CSE 321 - Introduction to Algorithm Design

Homework 2

1) Film Alan Turing'in evinin saldırıya uğraması ile başlıyor. Alan Turing Kraliyet Üniversitesinde bir profesör. Polislere evinden hiçbir şey alınmadığını söyleyerek başından savıyor. Amacı en başından beri ne ile uğraştığının anlaşılmaması. 2. Dünya savaşınında Alan Turing'in etkisini anlatan bu filmde Almanlar şifreli mesajlar kullanarak haberleşiyor. İngiltere ordusu bu şifreli mesajları ne kadar uzmanları olursa olsun çözemiyor. Bunun sonucu olarak da sürekli bombalı saldırılara maruz kalıyor. Sivil zaiyat, maddi ve manevi zaiyet sürekli artarken Alan Turing İngiltere ordusuna gelerek gizli olan şifre çözme programına girmek istiyor. Almanca bilmeyerek şifreyi çözebileceğini iddia ediliyor. İlk başta kabul edilmeyen profesör "Enigma" diyerek komutanı etkiliyor. Sonrasında sahip olduğu bilgileri aktararak, problemi çözebileceğini (Dünyanın en zor problemini) iddia edip kendisini kabul ettiriyor. Kurulan bu gruba girerek, o zamanın sağladığı imkanlar ile bir ev kadar büyük olan "Enigma" makinesinin her gece değişen şifresini çözmesi bekleniyor. Ama Alan Turing değişen her şifreyi değil, bu şifrelerin neye göre değiştiğini yani şifrelemenin şifrelemesini bularak 2. Dünya Savaşında İngiltere'nin önünü açıyor. Çok uzun zamanda gerçekleşen bu "Enigma" şifresinin çözümünde pes etme noktasına gelse bile devam ederek "Enigma" ayarını çözüp İngiltere'nin kahramanı oluyor. Filmde "Enigma" şifresini çözmek için uğraşan Alan Turing ve takımını anlatıyor!

2)

a) $x_1(n) = 0{,}5\, x_1\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n}$

$a = 0{,}5$ $\quad n = 2^k$ $\quad f(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow f(n)$ azalan bir fonksiyondur.

$b = 2$ $\quad x_1(1) = c$

$\frac{1}{n} = n^{-1} = n^d \Rightarrow \underline{d = -1} < 0$

Bu nedenle bu problem master theorem ile çözülemez!

b) $x_2(n) = 3\, x_2\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$

$a = 3$ $\quad x_2(0) = 3\, x_2(0) + 0$

$b = 4$ $\quad x_2(0) = 0$

$f(n) = n\log n \Rightarrow f(n) \in \Theta(n\log n)$

logn'i n cinsinden yazalım;

$\log n < n$ for $n \geq 1$

$n^a = \log n$

$a = \log_n(\log n)$, $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ $\Rightarrow a = \frac{\log(\log n)}{\log n}$ $\Big\}$ $n^a = n^{\frac{\log\log n}{\log n}} = \log n$

$f(n) = n \cdot n^{\frac{\log\log n}{\log n}} \Rightarrow f(n) = n^{1 + \frac{\log\log n}{\log n}}$

$d = 1 + \frac{\log\log n}{\log n} \geq 0$

$a = 3 < b^d = 4^{1 + \frac{\log\log n}{\log n}}$

$x_2(n) \in \Theta\Big(\underbrace{n^{1 + \frac{\log\log n}{\log n}}}\Big) \longrightarrow \underline{\Theta(n\log n)}$

c) $x_3(n) = 3x_3(n/3) + \frac{n}{2}$

$a=3$

$b=3$ $\quad f(n) = \frac{n}{2} \Rightarrow f(n) \in \Theta(n)$

$d = 1 > 0$

$a=3 = b^d = 3^1$

$x_3(n) \in \Theta(n \log n)$

d) $x_4(n) = 6x_4\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 \log n$

$a=6$

$b=3$ $\quad f(n) = n^2 \log n$

2. sorunun b sıkkında $n^a = \lg n$ esitliğinden a yerine koyulacak buldyğumuz değeri yerine koyalım;

$f(n) = n^2 . n^{\frac{\log \log n}{\lg n}} \Rightarrow f(n) = n^{2 + \frac{\log \lg n}{\lg n}}$

