第2讲 确定信号

郝莉
lhao@swjtu.edu.cn
西南交通大学信息科学与技术学院
2023秋

第2讲 确定信号

1、信号：什么是信号？如何描述信号？
2、时间平均算子与信号物理参数
3、常用信号的傅里叶变换

1、信号

- 什么是信号？如何描述信号？
- 信号的分类

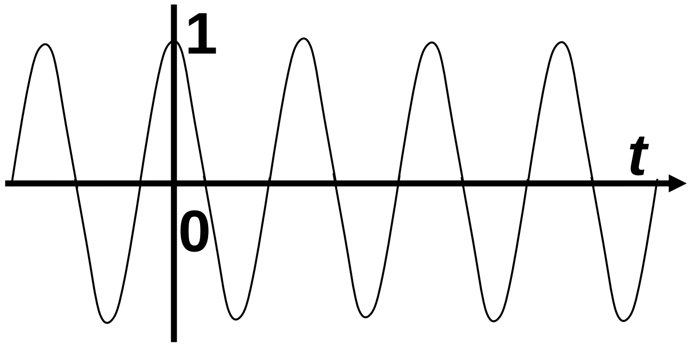
  (1) 确定信号与随机信号

  (2) 周期信号与非周期信号

  (3) 功率信号与能量信号

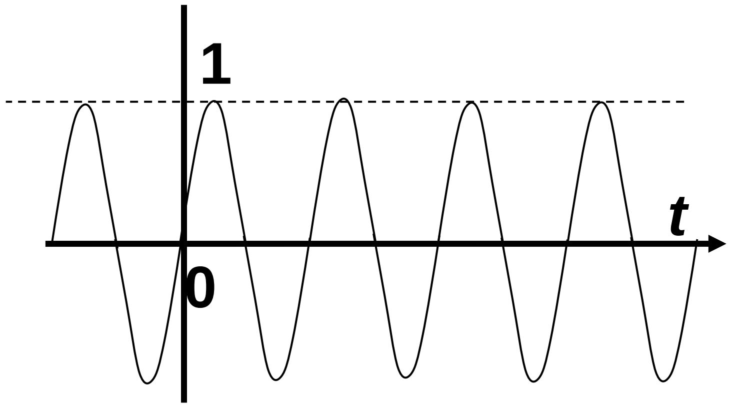
单音信号

$$\cos 2\pi f_0 t$$



余弦信号

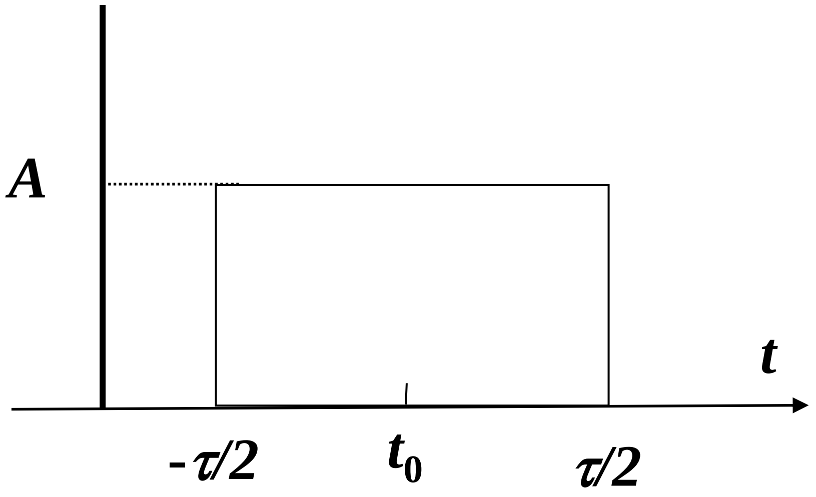
$$\sin 2\pi f_0 t$$



正弦信号

矩形脉冲信号

$$A\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

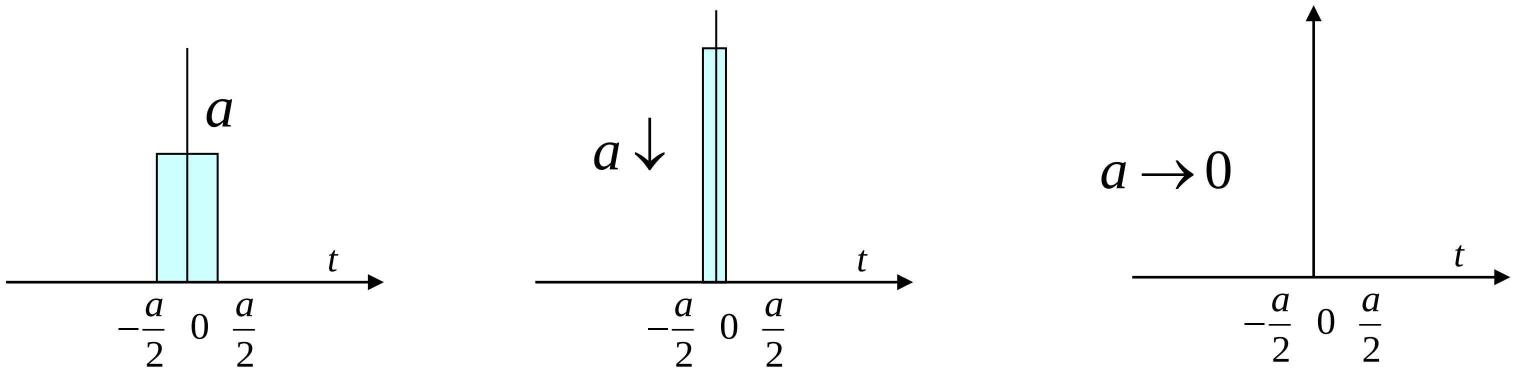


冲激信号

- 单位冲激函数 δ(x)，满足如下条件

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

冲激函数可以看成是某种脉冲函数的极限形式。



2、时间平均算子与信号物理参数

(1) 时间平均算子
(2) 直流分量
(3) 功率
(4) 能量
(5) 均方根值
(6) 分贝

（1）时间平均算子

时间平均算子定义为

$$\langle g(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt$$

（2）直流分量

- 信号$w(t)$的**直流分量**为

$$W_{dc}=\langle w(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}w(t)dt$$

如果$w(t)$为周期等于T_0的周期信号，则有

$$W_{dc}=\langle w(t)\rangle=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}w(t)dt$$

（2）直流分量

例1：求信号的直流分量。

$$c(t)=\cos\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)$$

$$\langle c(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)dt=\frac{1}{T_c}\int_{-T_c/2}^{T_c/2}\cos\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)dt$$

$$=\frac{1}{T_c}\cdot\frac{1}{2\pi f_c}\sin\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)\Big|_{-T_c/2}^{T_c/2}$$

$$=0$$

