



**Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.**

### Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

### Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

— Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.

## Sujet

**Rappels et notations.** Pour un ensemble  $E$ , nous notons  $|E|$  le cardinal de  $E$ .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un  $\epsilon$ -AEFND est un automate à états fini avec  $\epsilon$ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons  $\mathcal{L}(A)$  le langage reconnu par  $A$ .

Pour un langage  $L$ , nous notons  $\text{Pref}(L)$  et  $\text{Suf}(L)$  les fermetures de  $L$  par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole  $\cdot$  dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière  $e$ ,  $\mathcal{L}(e)$  désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire  $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$ , ce que nous notons  $e \equiv e'$ .

## Champ Libre

**Question 1** Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

## Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

**Question 2 ♣ (1 point)** Soit un AEFD  $A$  sur un alphabet  $\Sigma$  dont la fonction de transition est notée  $\delta$ . Soit  $u \in \Sigma^*$  dont l'exécution sur  $A$  n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a  $A$  a au moins un état non co-accessible.     ☐  $u \notin \mathcal{L}(A)$ .  
☐ c  $A$  a au moins un état co-accessible.     ☐ d  $A$  a au moins un état non accessible.  
☐ e  $A$  n'a pas d'état accepteur.     ☐  $A$  a au moins un état accessible.  
☐  $A$  n'est pas complet.  
☐ Il y a un état  $q$  de  $A$  et un symbole  $e$  de  $\Sigma$  tel que  $(q, e)$  n'est pas dans le domaine de  $\delta$ .  
☐  $u$  n'est pas accepté par  $A$ .  
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.  
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

**Question 3 ♣ (1 point)** Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a  $\Sigma$  est fermé par suffixe.     ☐  $\Sigma^*$  est fermé par suffixe.  
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.  
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.     ☐ e  $\Sigma$  est fermé par préfixe.  
☐  $\Sigma^*$  est fermé par préfixe.     ☐  $\Sigma^*$  est fermé par facteur.     ☐ h  $\Sigma$  est fermé par facteur.  
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.  
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

**Question 4 ♣ (1 point)** Soit un AEFD  $A$  sur un alphabet  $\Sigma$  dont la fonction de transition est notée  $\delta$ . Soit  $u \in \Sigma^*$  dont l'exécution sur  $A$  est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a  $u \in \mathcal{L}(A)$ .     ☐ b  $A$  est complet.     ☐ c  $A$  a des états accepteurs.  
☐ d Les états de  $A$  sont tous co-accessibles.     ☐ e Les états de  $A$  sont tous accessibles.

☐ f  $u$  est accepté par  $A$ .

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.  
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

**Question 5 ♣ (1 point)** Soit un AEFD  $A$  sur un alphabet  $\Sigma$  dont la fonction de transition est notée  $\delta$  et l'ensemble des états  $Q$ . Nous supposons que  $A$  est complet.

☐ a  $A$  possède un état puits ☐ b nécessairement  $|Q| \geq 2$ .

☐ L'exécution de  $A$  est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ d  $A$  accepte le langage universel. ☐  $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$ . ☐ f  $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$ .

☐ g Tous les états de  $A$  sont accepteurs.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

**Question 6 ♣ (1 point)** Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.  
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.  
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate  $A$  est l'automate  $A$  lui même.  
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.  
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

**Question 7 ♣ (1 point)** Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient  $A$  et  $B$  deux automates déterministes et  $P$  l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre  $A$  et  $B$  vue en cours. Nous notons  $Q_X$  l'ensemble des états de l'automate  $X$ .

- ☐  $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$ .  
☐  $P$  est forcément déterministe.  
☐ c Si  $A$  et  $B$  sont accessibles, alors  $P$  est accessible.  
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.  
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

**Question 8 ♣ (1 point)** Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.  
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.  
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être vide.  
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.  
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une fonction.  
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.  
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.  
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

## Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

**Question 9 (2 points)** Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-     ☐ b la Figure 3-iv-     ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.  
☐ c la Figure 3-i-     ☒ la Figure 3-iii-.

