

第五章

时域离散系统的网络结构



本章目录

- 网络结构的基本概念
- IIR系统的基本网络结构
- FIR系统的基本网络结构



引言

数字系统的数学模型可用差分方程和系统函数表示

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

数字系统的功能，就是把输入序列通过一定的运算变换成输出序列。

即采用不同的软件或硬件来实现以上二式表征的数学运算过程。



研究数字滤波器网络结构的必要性

同一个差分方程或系统函数可以有多种网络结构

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}} \\ &= \frac{-1.5}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{2.5}{1 - 0.5z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} \bullet \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \end{aligned}$$

不同的网络结构代表不同的算法。

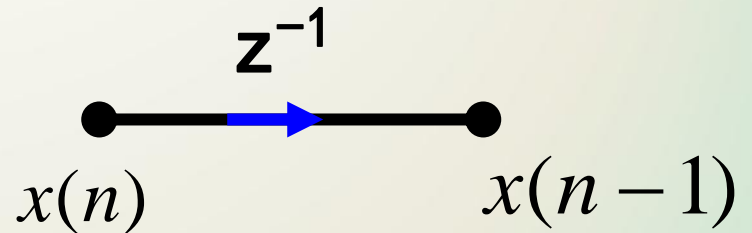
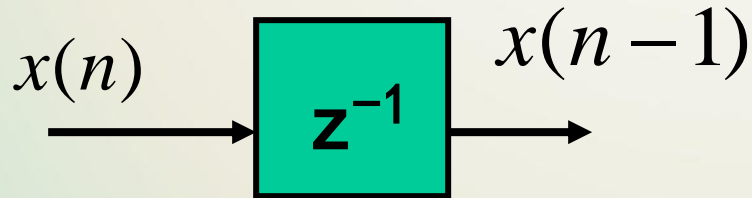
不同的算法直接影响系统的运算误差、运算速度、系统的复杂程度和成本等。



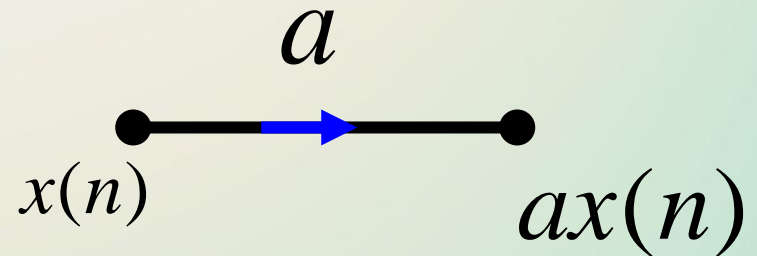
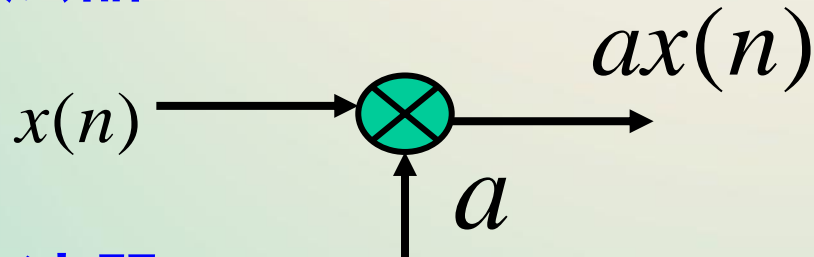
5.2 用信号流图表示网络结构

由差分方程可以看出，实现一个滤波器需要几种基本的运算单元

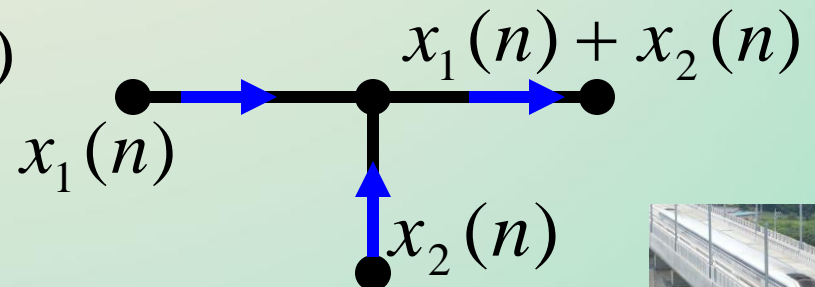
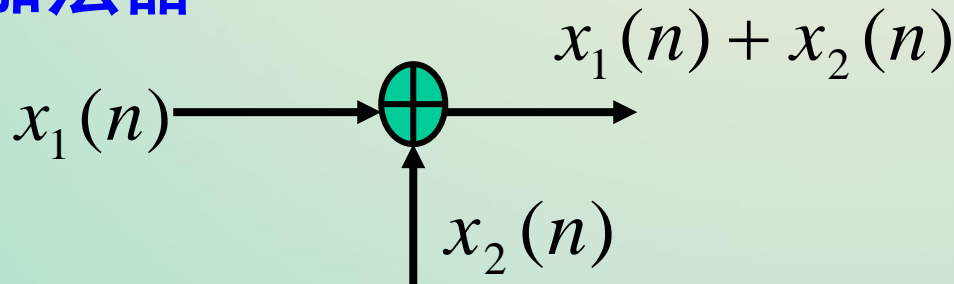
单位延迟




乘法器

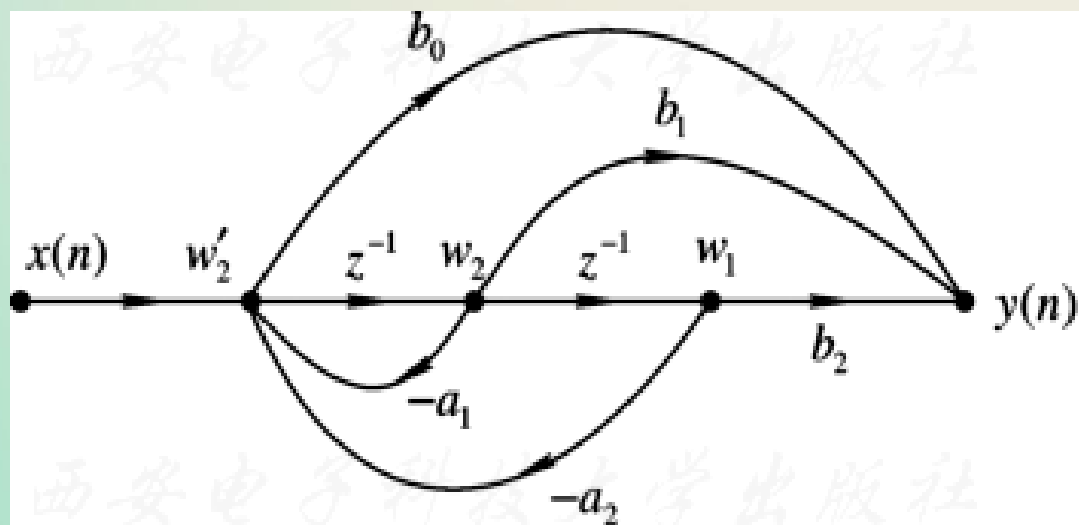


加法器

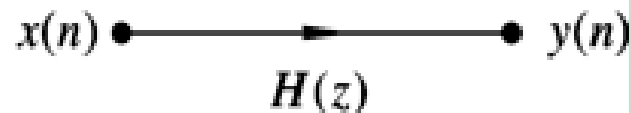


信号流图

- (1) 节点：表示系统中变量或信号的点，即
每一个节点代表一个变量。用 “” 表示。
- (2) 支路：连接两个节点之间的有向线段。
每一条支路代表一个子系统。支路旁标注的 $H(s)$ 代表支路的传输函数。

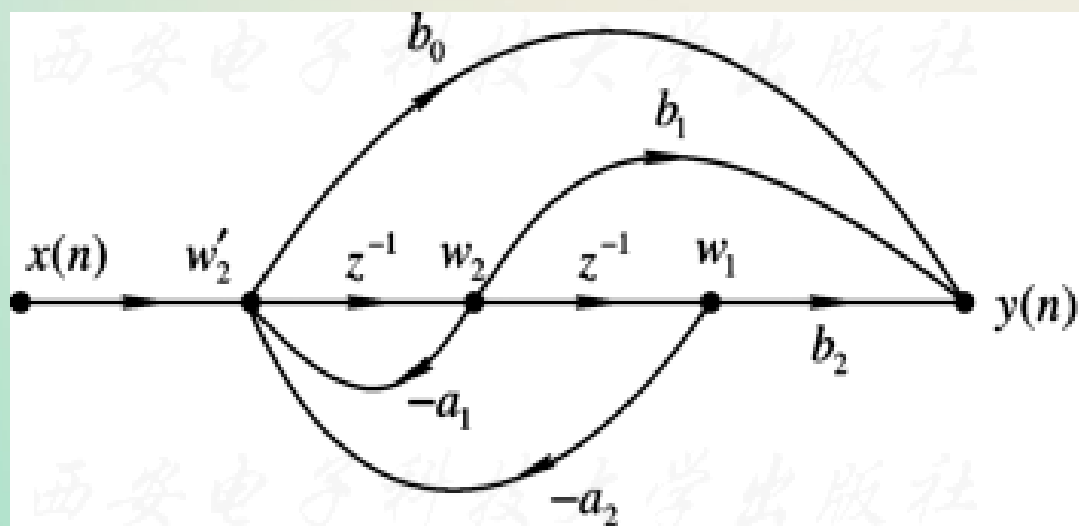


(a) 基本信号流图

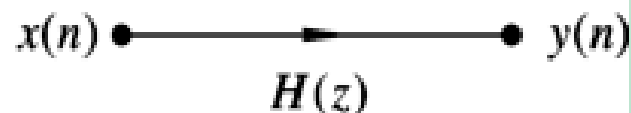


(b) 非基本信号流图

- (3) 源节点(激励节点): 只有输出支路的节点
- (4) 阱节点(响应节点): 只有输入支路的节点
- (5) 混合节点: 既有输入支路又有输出支路的节点。
- (6) 通路: 沿支路箭头方向通过各相连支路的途径。
- (7) 开通路: 与任意节点相交不多于一次的 通路。



