第4讲 系统（二）

Dr. Li Hao
Email: lhao@home.swjtu.edu.cn
School of Information Science and Technology
Southwest Jiaotong University
2023 Autumn

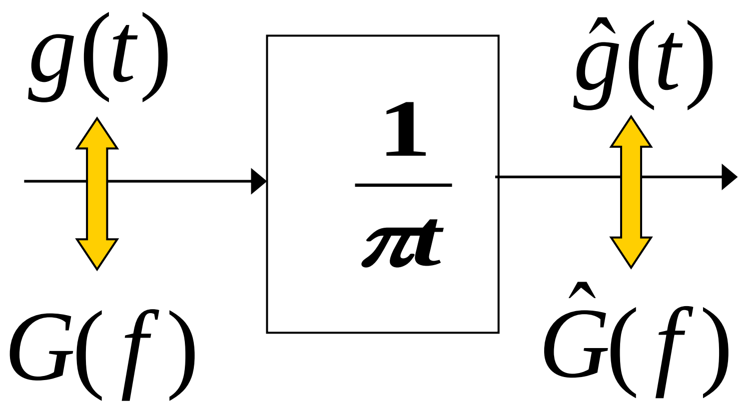
4.1、希尔伯特变换

$$g(t) \xleftrightarrow{H.T.} \hat{g}(t)$$

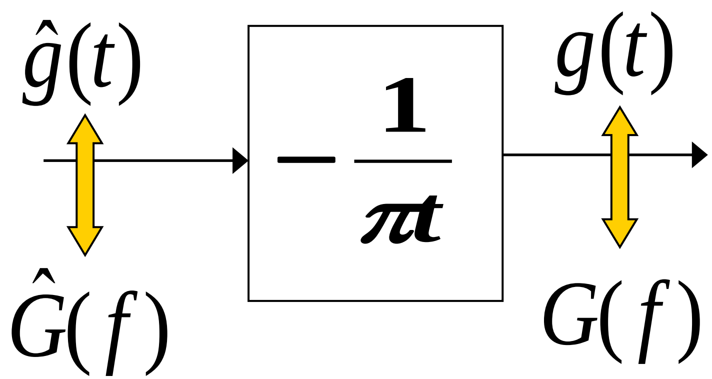
$$\begin{cases} \hat{g}(t) = H[g(t)] = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda \\ g(t) = H^{-1}[\hat{g}(t)] = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{g}(t) = g(t) * \dfrac{1}{\pi t} \\ g(t) = \hat{g}(t) * (-\dfrac{1}{\pi t}) \end{cases}$$