## Partie 3 : Déterminisation d' $\epsilon$ -AEFND (2 points)

**Question 10 (2 points)** Considérons l' $\epsilon$ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-     ☒ la Figure 4-i-     ☐ c la Figure 4-iv-     ☐ d la Figure 4-iii-.

## Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et  $X_i$  dénote le langage accepté à partir de l'état numéro  $i$ , pour  $i$  entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

**Question 11 ♣ (1 point)** Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☒  $X_1 = aX_1 + bX_2$      ☐ b  $X_4 = (a + b)X_4$      ☐ c  $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$   
☐ d  $X_3 = aX_2 + cX_4$      ☐ e  $X_3 = aX_3 + cX_4$      ☐ f  $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$   
☒  $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$      ☒  $X_2 = bX_2 + aX_3$      ☐ i  $X_4 = a + b$   
☐ j  $X_2 = bX_3 + aX_2$      ☒  $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$      ☐ l  $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$   
☐ m  $X_1 = aX_1 + b$

**Question 12 ♣ (0,5 point)** Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à  $X_4$ . Nous obtenons.

- ☐ a  $X_4 = a + b$      ☐ b  $X_4 = \epsilon + a + b$      ☐ c  $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$      ☐ d  $X_4 = (a + b)X_4$   
☒  $X_4 = (a + b)^*$      ☐ f  $X_4 = a^* + b^*$      ☐ g Aucune des équations proposées.  
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

**Question 13 (0,5 point)** Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à  $X_1$ . Nous obtenons.

- ☐ a  $X_1 = a^+bX_2$      ☐ b  $X_1 = a^*b$      ☐ c  $X_1 = a^*b + \epsilon$      ☐ d  $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$   
☒ Aucune des équations proposées.  
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

**Question 14 (0,5 point)** Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à  $X_2$ . Nous obtenons.

- ☐ a  $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$     ☒  $X_2 = b^*aX_3$     ☐ c  $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$     ☐ d  $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$   
☐ e Aucune des équations proposées.  
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

**Question 15 (0,75 point)** Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à  $X_3$  et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour  $X_3$ . Nous obtenons.

- ☐ a  $X_3 = a(a+b)^*$     ☒  $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$     ☐ c  $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$   
☐ d  $X_3 = (a(a+b)^*)^*$     ☐ e Aucune des équations proposées.  
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

**Question 16 (0,25 point)** L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a celle obtenue par  $X_3 + X_4$     ☒ celle trouvée pour  $X_1$

**Question 17 (0,5 point)** L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a  $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$     ☐ b  $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$     ☒  $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$   
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.

## Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

**Question 18 (1 point)** Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

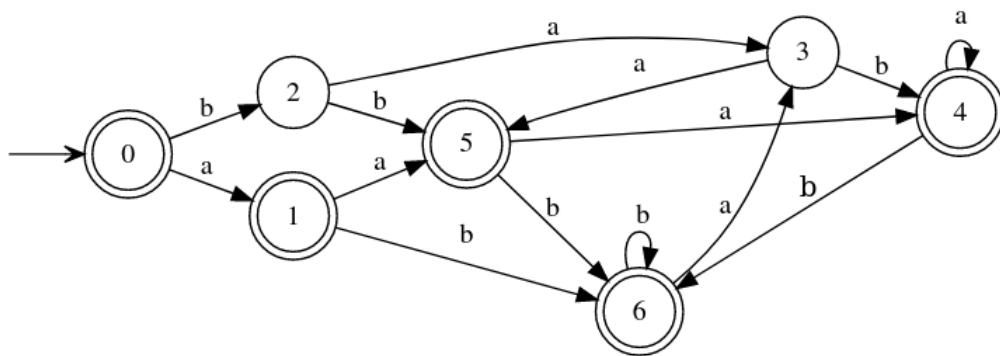
La constante d'itération minimale de ce langage est :