（3）功率

- 设$v(t)$和$i(t)$分别为电阻R上的电压和电流，则电阻R上的**瞬时功率**为

$$p(t)=v(t)i(t)=v^2(t)/R=i^2(t)R$$

- **平均功率**为

- **归一化功率**为

$$P=\langle p(t)\rangle=\langle v(t)i(t)\rangle$$

$$p(t)=w^2(t)$$

$$P=\langle w^2(t)\rangle$$

（4）能量

- 归一化（总）能量

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t) dt$$

(5) 均方根值

- **均方根值**（***root-mean-square***，RMS)

$$W_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\left\langle w^2(t) \right\rangle}$$

(6) 分贝(Decibel)

应用1：度量电路或系统的功率增益

$$P_{\text{in}} = w_{\text{in,RMS}}^2$$

$$P_{\text{out}} = w_{\text{out,RMS}}^2$$

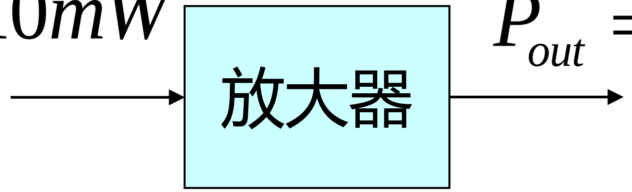
$$\boxed{G = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G_{\text{dB}} &= 10\lg G = 10\lg\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right) \\ &= 10\lg\left(\frac{w_{\text{out,RMS}}^2}{w_{\text{in,RMS}}^2}\right) \\ &= 20\lg\left(\frac{w_{\text{out,RMS}}}{w_{\text{in,RMS}}}\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{G = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 10^{G_{dB}/10}}$$

例2：放大器增益。

$P_{in}=10mW$ $\qquad$ $P_{out}=1W$



$$G=\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}=100$$

$$G_{\text{dB}}=10\log\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right)=20\text{dB}$$

$$G=\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}=10^{G_{\text{dB}}/10}=100$$

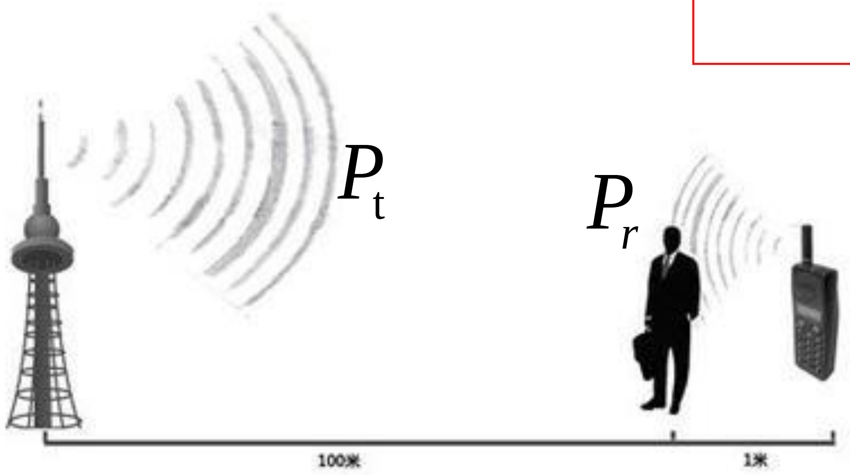
(6) 分贝(Decibel)

