Problémától a diszkrét modellig

1. óra: Mennyit várunk FIFI-re?

Burcsi Péter

ELTE IK

2024-09-09

Kurzusinformációk

- Cél: olyan problémákat megsimerni, ahol a probléma (egyik) megoldási módszere valamilyen diszkrét matematikai modellre épít
- Cél: ezen eszközök használatához mintákat adni, alkalmazásokat mutatni
- Eszközök: gráfok, mátrixok, polinomok, kombinatorika, (kevés) számelmélet
- Órák menete: 16:00-17:30 hétfő (előadás-gyakorlat hibrid, hosszú távon 50-50)
- Számokérés módja: folyamatos + beadandó
- Folyamatos számonkérés: heti canvas feladat (2. órától): egy darab elméleti ellenőrző kérdés, egy darab gyakorlati kihívás
- Beadandó: könnyű / nehezebb (4-5-ös jegyért)

+ CANVAS + TEAMS

Első óra

- Egy pénzdobálós játék és kapcsolata gráfokkal
- Valószínűségi fogalmak
- Néhány paradoxon
- A játék leírása
- Elemzés gráfokkal

Valószínűségek

- Formálisan: analízis, mértékterek, integrál stb.
- Itt most: informálisan (diszkrét, csak szumma, kedvező esetek / összes eset stb.)
- Intuíció néha cserben hagyja az embert ...

Jelölések

- Valószínűségi változó: nagy betű, pl. X
- Konkrét esemény bekövetkezésének valószínűsége: pl. $\mathrm{P}(X = 3) = 1/6$
- Várható érték (csak szám értékű változóknál): a valószínűségekkel súlyozott „átlag"

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i} \mathrm{P}(X = x_i) \cdot x_i$$

- Példa: kockadobás

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}(X = k) \cdot k = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} k = \frac{7}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

Várható érték – további példák

- Kockázatelemzés: Szint = Valószínűség × hatás
- Alkalmazás: pl. tesztek prioritásának meghatározásánál
- Végtelen szumma
- Mennyit kell várni arra, hogy egy kockával dobálva 6-os jöjjön ki?

1, – – 1 6
6
13426

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i} \mathrm{P}(X = x_i) \cdot x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} k = ??? \quad = 6$$

- Kiszámolás: analízis (számítógép)
- Más módszer?
- Teljes várható érték tétel!
- Lényegében esetszétválasztás

Várható érték – teljes v.é.t

- Példa: kockadobás értéke. Két eset – A: négyzetszámot dobtam (1, 4), B: nem (2, 3, 5, 6)
- $\mathrm{P}(A) = 1/3$, $\mathrm{P}(B) = 2/3$.
- Tétel:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{E}(X|A) + \mathrm{P}(B) \cdot \overbrace{\mathrm{E}(X|B)}^{\text{feltételes várható é.}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

- Várakozás esetén:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{P}(\text{elsőre!}) \cdot \mathrm{E}(X|A) + \mathrm{P}(\text{hoppá}) \cdot \mathrm{E}(X|B) \\
&= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6}\left(\mathrm{E}(X) + 1\right)
\end{aligned}
$$

- Intuitív érvelés?

Zárójel: két paradoxon

- Nemtranzitív kockák
- K1: 2, 2, 4, 4, 9, 9 – K2: 1, 1, 6, 6, 8, 8 – K3: 3, 3, 5, 5, 7, 7
- K1 „>” K2 „>” K3 „>” K1, bár a várható érték ugyanaz.

2 2 4 4 9 9

K_1 vs K_2

$>$

$<$

$K_1 > K_2$

5 : 4

	1	6	8
2	✓	·	·
4	✓	·	·
9	✓	✓	✓

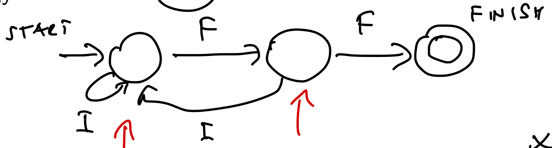
K_1 nyer

- Simpson-paradoxon
- A-nak ősszel is, tavasszal is jobb átlaga van, mint B-nek de egész évre vetítve rosszabb

	ŐSZEL	T.
A:	50% 500/1000	80% 8/10
B	40% 4/10	70% 700/1000

A feladat: mennyit várunk FIFI-re

- Addig dobálok egy pénzérmét, amíg meg nem jelenik a fej-írás-fej-írás dobássorozat (FIFI)
- Mennyit kell átlagosan várni?
- Egyszerűbb eset: FF



innen várhatóan x dobás

innen y dobás

$$\boxed{x = y + 2}$$

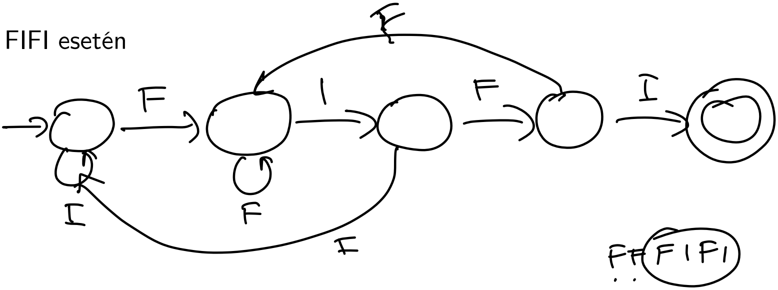
$$x = \underbrace{\tfrac{1}{2}(1+y)}_{F} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(1+x)}_{I}$$

$$y = \tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{2}(1+x)$$

$$x = 6, \quad y = 4$$

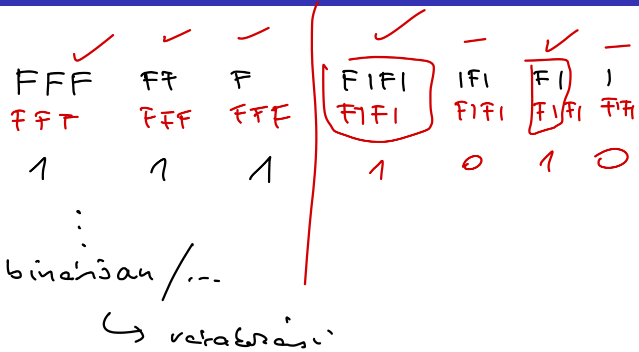
FIFI

- Gráf FIFI esetén



Conway-módszer

- Átfedési sorozat



- Várható érték: átfedési sorozat alapján
- Intuíció: játék értéke...

Zárójel: Conway

- Csoportelmélet
- Életjáték
- Look and say sequence
- Fractran
- Doomsday algoritmus

11
21
1211
111221
⋮

4/4 6/6 8/8

10/10 12/12

5/9 9/5 7/11 11/7

2024 : CS

MÁRC. 0

JAN. 3 ← N. SZ.
4 ← szök.

Folytatás: FFF vs. IFF

- Házi feladat
- egyszerűbb példa: FF vs IF