

Rappel à propos des consignes et quelques conseils et remarques

- Durée : 2 heures.
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, montre connectée, etc.).
- Le barème est donné à titre indicatif.
- L'examen est sur 23 points, vous devez obtenir 20 points pour obtenir la note maximale.

Questions de cours

Pour les exercices de cette section (Exercice 1 à Exercice 3), il faut 1) indiquer la ou les propositions correctes et 2) fournir une brève justification (4-5 lignes).

Exercice 1 (Exécution d'un automate déterministe - 1,5 points)

Considérons un automate déterministe $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ qui accepte les mots $w \in \Sigma^*$, avec $|w| = n$. Une exécution de A sur w :

1. est une séquence de longueur exactement n
2. est une séquence de longueur exactement $n + 1$
3. est une séquence de longueur arbitraire
4. est une séquence de longueur strictement supérieure à $n + 1$

Exercice 2 (Automate reconnaissant le langage universel - 2 points)

Considérons un automate déterministe $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ qui accepte le langage universel sur son alphabet.

1. Chaque état de A est final/accepteur.
2. Il y a au moins un état de A qui n'est pas final/accepteur.
3. Chaque état accessible est final/accepteur.
4. Il y a au moins un élément dans Σ .
5. Il y a au moins un état final/accepteur qui n'est pas q_0 .

Exercice 3 (Automate produit - 1,5 points)

Considérons 2 automates déterministes accessibles et complets ayant respectivement 5 et 4 états, et 2 et 3 états finaux, et reconnaissant respectivement les langages L_1 et L_2 . Indiquer le nombre d'états finaux dans l'automate produit reconnaissant l'intersection de L_1 et L_2 .

Automates déterministes

Exercice 4 (Dessiner un automate - 4 points)

Pour chacun des langages suivants, dessiner un automate déterministe reconnaisseur. Pour les trois premières questions, l'automate doit avoir au plus 4 états.

1. (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ contient au moins trois occurrences du symbole } 1\}$.
2. (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ contient au moins une occurrence du facteur } 00 \text{ ou du facteur } 11\}$.
3. (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ne contient pas le facteur } 110\}$.
4. (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ finit par } 00\}$.

Produit d'automates

Exercice 5 (Dessiner un automate - 4 points)

Considérons les 2 automates, A et B, dont les représentations tabulaires sont données ci-dessous.

A	$\downarrow 1$	2^*	3^*
a	2	3	1
b	3	1	2

B	$\downarrow 1^*$	2	3^*
a	3	1	2
b	2	3	1

1. (2 pt) Dessiner l'automate reconnaissant l'*intersection* des langages reconnus par A et B.
2. (2 pt) Dessiner l'automate reconnaissant l'*union* des langages reconnus par A et B.

Algorithmes et preuves

Exercice 6 (Miroir miroir - 6 points)

Pour rappel, le miroir d'un langage est le langage des (mots) miroir de ce langage. Le miroir d'un mot est le mot lu de droite à gauche. Plus formellement, étant donné $w \in \Sigma^*$, avec $w = a_1 \cdots a_n$, le mot miroir de w est noté w^R et est défini par $w^R = a_n \cdots a_1$. Le miroir d'un langage est le langage noté L^R et défini par $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

1. (2 pt) Soit L un langage. Montrer que L est de la forme $L' \cup L'^R$ pour un certain langage L' si et seulement si $L = L^R$.
2. (2 pt) Donner un algorithme qui liste tous les mots d'un automate reconnaissant un langage fini.
3. (2 pt) Donner un algorithme qui, étant donné un automate déterministe ne comportant pas de cycle, détermine s'il existe un langage L (fini) tel que le langage reconnu par cet automate soit $L \cup L^R$.

Minimisation

Exercice 7 (Minimisation - 4 points)

Considérons l'automate A dont la représentation tabulaire est données ci-dessous.

A	1	2^*	3	4	5^*	6
a	4	4	3	4	4	4
b	1	1	3	6	6	6
c	5	6	3	6	6	2

1. (1 pt) Calculer l'ensemble des états distinguables de l'automate A.
2. (1 pt) Calculer l'ensemble des états équivalents de A.
3. (1 pt) Est-ce que les états équivalents sont non distinguables? Justifier.
4. (1 pt) Minimiser l'automate A.