Resumen Teórico Parcial 2

Probabilidades y Estadísticas

Profesora: **Ing. Cecilia Savi**

Año de cursado: **2022**

Por: Tomás Malamud

Nota: El contenido no fue revisado por ningún docente.

Índice de contenidos

Tocando o haciendo click en los títulos del índice, se accede a cada una de las secciones. La correspondencia de subtítulos está determinada por la sangría aplicada.

Unidad 4. Teoría de Probabilidades

La Teoría de Probabilidad es un elemento clave para la Estimación Estadística y Toma de decisiones a través de la docimasia de Hipótesis, siendo de gran importancia cuando en un estudio interviene la Incertidumbre.

Incertidumbre y Experimento Aleatorio

Un experimento aleatorio es aquel que conduce a dos o más resultados posibles. Como no se puede asegurar el resultado, es incierto. Puede estar conformado de sólo una prueba, o de un conjunto de las mismas bajo las mismas condiciones.

Espacios Probabilísticos

El Espacio Probabilístico o Muestral, es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se simboliza por Ω, y sus resultados posibles se llaman elementos o puntos de muestra.

Un espacio probabilístico con un pequeño número de elementos puede representarse gráficamente por un Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonales o por un Diagrama de Árbol. Estos últimos proporcionan una forma organizada de enumerar todos los elementos posibles.

Cualquiera sea la forma que se escriba un espacio probabilístico, sus resultados deben ser **mutuamente excluyentes** y **colectivamente exhaustivos**.

En todos los casos, el espacio probabilístico está constituído por un **número finito de puntos**, aunque también pueden considerarse el caso de que tenga **infinidad numerable de puntos**, o **infinidad no numerable de puntos**.

Eventos

Un evento o hecho es un **subconjunto** de un espacio probabilístico. Están representados por $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Existen dos tipos.

Evento simple. También llamado elemental o fundamental, sólo contiene un punto de muestra en Ω. El conjunto de eventos simples es el Espacio Probabilístico.

Evento compuesto. También llamado evento compuesto o simplemente evento (hecho), contiene más de un punto de muestra en Ω. Se subdividen en:

Evento Elemental. Subconjunto que contiene sólo un punto de Ω.

***Evento Probabilístico* Ω.** Subconjunto que contiene todos los eventos elementales de Ω. Es el **Evento Cierto.**

Evento Imposible. No puede ocurrir porque no contiene puntos de Ω.

Eventos Mutuamente Excluyentes

Dos eventos definidos sobre un mismo Ω, son Mutuamente Excluyentes si no hay puntos de muestras en común. Su **intersección** es el vacío.

Eventos No Mutuamente Excluyentes

En este caso sí hay puntos de muestra en común, su **intersección** es distinta al conjunto vacío. Pueden ser **dependientes** cuando la ocurrencia de un evento afecta la probabilidad de otros eventos en pruebas siguientes, o en caso contrario, **independientes**.

Eventos Colectivamente Exhaustivos

Son Colectivamente Exhaustivos si su **unión** es igual al espacio Ω. Si dos o más eventos son Colectivamente Exhaustivos, por lo menos va a ocurrir uno de ellos.

Eventos No Colectivamente Exhaustivos

Su **unión** no es igual a Ω. Es decir, por lo menos un elemento del espacio muestral no pertenece a ningún subconjunto.

Interpretación de la Probabilidad de un Hecho

La probabilidad de un evento dado es una expresión de la posibilidad de ocurrencia. Además, varía de **0 (cero)** si es Evento Imposible, a **1 (uno)** si es Evento Cierto. Un evento sólo ocurre si al menos uno de sus elementos se presenta. Para asignar probabilidades a eventos en este rango, existen tres escuelas de pensamiento principales llamadas Teorías Probabilísticas.

Teorías Probabilísticas

Historia de la Teoría de Probabilidades

Los primeros estudios “científicos” sobre fenómenos aleatorios se enfocan en dos problemas:

1. Contabilizar el número de posibles resultados al lanzar un dado varias veces.
2. Distribuir las ganancias entre jugadores cuando se interrumpía un juego de apuestas.

Años más tarde, se comenzó a estudiar el concepto de “frecuencia de un suceso”, en el que se comprendió que cuantas más observaciones, más precisos eran los resultados. Esto anticipaba el principio estadístico de estabilidad de las medias.

Teoría Clásica o Principio de la Razón Insuficiente

Si el espacio de muestra de un experimento tiene N(Ω) resultados igualmente probables, y si un evento definido sobre este espacio, tiene n(E) elementos, la probabilidad es: $P(E) = \frac{n(E)}{N(\Omega)} = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ a\ E}{Número\ de\ casos\ posibles}$

Se asigna probabilidades iguales a cada uno de los resultados posibles en un experimento aleatorio.

