第6讲 随机过程与白噪声(part.2)

Dr. Li Hao
Email: lhao@home.swjtu.edu.cn
School of Information Science and Technology
Southwest Jiaotong University
2023 Autumn

1、确定信号的能量谱、功率谱与自相关函数

(1) 能量谱密度

(2) 功率谱密度

(3) 自相关函数

1、确定信号的能量谱、功率谱与自相关函数

（1）能量谱密度

帕塞瓦尔定理 $$E=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|G(f)|^2df$$

其中 $|G(f)|^2$为能量信号的功率谱密度（energy spectral density，ESD)。

（2）功率谱密度（PSD）

- 截断信号

$$g_T(t)=\begin{Bmatrix} g(t), -T/2<t<T/2 \\ 0, \quad \text{elsewhere} \end{Bmatrix}=g(t)\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- 平均归一化功率

$$P=\overline{g^2(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}g_T^2(t)dt$$

$$\Big\Downarrow \text{帕塞瓦尔定理}$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|G_T(f)\right|^2df=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{\left|G_T(f)\right|^2}{T}\right)df$$

（2）功率谱密度（PSD）

- 确定的功率信号$g(t)$功率谱密度（power spectral density，PSD)

$$P_g(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{\left|G_T(f)\right|^2}{T} \quad \text{(W/Hz)}$$

- 平均归一化功率

$$P = \overline{g^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} P_g(f)df$$

（3）自相关函数

- 确定的实（物理）信号的自相关波形为

$$\boxed{R_g(\tau) = \overline{g(t)g(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau)dt}$$

- Wiener-Khintchine定理

$$R_g(\tau) \leftrightarrow P_g(f)$$

2、随机信号的功率谱密度与自相关函数

- 随机过程$X(t)$的功率谱密度为

$$P_X(f)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{\mathrm{E}\left[|X_T(f)|^2\right]}{T}\right)$$

其中

$$X_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

确定信号$g(t)$功率谱密度

$$P_g(f)\triangleq\lim_{T\to\infty}\frac{|G_T(f)|^2}{T}\qquad \text{(W/Hz)}$$

2、随机信号的功率谱密度与自相关函数

- 实**平稳**随机过程 $X(t)$的自相关函数

$$R_X(\tau) = \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)]$$

确定信号$g(t)$自相关函数

$$R_g(\tau) = \overline{g(t)g(t+\tau)}$$

Wiener-Khintchine 定理

- 如果$x(t)$为W.S.S. 随机过程, 其 PSD为自相关函数的傅立叶变换, 即

$$R_X(\tau) \leftrightarrow P_X(f)$$

PSD的性质

1. $P_X(f)$ 总是实数.
2. $P_X(f) \geq 0$.
3. 如果$X(t)$为实数, 则$P_X(-f) = P_X(f)$.
4. $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)df = P}$$.

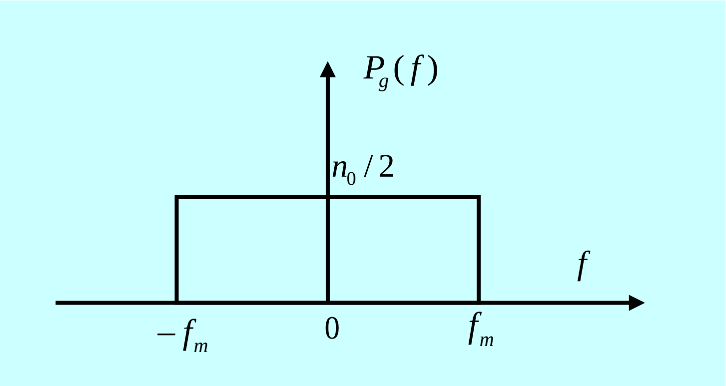
如果 $X(t)$为W.S.S.随机过程,

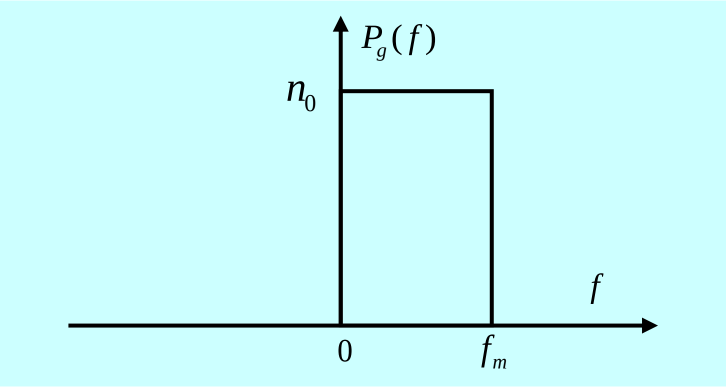
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)df = P = E[X^2] = R_X(0)}$$