正交滤波器



$$h_Q(t)=\frac{1}{\pi t}$$



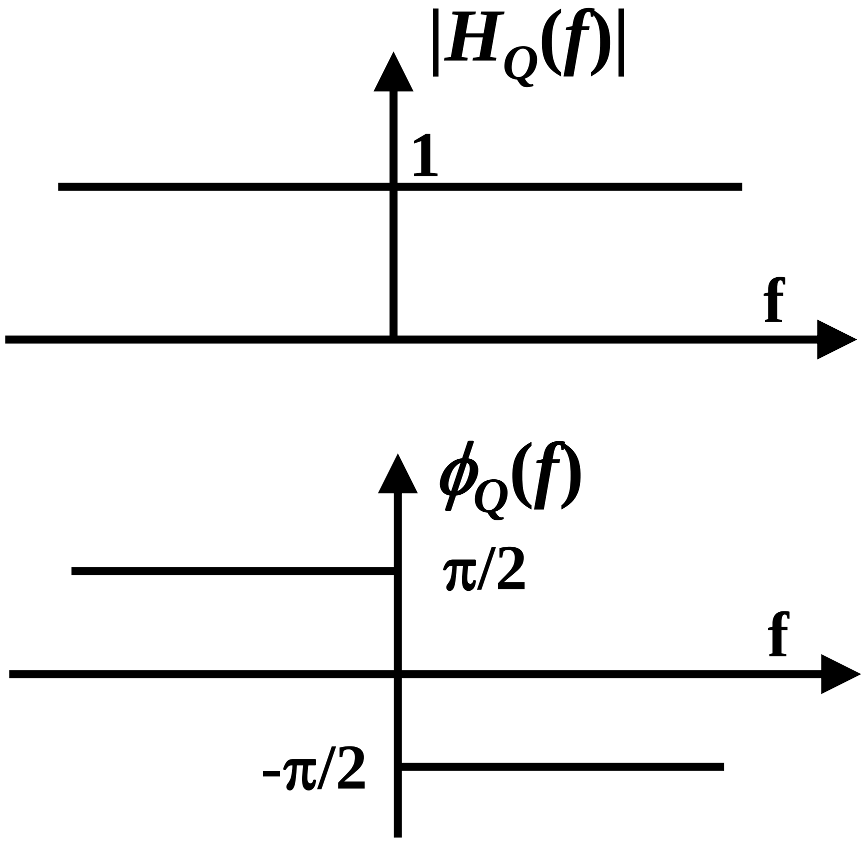
正交滤波器

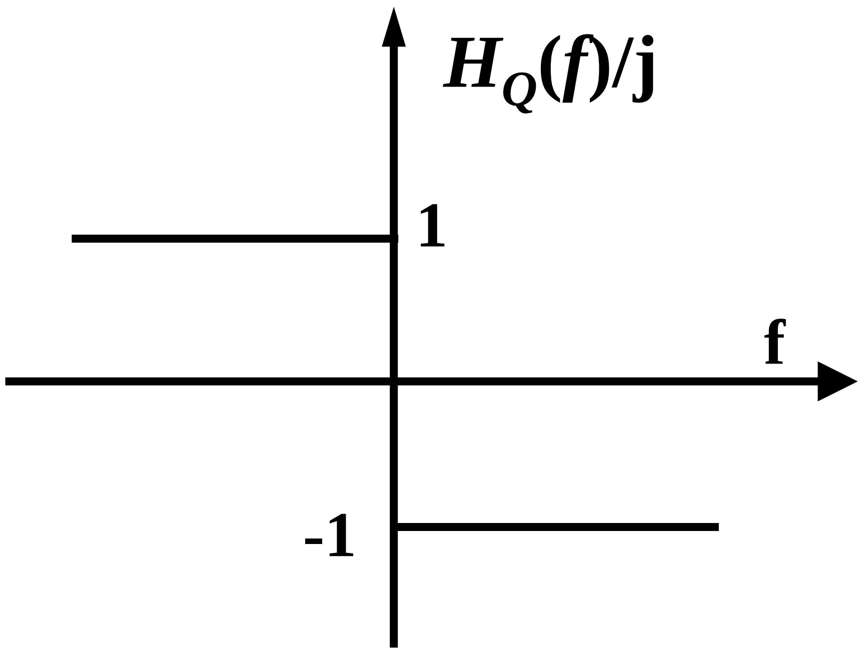
$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi t} \quad \xleftrightarrow{\textbf{F.T.}} \quad H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ +j & f < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{G}(f) = G(f) \cdot (-j\,\mathrm{sgn}(f)) \\ G(f) = \hat{G}(f) \cdot j\,\mathrm{sgn}(f) \end{cases}$$

正交滤波器

$$H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$$





例题

例4-1: 余弦信号的希尔伯特变换.

$$f(t)=\cos 2\pi f_c t$$

$$\hat{f}(t)\leftrightarrow \hat{F}(f)$$

$$\begin{aligned}\hat{F}(f)&=-j\operatorname{sgn}(f)F(f)\\&=-j\operatorname{sgn}(f)\times\frac{1}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]\\&=\frac{1}{j2}[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)]\end{aligned}$$

$$\hat{f}(t)=\sin 2\pi f_c t$$

例题

例4-2: 信号 $f(t)=\hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t$ 的傅里叶变换。

$$\hat{m}(t)\leftrightarrow -j\,\mathrm{sgn}(f)M(f)$$

$$\hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t\leftrightarrow[-j\,\mathrm{sgn}(f)M(f)]*\frac{1}{j2}[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)]$$

$$F(f)=\frac{1}{2}[M(f+f_c)\mathrm{sgn}(f+f_c)-M(f-f_c)\mathrm{sgn}(f-f_c)]$$

例题

例4-3：信号 $f(t)=m(t)\cos 2\pi f_c t$ 的希尔伯特变换。

$$\hat{F}(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)\times\frac{1}{2}[M(f-f_c)+M(f+f_c)]$$