(a) 基本信号流图



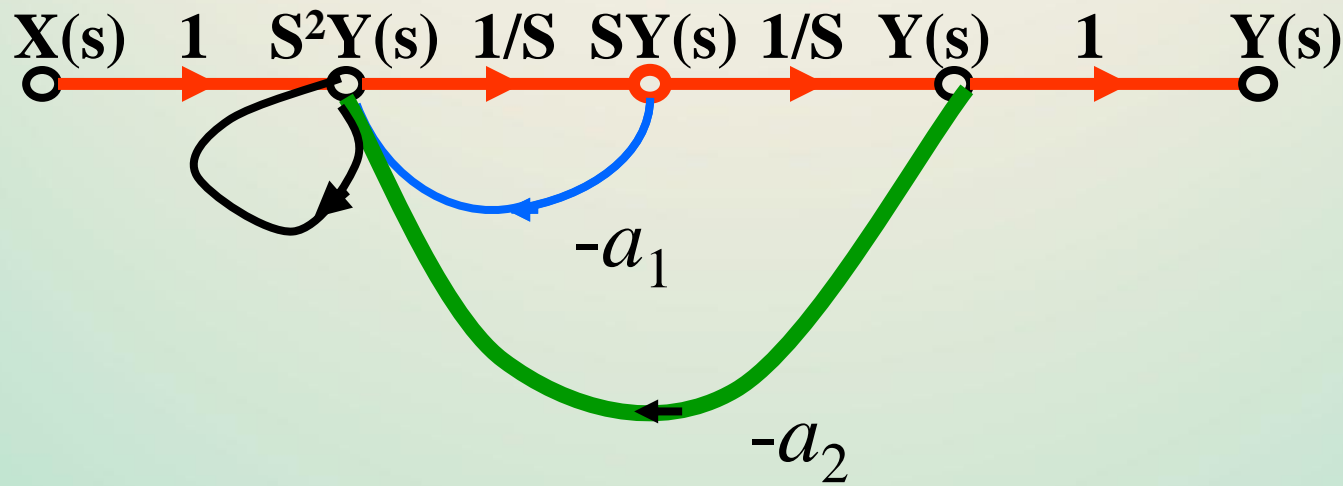
(b) 非基本信号流图

(8) 前向开通路：从输入节点到输出节点的 开通路。

(9) 环路：通路的终点就是通路的起点。

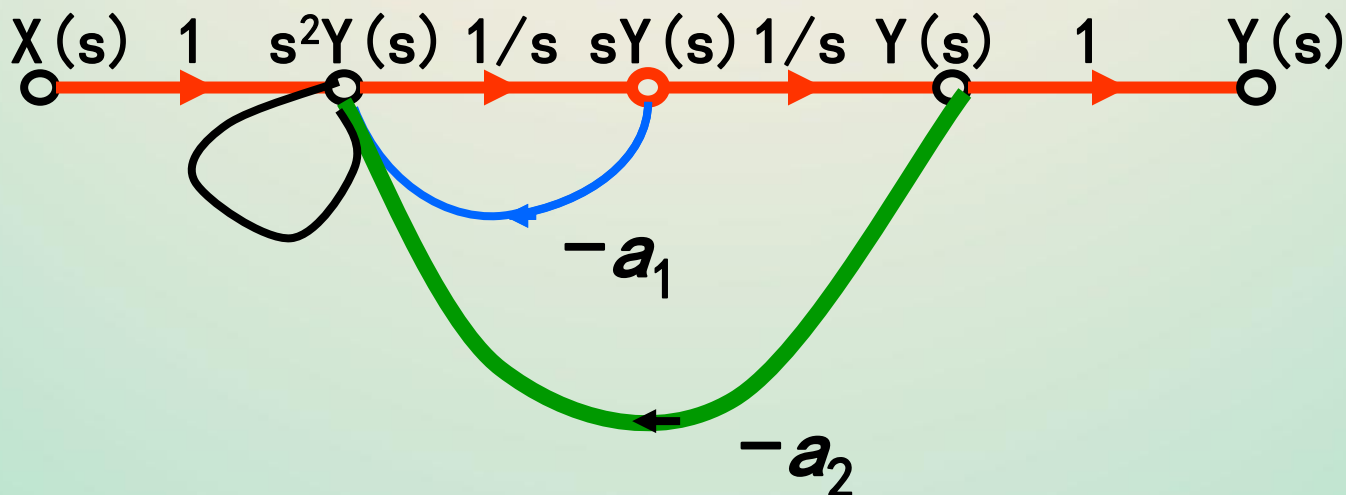
(10) 自环路：仅含有一个支路的环路。

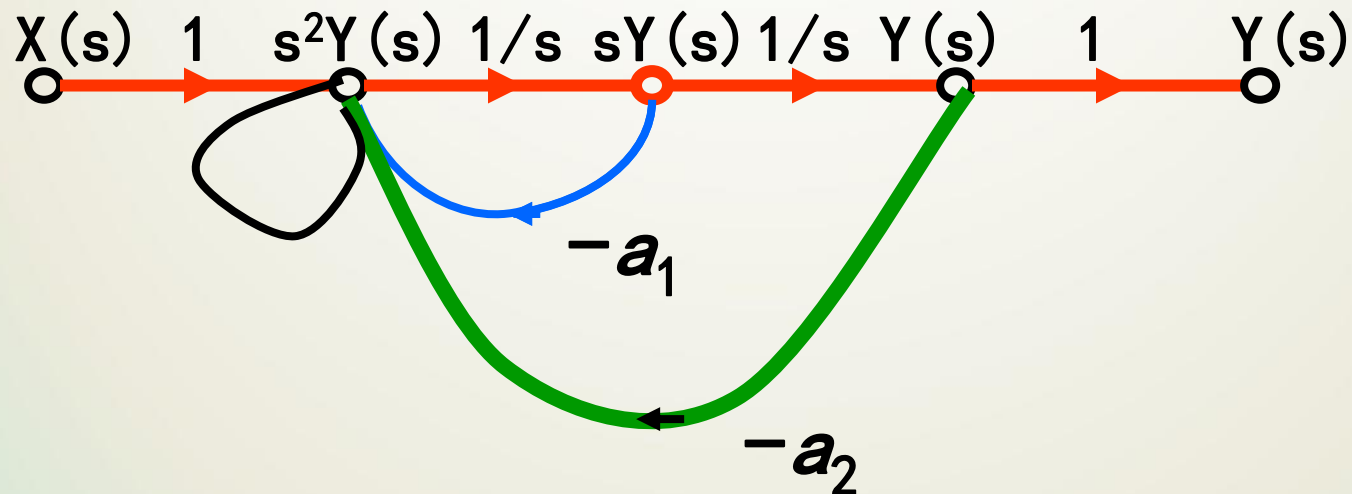
(11) 互不接触的环路：没有公共节点的两个环路。



规则及性质

- (1) 节点信号等于输入这个节点的支路信号之和；
- (2) 节点信号沿着所有离开这个节点的支路传输
- (3) 对给定系统信号流图的形式并不是唯一的。
- (4) 信号转置后，其传输函数保持不变。



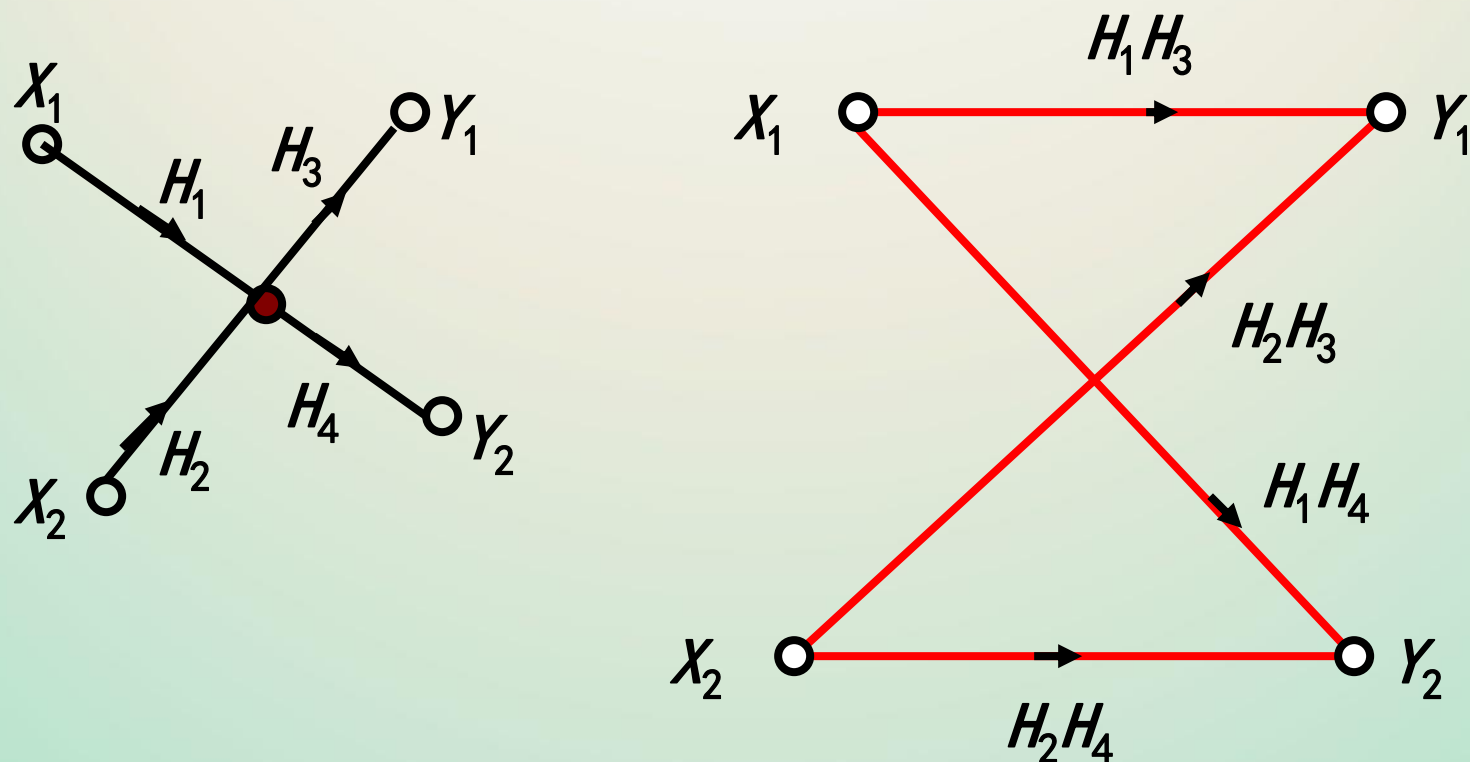


化简规则

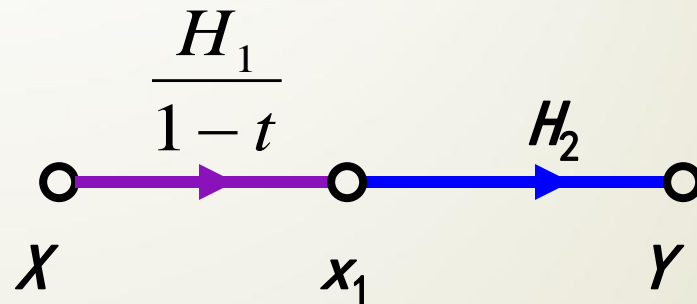
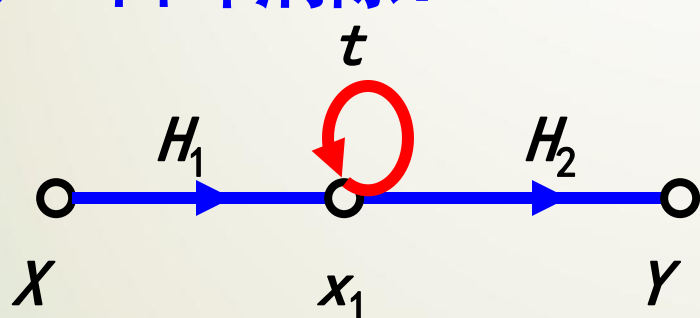
- (1) 支路串联化简
- (2) 支路并联化简



