

TP N.3 : Méthode d'Optimisation par Descente de Gradient

Dr. Kaoutar SENHAJI

Objectifs du TP

- Comprendre les principes fondamentaux de la méthode de descente de gradient.
- Savoir modéliser un problème d'optimisation à partir d'une fonction donnée.
- Implémenter un algorithme de descente de gradient en Python.
- Analyser les résultats et étudier l'effet des paramètres d'optimisation.

1 Introduction (30 minutes)

Principe de la descente de gradient

La méthode de descente de gradient est une méthode itérative pour résoudre des problèmes d'optimisation. Étant donné une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, l'objectif est de minimiser $f(\mathbf{x})$. La règle de mise à jour est donnée par :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \eta \nabla f(\mathbf{x}_k),$$

où :

- \mathbf{x}_k est la solution approchée à l'itération k .
- $\eta > 0$ est le taux d'apprentissage.
- $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ est le gradient de f au point \mathbf{x}_k .

Problème étudié

On considère une fonction quadratique générique :

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f,$$

avec $a, b > 0$. Ce type de fonction modélise de nombreux problèmes physiques et d'apprentissage automatique.

2 Exercice 1 : Modélisation mathématique (30 minutes)

1. Calculer le gradient $\nabla f(x, y)$ de la fonction donnée.
2. Montrer que la fonction est convexe en vérifiant que la matrice hessienne \mathbf{H} est définie positive.
3. Écrire la règle de mise à jour pour les variables x et y .

3 Exercice 2 : Résolution manuelle (30 minutes)

Considérons la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y.$$

1. Initialisez les variables : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, et $\eta = 0.1$.
2. Effectuez trois itérations manuelles de la descente de gradient.
3. Vérifiez si la solution se rapproche du minimum théorique $(1, 1)$.

4 Exercice 3 : Implémentation Python (1h)

Objectif

Implémentez l'algorithme de descente de gradient en Python pour résoudre numériquement les problèmes suivants.

Étapes

1. Écrire une fonction Python pour calculer $f(x, y)$ et $\nabla f(x, y)$.
2. Implémenter une boucle pour l'algorithme de descente de gradient avec :
 - Une condition d'arrêt basée sur la norme du gradient.
 - L'affichage des valeurs de x , y et $f(x, y)$ à chaque itération.
3. Visualiser les trajectoires des itérations sur un graphique des contours de $f(x, y)$.

5 Exercice 4 : Étude avancée (30 minutes)

Appliquez la méthode à une fonction non quadratique :

$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(y) + x^2 + y^2.$$

1. Implémentez la descente de gradient pour cette fonction.
2. Testez différents taux d'apprentissage ($\eta = 0.01, 0.1, 0.5$) et observez les différences dans la convergence.

6 Conclusion (30 minutes)

1. Discutez des avantages et limitations de la méthode de descente de gradient.
2. Proposez des améliorations possibles comme l'utilisation du moment ou d'un taux d'apprentissage adaptatif.
3. Posez des questions ouvertes pour approfondir la réflexion.

Annexes

- Code Python de base (fourni si nécessaire).
- Graphiques et diagrammes explicatifs.