例3：无线信号传输中的路径损耗。

我们把无线信号在空间中传输时由传播环境引起的信号功率的衰减称为路径损耗，即

$$\boxed{P_L = \frac{P_R}{P_T}}$$

$$\boxed{P_{L,dB} = 10\lg\left(\frac{P_R}{P_T}\right)}$$

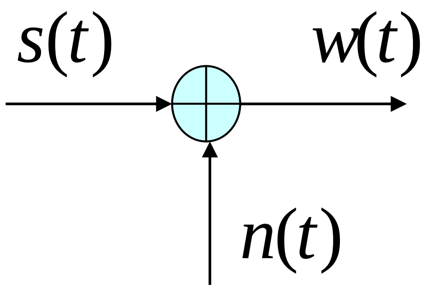


$P_T = 1\text{W}$

$P_R = 10^{-7}\text{W}$

$P_{L,dB} = -70\text{dB}$

应用2：度量信号与噪声的功率比



$$P_s = s_{\mathrm{RMS}}^2$$

$$P_n = n_{\mathrm{RMS}}^2$$

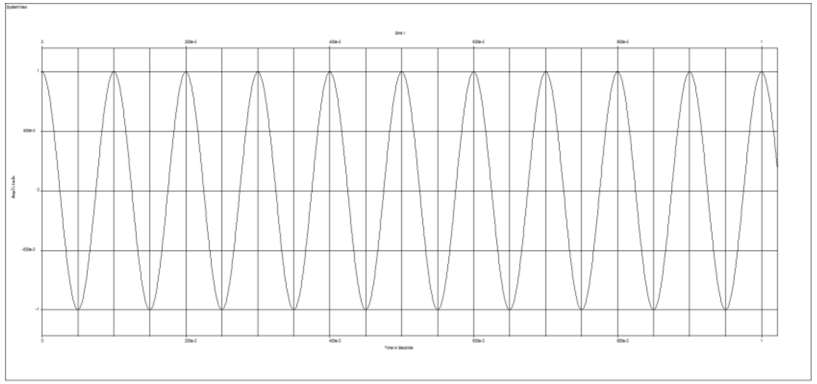
信噪比（Signal to Noise Ratio)

$$\boxed{\mathrm{SNR} = \frac{S}{N} = \frac{P_s}{P_n}}$$

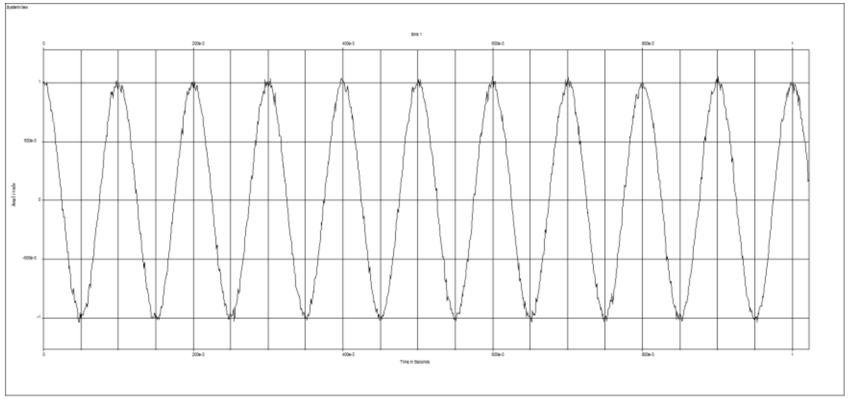
$$\boxed{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = \left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}} = 10\log\left(\frac{P_s}{P_n}\right) = 20\log\left(\frac{s_{\mathrm{RMS}}}{n_{\mathrm{RMS}}}\right)}$$

（6）分贝(Decibel)

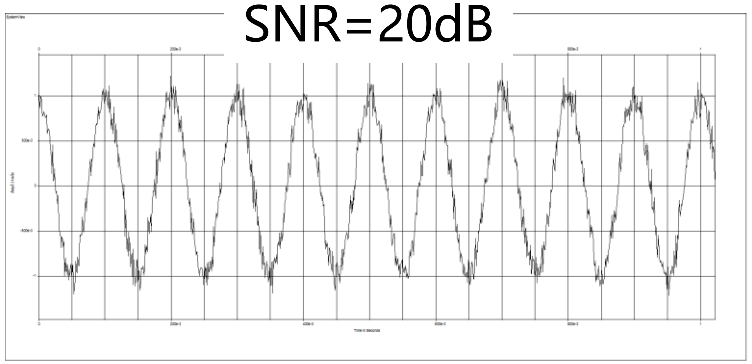
没有噪声的余弦信号(f_0=10Hz)



