西南交通大学 2012—2013 学年第(1)学期考试试卷

课程代码 2100488 课程名称 复变函数与积分变换 B 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总成绩
得分											

阅卷教师签字 朱星亮 符伟 张静

注意： 1. 请将选择题与填空题的答案写在指定位置；

2. 计算题需要写出必要的步骤。

一、选择题(每题 3 分, 共 30 分)

1. 复数 $\cos 4+i\sin 4$ 的辐角主值为【 B 】

(A) 4　(B) $4-2\pi$　(C) $2\pi-4$　(D) $\pi-4$

2. 下列说法错误的是【 C 】

(A) 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z_0=x_0+iy_0$，则 $f(z)$ 在 z_0 处连续的充要条件是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 均在点 (x_0,y_0) 处连续；

(B) 等式 $\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2$ 不一定成立；

(C) 复变函数 e^z 是以 2π 为周期的周期函数；2πi 为周期，第 21 页

(D) $\sin z$ 在整个复平面内不是有界函数。

3. $(1+i)^i$ 的主值为【 D 】

(A) $e^{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{i\pi}{4}}$　(B) $e^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{i\pi}{4}}$　(C) $e^{\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}\ln}$　(D) $e^{-\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}\ln}$

4. $\int_{|z|=1}\frac{e^{\sin}}{\left(z^{2010}+2i\right)^{15}\ln(5+z)}dz=$【 A 】

(A) 0　(B) $-\pi i$　(C) πi　(D) $2\pi i$

5. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n a}{n}+i\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$（其中$a$为实常数）【　A　】

（A）发散　（B）收敛性与a的取值有关　（C）条件收敛　（D）绝对收敛

6. $z=0$是函数$\frac{z^2-1}{z\cos z}$的【　B　】

（A）可去奇点　（B）一级极点　（C）二级极点　（D）本性奇点

7. $\mathrm{Res}\left[\frac{e^z-1}{z^{101}},0\right]=$【　C　】直接展开成洛朗级数找出对应的负一次项

（A）0　（B）$\frac{1}{99!}$　（C）$\frac{1}{100!}$　（D）$\frac{1}{101!}$

8. 函数$f(t)=\begin{cases}2, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$的傅里叶变换等于【 D　】

（A）$\frac{2\cos\omega}{\omega}$　（B）$\frac{2\sin\omega}{\omega}$　（C）$\frac{4\cos\omega}{\omega}$　（D）$\frac{4\sin\omega}{\omega}$

9. 若函数$f(t)$的拉普拉斯变换$L[f(t)]=F(s)$存在，则下列等式中正确的是【　C　】

（A）$L^{-1}[2F(s)]=\frac{1}{2}f(t)$　（B）$L^{-1}[sF(s)]=tf(t)$

（C）$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)$　（D）$L[f(t)\sin(at)]=F(s-a)$（其中a为常数）

10. 函数$f_1(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$与$f_2(t)=\begin{cases}1, & -1<t<0\\ 0, & t\le -1 \text{或} t\ge 0\end{cases}$在傅里叶变换意义下的卷积$f_1(t)*f_2(t)$等于【　D　】

（A）0　（B）$\begin{cases}0, & t\le 0\\ t, & t>0\end{cases}$　（C）$\begin{cases}0, & t\le -1\\ t+1, & t>-1\end{cases}$　（D）$\begin{cases}0, & t\le -1\\ t+1, & -1<t\le 0\\ 1, & t>0\end{cases}$

二、填空题(每题3分,共15分)

11. 函数$f(z)=(x^2-y)+i(x+2y)$在其可导点处的导数值等于___$2+i$___；

12. 设函数$f(z)=\int_{|\zeta|=2}\frac{\zeta^2+3}{(\zeta-z)^2}d\zeta$（其中圆周$|\zeta|=2$取逆时针方向），则$f'(0)=$___$4\pi i$___；