$$=\frac{1}{j2}[M(f-f_c)-M(f+f_c)]$$

$$\hat{f}(t)=m(t)\sin 2\pi f_c t$$

4.2带通信号的（复包络）低通表示

- 解析信号：对于实信号$x(t)$

$$z(t)=x(t)+j\hat{x}(t)\leftrightarrow Z(f)=X(f)+j\hat{X}(f)$$
$$=X(f)+j[-j\,\mathrm{sgn}(f)X(f)]$$
$$=[1+\mathrm{sgn}(f)]X(f)$$
$$x(t)=\mathrm{Re}\left[z(t)\right]$$

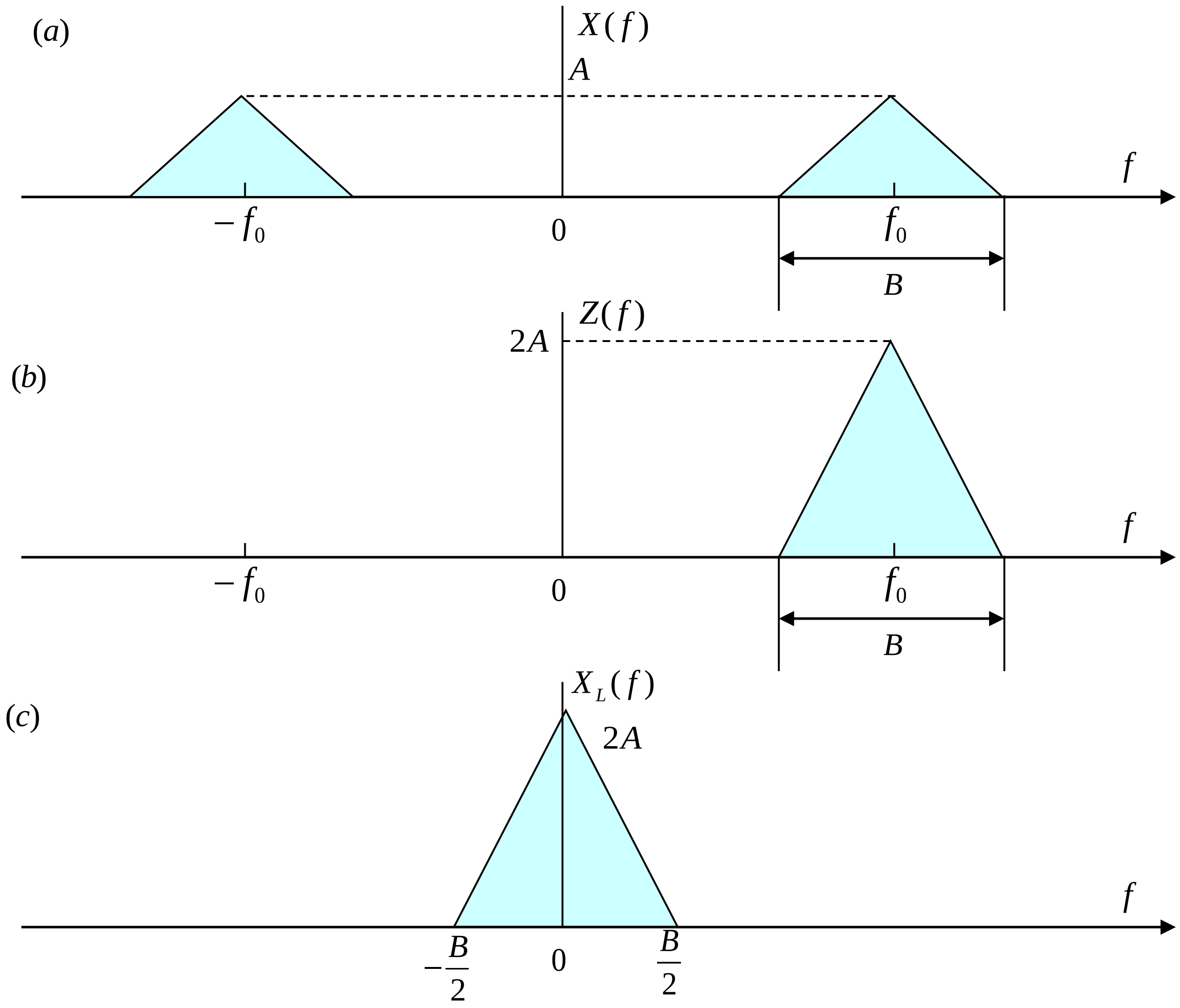
- 复包络
  - 同相与正交分量

$$x_L(t)=z(t)\exp(-j2\pi f_c t)=x_c(t)+jx_s(t)=a(t)\angle\theta(t)$$
$$X_L(f)=Z(f+f_c)$$

  - 包络与相位

$$x_c(t)=\mathrm{Re}\left[x_L(t)\right],\quad x_s(t)=\mathrm{Im}\left[x_L(t)\right]$$
$$a(t)=\sqrt{x_c^2(t)+x_s^2(t)},\theta(t)=\tan^{-1}\left[\frac{x_s(t)}{x_c(t)}\right]$$

4.2 带通信号的（复包络）低通表示



4.2 带通信号的（复包络）低通表示

- 带通信号$x(t)$的复包络表示
  - 同相-正交形式