5. $P_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)d\tau$

2、随机信号的功率谱密度与自相关函数

- 双边功率谱密度与单边功率谱密度





遍历随机过程的DC与RMS

1. 直流:

$$X_{dc} \triangleq E\left[X(t)\right] = \langle \xi(t) \rangle = m_X$$

2. 归一化直流功率

$$P_{dc} \triangleq \langle \xi(t) \rangle^2 \equiv \left\{E\left[X(t)\right]\right\}^2 = m_X^2$$

3. Rms:

$$X_{rms} \triangleq \sqrt{\langle \xi^2(t) \rangle} = \sqrt{E\left[X^2(t)\right]} = \sqrt{R_X(0)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)df}$$

4. 交流部分的均方根值（Rms value of the ac part）

$$\left(X_{rms}\right)_{AC} \triangleq \sqrt{\left\langle \left[\xi(t) - X_{dc}\right]^2 \right\rangle} = \sqrt{E\left[X(t) - m_X\right]^2} = \sqrt{E\left[X^2(t)\right] - m_X^2}$$

遍历随机过程的DC与RMS

1. 归一化总平均功率

$$P \triangleq \left\langle \xi^2(t) \right\rangle \equiv E\left[X^2(t) \right] = R_X(0) = R_\xi(0) = E\left[X^2 \right]$$

2. 归一化交流平均功率

$$P_{ac} \triangleq \left\langle \xi^2(t) - X_{dc} \right\rangle \equiv E\left[X^2(t) - m_X^2 \right] = \sigma_X^2$$

3、白噪声

（1） 信道加性噪声的分类

- 按照来源分
  - 人为噪声：由电气装置产生的工业及无线电干扰
  - 自然噪声：宇宙辐射噪声、闪电、雷暴等
  - 通信系统内部噪声:热噪声、散弹噪声、电源噪声
- 按照噪声的性质分
  - 单频噪声：时域连续、频谱集中
  - 脉冲噪声：突发且持续时间短，幅度大
  - 起伏噪声：波形无规律、功率谱平坦

起伏噪声

- 热噪声
  - 大量自由电子热运动
  - 均值为零，但方差不为零
  - 高斯分布，功率谱平坦
  - 功率谱：从直流到10^{13}Hz频率的范围内具有均匀的功率谱密度

$$n_o = 2kTG, k = 1.3805 \times 10^{-23} J/K$$

起伏噪声(Cont’d)

- 散弹噪声
  - 二极管、三极管中是由载流子扩散的不均匀性与电子空穴对产生和复合的随机性引起的。
  - 大约在100MHz频率范围内可以被认为是恒定值
  - 高斯分布，功率谱平坦
- 宇宙噪声
  - 天体辐射波对接收机形成的噪声
  - 20 ~ 300MHz
  - 高斯分布，功率谱平坦