Teoría Frecuencial o de la Probabilidad por Frecuencia Relativa

El concepto principal es asignar como probabilidad de un suceso el resultado que se obtendría si el proceso se repitiera en condiciones iguales un número grande de veces (Ley de los Grandes Números). La probabilidad por frecuencia relativa se define: $P(E) = n_i/n = h_i \ \ y \ \ 0 \leq n_i/n \leq 1$. ($n_i$ resultados y n veces que se ejecutó el experimento).

Teoría Subjetiva o Personalista

La definición Clásica y Frecuencial son objetivas, ya que derivan esencialmente de cálculos y observaciones empíricas. Esto representa una limitación para problemas de hechos únicos, por lo que a veces es necesario considerar la probabilidad como una medida de confianza personal en una proposición particular, es decir, **ponderar cada evento o hecho según su grado de creencia.**

La Axiomatización de la Probabilidad

Para construir la fundamentación de la teoría de la probabilidad, se crearon Axiomas y Propiedades tanto como para la Familia de Eventos como para las Probabilidades, permitiendo su cálculo en operaciones con eventos como la **unión**, la **intersección**, la **complementación**, y la **diferencia**.

Probabilidad Total. Regla Aditiva Especial

Está referida a la probabilidad de Unión de eventos, definida en axiomas y propiedades. La misma indica que Si A_i es un conjunto numerable de eventos Mutuamente Excluyente, entonces la probabilidad de la unión de dichos conjuntos es igual a la suma de sus probabilidades. Por lo tanto, la probabilidad de la unión de eventos No Mutuamente Excluyentes, será menor a la suma de sus probabilidades. O sea, dados dos eventos definidos en Ω **No Mutuamente Excluyentes**, la probabilidad de unión de dichos eventos es igual a la suma de sus probabilidades **menos** su probabilidad de intersección. Simbólicamente:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Probabilidad Condicional

Las probabilidades asociadas a los eventos definidos en las subpoblaciones se denominan Probabilidades Condicionales. Ejemplo: P(A/B): "Probabilidad de A dado B" o "Si B es verdadero, probabilidad de A verdadero". Dados dos eventos A, B y su intersección como un nuevo evento c, se tiene:

$$P(A/B) = \frac{c}{b} = \frac{Eventos\ Favorables\ a\ A \cap B}{Eventos\ Favorables\ a\ B}$$

Y con respecto a Ω, la probabilidad es:

$$P(A/B) = \frac{c}{b} = \frac{c/N}{b/N} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La tabla asociada normalmente a este tipo de probabilidad es la siguiente:

Tabla 1

Ejemplo de tabla para probabilidades condicionales

	Universitarios (B)	No Universitarios (D)	Total
Gerencial (A)	25	5	**30**
No Gerencial (C)	75	195	**270**
Total	**100**	**200**	**300**

Probabilidad Compuesta. Regla Multiplicatoria General

Esencialmente igual a la Probabilidad Condicional, pero en lugar de asignar valores absolutos a cada evento, se asignan probabilidades. Se denominan Probabilidades Conjuntas porque cada una de ellas es la probabilidad de ocurrencia simultánea de dos hechos. La intersección entre la probabilidad de dos eventos es igual a la multiplicación de las probabilidades.

Probabilidad Marginal o Individual

Se obtienen sumando cada fila o cada columna (en la tabla son los totales).

Independencia y Dependencia Estadística

Puntos clave:

- Dos eventos son **dependientes** si la probabilidad de ocurrencia de uno es afectada por la ocurrencia del otro. Son generados por muestreos **sin reposición**.

- Dos eventos son **independientes** si la probabilidad de ocurrencia **no** es afectada por la ocurrencia del otro. Son generados por muestreos **con reposición**.

El muestreo aleatorio **sin reposición** es un proceso de selección al azar de n unidades, que constituyen la muestra de una población de N unidades, sin devolver a la población ninguna unidad escogida antes de extraer otra. En muestreo aleatorio **con reposición** sí se reintegra cada unidad extraída antes de extraer otra.

Dos hechos A y B definidos en el mismo Ω, se dice que son independientes si y sólo si, la probabilidad de la ocurrencia conjunta de A y B es igual al producto de sus probabilidades individuales.

Es muy importante definir independencia mediante el cálculo y no mediante la deducción lógica. Esto es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \qquad \text{y} \qquad P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

De la misma forma, se puede definir la dependencia estadística bajo las siguientes condiciones:

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$$

Teorema o Regla de Bayes

Los eventos de los puntos anteriores se calculan “a priori”. También existen las probabilidades “a posteriori” y conforman una regla de probabilidades llamada

Teorema de Bayes. Es una **fórmula** para calcular probabilidades **condicionales** que vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A, y se calcula a partir de una tabla de probabilidades compuestas. Se define como:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A_I)P(A_I)}{\Sigma P(B/A_K)P(A_K)}$$

Así, si se conoce $P(B/A)$ se puede calcular $P(A/B)$, que es la probabilidad de A_i una vez hecha la observación. Por eso es una probabilidad a posteriori.