- ☐ a 3    ☐ b 0    ☐ c 5    ☐ d 6    ☒ 4    ☐ f 2    ☐ g 1

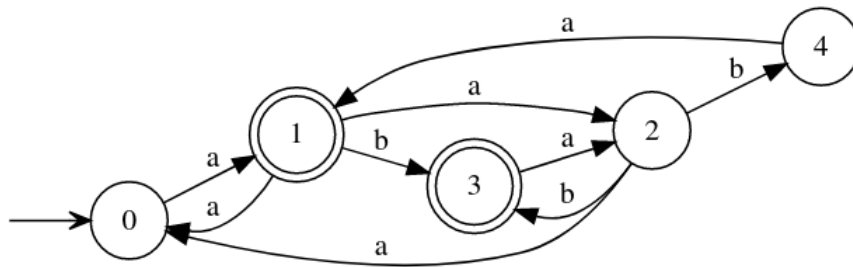
**Question 19 (3 points)** Démontrer que le langage  $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ , sur l'alphabet  $\{a, b\}$ , est non régulier.

## Partie 6 : Algorithmes (3 points)

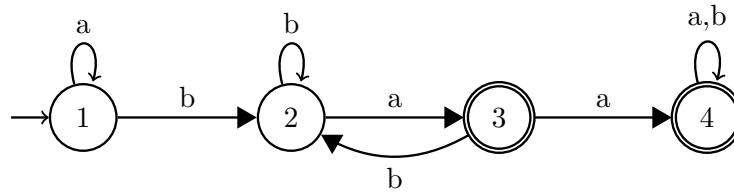
**Question 20 (3 point)** Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).

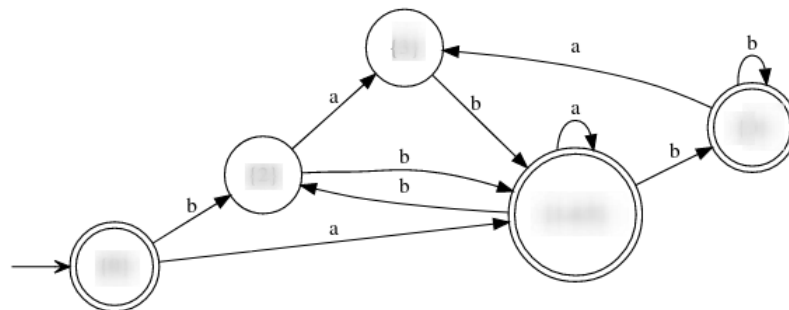


(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 3).

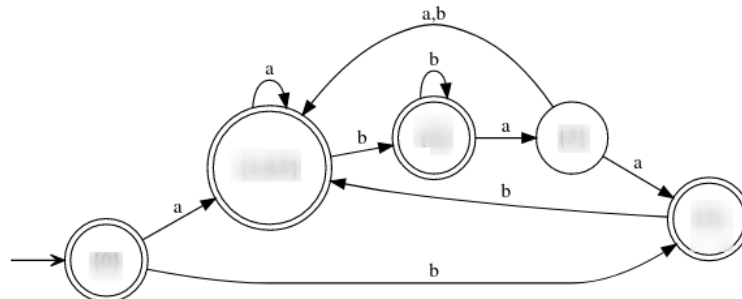


(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

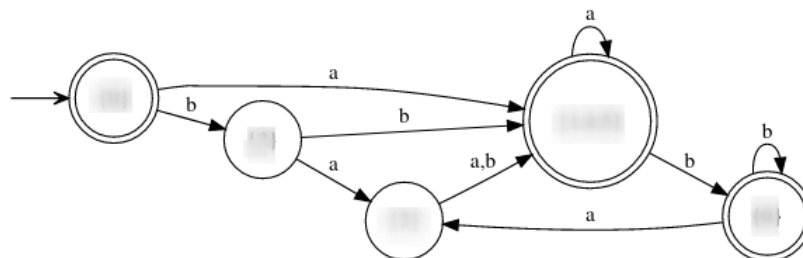
FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.