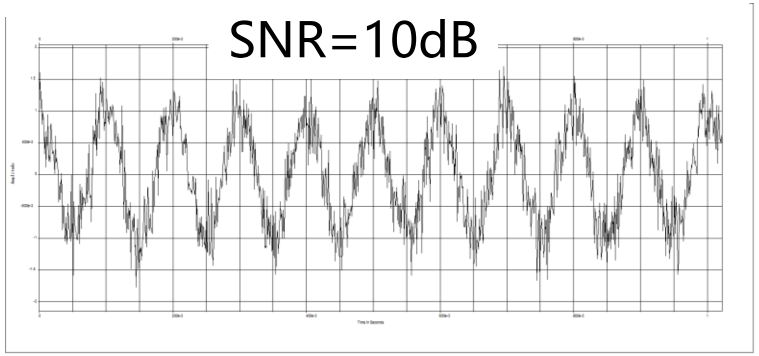
SNR=30dB



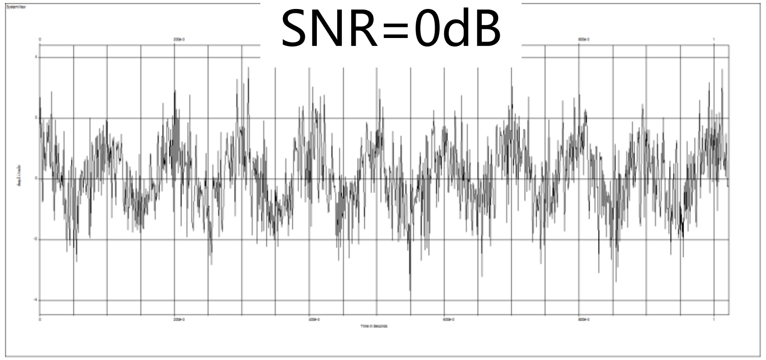
SNR=20dB



SNR=10dB



SNR=0dB



(6) 分贝(Decibel)

应用3：基于某个参考电平值来度量某绝对电平

$$P\text{的dBm值} = 10\lg\left(\frac{P(watts)}{10^{-3}}\right)$$

$$= 30 + 10\lg\left[P(watts)\right]$$

$$30 + 10\lg\left[P(watts)\right] = -97$$

例：对于安卓系统手机，进入选项：设置→关于手机→状态消息→网络→信号强度，就可以

$$P = 10^{-12.7}\ \text{W}$$

填空题 1分

设置

幅度为5V，持续时间为0.1s的矩形脉冲，其归一化能量为 [填空1] (J)。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

3、信号频谱：傅里叶变换

（1）傅里叶变换表达式

（2）常用傅里叶变换性质

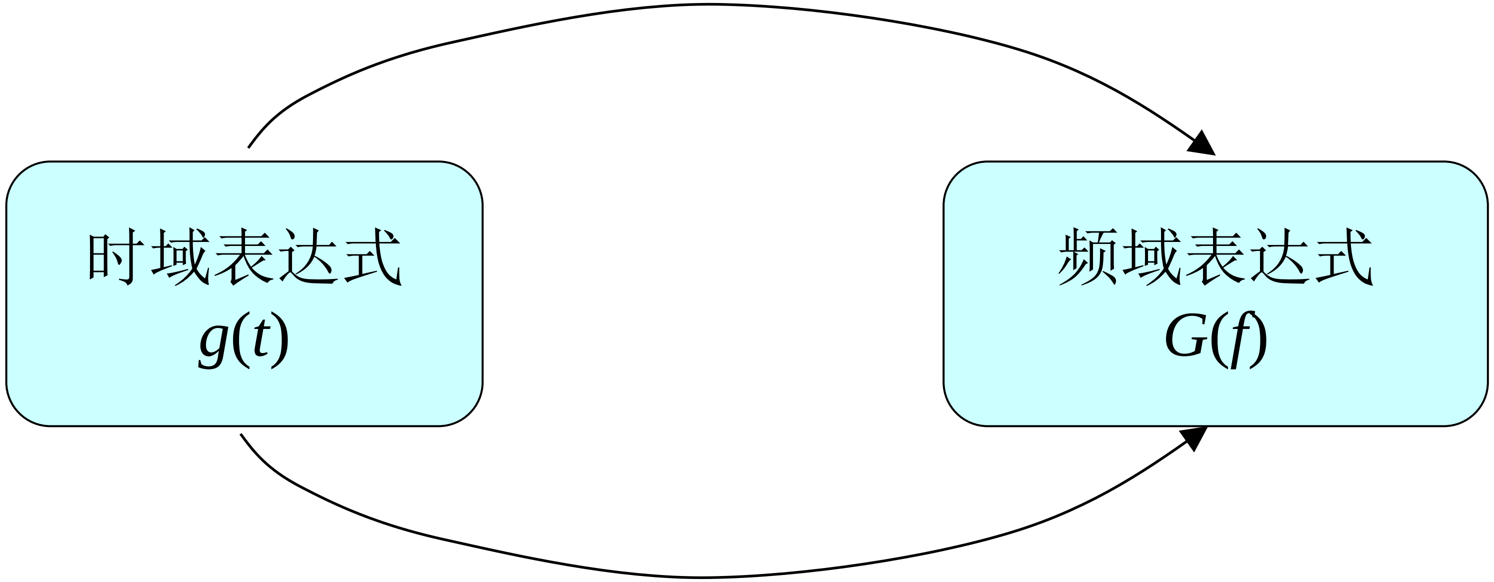
（3）常用信号傅里叶变换

（1）傅立叶变换表达式

$$\begin{cases} G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt \\ g(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$



正交形式
复频谱

$$G(f)=X(f)+jY(f)$$

幅度-相位形式

$$G(f)=|G(f)|e^{j\theta(f)}$$

$$G(f)=\sqrt{X^2(f)+Y^2(f)}$$

$$\theta(f)=\tan^{-1}\left(\frac{Y(f)}{X(f)}\right)$$

（2）傅立叶变换性质

$$g(t) \leftrightarrow G(f)$$

- 时延 $g(t-T_d) \leftrightarrow G(f)e^{-j2\pi f T_d}$
- 频移 $g(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow G(f-f_0)$
- 对偶性 $G(t) \leftrightarrow g(-f)$