(3) 混合节点消除：消除混合节点后，形成的各新支路的传输值为其前后节点间通过被消除节点的各顺向支路传输值的乘积。

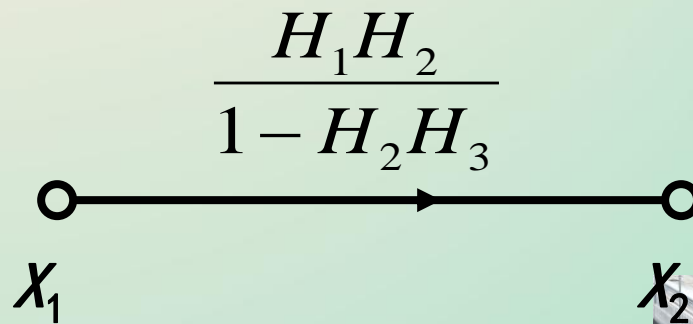
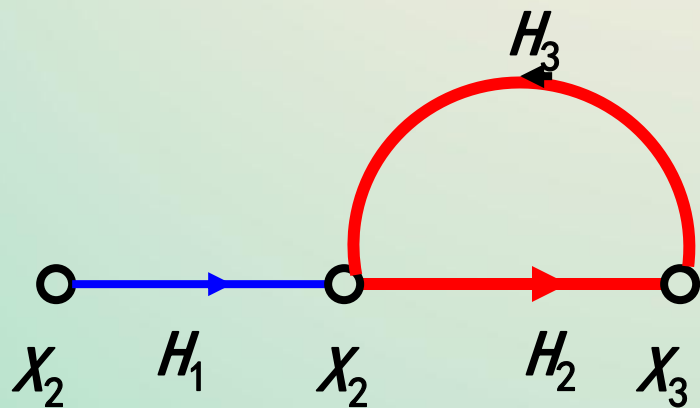


(4) 自环消除:



消除自环后，该节点的所有输入支路的传输函数都要除以 $(1-t)$

(5) 回路消除(反馈)



信号流图的梅森 (Mason) 公式

梅森公式可表示为

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_K G_K \Delta_K$$

式中： H为总传输值；

Δ 为信号流图的特征式。

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k + \dots$$



式中：

L_i 为第 i 个环路的传输函数，

$\sum_i L_i$ 为所有环路传输之和；

$L_i L_j$ 为两个互不接触环路传输函数的乘积；

$\sum_i L_i L_j$ 为所有两个互不接触环路传输函数的乘积；

$L_i L_j L_k$ 为三个互不接触环路传输函数的乘积

$\sum_i L_i L_j L_k$ 为所有三个互不接触环路传输函数的乘积；



.....

G_K 为由激励节点至所求响应节点的第K条前向开通路所有支路传输函数的乘积；

Δ_K 为第K条前向通路的路径因子，
即是除去与第K条前向开通路相接触的环路后，余下部分的特征式。



基本信号流图

- 不同的信号流图代表不同的运算方法，而对于同一个系统函数可以有多种信号流图与之相对应。
- 从基本运算考虑，满足以下条件，称为基本信号流图。
 - (1) 信号流图中所有支路都是基本支路，即支路增益是常数或者是 z^{-1} ；
 - (2) 流图环路中必须存在延迟支路；
 - (3) 节点和支路的数目是有限的。



网络结构的分类

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$1. N = 0 (a_k = 0), \quad y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

结构类型：非递归

系统的 $h(n)$ ：有限长序列，称为有限长单位脉冲（冲激）响应系统（**Finite Impulse Response**），简称FIR系统。



网络结构的分类

2. $N \neq 0 (a_k \neq 0)$,

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

结构类型：递归型

系统的 $h(n)$ ：无限长序列，称为无限长单位脉冲（冲激）响应系统（**Infinite Impulse Response**），简称IIR系统。



5.3 IIR系统基本网络结构

- 直接型
- 级联型
- 并联型



1. 直接I型网络结构

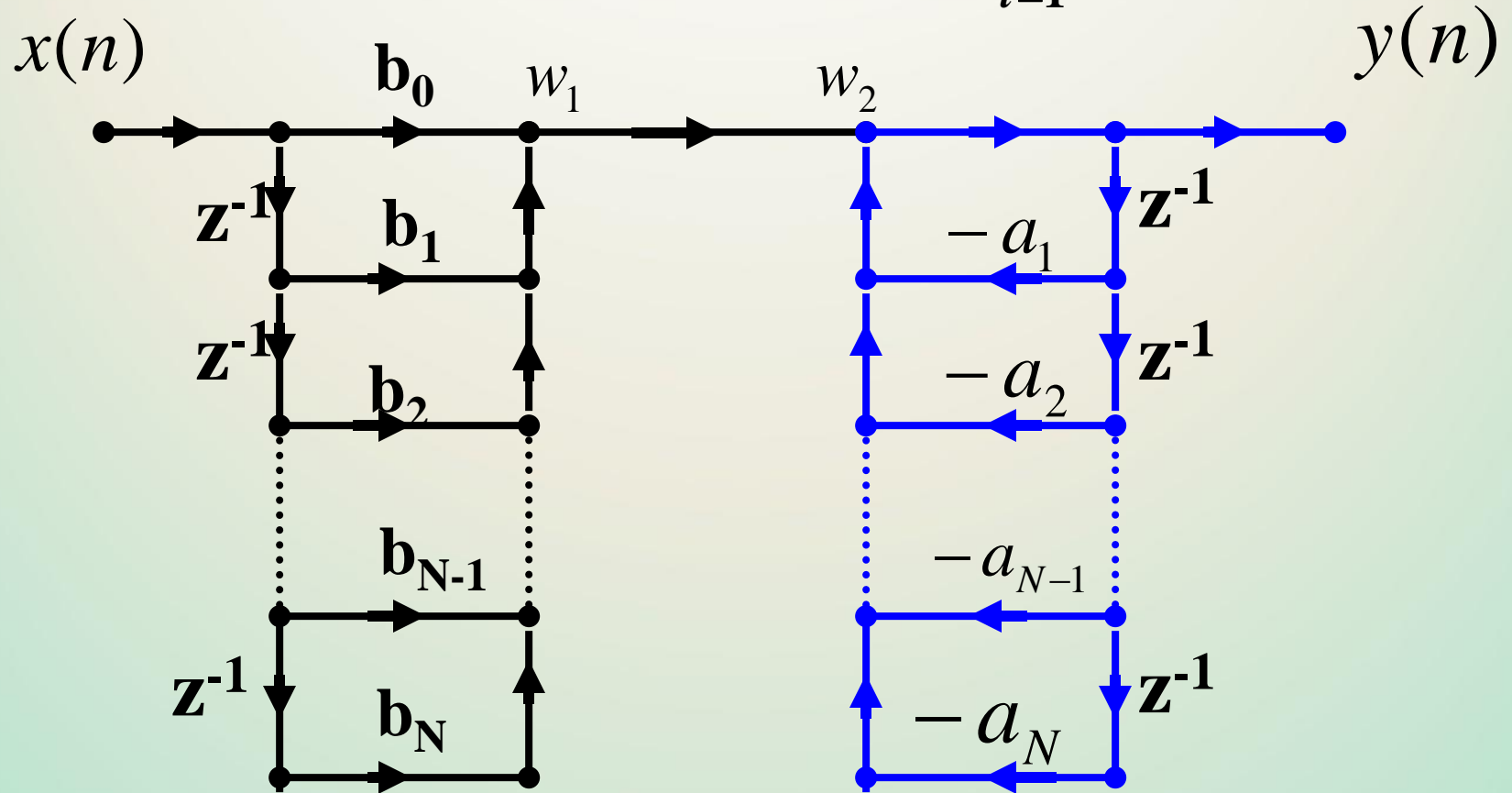
$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \left[\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \right] = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

分别用信号流图实现 $\mathbf{H_1(z)}$ 和 $\mathbf{H_2(z)}$



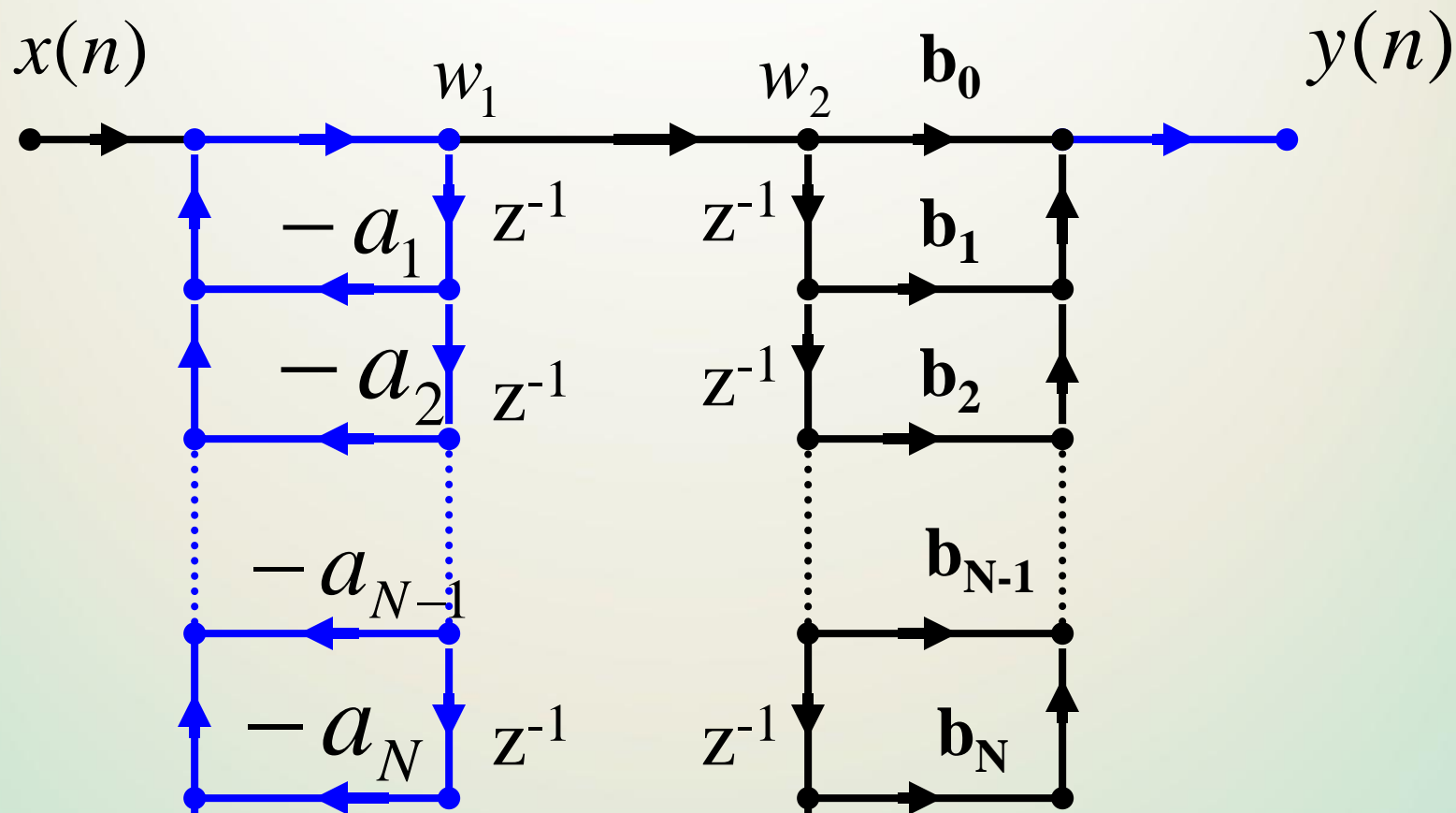
$$H_1(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}, \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$