Resumen

REGLAS PARA LA ***PROBABILIDAD DE LA UNIÓN*** *DE LOS EVENTOS*	*REGLAS PARA LA* ***PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN*** *DE LOS EVENTOS*
Eventos Mutuamente Excluyentes $(A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j = 1,2,\ldots)$ $P(A \cup B)) = P(A) + P(B)$	***Eventos Dependientes*** $P(A \cap B) \neq P(A)\ P(B)$ $P(B \cap A) \neq P(B)\ P(A)$ Para P (A) ≠ 0 y P (B) ≠ 0
Eventos No Mutuamente Excluyentes $(A_i \cap A_j \neq \emptyset)$ $P(A \cup B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	***Eventos Independientes*** $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ $P(B \cap A) = P(B)\ P(A)$
	Eventos Dependientes $P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B)$ $P(B \cap A) = P(B/A)\ P(A)$

LEY DE PROBABILIDAD CONDICIONAL	$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) \rangle 0$ $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; \quad P(A) \rangle 0$
REGLA DE BAYES	$P(B_i/R) = \dfrac{P(R/B_i)\ P(B_i)}{P(R/B_1)\ P(B_1) + P(R/B_2)\ P(B_2) + \ldots + P(R/B_n)\ P(B_n)}$

Unidad 5. Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad

Variable Aleatoria

Definición

Una Variable Aleatoria (VA) es un conjunto de valores que puede asumir una nueva variable. Cada valor, conjunto de valores, intervalos, unión o intersección de intervalos de dicha variable tienen asociados una probabilidad de ocurrencia, que es la probabilidad del evento que los valores de dicha variable representan. Está simbolizada por x, y, z, etc. Básicamente es asignar un número x a un evento particular. Por ejemplo, 0 Falso 1 Verdadero, 0 cruz 1 cara, etc.

Variables Aleatorias Discretas y Continuas

Las variables aleatorias pueden ser:

Variables Aleatorias Discretas. Siendo finito o infinito, pero numerable que surge por conteo.

Variables Aleatorias Continuas. Pueden asumir cualquier valor real (infinitos valores que surgen de los decimales).

Distribuciones de Probabilidad

Una Distribución de Probabilidad muestra a través de una tabla, gráfico o fórmula todos los valores posibles que puede asumir una VA y su probabilidad.

Función de Probabilidad para VA Discretas. Función de Cuantía

Cuando se cuenta con todos los posibles valores de una VA y su probabilidad de presentación, se tiene la **función de probabilidad** de una VA, la cual permite obtener la probabilidad para cada uno de los valores de la variable correspondiente a un experimento determinado. Puede tener una distribución uniforme o no.

$P(x=x_i)$ indica la probabilidad de que la VA "x" asuma un valor real "x_i". La tabla característica de esta función es la siguiente:

Tabla 2

Ejemplo de una función de cuantía para la tirada de un dado

$x=x_i$	$P(x = x_i) = P_i$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
	$\Sigma P_i = 1$

Función de Distribución para VA Discretas

F(x) se llama Función de Distribución o Función de **Acumulación** de la VA x. No es puntual, sino la probabilidad de todos los eventos en el intervalo definido por $x \leq x_i$. En la tabla, es igual a la anterior pero con una columna más: $F(x) = P(x \leq x_i)$.

Función de Densidad y Función de Distribución para VA Continuas

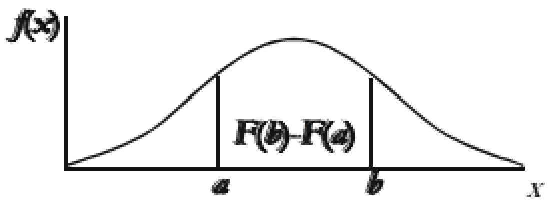
Una variable aleatoria *x* es del tipo continuo, si existe una función no negativa *f(x)* llamada Función de Densidad de *x*, que satisface la siguiente relación:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

De esta fórmula deriva:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

La función *f(x)* es la derivada de la Función de Distribución, se denomina "Densidad de la Probabilidad". Indica la altura de la curva en el punto *x.*



La probabilidad correspondiente a un intervalo infinitesimal *(x, x + dx)* se llama **Probabilidad Elemental.** Se denota mediante

$f(x)dx = dF(x)$ En consecuencia, *f(x)* no es probabilidad de nada, mientras que *f(x)dx* si lo es.

Los Parámetros en las Distribuciones de Probabilidad

Los parámetros son medidas que se calculan con datos poblacionales en las distribuciones de frecuencias. En las distribuciones de probabilidad se calculan en base a valores posibles de una variable, y se utilizan junto a la función de probabilidad para caracterizar el fenómeno bajo estudio.

Esperanza Matemática

Es el parámetro que describe la tendencia central de una VA, y se puede inferir si se conoce la distribución de probabilidades de la VA y su valor probable de presentación. Es la **suma de los productos de todos los valores posibles de la variable aleatoria por sus respectivas probabilidades.** Se representa con *E( )*, encerrando entre paréntesis la VA que se trata o también como μ.