（2）理想白噪声

遍历(广义平稳)、零均值、高斯分布白噪声

- 若随机信号$n(t)$,它的功率谱密度$P_N(f)$在所有频率上为一常数,则称$n(t)$为白噪声.即

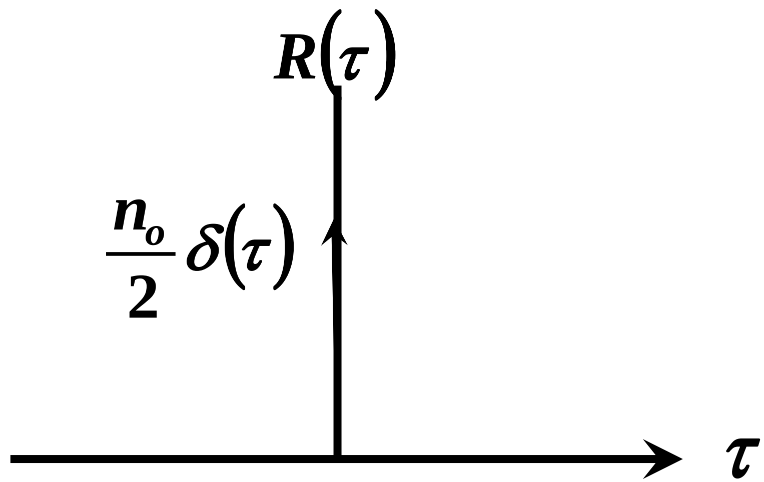
$$P_N(f)=\frac{n_0}{2}\qquad -\infty<f<\infty$$

其中,n_0为正实常数,称为单边功率谱密度; $n_0/2$ 为$n(t)$的双边功率谱密度.

