姓名________ 学号________ 班级________

密封装订线

西南交通大学 2017-2018 学年第(2)学期考试试卷

课程代码 3271018 课程名称 复变函数 A 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总成绩
得分										

一、求下列各式的值.（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}}$；

2. $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} z^m\cos\dfrac{1}{z}$（$m$ 为正整数）.

二、计算复积分：$I=\int_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z\sin z}$，其中 是圆周$|z-1|=3$，取逆时针方向.（10 分）

三、将函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$在圆环域$1<|z+1|<+\infty$中展为洛朗级数.（10 分）

四、叙述并证明代数学基本定理.（12 分）

五、求分式线性变换，将 $-1, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i}$ 分别映为 $\mathrm{i}, \infty, 1$．（8 分）

六、求函数 $f(z)=\mathrm{e}^{z}-4z^{n}+1$ 在单位圆周 $|z|=1$ 内部的零点个数（n 为正整数）．（10 分）

七、指出函数 $F(z)=\mathrm{Ln}\dfrac{z(z+1)^{2}}{(z-1)^{3}}$ 的全部支点，并作适当的支割线，使 $F(z)$ 能分出单值解析分支，并求在 $z_0=2$ 处取实值的分支在 $z_1=\mathrm{i}$ 处的函数值. （12 分）

八、求函数 $f(z)=\dfrac{z^2+\pi^2}{z^2(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})}$ 在扩充复平面上的所有奇点，并判断其类型（极点要指明阶数）.（14 分）

九、利用留数方法计算实积分：$I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{5}-2\cos x)^2}$.（12 分）

2018 复变函数 A 参考答案及评分标准

一、求下列各式的值.（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}}$

$-2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$ ……………………………………………………（1 分）

$\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\mathrm{i}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{3}\mathrm{i}}\ (k=0,1,2)$ ……………………………（2 分）

$-2+2\mathrm{i}$ 的三个立方根分别为

$w_0=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ ……………………………………………………（1 分）

$w_1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}=(1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$ ……………………（1 分）

$w_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}=(1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}$ ……………………（1 分）

注：如果三个立方根只写成 $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}},\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{19\pi}{12}\mathrm{i}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}}$（或三角形式），扣 2 分.

2. $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} z^m\cos\frac{1}{z}$（$m$ 为正整数）

$z^m\cos\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 中有洛朗展式

$$z^m\cos\frac{1}{z}=z^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-m}}$$ ……………………（2 分）

当 m 为偶数时，$\operatorname*{Res}\limits_{z=0} z^m\cos\frac{1}{z}=0$ ……………………………………………（2 分）

当 m 为奇数时，$\operatorname*{Res}\limits_{z=0} z^m\cos\frac{1}{z}=\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)!}$. ……………………………（2 分）

二、计算复积分：$I=\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z\sin z}$，其中 C 是圆周 $|z-1|=3$，取逆时针方向.（10 分）

$f(z)=\frac{1}{z\sin z}$ 在 C 内部有一个二阶极点 0，一个单极点 π ……………………（2 分）

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to0}[z^2f(z)]'=\lim_{z\to0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\cos z-(\cos z-z\sin z)}{2\sin z\cos z}=\lim_{z\to0}\frac{z}{2\cos z}=0$$ ……………（3 分）

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)=\left.\frac{1}{z\cos z}\right|_{z=\pi}=-\frac{1}{\pi}$$ ……………………………………………（2 分）

由留数定理，$I=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)\right]=-2\mathrm{i}$ ………………………………（3 分）

三、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$ 在圆环域 $1<|z+1|<+\infty$ 中展为洛朗级数.（10 分）

方法一：$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z+1}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z+1}}=\dfrac{1}{z+1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z+1}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z+1)^{n+1}}$ ……………………（4 分）

$$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(z+1)^{n+2}}$$ ……………………………………………（3 分）

$f(z)=\dfrac{1}{z+1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{(z+1)^{n+2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{(z+1)^{n+3}}$（或写成 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n-2}{(z+1)^n}$）…………（3 分）

方法二：$f(z)=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z+1}$ ……………………………………………………（2 分）

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z+1}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z+1}}=\dfrac{1}{z+1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z+1}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z+1)^{n+1}}$ ……………………（4 分）

$$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(z+1)^{n+2}}$$ ……………………………………………（3 分）