Se calcula como $E(x) = \Sigma x P(x)$

Varianza

La varianza permite conocer la **concentración de los resultados** alrededor de una esperanza dada. Se simboliza y se calcula:

$V(x) = \Sigma x^2 f(x) - [E(x)]^2$

Diferencias entre Distribuciones de Probabilidad y de Frecuencia

<table>
<tr><th colspan="6">Variables aleatorias ⟹ Distribuciones De Probabilidad</th><th colspan="10">Variables ⟹ Distribuciones De Frecuencias</th></tr>
<tr><td colspan="6">Muestra el comportamiento de los valores posibles de una variable aleatoria</td><td colspan="10">Muestra el comportamiento de los valores observados de una variable en la Población o en la Muestra</td></tr>
<tr><th colspan="6">Valores Posibles</th><th colspan="10">Valores Observados</th></tr>
<tr><th colspan="3">Variables Aleatorias Discretas</th><th colspan="3">Variables Aleatorias Continuas</th><th colspan="5">Variables Discretas</th><th colspan="5">Variables Continuas</th></tr>
<tr><td>y_i</td><td>$P(y_i)=$ $P(y=y_i)$</td><td>$P(y \leq y_i)$</td><td>$y'_{i-1} - y'_i$</td><td>$f(x)= \frac{dF(x)}{dx}$</td><td>$F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$</td><td>$y_i$</td><td>$n_i$</td><td>$h_i$</td><td>$N_i$</td><td>$H_i$</td><td>$y'_{i-1} - y'_i$</td><td>$n_i$</td><td>$h_i$</td><td>$N_i$</td><td>$H_i$</td></tr>
<tr><td>Valores Posibles</td><td>Función de Cuantía "Probabilidad Puntual"</td><td>Función de Acumulación "Probabilidad Acumulada"</td><td>Valores Posibles</td><td>Función de Densidad "Densidad de Probabilidad"</td><td>Función de Acumulación "Probabilidad Acumulada"</td><td>Valores Observados</td><td colspan="2">Frecuencias Puntuales</td><td colspan="2">Frecuencias Acumuladas</td><td>Valores Observados</td><td colspan="2">Frecuencias del Intervalo</td><td colspan="2">Frecuencias Acumuladas Menores que o Mayores que</td></tr>
<tr><th colspan="6">Parámetros</th><th colspan="10">Parámetros (Población) – Estadígrafos (Muestra)</th></tr>
<tr><th colspan="3">Variables Aleatorias Discretas</th><th colspan="3">Variables Aleatorias Continuas</th><th colspan="10">Variables Discretas o Continuas</th></tr>
<tr><td colspan="3">$E(y)=\sum_{i=1}^{N} y_i \ P(y_i)$</td><td colspan="3">$\int_{-\infty}^{\infty} y \ f(y) \, dy$</td><td colspan="10">$M(y)=\sum_{i=1}^{m} \frac{y_i . n_i}{n} = \sum_{i=1}^{m} y_i . h_i$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{N} {y_i}^2 \ P(y_i) - [E(y)]^2$</td><td colspan="3">$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} {y_i}^2 \ f(y_i) \, dy - [E(y)]^2$</td><td colspan="10">$V(y)=\sum_{i=1}^{m} \frac{{y_i}^2 . n_i}{n} - [M(y)]^2$</td></tr>
</table>

Unidad 6. Modelos Especiales de Probabilidad VA Discretas

El objetivo de un modelo probabilístico es predecir futuros resultados si un determinado experimento se repite una gran cantidad de veces. Existen varios modelos para variables discretas según el caso del experimento:

Tabla 3

Modelos a seleccionar según diferentes situaciones

Tamaño de la Población	Tipo de Muestreo	Tamaño de la Muestra	Comportamiento de la Probabilidad	Estadísticamente	Modelo a seleccionar
Finita	MCR	Cualquiera	Constante	Independencia	Binomial
	MSR	$n > 5\%$	Variable	Dependencia	Hipergeo.
Infinita	MCR	Cualquiera	Constante	Independencia	Binomial
	MSR	$n \leq 5\%$	Constante	Independencia	Binomial
A partir de $x \approx B(n,P)$ si n es grande y P es pequeña					Poisson
Modelo Uniforme Discreto					

Modelo de Bernoulli

Características

- La prueba se realiza sólo una vez n=1
- Sólo 2 opciones: éxito o fracaso

Función de Cuantía

$P(x = x_i) = P^x(1 - P)^{1-x}$ con x=0: Q y con x=1: P

Función de Acumulación

No tiene, ya que es puntual.

Parámetros

$E(x) = P$

$V(x) = P \cdot Q$

Modelo Binomial

Características

- Número de éxitos en una muestra de *n* observaciones tomadas en Bernoulli.
- P y Q son constantes en cada una de las pruebas
- Los resultados de cada ensayo son independientes entre sí.