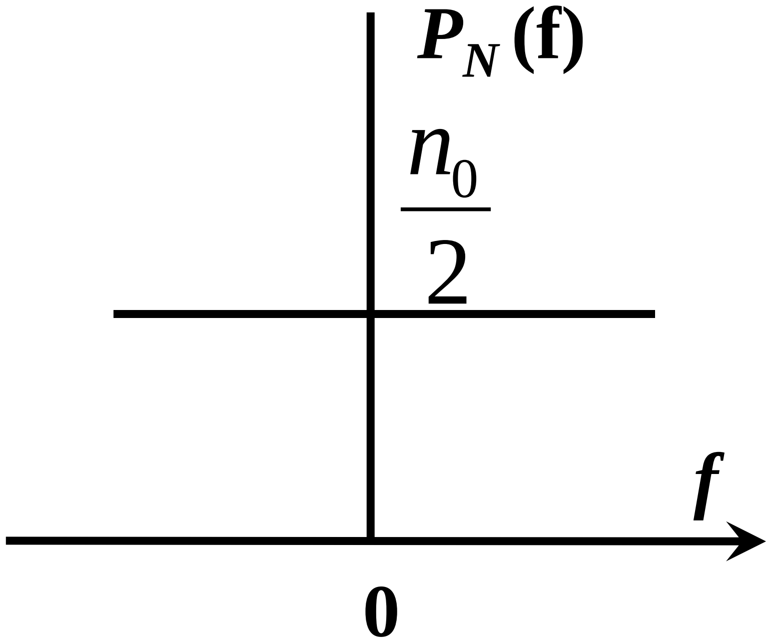
- 白噪声只有在$\tau=0$点是相关的,

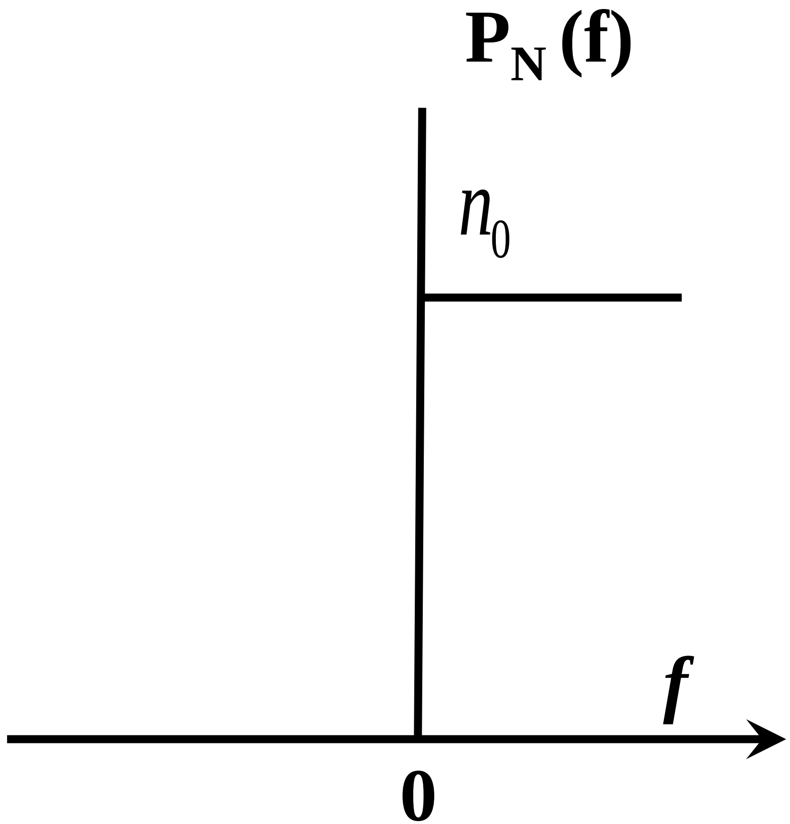
而在任何两个时刻上的随机变量都是不相关的。

$$R(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$



功率谱密度示意图

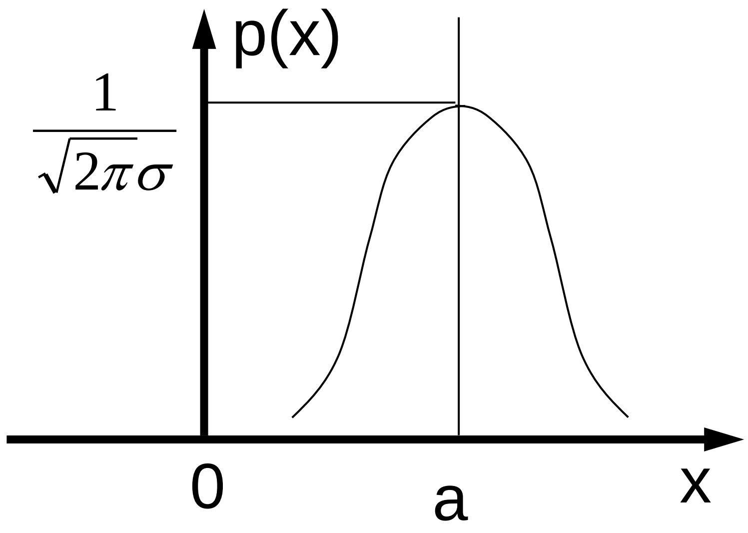




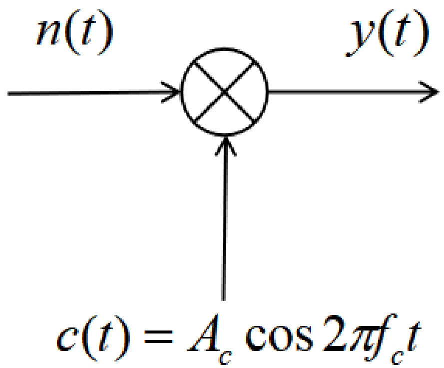
理想白噪声(续)

- 零均值平稳高斯随机过程
  - 均值为零
  - 方差与时间无关
  - 概率密度函数

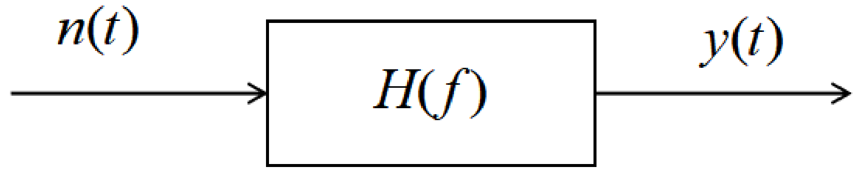
$$p_N(n) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{n^2}{2}}$$



(3) 白噪声通过乘法器与滤波器



$$P_Y(f) = \frac{1}{4}[P_N(f - f_c) + P_N(f + f_c)]$$



$$P_Y(f) = P_N(f)|H(f)|^2$$

白噪声通过理想低通滤波器

- 传递函数

$$H(f)=\begin{cases} K_0\, e^{-j2\pi f t_d} & |f|\le f_m \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

