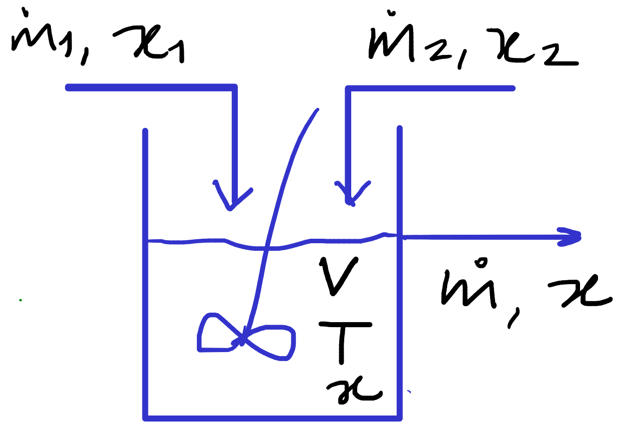
Ex. 6.5 Considere um processo contínuo de mistura onde x é a fração mássica do soluto na única corrente de saída. As entradas são $\dot{m}_1(t)$, $x_1(t)$; e $\dot{m}_2(t)$, $x_2 = 1$; e V é constante. Determine as FTs que relacionam as variáveis de entrada com x e o diagrama de blocos.

$\frac{X(s)}{M_1(s)}$; $\frac{X(s)}{M_2(s)}$; $\frac{X(s)}{X_1(s)}$

* Esquema



- Parâmetros: V, x_2
- Variáveis de entrada: $\dot{m}_1(t)$, $x_1(t)$, $\dot{m}_2(t)$
- Variáveis de saída: $\dot{m}(t)$, $x(t)$

$M_{solvente} = \rho V(1-x)$
$M_{soluto} = \rho V x$

* Hipóteses

- $V =$ cte; - mistura perfeita; - props. físicas ctes
- processo isotérmico ($T_1 = T_2 = T =$ cte)

* Modelagem no domínio do tempo

- BM global: $\frac{d}{dt}(\cancel{\rho V}) = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 - \dot{m} \Rightarrow \dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \quad (1)$

- BM p/ soluto: $\rho V \frac{dx}{dt} = \dot{m}_1 \cdot x_1 + \dot{m}_2 \cdot x_2 - \dot{m} \cdot x$

Subst. (1) e reescrevendo:

$$\rho V \frac{dx}{dt} = \underbrace{\dot{m}_1(x_1 - x) + \dot{m}_2(x_2 - x)}_{f(x, x_1, \dot{m}_1, \dot{m}_2)} \qquad (2)$$

- Definindo as variáveis desvio:

$x' = x - x(EE) = x - \bar{x}$

$x_1' = x_1 - \bar{x}_1$

$\dot{m}_1' = \dot{m}_1 - \bar{\dot{m}}_1$

$\dot{m}_2' = \dot{m}_2' - \bar{\dot{m}}_2$

$\Rightarrow$

$x = x' + \bar{x}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \cancel{\frac{d\bar{x}}{dt}}$ $\quad \bar{x} =$ cte

$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}$

- Linearizando a Eq. (2): expandir a f em ST em torno do EE $(\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\dot{m}}_1, \bar{\dot{m}}_2)$

$$f \cong \cancel{f(\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\dot{m}}_1, \bar{\dot{m}}_2)} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{EE}}^{(-\bar{\dot{m}}_1 - \bar{\dot{m}}_2)} \underbrace{(x - \bar{x})}_{x'} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{EE}}^{(+\bar{\dot{m}}_1)} \underbrace{(x_1 - \bar{x}_1)}_{x_1'} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{m}_1}\Big|_{EE}}^{(+\bar{x}_1 - \bar{x})} \underbrace{(\dot{m}_1 - \bar{\dot{m}}_1)}_{\dot{m}_1'} +$$

$$+ \overbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{m}_2}\Big|_{EE}}^{(+\bar{x}_2 - \bar{x})} \underbrace{(\dot{m}_2 - \bar{\dot{m}}_2)}_{\dot{m}_2'}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\dot{m}}_1, \bar{\dot{m}}_2) = \rho V \frac{dx}{dt}\Big|_{EE} = 0}$$