Función de Cuantía

$P(x = x_i, n, P) = C_n^x P^x Q^{n-x}$ si $x=x_i$; si $x \neq x_i \Rightarrow 0$

Recordar: $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

Función de Distribución o Acumulación

$$F(X) = P(x \leq x_i, n, P) = \sum_{x=0}^{x_i} C_n^x P^x Q^{n-x}$$

Parámetros

$E(x) = nP$

$V(x) = nPQ \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{nPQ}$

Tablas

Tabla 1, referida a la Función de Probabilidad; y Tabla 2, referida a la Función de Acumulación.

Modelo Hipergeométrico

Características

- Trabaja sin reposición MSR
- Población finita de n elementos
- Cada elemento puede tener una característica o no. Se denota *k* a los que sí la tienen (son los éxitos).
- Dada una muestra *n, x*= número de *k* en *n.*

Función de Cuantía

$P(x = x; N; k; n) = \frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}$ Siendo N: Población; n: Muestra; k: éxitos

Función de Acumulación

$P(X \leq x; N; k; n) = \sum \frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}$

Parámetros

$E(x) = nP = n\frac{k}{N}$

$V(x) = nPQ$

Notar que en MSR, cuando N es grande la varianza tiende a ser igual que la varianza de la variable Binomial, por lo que permite trabajar como si fuera MCR y aplicar Distribución Binomial. Cuando n es grande comparado a N, con población finita en MSR, se aplica el modelo **hipergeométrico**.

Tablas

Se utiliza la Tabla V, que contiene la Función de Probabilidad (p(x)) y la de Acumulación (P(r)). Cuando X y n se intercambian, no hay cambios.

Modelo Binomial e Hipergeométrico - Proporción

Si lo que interesa es la **proporción** de éxitos en lugar de su valor absoluto, se tiene:

Características

- Utiliza la proporción de éxito como VA.
- $P = \frac{X}{N}$ simboliza y define a la **Proporción Poblacional.**
- $p = \widehat{P} = \frac{x}{n}$, simboliza y define a la **Proporción Muestral.**

Se pueden dar dos casos:

1. Si se obtiene una muestra de *n* elementos, **con reposición** donde *x* es binomial: **Función de Cuantía** $Pr(\widehat{P} \leq \widehat{P_i}) =$ Función de Cuantía de Binomial. **Función de Distribución o de Acumulación** $Pr(\widehat{P} \leq \widehat{P_i}) =$

Función de Distribución o de Acumulación de Binomial. Lo mismo ocurre con **esperanza** y **varianza**.

2. Si se obtiene una muestra de *n* elementos, **sin reposición**, donde *x* es Hipergeométrica, la distribución es igual a la Hipergeométrica (función de probabilidad, distribución, y parámetros).

Modelo de Poisson

Características

- Trabaja **con reposición**
- Parte de la distribución **binomial** para $n \to \infty$ y $p \to 0$ (*p*: probabilidad de éxito y *n*: cantidad de repeticiones del experimento)
- Espacio y tiempo definidos.

Función de Cuantía

$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$ =*np* Esta distribución de probabilidades da la probabilidad del número de ocurrencias por unidad especificada, y queda definida por su promedio de ocurrencias por unidad, λ (parámetro).

Función de Distribución o Acumulación

$$F(x) = \sum_{r \leq x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

Parámetros

Esperanza. Único parámetro λ.

Varianza. Único parámetro λ.

Resumen

Variables Aleatorias Discretas

Base de los Modelos: Distribución Bipuntual (n = 1)

Resultados	*y*	*P(y)*
Fallo	*0*	$Q = 1-P$
Éxito	*1*	P
		$1=P+Q$

$E(y)=P$

$V(y)=PQ$

Variables (1)	**_Modelo (2)_**	**_Expresión Simbólica de (2)_**	**_Valores Posibles_**	**_Características_**
x *Número de Éxitos en n Pruebas*	**_Binomial_**	$x \sim \beta(n,P)$	$x = 0,1,2,\ldots,n$	*Independencia Estadística: Las Probabilidades permanecen Constantes a lo largo De todo el Experimento* **_Población Infinita_** MCR **_Población Finita_** MCR MSR: n ≤ 5% s/N
		$\hat{P} \sim \beta(n,P)$	$\hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$	
$p = \hat{P} = \frac{x}{n}$ *Proporción de Éxitos en n Pruebas*	**_Hipergeométrico_**	$x \sim H(N,X,n)$	$x = \begin{cases} 0,1,2,\ldots,X & n > X \\ 0,1,2,\ldots,n & n \leq X \end{cases}$	*Dependencia Estadística: Las Probabilidades NO permanecen Constantes a lo largo De todo el Experimento* **_Población Infinita_** MSR **_Población Finita_** MSR MSR: n >5% s/N
		$\hat{P} \sim H(N,X,n)$	$\hat{P} = \begin{cases} 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{X}{n} & n > X \\ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} & n \leq X \end{cases}$	
$x \sim \beta(n,P)$	**_Poisson_**	$x \sim P(\lambda = nP)$	$x = 0,1,2,\ldots,\infty$	*N Grande* *P Pequeño*