13．函数 $f(z)=\dfrac{e^{z}\cos z}{\sin z}$ 在 $z_0=1+i$ 处的泰勒展开式的收敛半径 $R=$＿＿＿＿＿＿；

14．函数 $f(t)=t\sin(2t)$ 的拉普拉斯变换为＿＿$\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$＿＿；

15．在拉普拉斯变换意义下，卷积 $1*\cos t=$＿＿$\sin t$＿＿．

三、解答题（共 6 个题，共 55 分，要求：写出必要的解题步骤）

16. 计算复积分：$I=\int_C z\,\mathrm{Re}(z)dz$，其中 C 为由原点 O 到 $1-2i$ 的直线段。（7 分）

解：由条件，得曲线 C 的参数方程为 $C:\begin{cases}x=t\\ y=-2t\end{cases},t:0\to1$……（2 分），

则 $z=t-2ti=(1-2i)t$，从而

$$I=\int_C z\,\mathrm{Re}(z)dz=\int_0^1(1-2i)t\ \ t\,d(1-2i)t=(1-2i)^2\int_0^1 t^2dt\text{……（4 分）}$$

$$=\frac{(1-2i)^2}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{(1-2i)^2}{3}=-1-\frac{4}{3}i\text{……（6 分）}$$

17. 利用拉普拉斯变换的定义求函数 $f(t)=e^{-3t}+2e^{t}$ 的拉普拉斯变换。（8 分）

解：由拉普拉斯变换的定义，得

$$L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\left(e^{-3t}+2e^{t}\right)e^{-st}dt\text{……（2 分）}$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[e^{-(s+3)t}+2e^{-(s-1)t}\right]dt=-\frac{e^{-(s+3)t}}{s+3}-\frac{2e^{-(s-1)t}}{s-1}\Big|_0^{+\infty}\text{……（5 分）}$$

$$=-\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{e^{-(s+3)t}}{s+3}+\frac{2e^{-(s-1)t}}{s-1}\right]+\left[\frac{1}{s+3}+\frac{2}{s-1}\right]=\frac{1}{s+3}+\frac{2}{s-1}\quad(\mathrm{Re}(s+3)>0\text{ 且 }\mathrm{Re}(s-1)>0)$$

……（7 分）

故 $L[f(t)]=L\left[e^{-3t}+2e^{t}\right]=\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{2}{s-1}$（$\mathrm{Re}(s)>1$）　　……（8 分）

18. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ 分别在下列圆环域内展成洛朗级数。（10 分）

（1）$1<|z|<+\infty$；　　（2）$0<|z-1|<1$。

解：（1）因为$1<|z|<+\infty$，所以$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，从而

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}=-\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\cdots\cdots（2分）$$

$$=-\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}\cdots\cdots（5分）$$

（2）因为$0<|z-1|<1$，所以

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}=-\frac{1}{z-1}\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z}\right)'\cdots\cdots（2分）$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right]'=\frac{1}{z-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right]'=\frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n(z-1)^{n-1}\cdots\cdots（4分）$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n(z-1)^{n-2}\qquad\cdots\cdots（5分）$$

或　$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}=-\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z}\right)^2=-\frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right]^2$$

$$=-\frac{1}{z-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

19. 利用留数计算广义积分：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2-2x+5)^2}dx$。（10分）

解：因为函数$\frac{x}{(x^2-2x+5)^2}$分母含x的最高次比分子含x的最高次高3次，并且作为复变量z的函数，$\frac{z}{(z^2-2z+5)^2}$的孤立奇点为$1\pm 2i$　……（4分）

即$\frac{z}{(z^2-2z+5)^2}$在实轴上没有孤立奇点，从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2-2x+5)^2}dx=2\pi i\ \mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2-2z+5)^2},1+2i\right]\cdots\cdots（6分）$$

$$=2\pi i\lim_{z\to1+2i}\left[(z-1-2i)^2\frac{z}{(z^2-2z+5)^2}\right]'=2\pi i\lim_{z\to1+2i}\left[\frac{z}{(z-1+2i)^2}\right]'\cdots\cdots（8分）$$

$$=2\pi i\lim_{z\to1+2i}\frac{(z-1+2i)-2z}{(z-1+2i)^3}=2\pi i\frac{4i-2(1+2i)}{(4i)^3}=\frac{\pi}{16}\cdots\cdots（10分）$$