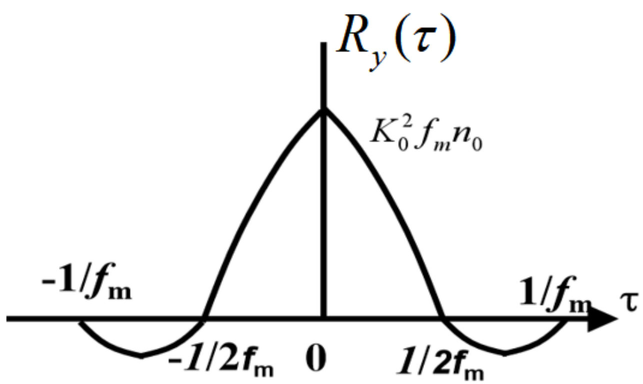
- 功率传递函数

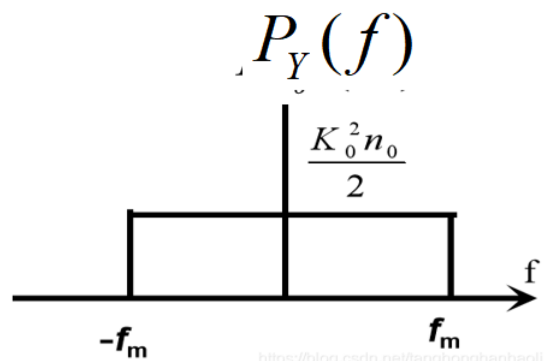
$$|H(f)|^2=\begin{cases} K_0^2 & |f|\le f_m \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

- 输出功率谱

$$P_Y(f)=|H(f)|^2\, P_N(f)=\begin{cases} \dfrac{K_0^2}{2} n_0 & |f|\le f_m \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

白噪声通过理想低通滤波器





- 输出功率

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f)df = K_0^2 n_0 f_m$$

白噪声通过理想带通滤波器

- 传递函数

$$H(f)=\begin{cases} K_0\, e^{-j2\pi f t_d} & f_l \le |f| \le f_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 功率传递函数

$$|H(f)|^2=\begin{cases} K_0^2 & f_l \le |f| \le f_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

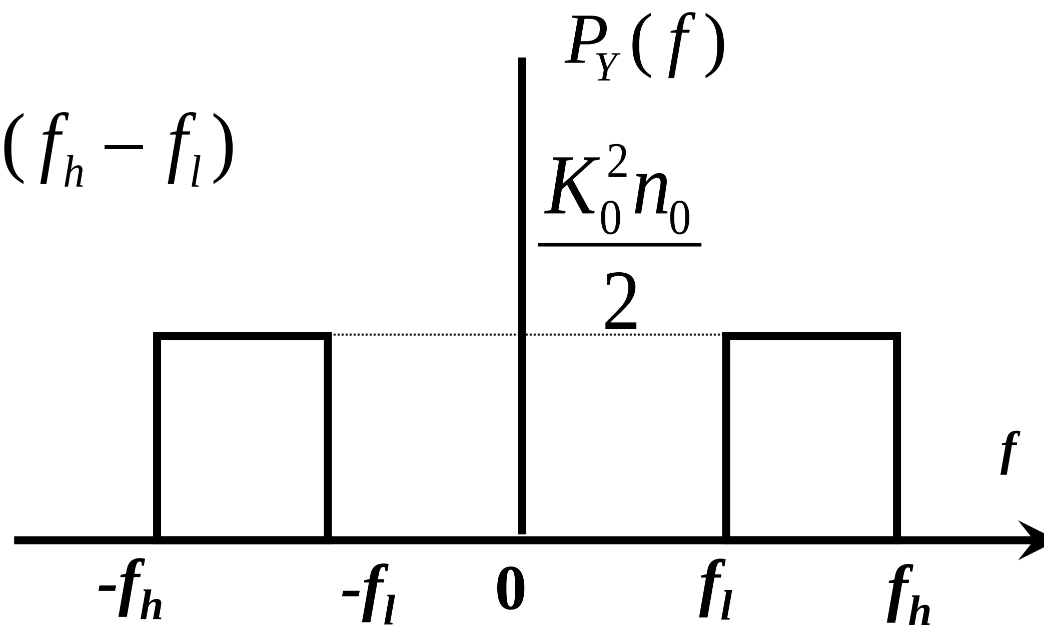
白噪声通过理想带通滤波器

- 输出功率谱

$$P_Y(f)=|H(f)|^2 P_N(f) = \begin{cases} \dfrac{K_0^2}{2}n_0 & f_l \le |f| \le f_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

