Licence Sciences et Technologies
Univ. Grenoble Alpes

Examen à mi-parcours du 10/11/21
INF 302 : Langages et Automates
L2, 2021/2022

Rappel à propos des consignes et quelques conseils et remarques

- Durée : 2 heures.
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, montre connectée, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte. Un point sera réservé pour le soin de votre copie.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- L'examen est sur 22 points, vous devez obtenir 20 points pour obtenir la note maximale.

* *

Indiquer votre nom sur chaque copie double rendue.
Indiquer votre numéro de groupe sur chaque copie double rendue.

* *

Exercice 1 A propos de votre copie (1 pt)

Considérons la copie que vous devez rendre en fin d'examen.

1. **(0,5 pt)** La copie respecte les consignes.
2. **(0,5 pt)** La présentation de la copie est soignée.

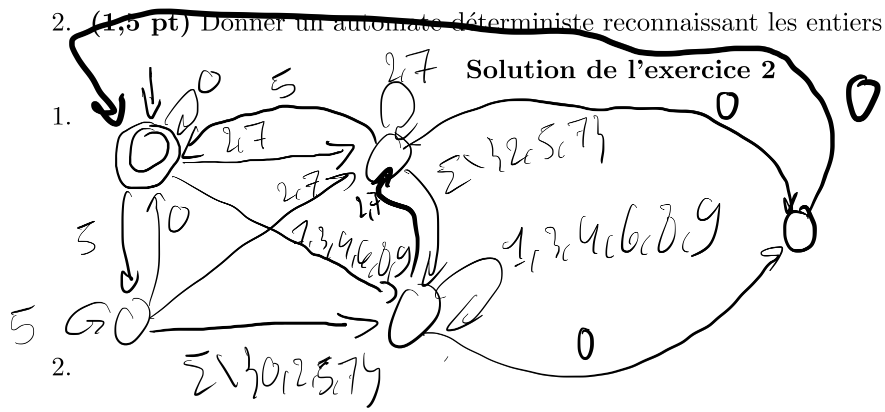
Exercice 2 Donner un automate déterministe (2 pts)

Considérons l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$.

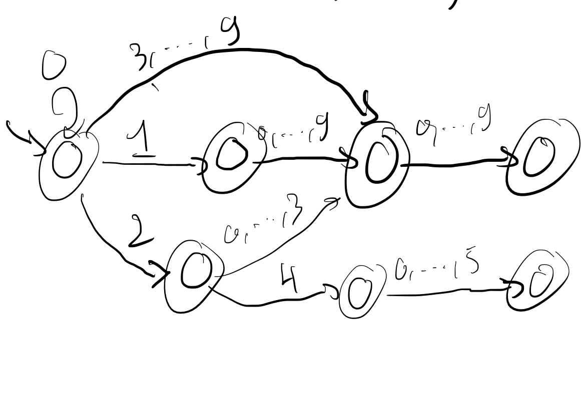
1. **(1,5 pt)** Donner un automate déterministe reconnaissant les entiers multiples de 25.
2. **(1,5 pt)** Donner un automate déterministe reconnaissant les entiers naturels inférieurs à 245.

Solution de l'exercice 2

1.



2.



Exercice 3 Le vrai du faux (2 pts)

Nous considérons un automate déterministe $D = (Q, \Sigma, q_0, \delta, , F)$. Dans cet automate, Q est l'ensemble d'états, q_0 est l'état initial, Σ est l'alphabet, δ est la fonction de transitions et F est l'ensemble des états accepteurs. Nous considérons les cinq affirmations suivantes.

a) Si D n'accepte pas le mot w, et que l'état final de l'exécution de ce mot sur D est $q_s \neq q_0$, alors : si on modifie D pour que q_s soit l'état initial, l'automate modifié accepte w.

b) S'il y a une transition d'un état final à un état non final, le langage reconnu par D est infini.

c) Si $q_0 \in F$, le langage reconnu par D contient ϵ.

d) Si $\delta(q_0, 0) = q_1, \delta(q_1, 0) = q_0$ et $q_0 \in F$, D accepte tous les mots comprenant des 0 uniquement et de longueurs paires.

e) Si D a un seul état final, D accepte seulement un nombre fini de mots.

1. Parmi les affirmations ci-dessus, indiquer celle qui est toujours correcte. Justifier. Pour les affirmations incorrectes, donner un contre-exemple.

Solution de l'exercice 3

1. Faux. Comme contre-exemple, nous pouvons considérer n'importe quel automate où l'état q_s est un état puits non-accepteur.
2. Faux. Considérons l'automate contre-exemple ci-dessous :

$\Sigma = \{a\}$

Langage reconnu : $\{\varepsilon\}$

3. Vrai. L'exécution du mot ϵ est acceptée.
4. Faux. Considérons l'automate contre-exemple ci-dessous :

Langage reconnu : a^* $(\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\})$

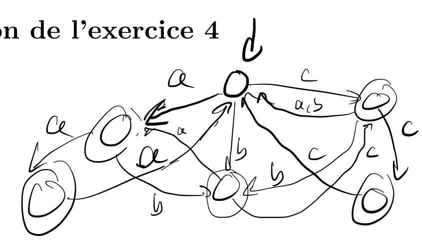
Exercice 4 Donner un automate - union (4 pts)

Considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

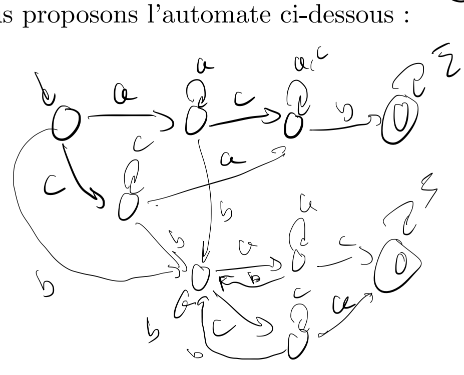
1. **(1 pt)** Donner un automate reconnaissant l'ensemble des mots ne contenant jamais plus de deux symboles identiques consécutifs, exception faite des mots *aaa* et *ccc*.
2. **(1 pt)** Donner un automate reconnaissant l'ensemble des mots contenant le symbole b ainsi que soit le facteur *ca* ou le facteur *ac*.
3. **(2 pts)** Donner un automate reconnaissant l'**union** des langages décrits aux deux questions précedentes.

Solution de l'exercice 4

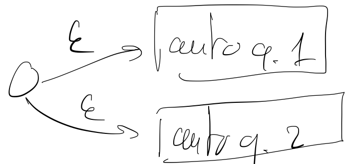
1. Nous proposons l'automate ci-dessous :



2. Nous proposons l'automate ci-dessous :



3. Nous proposons l'automate ci-dessous :



Exercice 5 Minimisation (3 pts)

Considérons l'automate dans la Figure 1.

1. Minimiser l'automate en représentant les étapes de l'exécution de l'algorithme de minimisation.

Solution de l'exercice 5

1. Utiliser Aude pour obtenir facilement la réponse à cet exercice.

Exercice 6 Inclusion de langages (3 pts)

1. **(1,5 pt)** En utilisant les opérateurs d'intersection et de complémentation entre langages, écrire une relation entre langages équivalente à $L \subseteq L'$, utilisant l'intersection et le complémentaire.
2. **(1,5 pt)** Supposons que L et L' soient des langages à états. Nous supposons disposer des automates $\mathcal{A}_L$ et $\mathcal{A}_{L'}$ reconnaissant ces langages. Déduire de la question précédente un algorithme permettant de déterminer si $L = L'$.

Solution de l'exercice 6

1. $L \subseteq L'$ si et seulement si $L \cap \overline{L'} = \emptyset$.
2. L'algorithme consiste à utiliser les automates reconnaisseurs et à réutiliser les algorithmes vus en cours pour calculer les opérations correspondantes sur les langages.

Exercice 7 Algorithme - intersection (3 pts)

1. Donner un algorithme permettant de calculer l'automate produit de deux automates. L'automate retourné doit reconnaître l'intersection des langages reconnus par les deux automates passés en entrée. Par ailleurs, l'automate retourné doit être accessible.

Solution de l'exercice 7

1. Plusieurs solutions sont possibles. En première solution, nous pouvons réutiliser l'algorithme de calcule d'automate produit vu en cours ; cet algorithme ne garanti pas que tous les états sont accessibles. Ensuite, nous calculons les états accessibles de cet automate et retournons l'automate

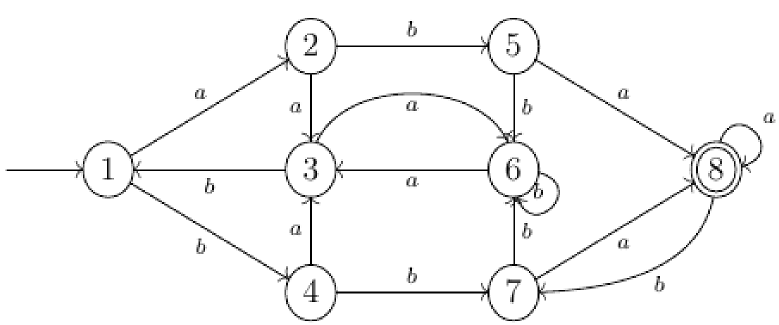


FIGURE 1 – Automate à minimiser

restreint aux états accessibles. En deuxième solution, nous pouvons adapter l'algorithme de calcul des états accessibles en l'utilisant sur l'automate produit que nous calculons à la volée (de la manière utilisée en pratique pour calculer l'automate produit en utilisant la représentation graphique). Pour cela, on initialise l'ensemble des états accessibles et à visiter avec l'état initial de l'automate produit (qui est accessible) puis on utilise la fonction de transition de l'automate produit (combinant les deux fonctions de transitions) pour découvrir de nouveaux états accessibles. Dans cet automate, tous les états sont accessibles.

Exercice 8 Automate émondé équivalent (4 pts)

Rappelons qu'un automate émondé est un automate accessible et co-accessible.

1. Montrer qu'à tout automate on peut associer un automate émondé qui reconnaît le même langage.

Solution de l'exercice 8

1. Un automate émondé est un automate où tous les états sont accessibles et co-accessibles. Pour montrer qu'un automate et sont automate émondé reconnaissent les mêmes mots, il faut montrer qu'un mot est accepté par l'un si et seulement s'il est accepté par l'autre. Pour cela, on peut utiliser la notion d'exécution de l'automate et montrer qu'un mot a la même exécution sur les deux automates. Montrer qu'un mot accepté par l'automate émondé est accepté par l'automate de départ est évident. Dans l'autre sens, pour un mot accepté par l'automate de départ, tous les états de l'exécution apparaissant dans les configurations traversées sont accessibles et co-accessibles. Ainsi, à partir de cette exécution, on peut déduire la même exécution sur l'automate émondé. En effet, le fait d'émonder un automate ne modifie pas ses transitions.