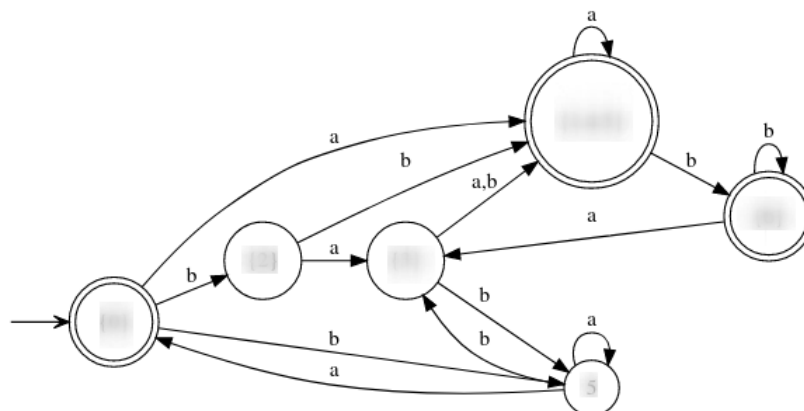
(-i-)



(-ii-)



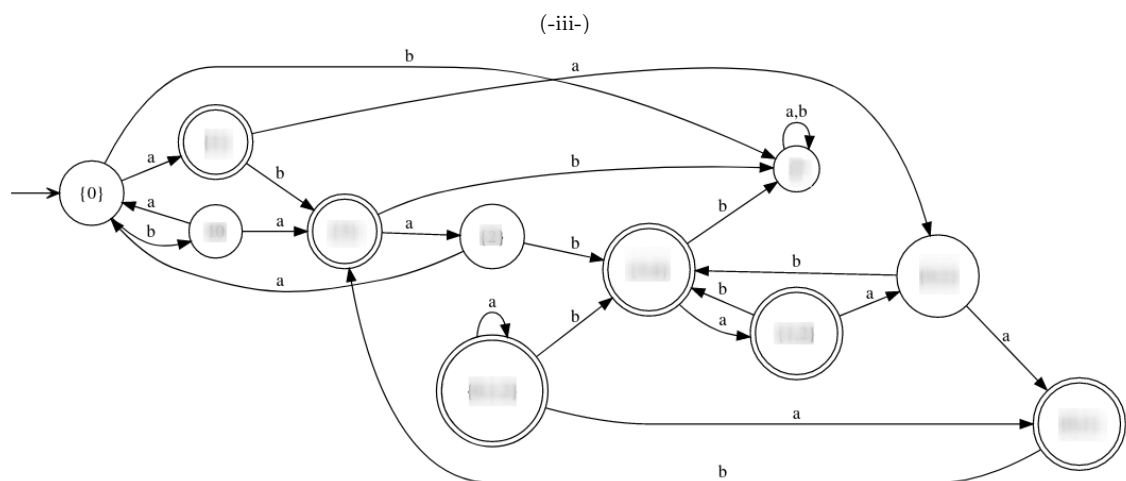
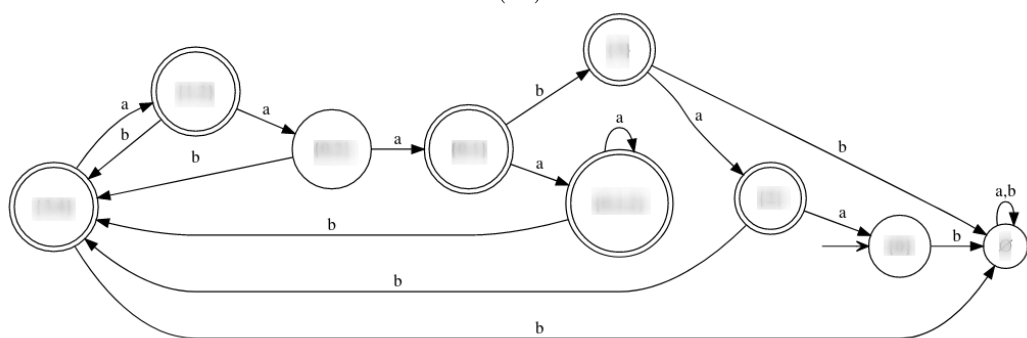
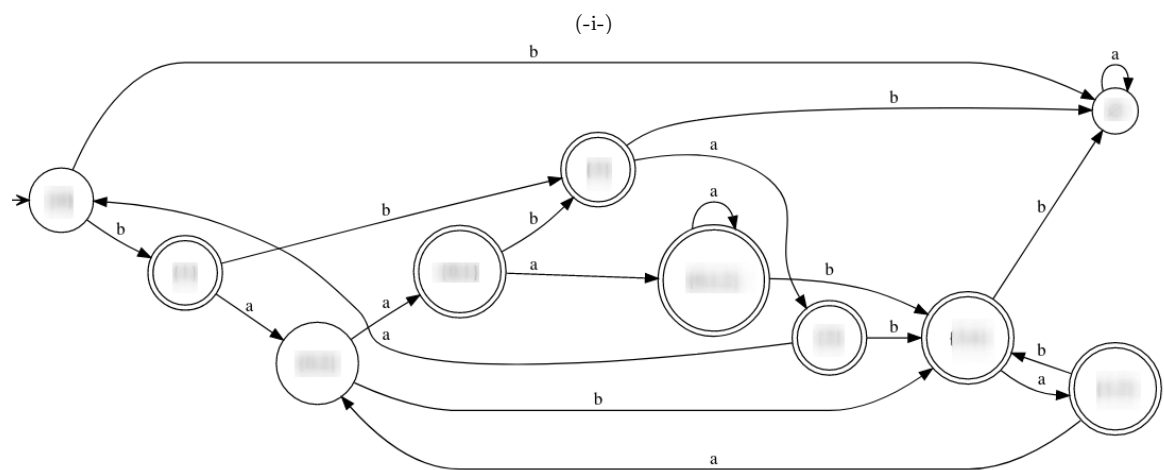
(-iii-)