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{(z+1)^{n+2}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z+1)^{n+1}}+\dfrac{1}{z+1}=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n-2}{(z+1)^n}$ …（1 分）

四、叙述刘维尔定理和代数学基本定理的内容，并用刘维尔定理证明代数学基本定理.（12 分）

刘维尔定理：有界整函数必为常数. ……………………………………………（2 分）

代数学基本定理：

在复平面上，n 次代数方程至少有一个根（或 n 次多项式至少有一个零点）（$n\geq 1$）.
……………………………………………（2 分）

用刘维尔定理证明代数学基本定理：

设 $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\ (a_0\neq 0)$，并假设 $p(z)$ 在 z 平面上没有零点，则 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面上解析，即它是整函数. ……………………………………………（2 分）

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^n\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right)}=0$$

因此存在$R>0$，使得当$|z|>R$时，$\left|\frac{1}{p(z)}\right|\le 1$. ……………………………… （2分）

由于$\frac{1}{p(z)}$在紧集$|z|\le R$上连续，因此有界，即存在$M>0$，使得当$|z|\le R$时，

$\left|\frac{1}{p(z)}\right|\le M$. ……………………………………………………… （2分）

于是在整个z平面上有$\left|\frac{1}{p(z)}\right|\le M+1$，即$\frac{1}{p(z)}$是有界整函数. 由刘维尔定理，

$\frac{1}{p(z)}$为常数，即$p(z)$为常数，这与$p(z)$是n次多项式（$n\ge 1$）矛盾. 因此$p(z)$在z平面上必有零点. ……………………………………………… （2分）

五、求分式线性变换，将$-1, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i}$分别映为$\mathrm{i}, \infty, 1$.（8分）

$(\mathrm{i}, \infty, 1, w)=(-1, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, z)$ ……………………………………… （2分）

$\frac{w-\mathrm{i}}{1}:\frac{1-\mathrm{i}}{1}=\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}:\frac{1+\mathrm{i}+1}{1+\mathrm{i}-\mathrm{i}}$ ……………………………… （3分）

$w=\frac{\mathrm{i}z+3}{(2+\mathrm{i})z+1-2\mathrm{i}}$ ……………………………………… （3分）

注：答案在形式上不唯一.

六、求函数$f(z)=\mathrm{e}^z-4z^n+1$在单位圆周$|z|=1$内部的零点个数（n为正整数）.（10分）

在单位圆周$|z|=1$上，有

$$|\mathrm{e}^z+1|\le|\mathrm{e}^z|+1\le \mathrm{e}^{|z|}+1=\mathrm{e}+1\text{，}\quad |-4z^n|=4$$

因此$|-4z^n|>|\mathrm{e}^z+1|$ ……………………………………………… （6分）

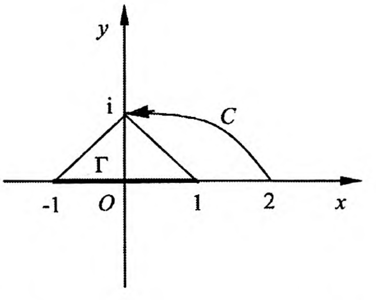
由鲁歇定理，$f(z)=\mathrm{e}^z-4z^n+1$与$g(z)=-4z^n$在$|z|=1$内部有相同个数的零点，即$f(z)$在$|z|=1$内部有n个零点. ……………………………………… （4分）

七、指出函数 $F(z)=\mathrm{Ln}\dfrac{z(z+1)^2}{(z-1)^3}$ 的全部支点，并作适当的支割线，使 $F(z)$ 能分出单值解析分支，并求在 $z_0=2$ 处取实值的分支在 $z_1=\mathrm{i}$ 处的函数值.（12 分）

$F(z)$ 的全部支点为 $-1,0,1$. ……………………………………………………（3 分）

作割线 $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}\mid -1\le \mathrm{Re}\,z\le 1, \mathrm{Im}\,z=0\}$，则在区域 $\mathbf{C}\setminus\Gamma$ 中 $F(z)$ 可以分出单值解析分支.

