西南交通大学 2021－2022 学年第(一)学期半期考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：

密封装订线　姓名　学号　班级

一．选择题（每小题 5 分，共计 20 分）

1．设 A 是 n 阶方阵，则下面哪个命题与“ A 可逆”不是等价命题（　　）

（A）$rank(A)=n$；　（B）A 等于有限个初等矩阵的乘积；

（C）$|A|\neq 0$；　（D）$Ax=b$ 有无穷多个解.

2．设矩阵 A,B,C 均为 3 阶可逆阵，则下列 6 个等式中成立的有（　　）

(1) $(AB)C=A(BC)$；　(2) $(AB)^T=A^TB^T$；　(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

(4) $|A^T|=-|A|$；　(5) $|AB|=|A|\cdot|B|$；　(6) $|(-2)A|=-2|A|$.

(A) (4)、(5)、(6)；　(B) (2)、(3)、(6)；

(C) (1)、(3)、(5)；　(D) (2)、(4)、(6) .

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$，则变矩阵 A 为矩阵 C 的初等变换

过程 $\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2+(-2)c_1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 可用矩阵乘法表示为（　　）

(A) $P^TPA=P^TB=C$；　(B) $PAP^T=BP^T=C$；

(C) $P^TAP=P^TB=C$；　(D) $APP^T=BP^T=C$.

4．已知 A,B 均为 n 阶矩阵，且 $AB=A+B$，则

（1）若 A 可逆，则 B 可逆；　（2）若 B 可逆，则 $A+B$ 可逆；

（3）若 $A+B$ 可逆，则 AB 可逆；　（4）$A-E$ 一定可逆.

上述命题中，正确的命题共有（　　）

（A） 1 个　（B） 2 个　（C） 3 个　（D） 4 个.

二．填空题（每小题 5 分，共计 20 分）

5．已知 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$，求 $\sum_{j=1}^{n} A_{1j}=$______________.

6．设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|(2A)^{-1}-5A^*\right|=$______________.

7．已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，存在可逆矩阵 P 使得 $AP=PB$，则 $B^{200}-2A^2=$ ____________.

8．已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______________.

三、计算题（共计 48 分）

9.（12 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

10.（12 分）设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

11.　（12 分）已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1}=XA^{-1}+6E$，求 X.

12.（12 分）设非齐次线性方程组 $\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda \end{cases}$，问 λ 取何值时，此方程组

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？

四．证明题（每小题 6 分，共计 12 分）

13．设 x 为 n 维列向量，且 $x^Tx=1$，令 $H=E-2xx^T$，证明：$H^TH=E$.

14．设 A 为 n 阶实矩阵，$AA^T=O$ 充要条件为 $A=O$.