$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$



直接II型网络结构

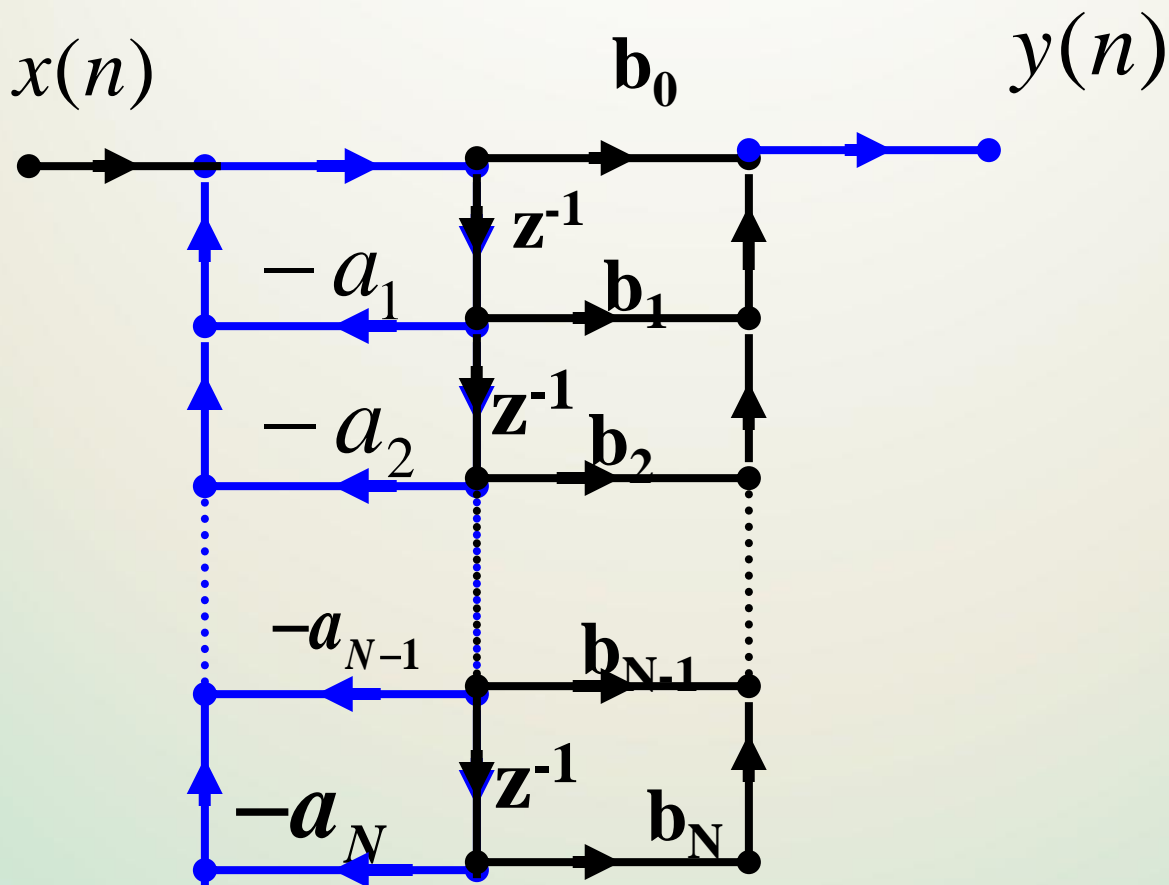


$$H(z) = H_2(z)H_1(z)$$

该图中节点变量 $w_1=w_2$ ，前后两部分延时支路可以合并。



直接II型网络结构



这种结构对于 N 阶差分方程只需 N 个延时单元。
这种形式又称典范型。



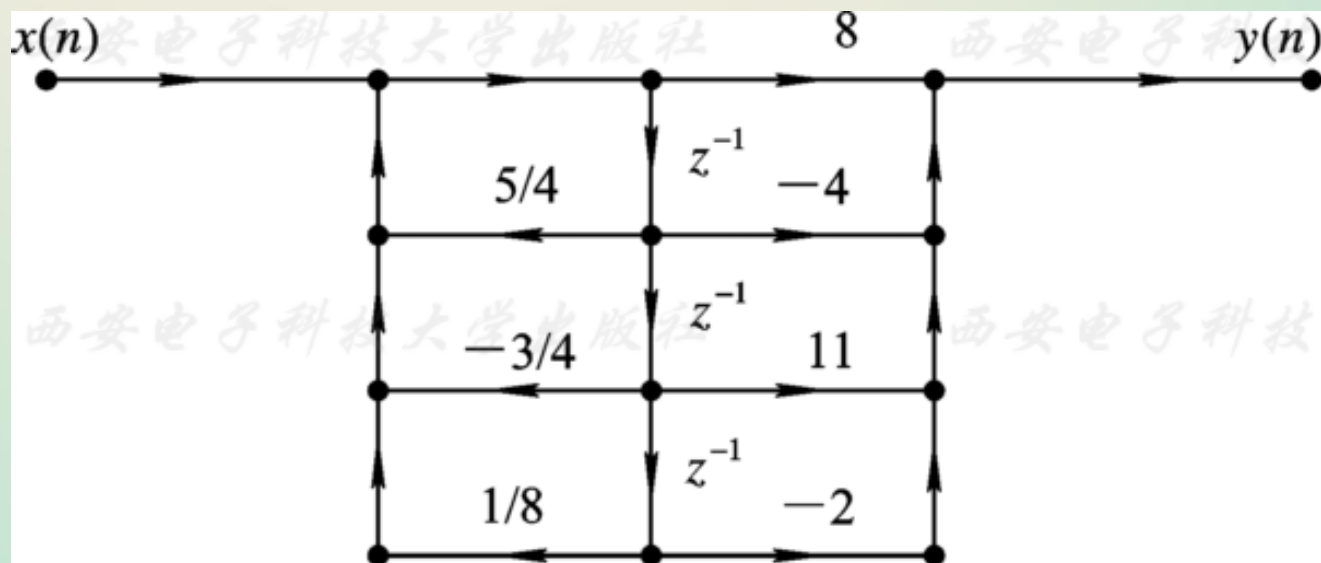
【例5.3.1】 设IIR数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

画出该滤波器的直接型结构。

解： 由 $H(z)$ 写出差分方程如下

$$y(n) = \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3) + 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3)$$



直接型网络结构

级联型

- 级联型表示

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

■ 由于系统函数 $H(z)$ 的系数 a_k 和 b_k 都是实数，因此 c_k 和 d_k 是实数或者共轭复数。

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - h_k z^{-1}) (1 - h_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - q_k z^{-1}) (1 - q_k^* z^{-1})}$$



- 将相互共轭的零点（极点）合并起来，形成一个实系数的二阶多项式。

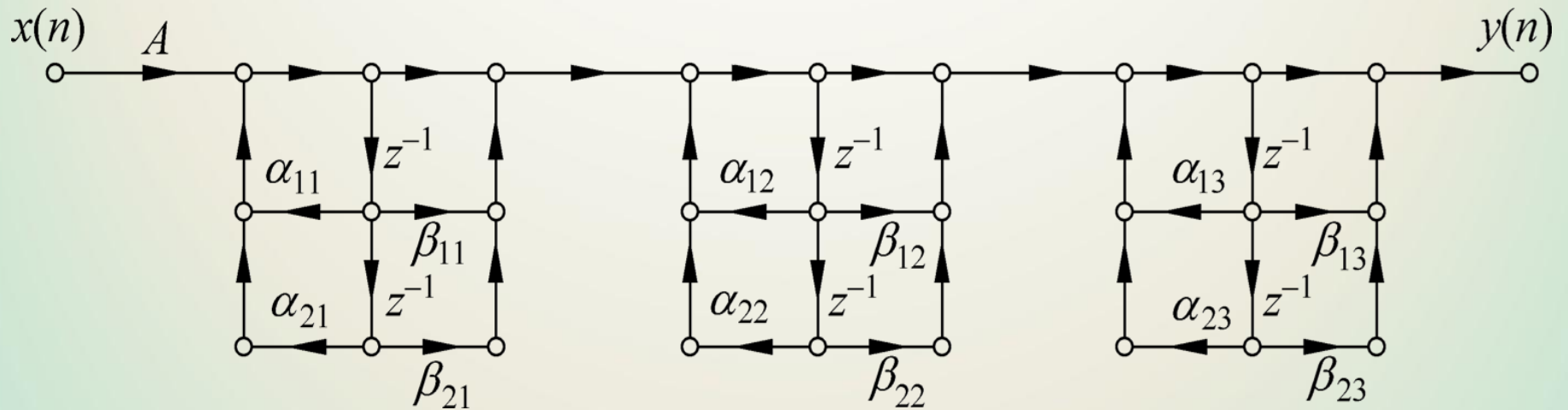
$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})}$$

- 为了简化级联形式，将实系数的两个一阶因子组合成二阶因子，则整个可写成实系数二阶因子的形式：

$$H(z) = A \prod_{k=1}^L \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_{k=1}^L H_k(z)$$



级联型结构



$$H(z) = A \prod_{k=1}^L \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_{k=1}^L H_k(z)$$



级联型结构的特点

- 每一个基本节与滤波器的一对极点和一对零点有关。
- 调整系数 β_{1k} 、 β_{2k} 可以单独调整滤波器第 k 对零点，而不影响其它零点、极点。
- 调整系数 α_{1k} 、 α_{2k} 单独调整滤波器第 k 对极点，而不影响其它零点、极点。
- 相对直接型结构，其优点是调整方便。
- 级联结构中后面的网络输出不会再流到前面，运算误差的积累相对直接型也小。

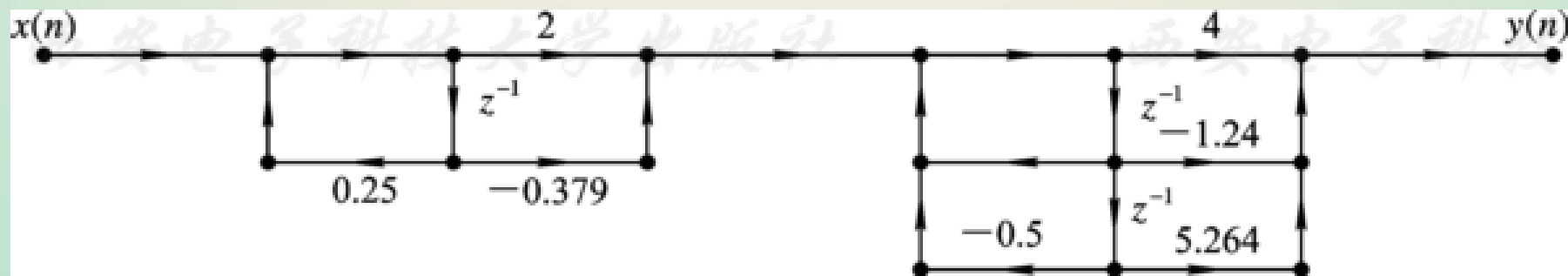


【例5.3.2】 设系统函数 $H(z)$ 如下式：

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}} \quad \text{试画出其级联型网络结构。}$$