（3）常用信号傅里叶变换

(1) 冲激信号与直流信号

(2) 单音信号

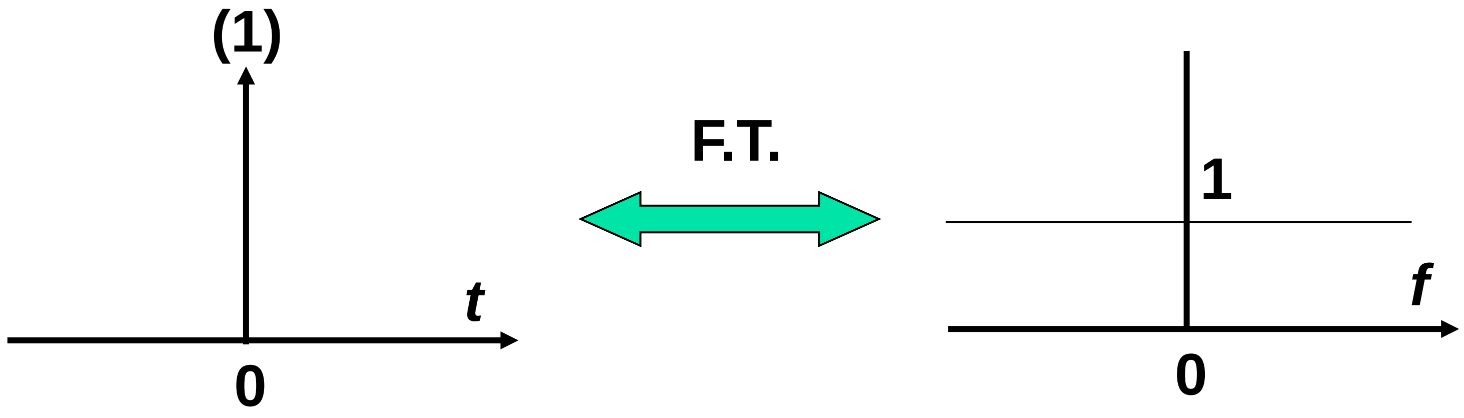
(3) 矩形脉冲信号与抽样函数

(4) 矩形三角形脉冲信号

(5) 周期信号

(1) 冲激信号与直流信号

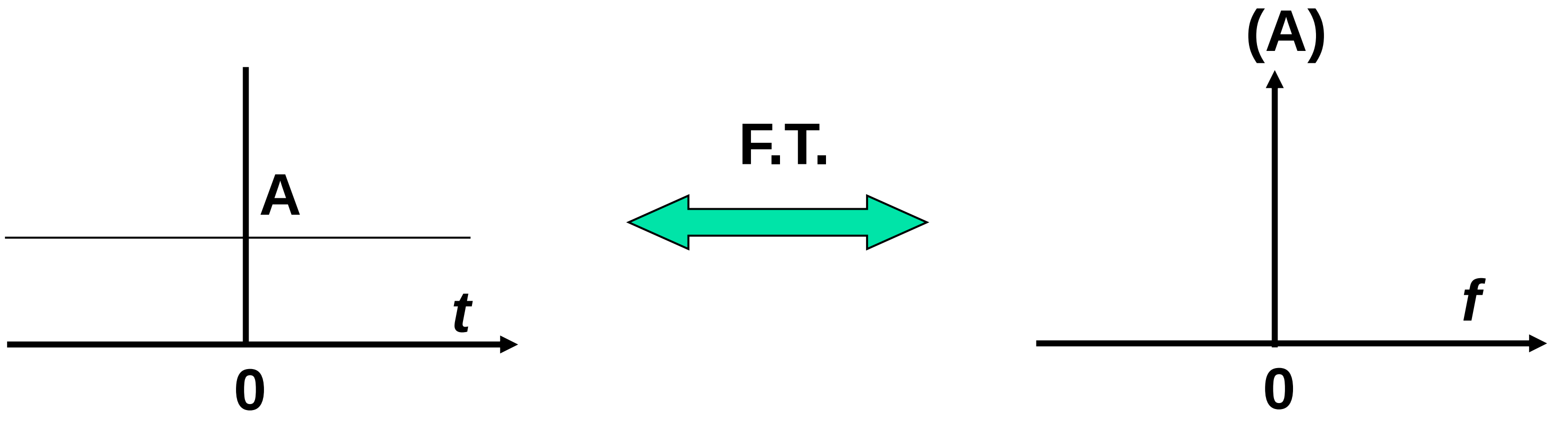
$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$