Variable	*Distribución*	*Función De Probabilidad*	*Función De Acumulación*	E( )	V( )	DS( )
(γ)	Bipuntual	$P(\gamma=\gamma)=\begin{vmatrix} P^{\gamma}(1-P)^{1-\gamma} \\ 0 \end{vmatrix}$		P	PQ	$\sqrt{PQ}$
(x)	Binominal	$P(X=x)=\begin{vmatrix} C_n^x P^x (1-P)^{n-x} \\ 0 \end{vmatrix}$	$P(X \leq x_i, n, P) = \sum_{x=0}^{x_i} C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$	$n\,P$	$n\,P\,Q$	$\sqrt{nPQ}$
(x)	Hipergeométrica	$P(X=x,N,n,k)=\frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}$	$P(X \leq x_i, N, n, k) = \sum_{x=0}^{x_i} \frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}$	$n\frac{k}{N}$	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$	$\sqrt{\frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)}$
$(\hat{P})$	Binomial	$P(\hat{P}=\hat{P}_i)=P(X=x,n,P)$	$P(\hat{P} \leq \hat{P}_i)=P(X \leq x_i, n, P)$	P	$\frac{P(1-P)}{n}$	$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$
$(\hat{P})$	Hipergeométrica	$P(\hat{P}=\hat{P}_i)=P(X=x,N,n,k)$	$P(\hat{P} \leq \hat{P}_i)=P(X \leq x_i, N, n, k)$	P	$\frac{P(1-P)}{n}\frac{N-n}{N-1}$	$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}\frac{N-n}{N-1}}$
(x)	Poisson	$P(X=x,\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$P(X \leq x_i, \lambda) = \sum_{x=0}^{x_i} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$n\,P$	$n\,P$	$\sqrt{nP}$

Unidad 7. Modelos Especiales de Probabilidad VA Continuas

Para **aprobar** esta unidad, principalmente se debe:

- Conocer alguno de los modelos de probabilidad de VA Continuas;
- Distinguir cada modelo por sus características;
- Reconocer funciones de densidad y de acumulación;
- Conocer bien Ley de los Grandes Números y Teorema Central del Límite;
- Manejar tablas de Distribución Chi cuadrado, para la varianza;
- Manejar tablas de Distribución t de Student, para media poblacional cuando se desconoce varianza poblacional.

Modelo Uniforme Continuo

Si la función de densidad es constante en un intervalo determinado, el valor de una variable aleatoria se encuentra en dicho intervalo infinito con distribución uniforme.

Función de Densidad

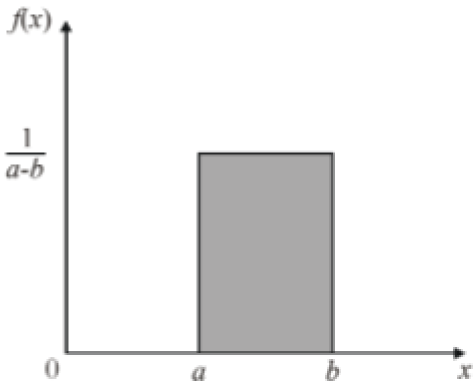
La función constante $f(x) = \frac{1}{b-a}$ Es una función de densidad **constante** o **uniforme** en el intervalo (a, b). También se conoce como **factor de proporcionalidad** e indica que la probabilidad es proporcional a la longitud del intervalo cuya probabilidad se busca.

Función de Distribución o de Acumulación

$F(x) = \frac{x-a}{b-a}\ para\ a < x < b$

Si $x \leq a \rightarrow F(x) = 0$; y si $x \geq b \rightarrow F(x) = 1$

Gráficamente



Parámetros

Esperanza. Como para variables continuas la esperanza es

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, considerando uniformidad queda:

$E(X) = \frac{a+b}{2}$

Varianza. Calculando $E(X^2)$, queda: $V(X) = \frac{(b\ a)^2}{12}$

Modelo exponencial

Tiene su origen en Poisson, por la unidad especificada finita. Es el inverso: la variable exponencial x es el **intervalo de tiempo, o espacio, requerido** para obtener un número determinado de éxitos. Se utiliza principalmente para determinar la probabilidad de que ocurra por primera vez un hecho dentro de un plazo determinado.

Función de Acumulación

$$T(x) = P(x \leq x_i) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Función de Densidad

$$t(x) = \lambda e^{-\lambda x} \, para \, x \geq 0$$

Parámetros

Esperanza: $E(x) = \beta = \frac{1}{\lambda}$

Varianza: $V(x) = \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Modelo Normal

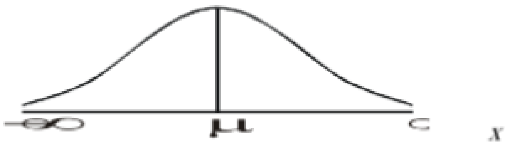
La distribución normal es una **teoría** que sirve para explicar, para algunas variables aleatorias, la **relación entre intervalos de valores y sus correspondientes probabilidades.** El Teorema Central del Límite (TCL) asociado a la Ley de los Grandes Números, indica que la **distribución muestral** de estadígrafos como la media, tiene una distribución ~normal si el tamaño de la muestra es grande. Se subdivide en dos modelos:

Modelo Normal General

Función de densidad. Una VA x, tiene distribución ~normal con media μ y desviación σ ($x \sim N(\mu, \sigma)$) si su función es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} \quad con \; -\infty < x < \infty$$

Gráfica:



Toda el área bajo la curva es 1; el área determinada por un intervalo es la probabilidad del mismo; depende sólo de la media y la varianza; la probabilidad de que x tome un punto exacto es 0, por lo que todo se representa en intervalo.