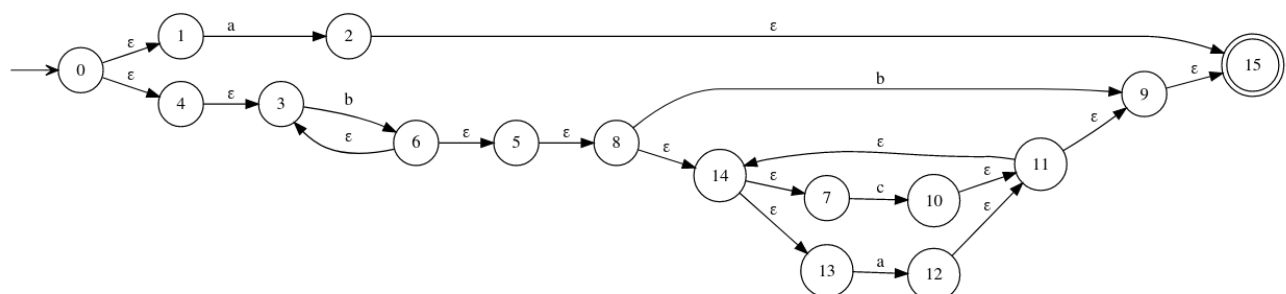


(-iv-)

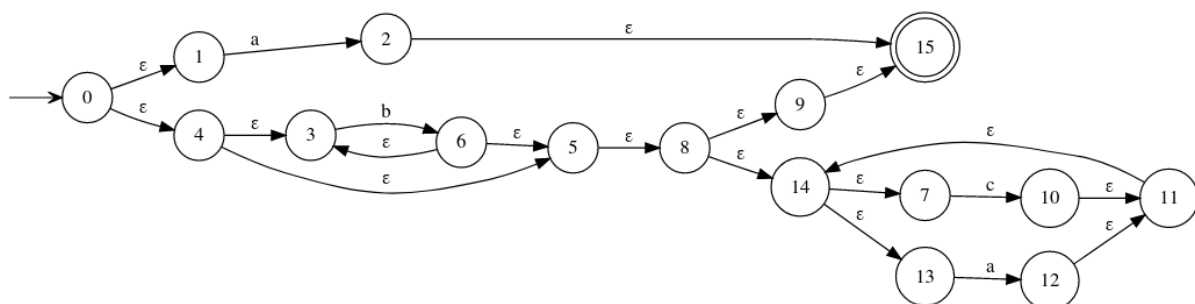
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