冲激信号

(1) 冲激信号与直流信号

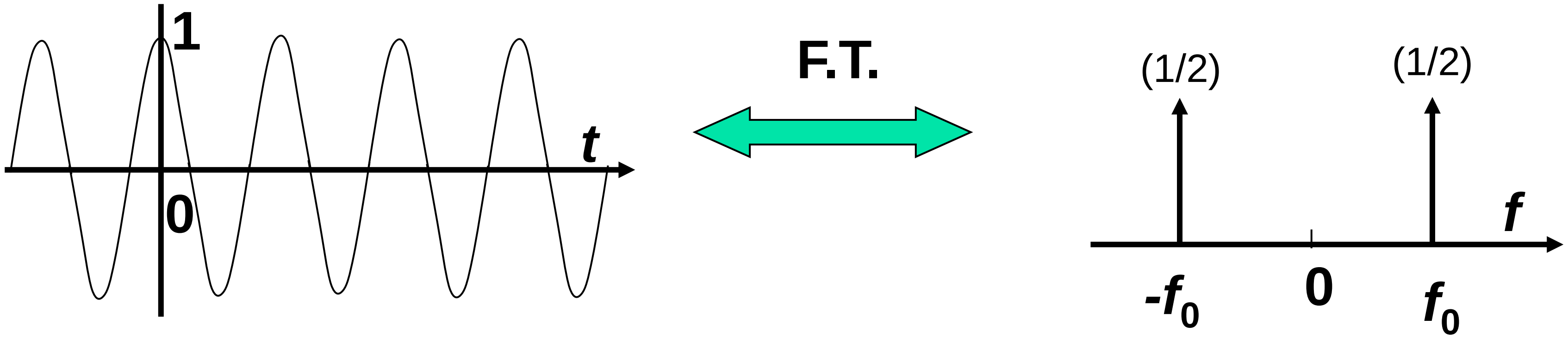
$$A \leftrightarrow A\delta(f)$$



直流信号

(2) 单音信号

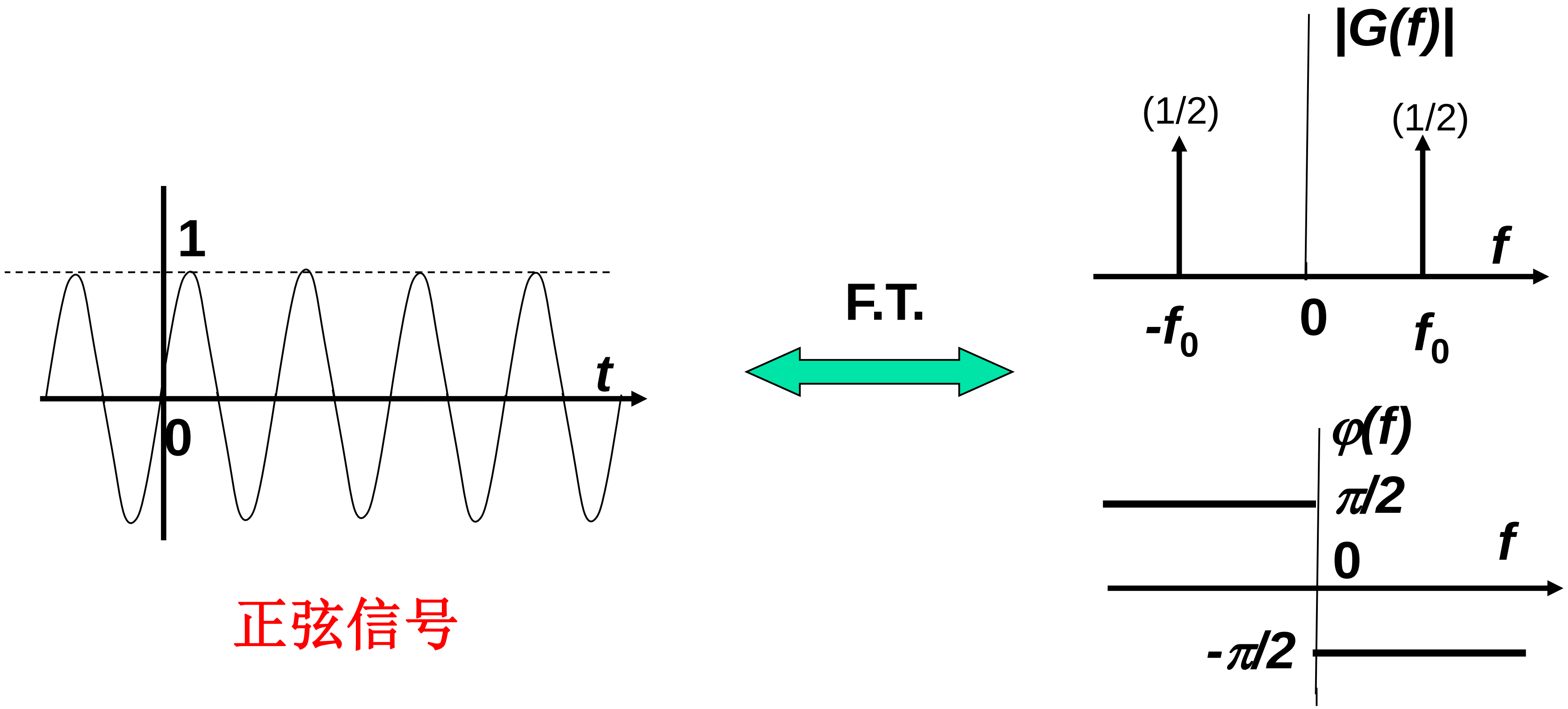
$$\cos 2\pi f_0 t \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