解 将 $H(z)$ 的分子、分母进行因式分解，得到：

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$



注意：为减少单位延迟器的数目，将一阶的分子、分母多项式组成一个一阶网络，二阶的分子、分母多项式组成一个二阶网络，画出级联结构图如上图所示。



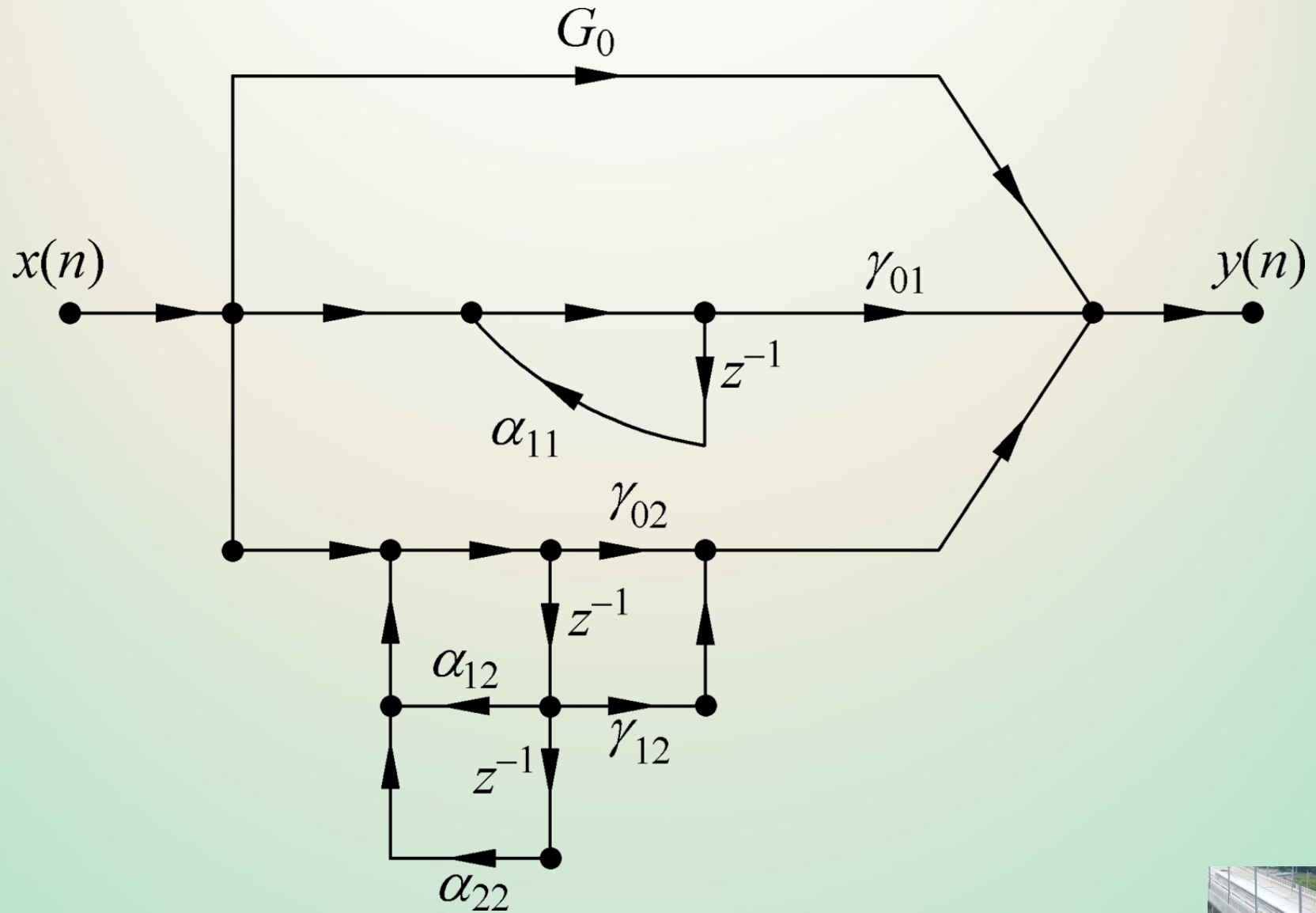
并联型

- 并联型表示

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - g_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \end{aligned}$$



并联型结构



并联型结构的特点

- 并联结构可以**单独**调整**极点**位置。
- 但**不能**像级联型那样单独调整**零点**的位置，因为并联型各子系统的零点，并非整个系统函数的零点。
- 各并联基本节的误差相互没有影响，因此，并联形式**运算误差最小**。
- 由于基本节并联，可同时对输入信号进行运算，因此并联型结构**运算速度快**。



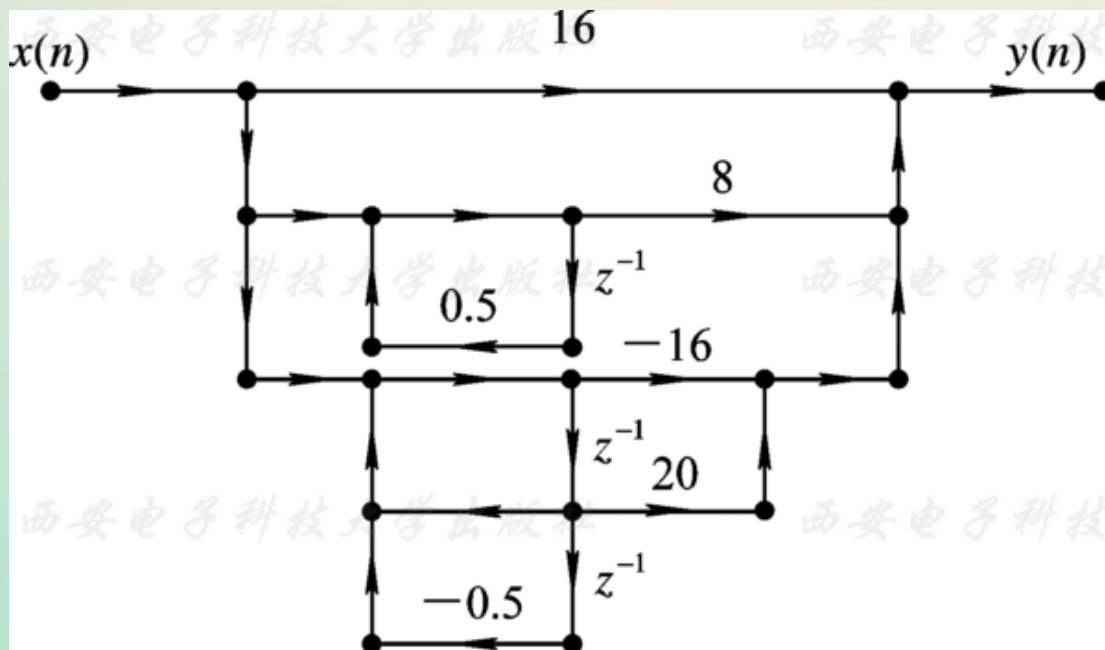
【例5.3.3】 画出例题5.3.2中的 $H(z)$ 的并联型结构。

- 解 将例5.3.2中 $H(z)$ 展成部分分式形式：

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

- 将每一部分用直接型结构实现，其并联型网络结构



MATLAB实现

- 级联型要求传输函数的因式分解,可以用**M**文件 **tf2sos**
- **[S,G]= tf2sos(B,A)**:实现直接型到级联型的转换。**B**和**A**分别为直接型系统函数分子分母多项式系数向量。
- 返回二阶级联传输函数的系数矩阵**S**和增益常数**G**.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = G \prod_{k=1}^L \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = G \prod_{k=1}^L H_k(z)$$



•SOS是一个 $L \times 6$ 的矩阵

$$\mathbf{SOS} = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & 1 & \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{0L} & \beta_{1L} & \beta_{2L} & 1 & \alpha_{1L} & \alpha_{2L} \end{bmatrix}$$

它的第 i 行包括系数 $\{\beta_{ij}\}$ 和 $\{\alpha_{ij}\}$,它们分别是二次多项式第 i 项的分子分母



5.4 FIR基本网络结构

- 直接型
- 级联型
- 频率采样型



5.4 FIR基本网络结构

- FIR网络结构特点是**没有反馈支路**，即没有环路，其**单位脉冲响应是有限长的**。
- 设单位脉冲响应 $h(n)$ 长度为 N ，其系统函数 $H(z)$ 和差分方程分别为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

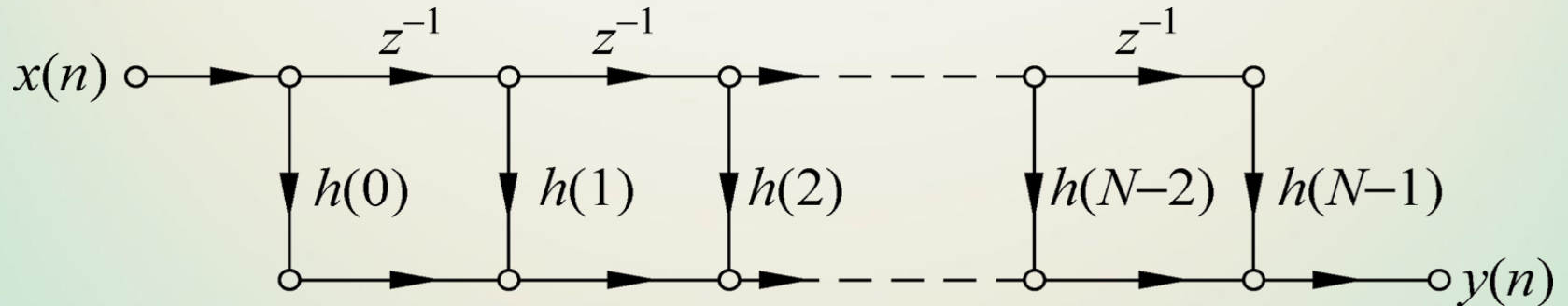


直接型

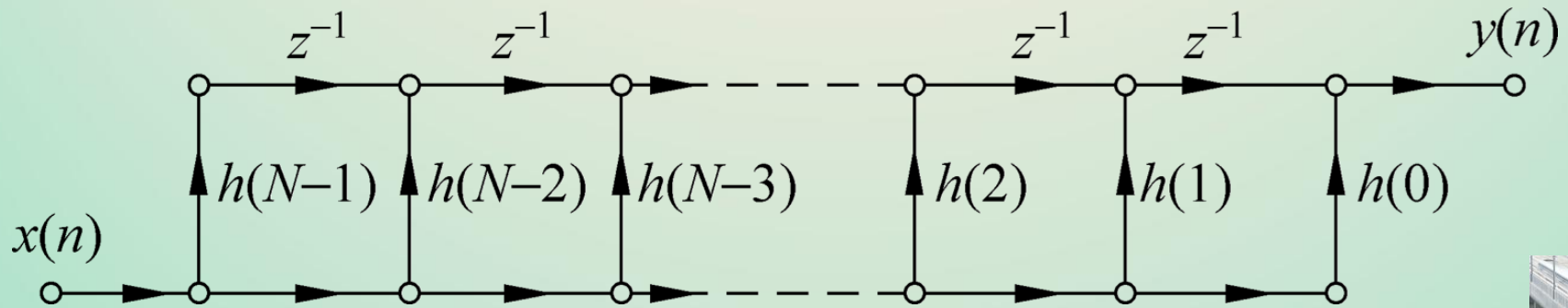
- FIR滤波器的差分方程

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

- FIR滤波器的直接型结构



- FIR滤波器的转置结构



级联型

- 级联型表示

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=0}^{N_1} (\alpha_{0k} + \alpha_{1k}z^{-1}) \prod_{k=0}^{N_2} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