$2 + \frac{\log \log n}{\lg n} \geq 0$

$a = 6 < b^d = 3^{2 + \frac{\log \log n}{\lg n}}$

$x_4(n) \in \Theta\left(n^{2 + \frac{\log \log n}{\lg n}}\right)$

$n^{2 + \frac{\log \lg n}{\lg n}} = n^2 . \lg n$

$x_4(n) \in \Theta(n^2 \lg n)$

e) $x_5(n) = 4x_5\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$

$a=4$
$b=2$ $\qquad f(n) = \frac{n}{\log n} \quad \Rightarrow \log n = n^a$

$$a = \frac{\log\log n}{\log n}$$

$$f(n) = \frac{n}{n^{\frac{\log\log n}{\log n}}} \Rightarrow f(n) = n^{1-\frac{\log\log n}{\log n}}$$

$$d = 1 - \frac{\log\log n}{\log n}$$

$$0 < \frac{\log\log n}{\log n} < 1 \qquad d \geq 0$$

$$a = 4 > b^d = 2^{1-\frac{\log\log n}{\log n}}$$

$$x_5(n) \in \Theta(n^{\log_2 4}) \quad \Rightarrow n^{\log_2 4} = n^2$$

$$\underline{\underline{x_5(n) \in \Theta(n^2)}}$$

f) $x_6(n) = 2^n x_6\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$

$a = 2^n$
$b = 2$ $\qquad f(n) = n^n \Rightarrow f(n) \in \Theta(n^n)$

$$\boxed{d = n}$$

$n = 2^k$ ve $k \geq 1$ olduğu için $n \geq 0$ dır, bu durumda $d \geq 0$ dır!

$$a = 2^n = b^d = 2^n$$

$$x_6(n) \in \Theta(n^d . \log n)$$

$$\underline{\underline{x_6(n) \in \Theta(n^n \log n)}}$$

Scanned by CamScanner

3) def chocolateAlgorithm(n):

```
def chocolateAlgorithm(n):
    if n==1:
        return 1
    else:
        return chocolateAlgorithm(n-1) + 2*n -1
```

a) $T(n) = T(n-1) + 2n - 1$

$T(n-1) = T(n-2) + 2(n-1) - 1$

$T(n-2) = T(n-3) + 2(n-2) - 1$

$\vdots$

$T(3) = T(2) + 2.3 - 1$ $\quad T(3) = T(1) + 2.2 - 1 + 2.3 - 1$

$T(2) = \underbrace{T(1)}_{1} + 2.2 - 1$

$T(n) = \underbrace{T(1)}_{1} + 2((n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 3 + 2) - n$

$T(n) = 2[\underbrace{(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1}] - n - 1$

$T(n) = 2\left(\frac{(n-1).n}{2}\right) - n \cancel{-1}$ negatif, bir değeri yok

$T(n) = n^2 - n \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

Best Case: $n=1$, $O(1)$

worst case: $n>1$, $\Omega(n^2)$

$T(1) = 1 = 1^2$

$T(2) = T(1) + 2.2 - 1 = 4 = 2^2$

$T(3) = T(2) + 2.3 - 1 = 9 = 3^2$

$T(4) = T(3) + 2.4 - 1 = 16 = 4^2$

$T(5) = T(4) + 2.5 - 1 = 25 = 5^2$

$T(6) = T(5) + 2.6 - 1 = 36 = 6^2$

$T(n) = T(n-1) + 2(n) - 1 = n^2$

elemanın karesini buluyor!

Tekrarlama sayısı ise n dir,

Yani n tane recursive kol olur!

b) $T(1) = 1$ → $n=1$ için çağrılan recursive kolda çarpma yok!

$T(2) = T(1) + 2(2) - 1$

$T(3) = T(2) + 2(3) - 1$

$\vdots$

$T(n-1) = T(n-2) + 2(n-1) - 1$

$T(n) = T(n-1) + 2n - 1$

$\underline{\underline{n-1}}$ tane recursive kolda 1'er tane çarpma işlemi yapılıyor!

n-1 tane recursive kolda çarpma yok.

Çarpma işlemi sabit zamanda yapılır!

$$\sum_{i=1}^{n-1} 1 = \underline{\underline{n-1}}$$ tane çarpma işlemi yapılır!

c) $T(1) = 1$ → $n=1$ için çağrılan recursive kolda toplama ve çıkarma işlemi yapılmıyor.

$T(2) = T(1) + 2.2 - 1$

$T(3) = T(2) + 2.3 - 1$

$\vdots$

$T(n) = T(n-1) + 2.n - 1$

$n-1$ tane recursive kolda 1'er tane toplama, 1'er tane çıkarma işlemi yapılır. Bu işlemlerin sabit zamanda yapıldığını varsayarak;

Çıkarma ve toplama işlemleri için

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 = 2(n-1) = 2n-2$$ tane çıkarma ve toplama işlemi yapılıyor.