余弦信号

(2) 单音信号

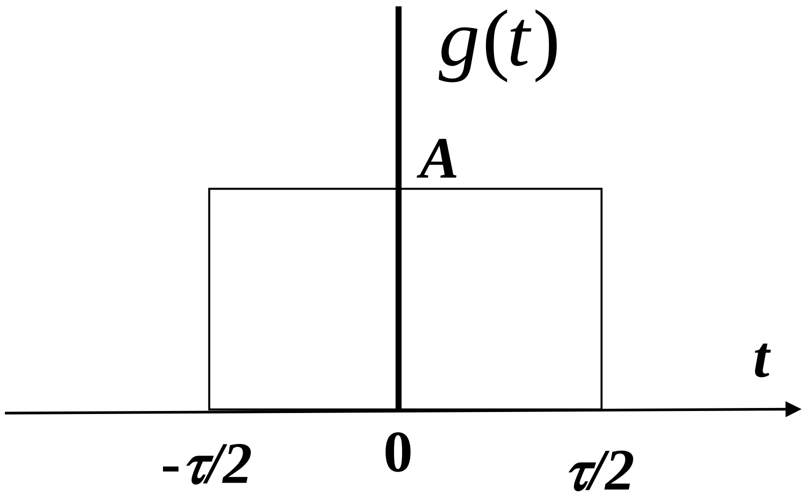
$$\sin 2\pi f_0 t \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{j2}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

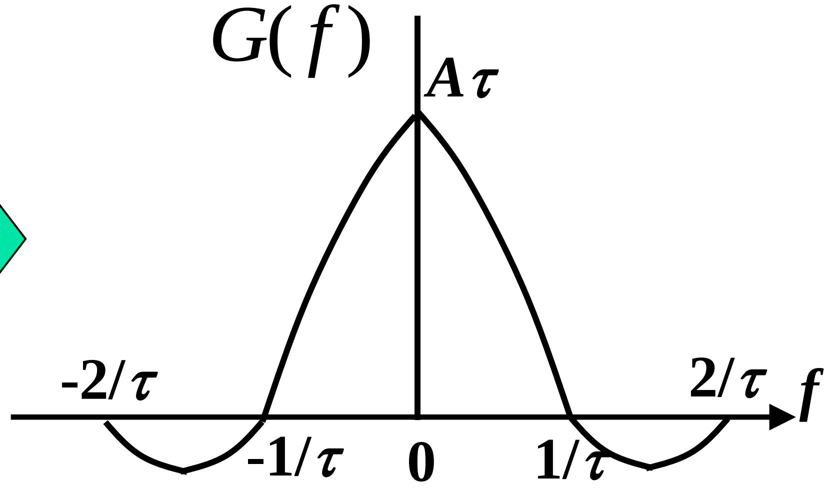


正弦信号

(3) 矩形脉冲信号

$$g(t) = A\mathrm{Rect}(\frac{t}{\tau}) = \Pi(t/\tau) \quad \Leftrightarrow \quad G(f) = A\tau Sa(\pi f \tau)$$