Características

- La función de densidad es simétrica (igual por izquierda y por derecha), mesocúrtica (planitud media) y unimodal (presenta sólo un "pico"). Esto indica que media, mediana y moda coinciden.
- Los **puntos de inflexión** están a distancia σ (factor de dispersión) de μ (factor de traslación).
- Se puede contar con distribuciones con iguales dispersiones o distintas medias, o visceversa.

Modelo Normal Estándar

También llamada Distribución Normal Típica. Como existen infinitas combinaciones de σ y μ, se simplifica con un cambio de variable de X a Z mediante:

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ *Z:* Variable tipificada de *X*

Todas las variables normalmente distribuidas se pueden hacer Normal Estándar. Esta transformación constituye la **estandarización** de la curva normal, y la **función de densidad** queda:

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2};\ Z \approx N(0, 1)$

Sus **Parámetros** son:

Esperanza. $E(z) = 0$

Varianza y desviación típica. $V(z) = 1$ y $\sigma = 1$

Relación entre Modelos Discretos y el Modelo Normal

La aproximación de la Distribución Normal a los modelos discretos cuando se incrementa el tamaño de la muestra, se basa en el **Teorema Central del Límite**.

Aproximación del Modelo Binomial al Modelo Normal

Se sabe que la Distribución o el Modelo Binomial depende de *P* y *n*. Si se tiene que $P \neq Q$ (en tal caso, la distribución presenta asimetría), al incrementar el tamaño de la muestra (*n*), la distribución se aproxima a la asimetría. De esta forma, la Distribución Binomial se convierte en una curva continua y simétrica independientemente de la igualdad de *P* y *Q*. Consiste en utilizar una distribución normal con la misma media y desviación típica que la binomial.

Si $x \sim \beta(n, P), \quad con\ E(x) = nP\ y\ V(x) = nPQ \ \Rightarrow \sigma\sqrt{nPQ}$

Tipificando:

$$z = \frac{x - nP}{\sqrt{nPQ}} \sim N(0, 1)$$

Condiciones:

- *n* debe ser grande y *p* no estar próxima a 0 o a 1.
- Se utiliza cuando $n \geq 30 \quad ; \quad np \geq 5 \quad y \quad nq \geq 5$

Aproximación del Modelo Hipergeométrico al Modelo Normal

Si $x \sim H(N, n, X) \quad con \quad E(x) = n\frac{X}{N} \quad y \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} n \frac{X}{N} (1 - \frac{X}{N})}$

$$z = \frac{E(x)}{\sigma}$$

Aproximación del Modelo Binomial e Hipergeométrico para la Proporción Muestral, al Modelo Normal

Si la **Proporción Muestral** proviene de una **Binomial** con $n \geq 100$ o $n \geq 30$ si *P*=*Q*, tenderá a la Normal. Aplicando corrección por continuidad queda:

Si $\frac{x}{n} \sim \widehat{P}\ con \quad E(\widehat{P}) = P \quad y \quad \sigma_{\widehat{P}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$

Entonces $z = \frac{\widehat{P} - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \sim N(0, 1)$

Si la **Proporción Muestral** proviene de una **Hipergeométrica** con $n \geq 100$, tenderá la Normal. Aplicando corrección por continuidad queda:

$$z = \frac{\widehat{P} - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}}$$

Aproximación del Modelo Poisson al Modelo Normal

Es el límite de la Distribución de Poisson, como pasa con la Binomial. Dado *P,* entonces *nP* aumenta al aumentar *n*. A medida que μ o *nP* aumenta, la distribución de Poisson se aproxima a la **curva continua acampanada**. Se usa cuando $\lambda \geq 21$.

Si $x \sim P(\lambda) \quad E(x) = nP \quad y \quad V(x) = nP \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{nP}$

Luego $z = \frac{x - nP}{\sqrt{nP}} \sim N(0, 1)$

Distribuciones de las Pequeñas Muestras

El estudio de inferencias estadísticas con pequeñas muestras se llama **teoría del muestreo pequeño o teoría del muestreo exacto**.

Además de las distribuciones Binomial y de Poisson, hay tres distribuciones de probabilidades que pueden ser asumidas por una estadística con n pequeña:

χ^2 **Chi Cuadrado**

t **de Student**

F **de Snedecor**

Todos se relacionan con el modelo de probabilidad normal, y se definen por el número de grados de libertad. Se denomina **grados de libertad** (φ=GL=v=*n-1*) al número de observaciones linealmente independientes que ocurren en una suma de cuadrados.