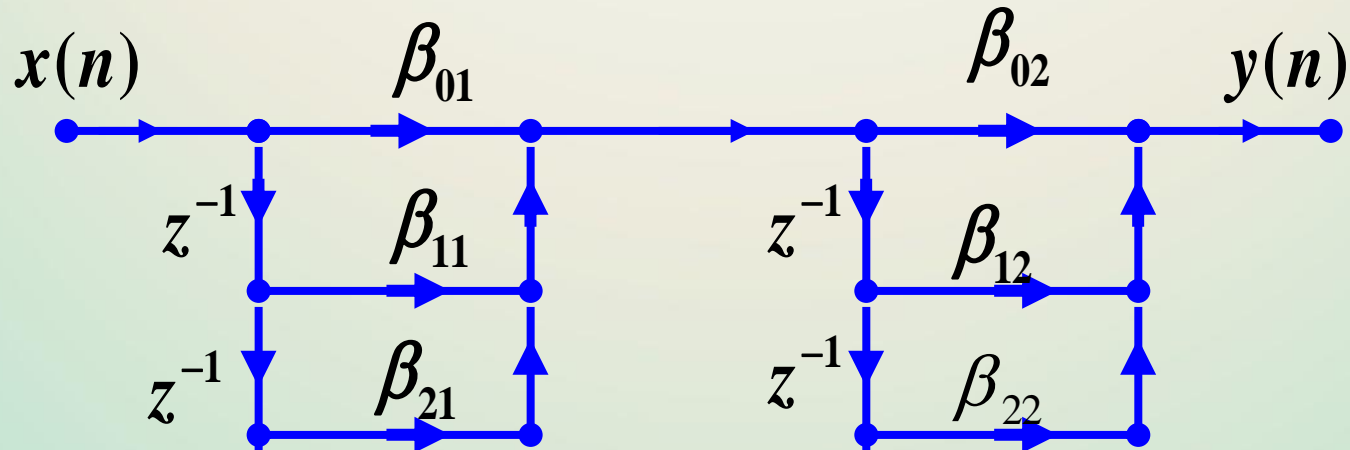
- 级联型结构的**特点**

- 级联型结构每一个一阶因子控制一个实数零点
- 每一个二阶因子控制一对共轭零点。
- 调整零点位置比直接型方便。但是它所需要的系数比直接型多，因而需要的乘法器多。



级联型

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=0}^{N_1} (\alpha_{0k} + \alpha_{1k}z^{-1}) \prod_{k=0}^{N_2} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$



【例5. 4. 1】 设FIR网络系统函数 $H(z)$ 如下式：

$$H(z) = 0.96 + 2.0z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$$

画出 $H(z)$ 的直接型结构和级联型结构。

- 解 将 $H(z)$ 进行因式分解，得到：

$$H(z) = (0.6 + 0.5z^{-1})(1.6 + 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

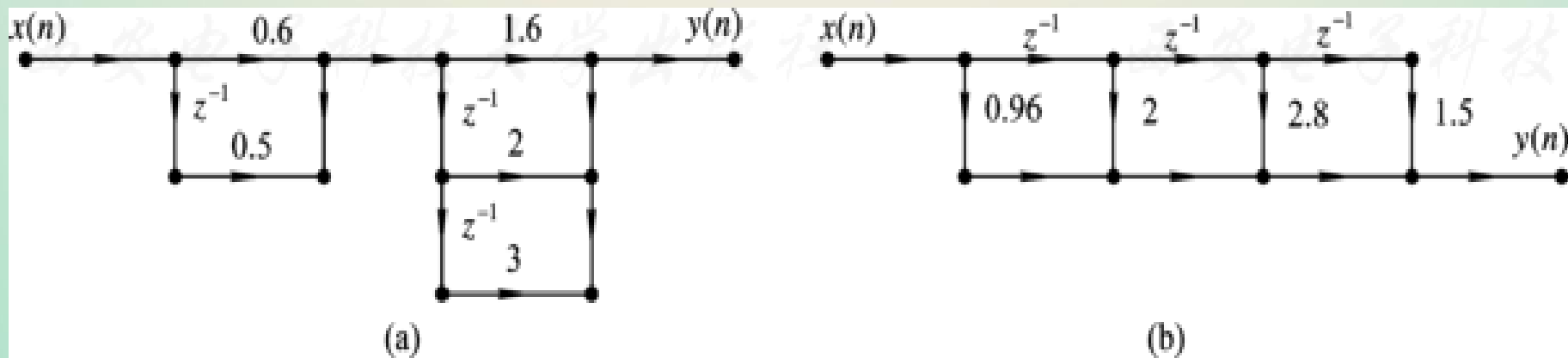


图5. 4. 2 例5. 4. 1图



Matlab求解

- $\mathbf{B}=[0.96, 2, 2.8, 1.5];$
- $\mathbf{A}=1;$
- $[\mathbf{S},\mathbf{G}]=\text{tf2sos}(\mathbf{B},\mathbf{A})$
- 运行结果： 书134页



5.5 FIR系统的线性相位结构

- 线性相位结构是直接型结构的化简，可节约近一半的乘法器
- 如果FIR滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 为实数，长度为 N ，且满足

$$h(n) = \pm h(N-1-n)$$

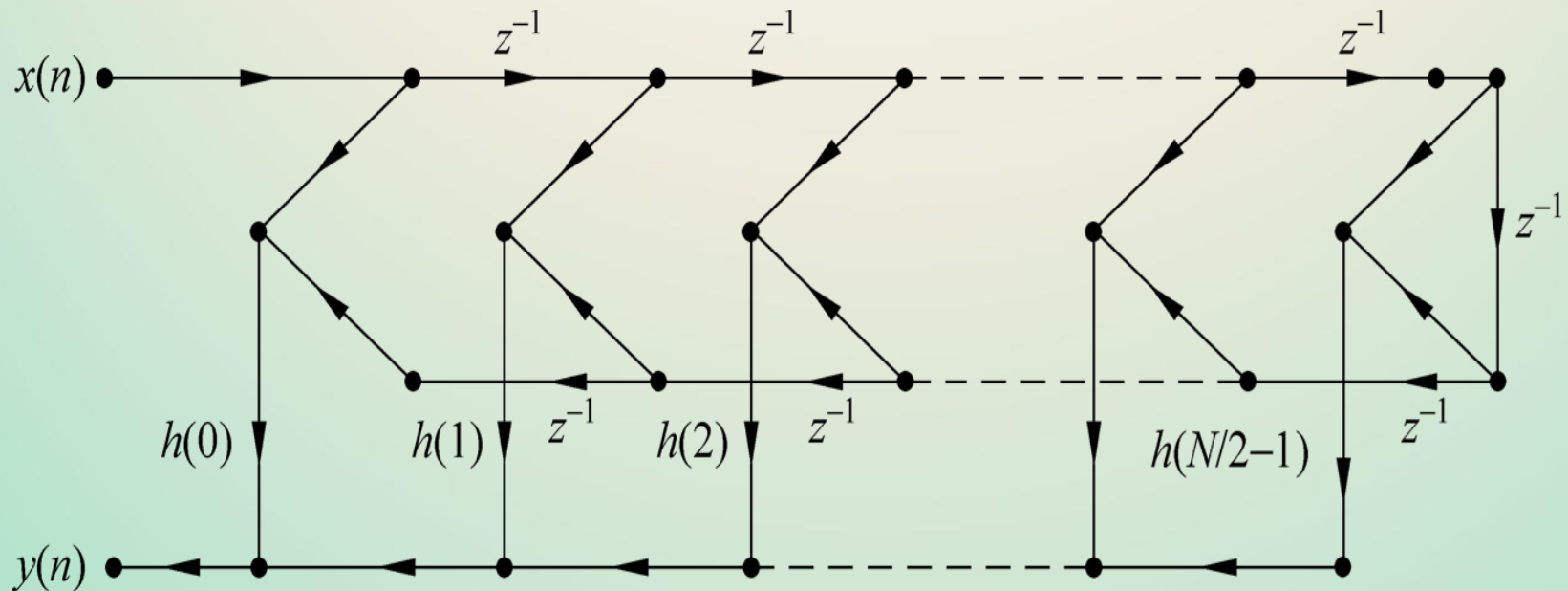
则滤波器具有线性相位。



$h(n)$ 为偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$

• 当 N 为偶数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)(z^{-n} + z^{-(N-n-1)})$$



