigma_1 T}}$$



脉冲响应不变法的优缺点：

1. 使得数字滤波器的脉冲响应完全模仿模拟滤波器的脉冲响应，即时域逼近良好。
2. 模拟频率和数字频率呈线性关系 $\omega = \Omega T$ 。因而一个线性相位的模拟滤波器可以映射成一个线性相位的数字滤波器。
3. 因为有混迭效应，所以脉冲响应不变法只适用于限带的模拟滤波器，高通和带阻滤波器不宜采用此方法。
4. 带通和低通滤波器需充分限带。



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

为了克服频率响应的混迭失真（s平面到z平面的多值映射造成的）。

变换原理

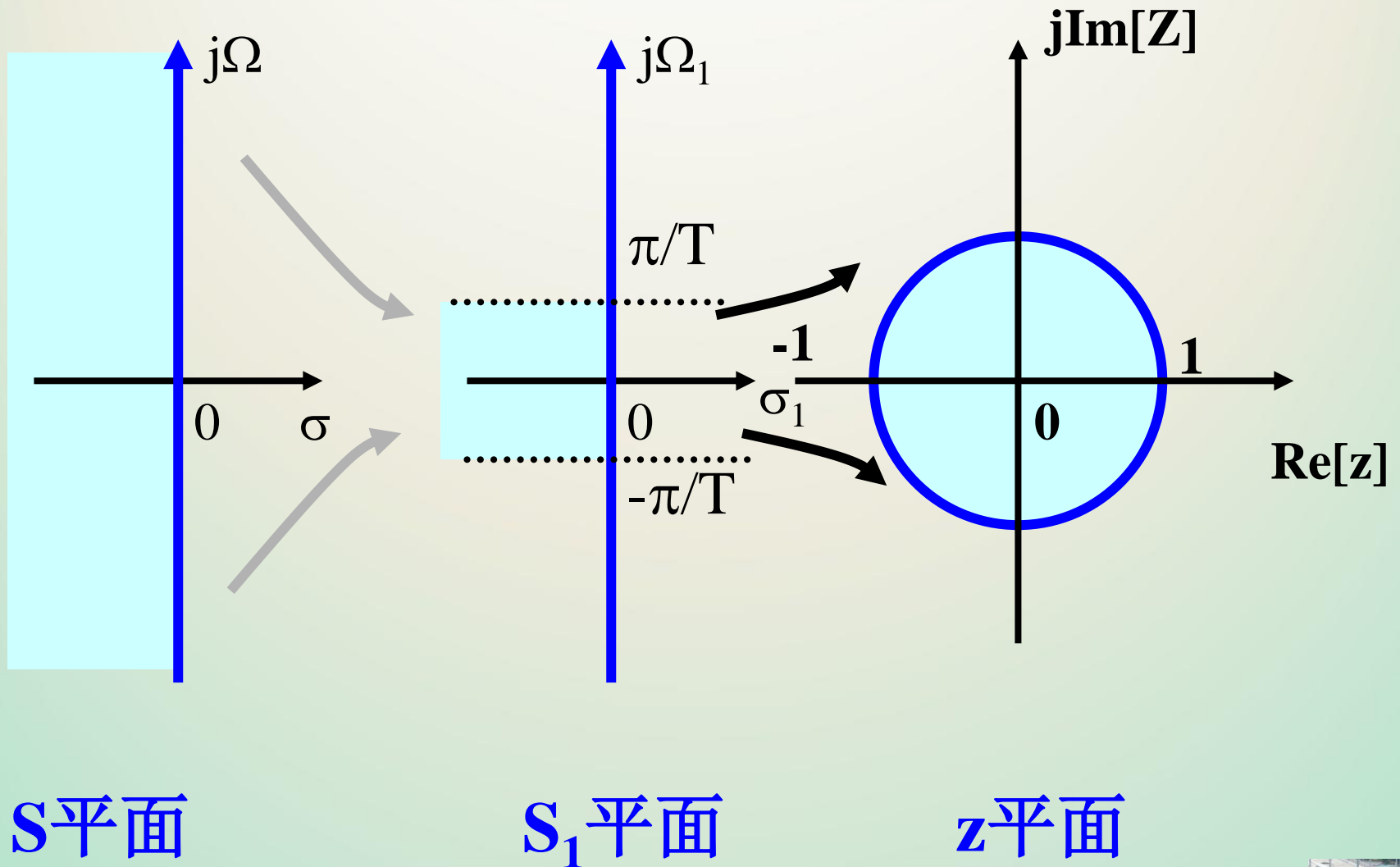
是使数字滤波器的频率响应与模拟滤波器频率响应相似的一种变换方法。

- 1.将s平面压缩变换到某一中介s1平面的一条横带里。
- 2.再通过 $z = e^{s_1 T}$ 将此横条变换到整个z平面。

S平面与z平面是一一映射的关系

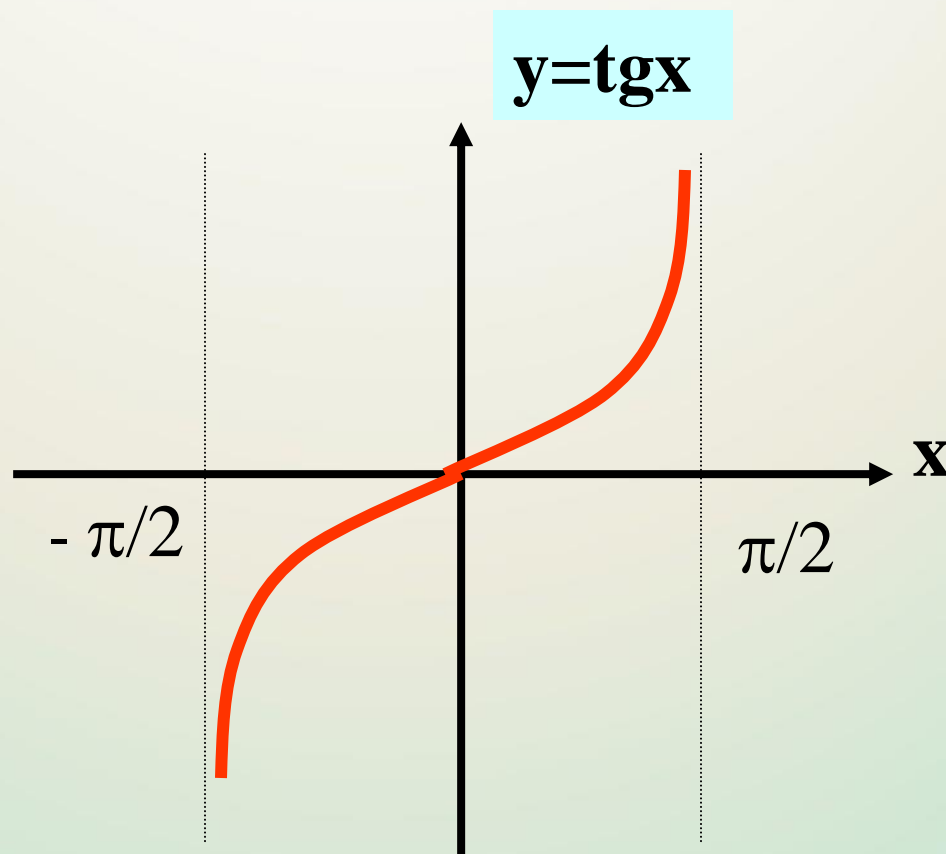