Distribución Chi-Cuadrado

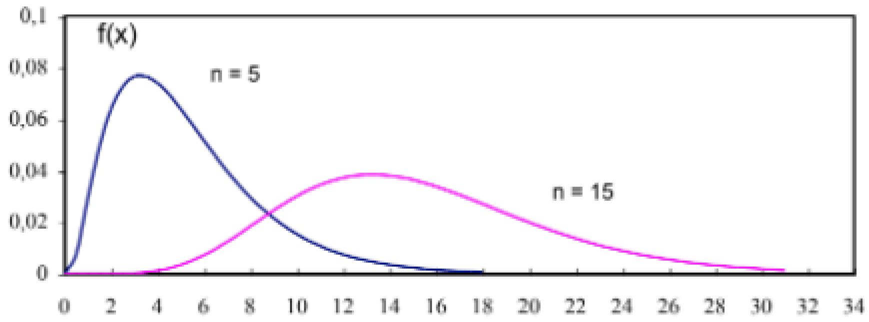
Teniendo en cuenta $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \approx N(0, 1)$,

Se tiene $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \ ... \ + Z_k^2$ con *k* variables aleatorias normales e independientes, cada una con media = 0 y desviación típica 1. Entonces, la VA es igual a $X^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \ ... \ + Z_k^2$

La distribución de probabilidad es **asimétrica** hacia la derecha (positiva), y a medida que los grados de libertad aumentan se vuelve más simétrica. Comienza en 0.

Media. $E(x) = \mu = \varphi$ y **Varianza.** $V(x) = \sigma^2 = 2\varphi$

La siguiente gráfica representa cómo se va haciendo más simétrica la **función de densidad.**



Es de **utilidad** cuando se requieren inferencias respecto a la dispersión de una distribución, como por ejemplo para inferir respecto de la **Varianza** de una distribución en la **Estimación** y **Dócima.**

Distribución "t" de Student

Se utiliza cuando queremos estimar la **media** de una población normalmente distribuida a partir de una muestra pequeña, y cuando se tiene un tamaño de muestra **inferior a 30 elementos**, *n*<30. En el caso contrario, se parece lo suficiente a la distribución normal, por lo que resulta conveniente utilizar ese modelo. También se utiliza cuando **no se conoce la desviación típica** de una población, y debe ser estimada.

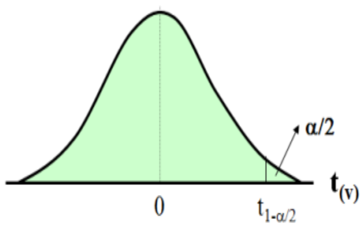
Parámetros

Media. $E(t) = 0 \quad y \quad V(t) = \frac{\varphi}{\varphi - 2} \quad si\, \varphi > 2$

Propiedades

- Cada curva t tiene forma de campana (unimodal y simétrica), con centro en 0.
- Cada curva t, está más dispersa que la curva normal estándar z, y más aplanada.
- A medida que φ aumenta, la dispersión de la curva t disminuye.
- Si $\varphi = \infty$, la curva t es equivalente a la z.

Gráfica de una curva t



Resumen

Variable	Distribución	Función De Densidad	Función De Acumulación	E( )	V( )	Ds( )
(X)	Uniforme Continua	$f_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \forall \text{ otro } x \end{cases}$	$F_{(x)} = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x \ge a \\ 1 & x \ge b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$
(T)	Exponencial	$t(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \ge 0$	$T(x) = P(x \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}$
$x \sim N(\mu, \sigma)$	Normal	$f_{(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty \le x \le \infty$	$F_{(x)} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x)dx$	$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x)dx}$
$z \sim N(0,1)$	Normal	$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$F_{(z)} = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz$	0	1	1
$\chi^2_{(\varphi)}$	Chi Cuadrado	$f(\chi^2) = \frac{\left[(\chi^2)^{(\varphi/2)-1}\right] e^{-(\chi^2/2)}}{\left(2^{\varphi/2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]}$, $0 \le \chi^2 \le \infty$	$F(x) = P(X \le x) = \int_{0}^{x} f(x)dx$	φ	2φ	$\sqrt{2\varphi}$
$t_{(\varphi)}$	t de Student	$f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi\pi}}\right)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\varphi+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right]\left(1 + \frac{t^2}{\varphi}\right)^{-(\varphi+1)/2}$, $-\infty \le t \le \infty$	$P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$	0	$\frac{\varphi}{\varphi-2}$ válida para $\varphi > 2$	$\sqrt{\frac{\varphi}{\varphi-2}}$

Bibliografía

Sánchez, C. (08 de febrero de 2019). *Normas APA – 7ma (séptima) edición.* Normas APA (7ma edición). https://normas-apa.org/

Rouadi, G. (2015). *Probabilidades y Estadísticas.* Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Córdoba.