20. 计算积分 $\int_{|z|=r}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$，其中圆周 $|z|=r$ 取逆时针方向，并且 $0<r\neq1$。（10分）

解：函数 $\frac{e^z}{z(1-z)^3}$ 有两个孤立奇点 $0,1$。由 $0<r\neq1$，有

（1）当 $0<r<1$ 时，有

$$\int_{|z|=r}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz=\int_{|z|=r}\frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}dz=2\pi i\left.\frac{e^z}{(1-z)^3}\right|_{z=0}=2\pi i\cdots\cdots（5分）$$

（2）当 $r>1$ 时，由留数定理，得

$$\int_{|z|=r}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z(1-z)^3},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z(1-z)^3},1\right]\right\}\cdots\cdots（2分）$$

$$=2\pi i\left\{\lim_{z\to0}\left[z\,\frac{e^z}{z(1-z)^3}\right]+\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left[(z-1)^3\,\frac{e^z}{z(1-z)^3}\right]''\right\}$$

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to0}\frac{e^z}{(1-z)^3}-\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\right]=2\pi i\left[1-\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}\right)e^z\right]\cdots\cdots（4分）$$

$$=2\pi i\left(1-\frac{1}{2}e\right)=(2-e)\pi i\cdots\cdots（5分）$$

21. 利用拉普拉斯变换求解常微分方程初值问题：$\begin{cases}y''-y'-2y=e^{2t},\\y(0)=y'(0)=0.\end{cases}$（10分）

解：记 $L[y(t)]=Y(s)$，对原方程两边同时取拉普拉斯变换，得

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]-\left[sY(s)-y(0)\right]-2Y(s)=\frac{1}{s-2}\cdots\cdots（4分）$$

将初值条件 $y(0)=y'(0)=0$ 代入上式，得

$$s^2Y(s)-sY(s)-2Y(s)=\frac{1}{s-2}$$

解得 $$Y(s)=\frac{1}{(s-2)(s^2-s-2)}=\frac{1}{(s-2)^2(s+1)}$$ ……（6 分）

则 $y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]$

方法一：因为 $$Y(s)=\frac{1}{(s-2)^2(s+1)}=\frac{1}{3}\frac{(s+1)-(s-2)}{(s-2)^2(s+1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{(s-2)(s+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(s-2)(s+1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{9}\frac{1}{s+1}$$

所以 $$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]-\frac{1}{9}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]+\frac{1}{9}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(e^{st})'\Big|_{s=2}-\frac{1}{9}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{-t}=\frac{1}{3}te^{2t}-\frac{1}{9}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{-t}$$

即 $y(t)=\frac{1}{3}te^{2t}-\frac{1}{9}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{-t}$。 ……（10 分）

方法二：因为 $Y(s)=\frac{1}{(s-2)^2(s+1)}$ 有一个二级极点 2 和一个一级极点 -1，所以

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-2)^2(s+1)},2\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-2)^2(s+1)},-1\right]$$

$$=\lim_{s\to2}\left[(s-2)^2\ \frac{e^{st}}{(s-2)^2(s+1)}\right]'+\lim_{s\to-1}\left[(s+1)\ \frac{e^{st}}{(s-2)^2(s+1)}\right]$$

$$=\lim_{s\to2}\left[\frac{e^{st}}{s+1}\right]'+\lim_{s\to-1}\frac{e^{st}}{(s-2)^2}=\lim_{s\to2}\frac{t(s+1)-1}{(s+1)^2}e^{st}+\frac{e^{-t}}{9}=\frac{3t-1}{9}e^{2t}+\frac{e^{-t}}{9}=\frac{1}{3}te^{2t}-\frac{1}{9}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{-t}$$

即 $y(t)=\frac{1}{3}te^{2t}-\frac{1}{9}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{-t}$ ……（10 分）