双线性变换法的映射关系



双线性变换法的原理

思路： 利用正切函数的性质

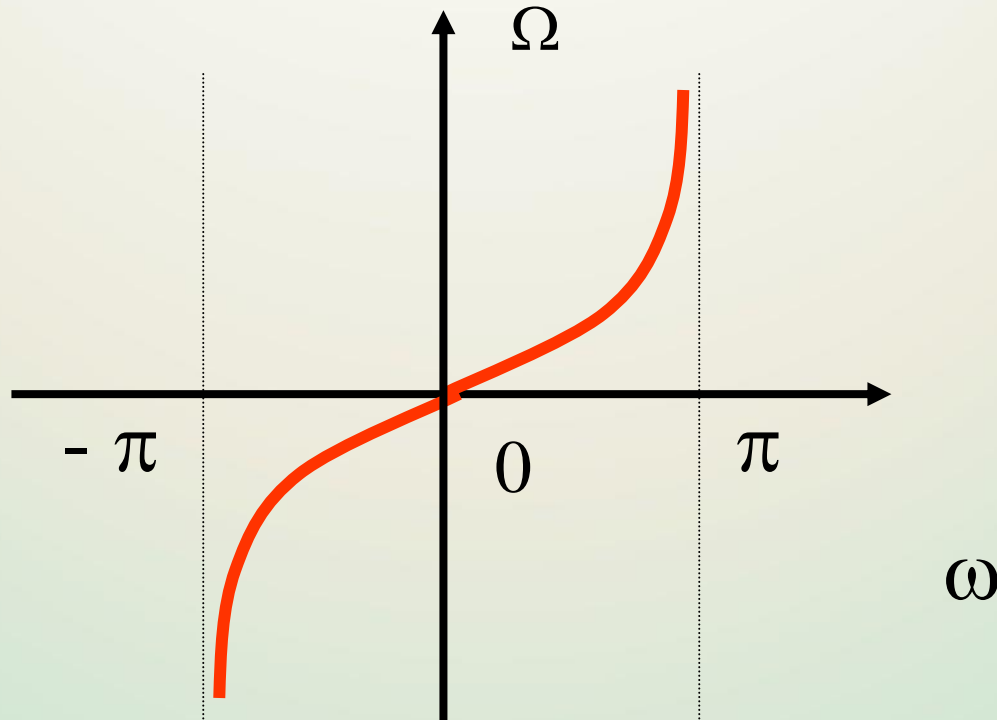


通过变换关系 $\Omega = \text{tg}\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \omega = 2\text{tg}^{-1}\Omega$



双线性变换法的原理

$$\Omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \omega = 2 \operatorname{tg}^{-1} \Omega$$



$$\Omega(-\infty, \infty) \rightarrow \Omega_1\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right) \rightarrow \omega(-\pi, \pi)$$



双线性变换法的原理

s平面整个j Ω轴 \longrightarrow **z平面的单位圆周**