Scanned by CamScanner

6)

a)

$T_1(n) = 3\,T_1(n-1) \quad n>1, \; T_1(1)=4$

$T_1(n) = 3\,T_1(n-1) \quad \Rightarrow T_1(n) = 3^{n-1}.\underbrace{4}_{T_1(1)}$

$T_1(n-1) = 3\,T_1(n-2)$

$T_1(n-2) = 3\,T_1(n-3) \quad \Rightarrow T_1(n-2) = 3^{n-3}.\underbrace{4}_{T_1(1)}$

$\vdots$

$T_1(3) = 3\,T_1(2) \quad \Rightarrow T_1(3) = 3.3.\underbrace{4}_{T_1(1)}$

$T_1(2) = 3\,T_1(1) \quad \Rightarrow T_1(2) = 3.\underbrace{4}_{T_1(1)}$

$\boxed{T_1(n) = 3^{n-1}.4}$

$T(n-1) = 3^{n-1}.y(n-1) \quad , \quad T(n) = 3^n.y(n)$

$3^n.y(n) = 3.3^{n-1}y(n-1)$

$y(n) = y(n-1)$ $\Rightarrow$ Backword substitution ile çözülemedi.

→ Forward substitution uygulayalım;

$T(1) = 4$

$T(2) = 3.4$

$T(3) = 3.3.4$

$T(4) = 3.3.3.4$

$\vdots$

$T(n) = 3^{n-1}.4$

$\hookrightarrow \in \Theta(3^n)$

$3^{n-1}.4 = 3.3^{n-2}.4$

$3^{n-1}.4 = 3^{n-1}.4$ ✓

$\Rightarrow$ doğrudur!

* $T_2(n) = T_2(n-1) + n$; $T_2(0) = 0$, $n > 1$

$$\boxed{T_2(n+1) = T_2(n) + n}$$

$T_2(n) = y(n)$

$T_2(n+1) = y(n+1)$

$y(n+1) = y(n) + n$

$y(n) = \sum_{i=1}^{n} n$

$y(n) = y(n-1) + n$

$y(n-1) = y(n-2) + n + n$

$\vdots$

$y(1) = \underbrace{y(0)}_{0} + \sum_{i=1}^{n} n \Rightarrow y(1) = \sum_{i=1}^{n} n$

$\sum_{i=1}^{n} n = n \cdot n = \underline{\underline{n^2}} \Rightarrow \underline{\underline{T_2(n) \in \Theta(n^2)}}$

* $T_3(n) = T_3\left(\frac{n}{2}\right) + n$; $n = 2^k$, $n > 1$, $T_3(1) = 0$

$T_3(2^k) = T_3(2^{k-1}) + 2^k$

$T_3(2^{k+1}) = T_3(2^k) + 2^{k+1}$

$T_3(2^k) = y(n)$

$T_3(2^{k+1}) = y(n+1)$

$\left\{ \begin{array}{l} y(n) = y(n-1) + n \\ y(n-1) = y(n-2) + n + n \end{array} \right.$

$\vdots$

$y(1) = y(0) + \sum_{i=1}^{n} n$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} n = n \cdot n = n^2 \Rightarrow \underline{\underline{\in \Theta(n^2)}}$

b)

$T_1(n) = 6T_1(n-1) - 9T_1(n-2)$

→ homogeneous / in homogeneous ⇒ $x(n) = c_1 x(n-1) + c_2 x(n-2) + \dots + f(n)$

$c_1 = 6, \quad c_2 = -9 \quad, f(n) = 0$

$T_1(n) = 6T_1(n-1) - 9T_1(n-2)$

$T_1(n-1) = 6T_1(n-2) - 9T_1(n-3)$

$T_1(n-2) = 6T_1(n-3) - 9T_1(n-4)$

$\vdots$

$T_1(3) = 6T_1(2) - 9T_1(1)$

$T_1(2) = 6T_1(1) - 9T_1(0)$

$+$

$T_1(n) = 5T_1(n-1) - 4(\underbrace{T_1(n-2) + \dots + T_1(2)}) - 3T_1(1) - 9T_1(0)$

$T_1(n) = 5T_1(n-1) - 3T_1(1) - 9T_1(0) - 4\sum_{i=2}^{n-2} T_1(i)$

$4 \quad T_2(n) = 5T_2(n-1) - 6T_2(n-2) + 7^n$

$c_1 = 5, \quad c_2 = -6, \quad \underline{f(n) = 7^n}$

$T_2(n-1) = 5T_2(n-2) - 6T_2(n-3) + 7^n$

$\vdots$

$T_2(3) = 5T_2(2) - 6T_2(1) + 7^n$

$+ \quad T_2(2) = 5T_2(1) - 6T_2(0) + 7^n$

$$T_2(n) = \underbrace{4T_2(n-1) - 2\sum_{i=2}^{n-2} T(i) - T_2(1) - 6T_2(0)}_{A} + \sum_{i=1}^{n} 7^n$$

$$T_2(n) = A + \sum_{i=1}^{n} 7^n \Rightarrow T_2(n) = A + n \cdot 7^n$$

$$T_2(n) \in \Theta(n7^n)$$