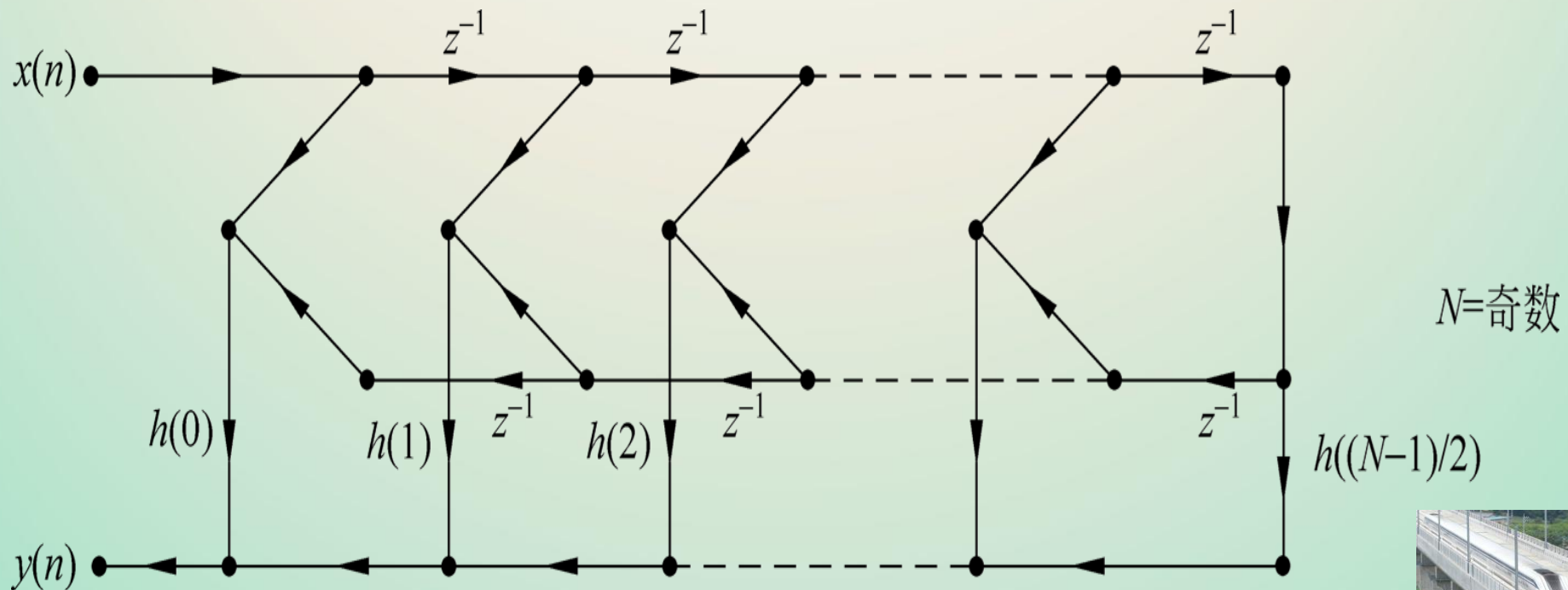
$N = \text{偶数}$



$h(n)$ 为偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$

• 当 N 为奇数

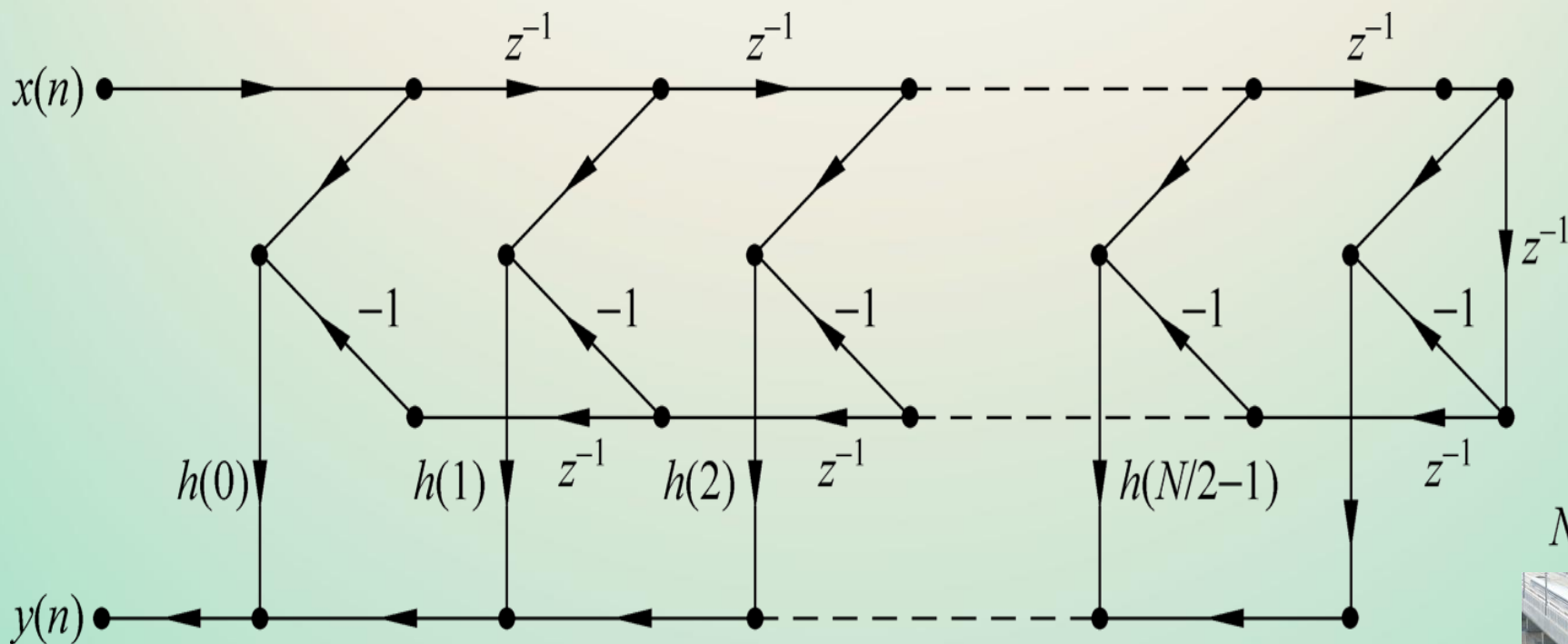
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$



$h(n)$ 为奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$

• 当 N 为偶数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)(z^{-n} - z^{-(N-n-1)})$$



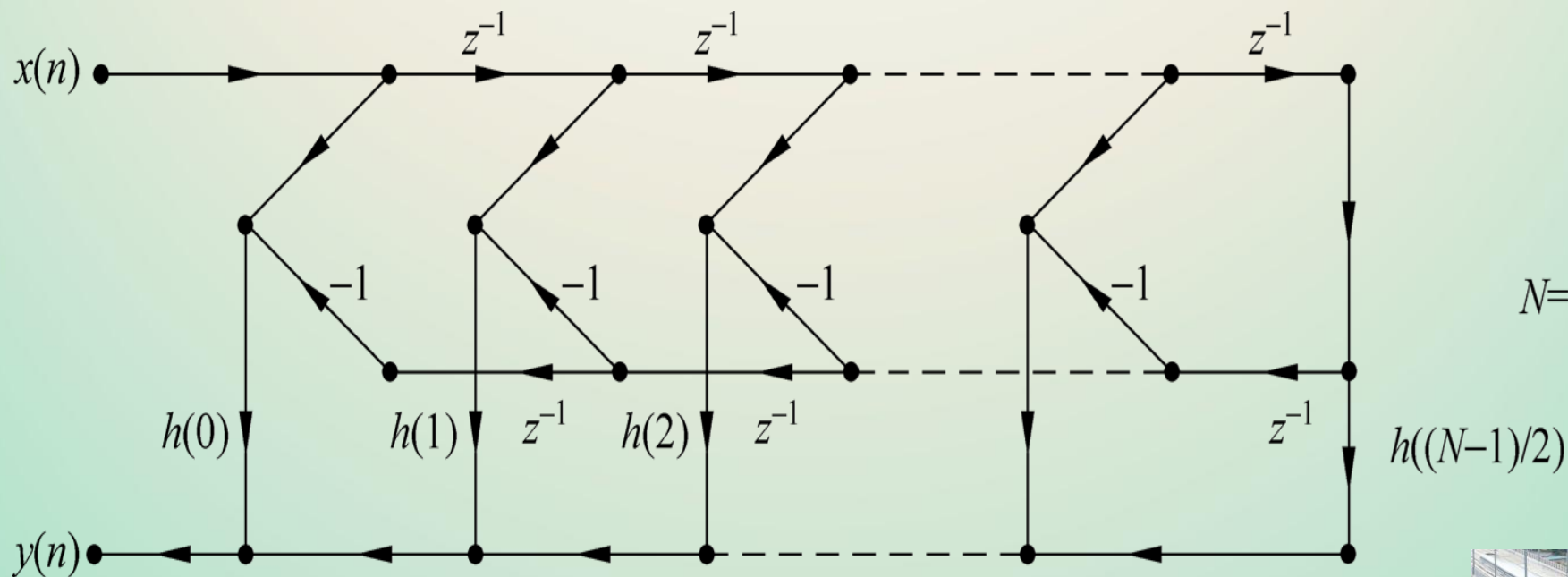
$N = \text{偶数}$



$h(n)$ 为奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$

• 当 N 为奇数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[z^{-n} - z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$



$N = \text{奇数}$



5.6 FIR系统的频率采样型结构

- 对系统函数取样

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- 插值公式
$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

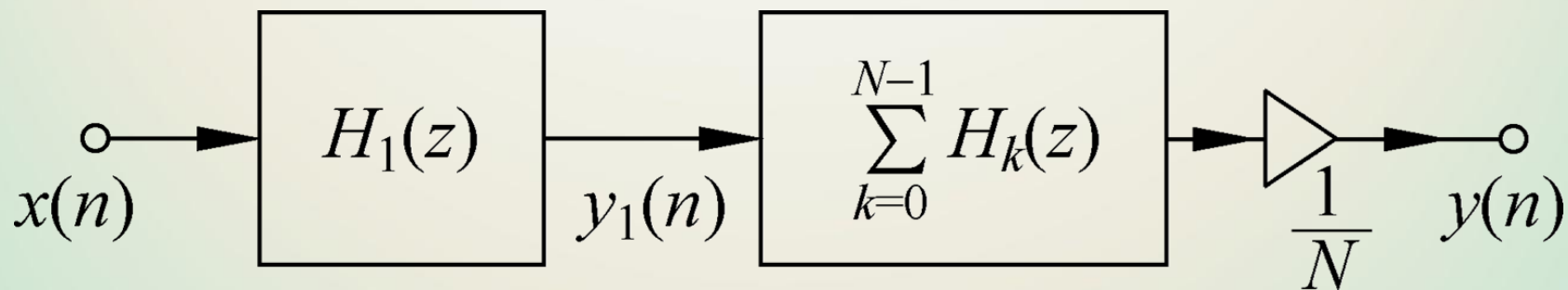
- 频率采样型结构

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$

$$H_c(z) = 1 - z^{-N} \quad H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



- 网络结构

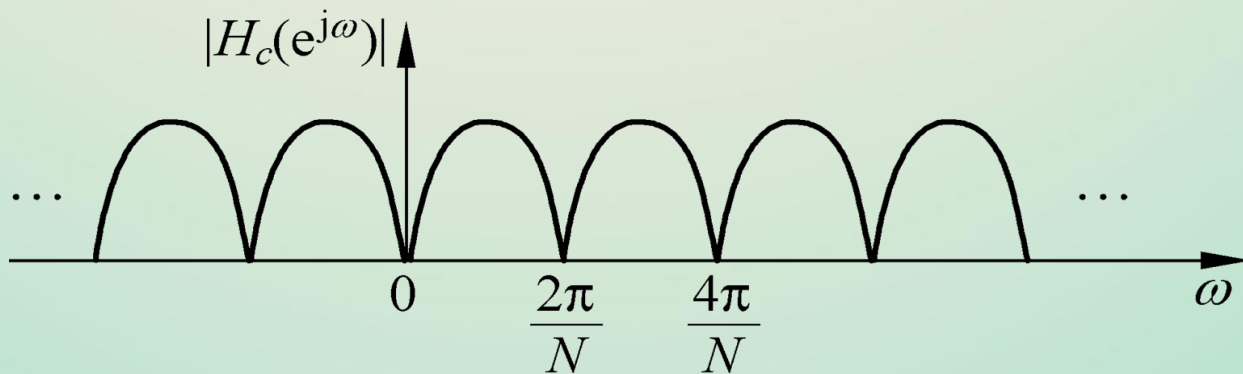
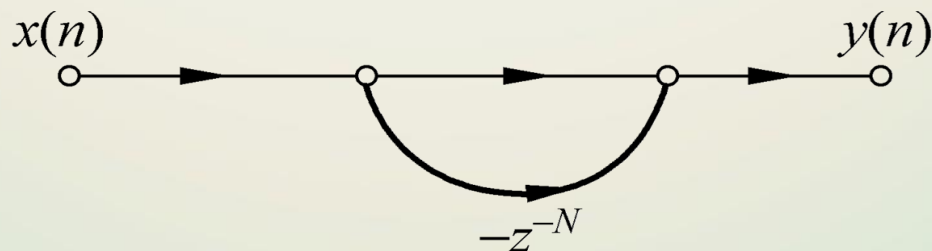