$$j\Omega = j \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}} = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}$$

令 $s = j \Omega$

则 通过标准变换 $z = e^{sT} = e^{j \Omega T} = e^{j\omega}$

所以

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, z = \frac{1 + s}{1 - s}$$



双线性变换法的原理

为了使模拟滤波器的某一频率与数字滤波器的任一频率有对应关系，引入待定常数 $C=2/T$

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

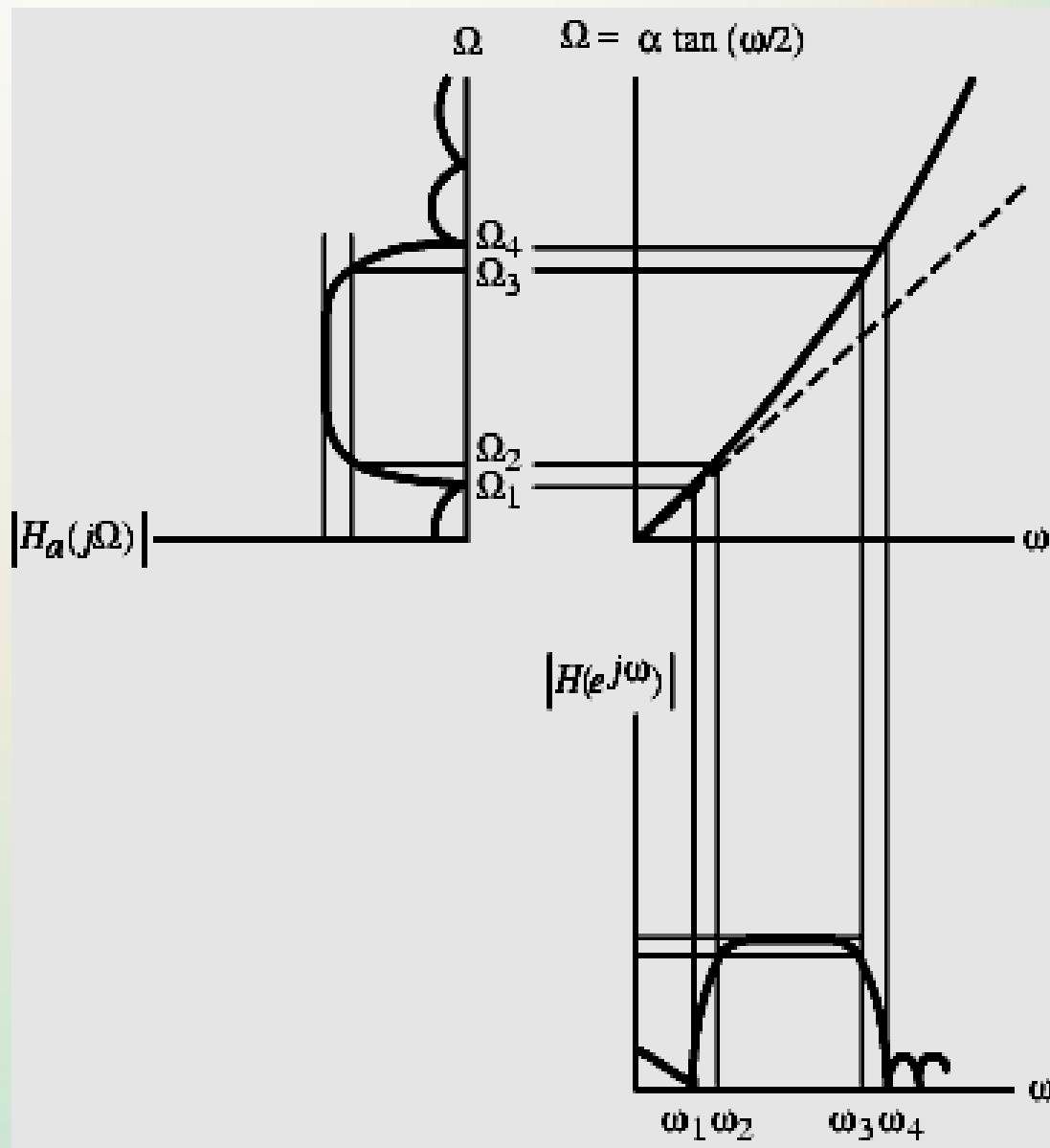
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$



