GENERÁTOR POL / HATVÁNYSOR

Fib. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ha $n \geq 2$

$$F_{-n} = (-1)^n \cdot F_n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

??? indukció ✓

$$\boxed{x^2 = x + 1}$$ gyökei

MÁTRIX:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad v \mapsto M \cdot v$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M s.érték: $\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

GENERÁTORFÜGGVÉNNYEL:

FORMÁLIS HATVÁNYSOR

$$G(x) := F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots F_n x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n = 0 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots$$

$$G(x) = ???$$

$$+ \quad G(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \dots$$

$$- \quad x \cdot G(x) = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \dots$$

$$- \quad x^2 \cdot G(x) = F_0 x^2 + F_1 x^3 + F_2 x^4 + \dots$$

$$(1 - x - x^2)\, G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \dots$$

$$= 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0x^4 + \dots$$

$= x$

$$\boxed{G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}}$$

Fib.-sor. formális hatványsora.

- Mint a kockánál láttuk: 2 kocka : $(f(x))^2$

  ún. konvolúció $\Leftrightarrow$ G. fv. szorzata

- Konkrét képlet : $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

$$G(x) = \frac{x}{\underbrace{1-x-x^2}_{(1-\varphi x)(1-\psi x)}}$$

$\varphi : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

parciális törtekre bontás

$G(x)$ átírható: $G(x) = \dfrac{A}{1-\varphi x} + \dfrac{B}{1-\psi x}$

$A \cdot \left(1 + \varphi x + \varphi^2 x^2 + \varphi^3 x^3 + \ldots\right)$

$$F_n = A \cdot \varphi^n + B \cdot \psi^n$$

- NEHÉZ EZZEL SZÁMOLNI! $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \ldots$ irrac.

aszimptotikus viselkedés kiderül.

<u>ÁLT. TÉTEL</u>: $G(x)$ konvergenciasugara α, akkor együtthatók: $\boxed{a_n \sim \alpha^{-n}}$

PÉNZVÁLTÁS:

Hányféleképp lehet 10000 Ft-ot 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10000 Ft-osokra váltani?

LEGYEN CSAK 5, 10, 20 Ft-os:

$$f(x) = (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{5n} = \frac{1}{1-x^5}$$

$$g(x) = (1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} \dots) = \sum x^{10n} = \frac{1}{1-x^{10}}$$

$$h(x) = (1 + x^{20} + x^{40} + \dots) = \sum x^{20n} = \frac{1}{1-x^{20}}$$

$$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x) = \frac{1}{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \ldots + \ldots - \ldots + \ldots$$

PARC. T.

$$\Big(\ldots x^5 \ldots\Big)\Big(\ldots x^{20} \ldots\Big)\Big(\ldots x^{40} \ldots\Big) = \ldots + x^{5+20+40} + \ldots$$

$\underline{5}$ $\underline{10}$ $\underline{20}$ x^{65}

Hány x^{65} lesz? $= \ldots + \boxed{?}\cdot x^{65}$

$5+40+20$

$15+10+40$: $3\times 5 + 1\cdot 10 + 2\cdot 20$

stb.

x^{65} együtthatója: ahányféleképp 65 Ft felváltó 5, 10, 20 Ft-osokra.

az együtthatók növekedése a parc. törtekre bontás után
elemezhető (többszörös gyökök!)

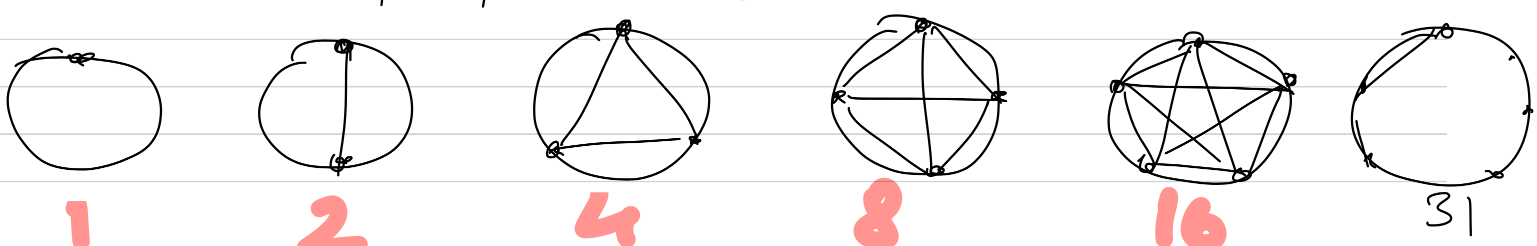
$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

$0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \ldots$ $\qquad G(x) = \dfrac{\ldots}{1-x-x^2-x^3}$

TRIBONACCI

1, 2, 4, 8, 16, ? 31!

Gradu



PERRIN-SOROZAT

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17	22

3, 0, 2,

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

$$P_{17} = 119 = 7 \cdot 17$$

<u>SEJTÉS</u>: n prím $\Longleftrightarrow$ $n \mid P_n$

$\Longrightarrow$ ✓

$\Longleftarrow$??? <u>NEM</u>: $n = 271441 = 521^2$

ellenpélda

33 ezer jegy

$$(1+\alpha+\alpha^2+\dots) = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\frac{1}{1-2^{-n}} = 1 + 2^{-n} + 2^{-2n} + 2^{-3n} + \dots$$

$$\frac{1}{1-3^{-n}} = 1 + 3^{-n} + 3^{-2n} + \dots$$

ÖSSZES PRÍM:

zárójelfelbontás után

$$\prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{1-p^{-n}} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

$$\frac{1}{60^n}$$

RIEMANN-FÉLE ZETA FV. $\zeta(n)$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?$$

ζ

???

∞

$$s = -1 : \quad 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \dots = 1 + 2 + 3 + 4 \dots$$

$\downarrow$

$$\zeta(-1) : -\frac{1}{12}$$

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = \frac{1}{1-\alpha}$$

!!! konv. $|\alpha| < 1$ ✓

$$1 + 2 + 4 + \dots = -1$$