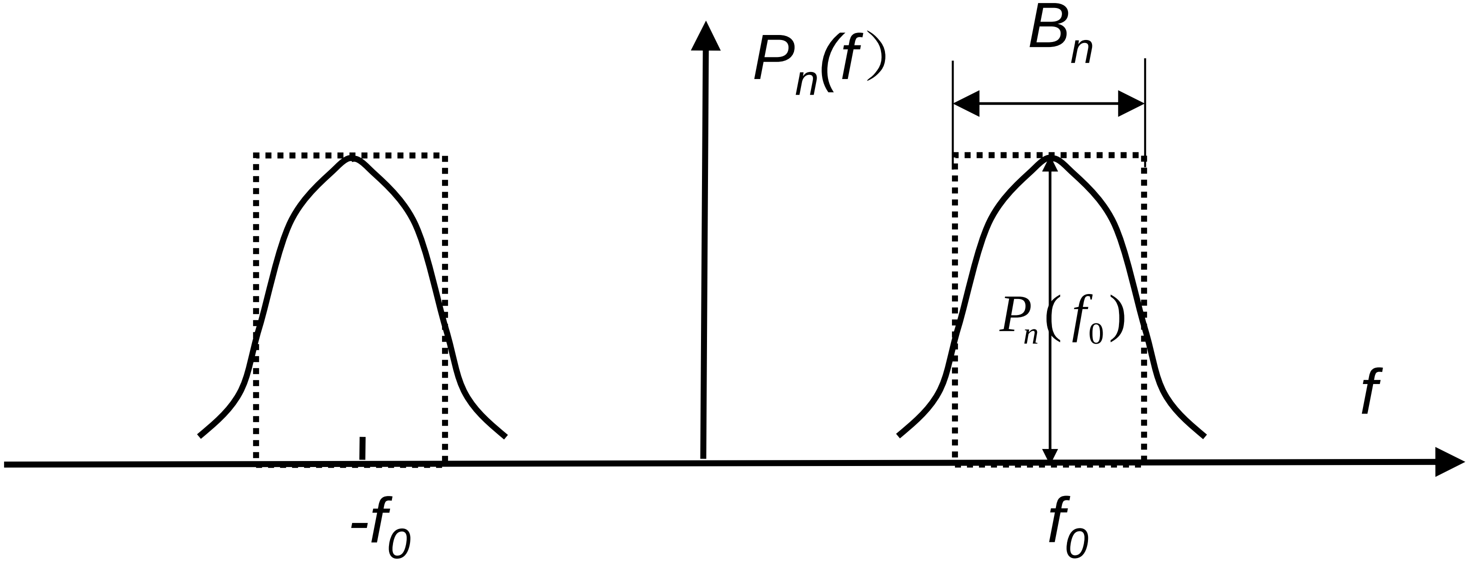
- 输出功率

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f)\,df = K_0^2 n_0 (f_h - f_l)$$



（4）等效噪声带宽

$$B_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P_n(f)df}{2P_n(f_0)} = \frac{\int_0^{\infty} P_n(f)df}{P_n(f_0)}$$



（5）带通白噪声的等效低通表示

窄带高斯白噪声$n(t)$的解析信号为

$$z_n(t) = n(t) + j\hat{n}(t)$$

复包络信号： $n_{\mathrm{L}}(t) = z_n(t)e^{-j2\pi f_0 t} = n_{\mathrm{c}}(t) + n_{\mathrm{s}}(t)$

$$n(t) = \mathrm{Re}[z_n(t)] = \mathrm{Re}[n_{\mathrm{L}}(t)e^{\mathrm{j}2\pi f_c t}] = n_{\mathrm{c}}(t)\cos 2\pi f_c t - n_{\mathrm{s}}(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$\mathrm{E}[n(t)] = \mathrm{E}[n_{\mathrm{c}}(t)] = \mathrm{E}[n_{\mathrm{s}}(t)] = 0$$
$$\mathrm{E}[n^2(t)] = \mathrm{E}[n_{\mathrm{c}}^2(t)] = \mathrm{E}[n_{\mathrm{s}}^2(t)] = \sigma_n^2$$