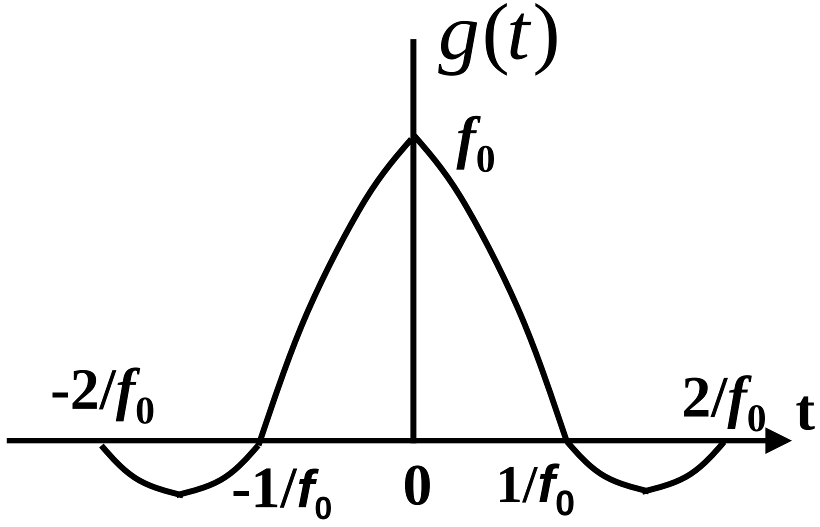




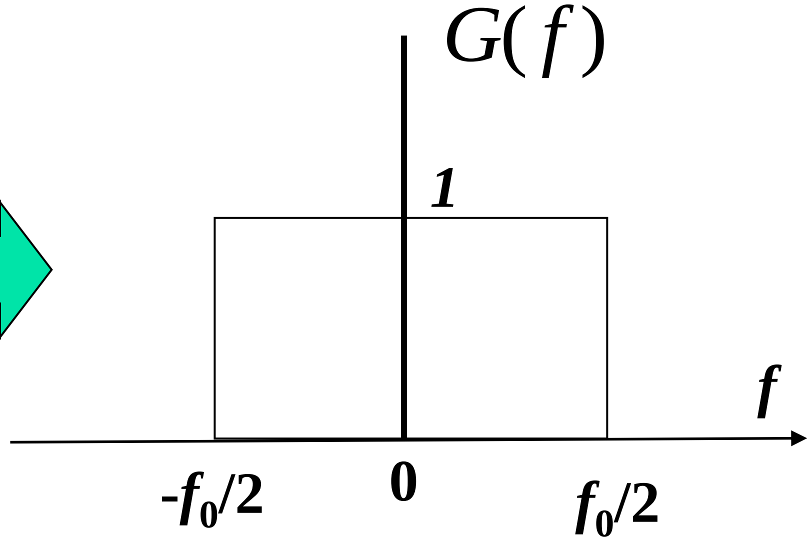
矩形脉冲信号

(3) 矩形脉冲信号

$$g(t) = f_0 a(\pi f_0 t) \qquad G(f) = \mathrm{Re}\,ct(\frac{f}{f_0})$$

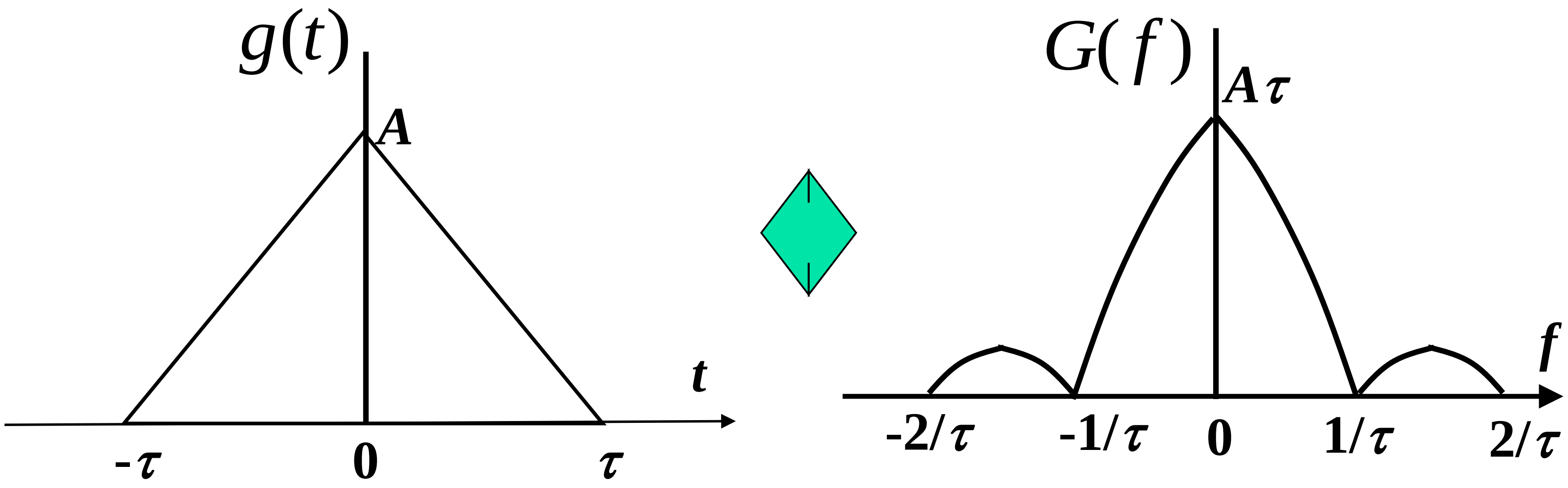


抽样函数



(4) 三角形脉冲信号

$$g(t) = \Lambda(t/\tau) \leftrightarrow G(f) = \tau Sa^2(\pi f \tau)$$



(5) 周期信号

- 周期信号傅里叶变换一般形式

$$g(t) \leftrightarrow G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$

其中 $f_0=1/T_0$, T_0 为信号周期。

- 如何计算傅里叶级数的系数C_n?
  - method 1:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

(5) 周期信号

- method 2:

$$C_n = \frac{1}{T_0} G_0(f)\Big|_{f=nf_0}$$

其中

$$g_0(t) \leftrightarrow G_0(f)$$

且

$$g_0(t) = \begin{cases} g(t), -\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2} \\ 0, \qquad otherwise \end{cases}$$

为g(t)在区间$\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$内的一个周期信号。

(5) 周期信号

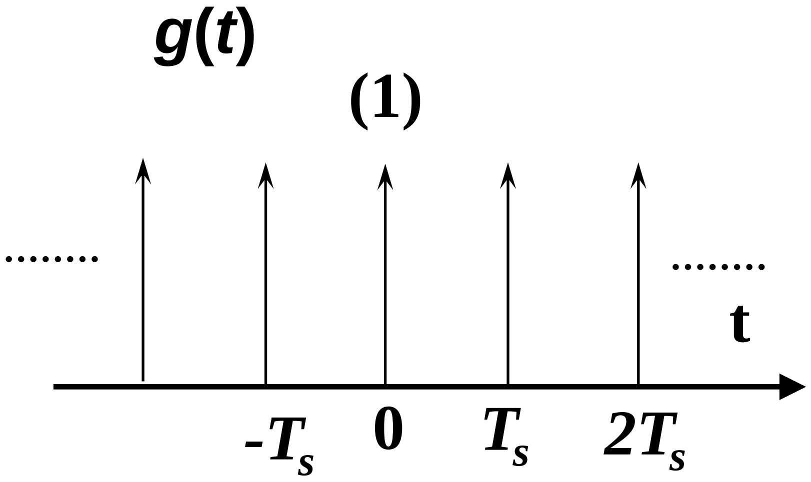
$$g(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$g_0(t) = \delta(t) \Leftrightarrow G_0(f) = 1$$

$$C_n = \frac{1}{T_s} G_0(f)\Big|_{f=nf_s} = \frac{1}{T_s}$$

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_s)$$

$$= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$



周期冲激序列