……………………（2 分）



设 $f(z)=\dfrac{z(z+1)^2}{(z-1)^3}$，$F(z)$ 在 $z_0=2$ 处取实值的分支为 $\ln f(z)$.

在 $\mathbf{C}\setminus\Gamma$ 中任意作一条从 $z_0=2$ 到 $z_1=\mathrm{i}$ 的曲线 C（如图）……………………（1 分）

则 $\Delta_C\arg f(z)=\Delta_C\arg z+2\Delta_C\arg(z+1)-3\Delta_C\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{2}+2\cdot\dfrac{\pi}{4}-3\cdot\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{5\pi}{4}$

……………………………………………………（3 分）

因此 $\ln f(\mathrm{i})=\ln|f(\mathrm{i})|+\mathrm{i}\arg f(\mathrm{i})=\ln|f(\mathrm{i})|+\mathrm{i}[\arg f(2)+\Delta_C\arg f(z)]$

$$=\ln\left|\frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)^2}{(\mathrm{i}-1)^3}\right|+\mathrm{i}\left[0+\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}$$ ……………（3 分）

八、求函数 $f(z)=\dfrac{z^2+\pi^2}{z^2(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})}$ 在扩充复平面上的所有奇点，并判断其类型（极点要指明阶数）.（14 分）

$f(z)$ 的全部奇点为 $k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbf{Z})$ 和 ∞. ……………………………………………（2 分）

$\lim\limits_{z\to 0}z^3f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z(z^2+\pi^2)}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{3z^2+\pi^2}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}=\dfrac{\pi^2}{2}\neq 0$，因此 0 是 3 阶极点. ……（3 分）

$\lim\limits_{z\to\pm\pi\mathrm{i}}f(z)=\lim\limits_{z\to\pm\pi\mathrm{i}}\dfrac{1+\dfrac{\pi^2}{z^2}}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}=\lim\limits_{z\to\pm\pi\mathrm{i}}\dfrac{-\dfrac{2\pi^2}{z^3}}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}=\pm\dfrac{\mathrm{i}}{\pi}$，因此 $\pm\pi\mathrm{i}$ 都是可去奇点. ……（4 分）

当 $k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0,\pm 1$ 时，

$$\lim_{z\to k\pi\mathrm{i}}(z-k\pi\mathrm{i})f(z)=\lim_{z\to k\pi\mathrm{i}}\frac{(z-k\pi\mathrm{i})(z^2+\pi^2)}{z^2(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})}$$

$$=\lim_{z\to k\pi i}\frac{z^2+\pi^2+2z(z-k\pi i)}{2z(e^z-e^{-z})+z^2(e^z+e^{-z})}=\frac{(-1)^k(k^2-1)}{2k^2}\neq 0,$$

因此$k\pi i\,(k\in\mathbf{Z},k\neq 0,\pm 1)$是单极点. ………………………………………………（4 分）

由于当$k\to\infty$时，$k\pi i\to\infty$，因此∞是非孤立奇点. ………………………………（1 分）

注：第二类中只判断πi，没有判断$-\pi i$（或者相反）扣 1 分；第三类中没有注明$k\neq 0,\pm 1$或讨论不全面扣 1 分.

九、利用留数方法计算实积分：$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{5}-2\cos x)^2}$.（12 分）

令$z=e^{ix}$，$x\in[0,2\pi]$，则$2\cos x=z+\frac{1}{z}$，$dx=\frac{dz}{iz}$，…………………………………（3 分）

$$I=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(\sqrt{5}-z-\frac{1}{z}\right)^2}=-i\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(z^2-\sqrt{5}z+1)^2}$$ ………………………………………（3 分）

$f(z)=\frac{z}{(z^2-\sqrt{5}z+1)^2}$在$|z|=1$内部有一个 2 阶极点$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（另一个极点$\beta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$在$|z|=1$外部）. ………………………………………………………………………（2 分）

$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f(z)=\lim_{z\to\alpha}[(z-\alpha)^2f(z)]'=\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{z}{(z-\beta)^2}\right]'=\lim_{z\to\alpha}\frac{-z-\beta}{(z-\beta)^3}=\sqrt{5}$ ………………（2 分）

由留数定理，$I=-i\cdot 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f(z)=2\sqrt{5}\pi$ ………………………………………………（2 分）