6.4 IIR滤波器设计的双线性变换法

- 映射的非线性导致了频率轴的失真，称为频率畸变。
- 畸变的效果如右图所示：



双线性变换法设计数字滤波器

- 性能指标

将数字域的性能指标转变为模拟滤波器的性能指标

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- 计算模拟滤波器所需阶数N及3dB截止频率 Ω_c 。
- 查表求出归一化系统函数, 然后去归一化得模拟滤波器
- 由双线性变换法将模拟滤波器数字化

$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$



6.4 IIR滤波器设计的双线性变换法

例6.4.2 巴特沃兹低通数字滤波器的设计：

通带截止频率 $\omega_p = 0.2\pi$, 容许误差1dB, 阻带截止频率
 $\omega_s = 0.3\pi$, 最小阻带衰减是 15 dB

解： 1. 数字低通技术指标：

$$\omega_p = 0.2\pi, \alpha_p = 1\text{dB}, \omega_s = 0.3\pi, \alpha_s = 15\text{ dB}$$

2. 取T=1秒, 预畸变模拟低通技术指标：

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \cdot \text{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 2\text{tg}(0.1\pi) = 0.6498 \quad \alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \cdot \text{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 2\text{tg}(0.15\pi) = 1.0191 \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$



3.设计模拟巴特沃斯低通滤波器

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{1.0191}{0.6498} = 1.568$$

$$K_{sp} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}} = 10.8751$$

$$N = \frac{\lg K_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = \frac{\lg 10.8751}{\lg 1.568} = 5.3056 \quad \text{取} N=6$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{(10^{\alpha_s/10} - 1)}} = \frac{1.0191}{\sqrt[12]{(10^{15/10} - 1)}} = 0.7663$$



查表6.2.1 得到归一化低通原型函数

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^5 (p - p_k)} = \frac{1}{p^6 + b_5 p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

其中 $b_0 = 1, b_1 = 3.8637, b_2 = 7.4641, b_3 = 9.1416, b_4 = 7.4641, b_5 = 3.8637, \circ$

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=0}^5 (s - s_k)}$$

$$= \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$

4.双线性变换:

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$



数字滤波器的设计

小结 设计低通数字滤波器的步骤

1. 确定数字低通滤波器的性能指标
2. 确定对应的模拟低通滤波器的性能指标
3. 将数字滤波器的边界频率 ω_k 转换成模拟滤波器的相应的边界频率 Ω_k 。
 - (1) 脉冲响应不变法: $\omega_k = \Omega_k T$
 - (2) 双线性变换法: $\Omega_k = (2/T) \text{tg}(\omega_k/2)$
4. 设计模拟低通滤波器 $H_a(s)$
5. 利用脉冲响应不变法或双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成对应的数字滤波器 $H(z)$.



第六章作业

作业: 1, 5 (1), 9, 10

实验: 第十章的实验四, 双面打印, 抄袭为零分。