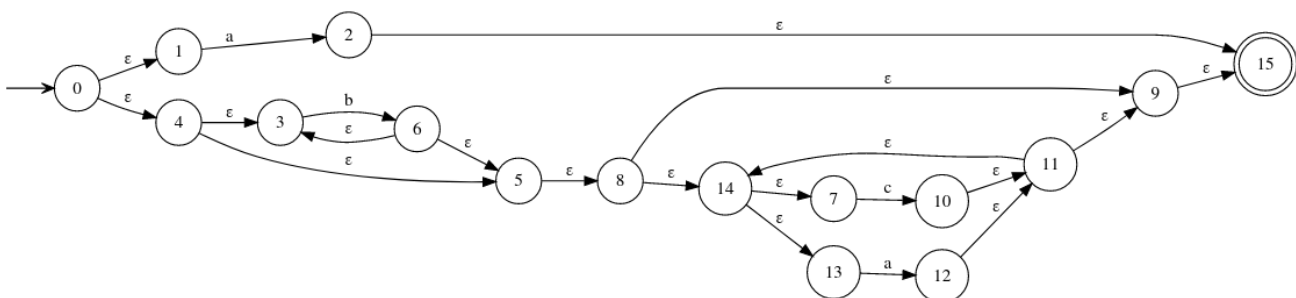
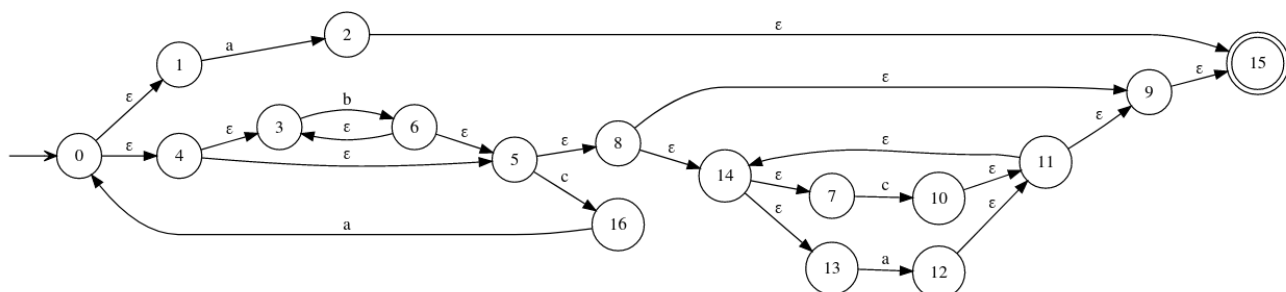




(-i-)



(-ii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers  $\epsilon$ -AEFND, pour l'expression  $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$ .



+1/11/50+

Examen final du 5/01/2022  
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates  
Année académique 2021/2022

## Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre  
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen  
et numéro de place ci-dessous.


Salle d'examen :

.....

Numéro de place :






.....

Question 1 :





 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....


Question 2 : 

a		c	d	e					j	k
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Question 3 : 

a			d	e			h	i	j
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---


Question 4 : 

a	b	c	d	e	f	g	
---	---	---	---	---	---	---	---

Question 5 : 

a	b		d		f	g	h	i
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Question 6 : 

a	b	c	d	
---	---	---	---	---


Question 7 : 

		c	d	e
---	---	---	---	---


Question 8 : 

a		c					h				l	m	n
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---





Question 9 : 

a	b	c		e
---	---	---	---	---

Question 10 : 

a		c	d
---	---	---	---

Question 11 : 

	b	c	d	e	f			i	j		l	m
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---





●

[illegible]