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[z(t)\right]=\mathrm{Re}\left[x_L(t)\exp(j2\pi f_0 t)\right]=x_c(t)\cos(2\pi f_c t)-x_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

  - 包络-相位形式

$$x(t)=a(t)\cos[2\pi f_0 t+\theta(t)]$$

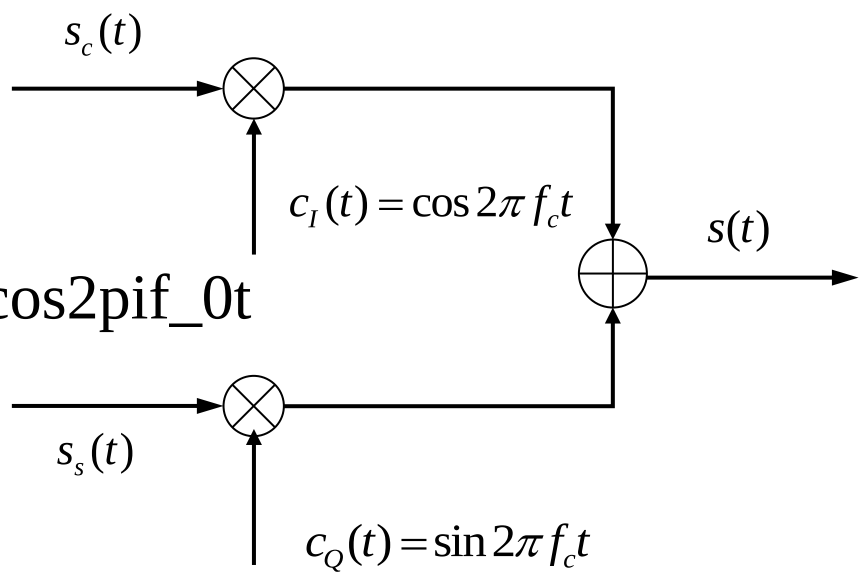
  - 线性调制信号

s(t)=m(t)cos2pif_0t

$$s(t)=A_c m(t)2\pi f_c t$$

$$z_s(t)=A_c m(t)e^{j2\pi f_c t}$$

$$s_L(t)=z_s(t)e^{-j2\pi f_c t}=A_c m(t)$$



正交调制系统

4.2 带通系统的（复包络）低通表示

我们将带通脉冲响应 $h(t)$表示为

$$h(t) = h_I(t)\cos 2\pi f_c t - h_Q(t)\sin 2\pi f_c t \tag{3-41}$$

其中 $h_I(t)$和 $h_Q(t)$为带通系统复包络响应

$$h_L(t) = h_I(t) + jh_Q(t) \tag{3-42}$$

的同步与正交分量。因此，我们可以得到

$$h(t) = \mathrm{Re}\left[h_L(t)e^{j2\pi f_c t}\right] \tag{3-43}$$

注意 $h_I(t)$、$h_Q(t)$和 $h_L(t)$均为带宽等于 B 的低通实函数。