$H_c(z) = 1 - z^{-N}$ 为梳状滤波器

零点分布

梳状滤波器有N个零点，在单位圆上等间隔分布。

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

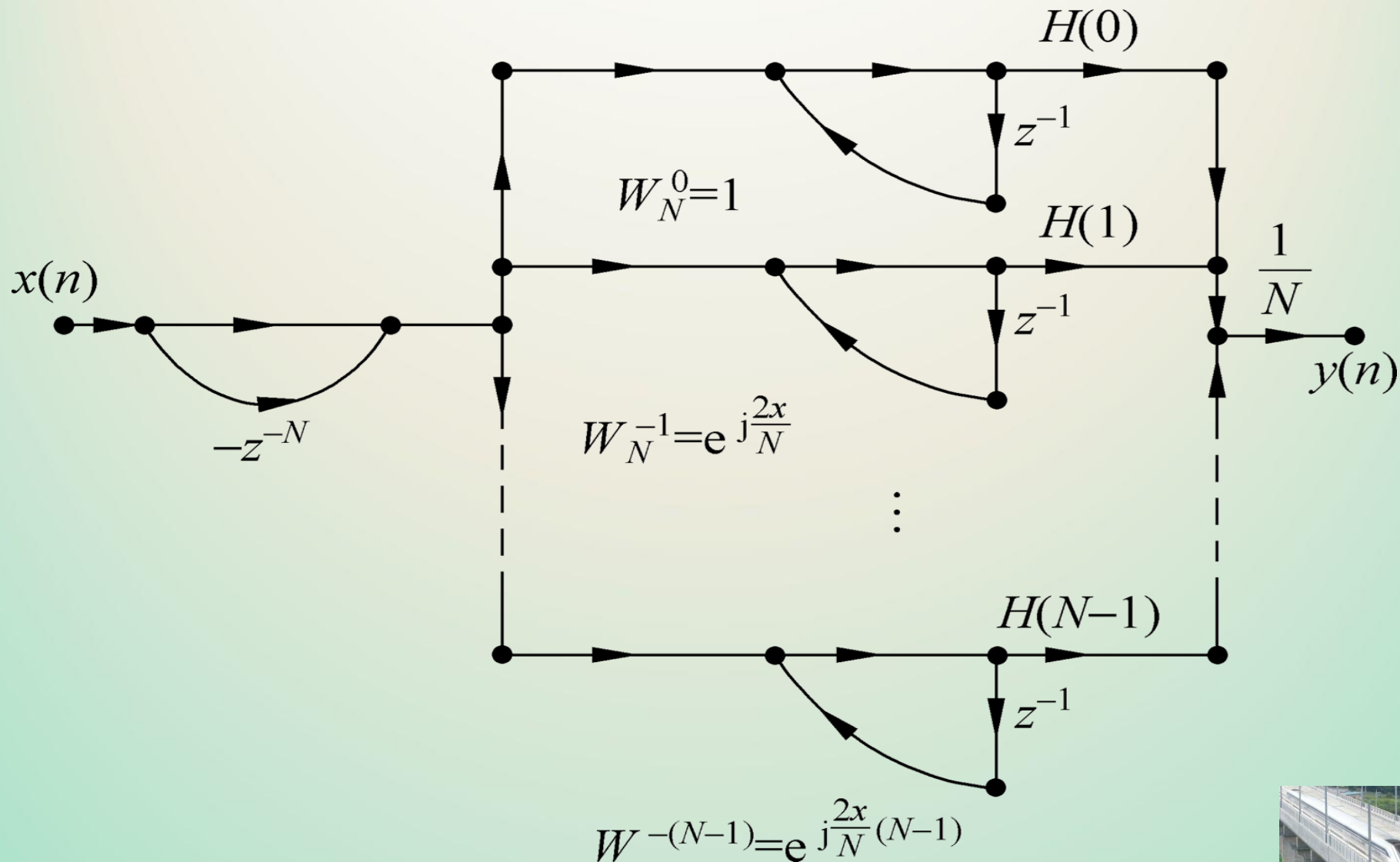
- 由N个一阶网络并联而成
- 每个一阶网络都是一个谐振器，它们在单位圆上各有一个极点

$$z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

- 这些谐振器的极点正好与梳状滤波器的零点相抵消，从而使这些频率点上的频率响应等于H(k)



FIR滤波器的频率取样结构



频率采样结构的特点

优点

- 系数 $H(k)$ 就是滤波器在频率采样点 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处的响应，因此控制滤波器的频率响应比较方便。
- 只要 $h(n)$ 长度 N 相同，滤波器结构就相同，不同的只是各支路的增益 $H(k)$ ，可以标准化、模块化。



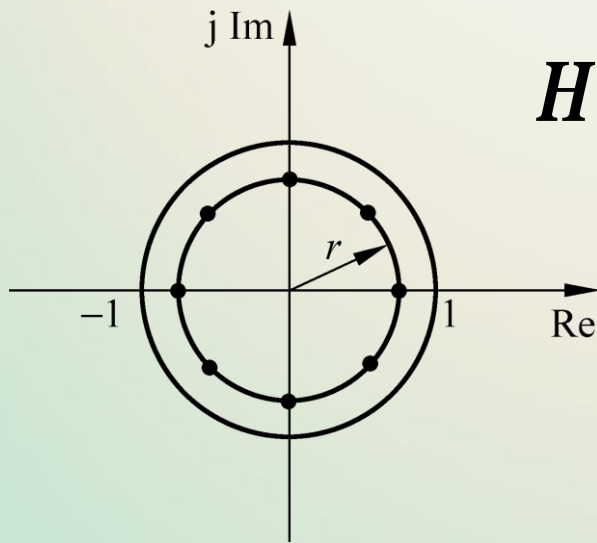
频率采样结构的特点

- 缺点
- 所有谐振网络的极点位于单位圆上，系统稳定是靠这些极点与梳状滤波器在单位圆上的零点对消来保证的。如果滤波器的系数稍有误差，有些极点就不能被零点所抵消，从而导致系统不稳定。
- 所有的系数 $H(k)$ 和 W_N^{-k} 都是复数，复数相乘对硬件实现是不方便的。



对频率采样结构的修正

- 将单位圆上的极零点向内收缩到半径为 r 的圆上, $r < 1$ 且 $r \approx 1$



$$H(z) \approx \left(1 - r^N z^{-N}\right) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

如果由于某种原因, 零极点不能抵消时,
极点位置仍在单位圆内, 保持系统稳定。



对频率采样结构的修正

- 若 $h(n)$ 为实数序列，则 $H(K)$ 共轭对称，
- 即 $H(k) = H^*(N - k), \quad W_N^{-k} = W_N^{N-k}$
- 将第 k 和第 $N-k$ 个谐振器合并为一个实系数二阶网络，从而将复数乘法运算变成实数运算。

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N - k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}}$$



对频率采样结构的修正

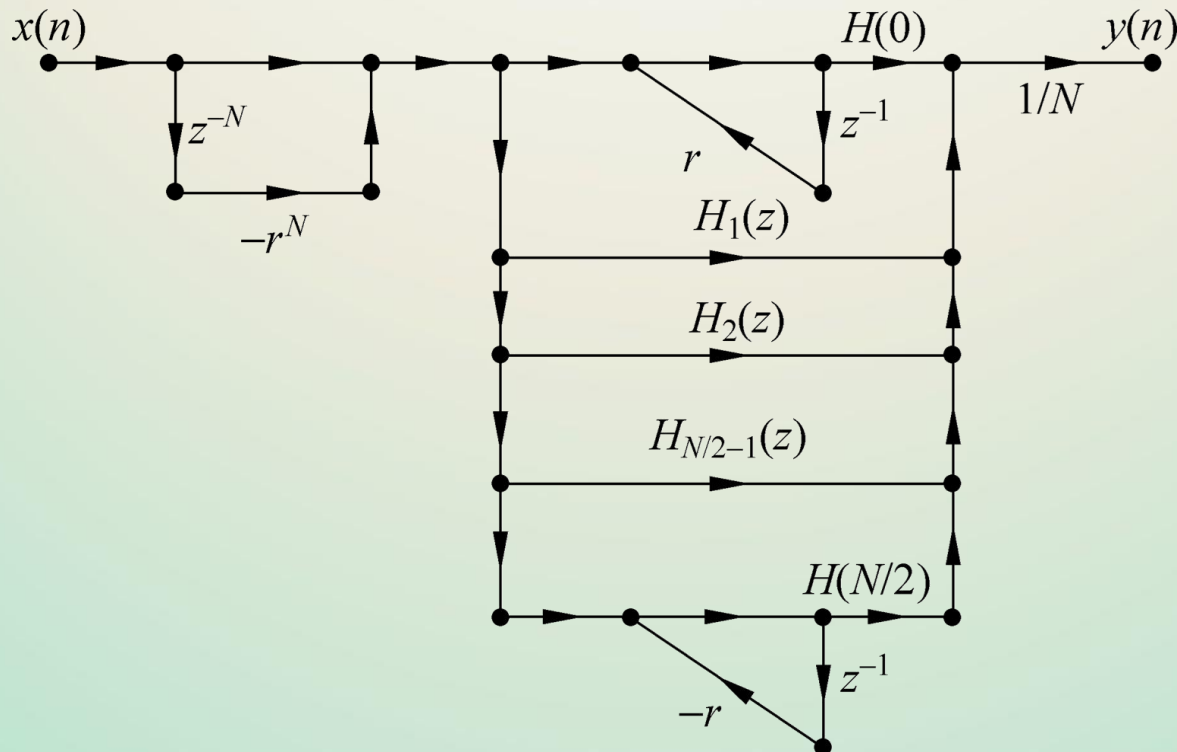
$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}} \\ &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H^*(N-k)}{1 - r(W_N^{-k})^*z^{-1}} \\ &= \frac{2\operatorname{Re}[H(k)] - 2\operatorname{Re}[rH(k)W_N^k]z^{-1}}{1 - 2r\cos(\frac{2\pi}{N}k)z^{-1} + r^2z^{-2}} \end{aligned}$$



对频率采样结构的修正

- N为偶数

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} H_k(z) \right]$$



对频率采样结构的修正

- N为奇数

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right]$$



作业

- 1, 4, 5, 7, 9
- 10, 12