Subst. os termos na Eq. (2):

$$\rho V \frac{dx'}{dt} = -(\bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2)x' + \bar{\dot{m}}_1 . x_1' + (\bar{x}_1 - \bar{x})\dot{m}_1' + (\bar{x}_2 - \bar{x})\dot{m}_2' \quad (3)$$

* Funções de transferência

- Aplicando TL na Eq. (3):

$$\rho V . s . X(s) = -(\bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2) . X(s) + \bar{\dot{m}}_1 . X_1(s) + (\bar{x}_1 - \bar{x}) . M_1(s) + (\bar{x}_2 - \bar{x}) M_2$$

como $X(s)$ é a variável de saída, é isolada:

$$X(s) = \overbrace{\frac{\bar{\dot{m}}_1}{\rho V s + \bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2}}^{G_1(s)} X_1(s) + \overbrace{\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}}{\rho V s + \bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2}}^{G_2(s)} M_1(s) + \overbrace{\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{\rho V s + \bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2}}^{G_3(s)} M_2'(s) \quad (4)$$

↳ Eq. característica da FT

∴ Ordem da FT depende do grau deste polinômio:

$a . s^1 + b = 0$ ∴ FT de 1ª ordem $= \frac{\boxed{K}}{\boxed{\tau} . s + \boxed{1}}$

↳ tudo que não for s ou função de s é constante!

- Identificando as FTs que aparecem na Eq. (4): multiplicando todas as FTs por $\left[\frac{\bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2}{\bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2}\right]$:

$$\frac{X(s)}{X_1(s)} = G_1(s) = \frac{\left[\bar{m}_1/(\bar{m}_1+\bar{m}_2)\right]}{\left[\rho V\, s/(\bar{m}_1+\bar{m}_2)\right] + \cancel{\left[(\bar{m}_1+\bar{m}_2)/(\bar{m}_1+\bar{m}_2)\right]}} = \frac{K_1}{\tau\cdot s+1}$$

$$\frac{X(s)}{M_1(s)} = G_2(s) = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x})/(\bar{m}_1+\bar{m}_2)}{\left(\frac{\rho V}{\bar{m}_1+\bar{m}_2}\right)\cdot s + 1} = \frac{K_2}{\tau\cdot s+1}$$

$$\frac{X(s)}{M_2(s)} = G_3(s) = \frac{(\bar{x}_2-\bar{x})/(\bar{m}_1+\bar{m}_2)}{\left(\frac{\rho V}{\bar{m}_1+\bar{m}_2}\right)\cdot s + 1} = \frac{K_3}{\tau\cdot s+1}$$

$\Rightarrow \tau = \dfrac{\rho V}{\bar{m}_1+\bar{m}_2}$ $\quad \left(\cancel{\frac{kg}{m^3}}\cdot \cancel{m^3}\right)\left(\frac{s}{\cancel{kg}}\right) \Rightarrow$ segundo!

constante de tempo $\Rightarrow$ unidade de tempo!

$\Rightarrow K_1 = \dfrac{\bar{m}_1}{\bar{m}_1+\bar{m}_2}$ $\quad [-]$ $\quad \Rightarrow$ sempre positivo

$\Rightarrow K_2 = \dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}}{\bar{m}_1+\bar{m}_2}$ $\quad [s/kg]$ $\quad$ de acordo c/ a análise, $\bar{x} > \bar{x}_1 \therefore K_2 < 0$

$\Rightarrow K_3 = \dfrac{\bar{x}_2-\bar{x}}{\bar{m}_1+\bar{m}_2}$ $\quad [s/kg]$ $\quad \Rightarrow$ sempre positivo

* Diagrama de Blocos

- Reescrevendo a Eq. (4):

$$X(s) = G_1(s)\cdot X_1(s) + G_2(s)\cdot M_1(s) + G_3(s)\cdot M_2(s)$$