Matemática superior

Unidad 1

Introducción a las señales y sistemas

Las ***señales*** son funciones de una o más variables independientes y contienen información acerca de la naturaleza o comportamiento de algún fenómeno. Estas pueden variar de forma continua en el tiempo (representa una curva como una función de una variable continua) o su evolución se describe en puntos discretos del tiempo (representa una secuencia de números asociada con instantes en tiempo discreto en los que está especificada).

La información dentro de una señal está contenida en un patrón de variaciones de alguna forma. En general, el tiempo es la variable independiente.

Los ***sistemas*** responden a señales particulares produciendo otras señales.

- Se puede tener un sistema específico que se debe entender para saber cómo responderá a diversas entradas.
- Se puede tener que diseñar sistemas para procesar señales de maneras particulares como, por ejemplo, restaurar señales que han sido degradas de alguna manera o restaurar y mejorar imágenes en general.
- Se pueden modificar las características de un sistema dado utilizando el concepto de retroalimentación.

El análisis de señales y sistemas puede ser para fenómenos y procesos:

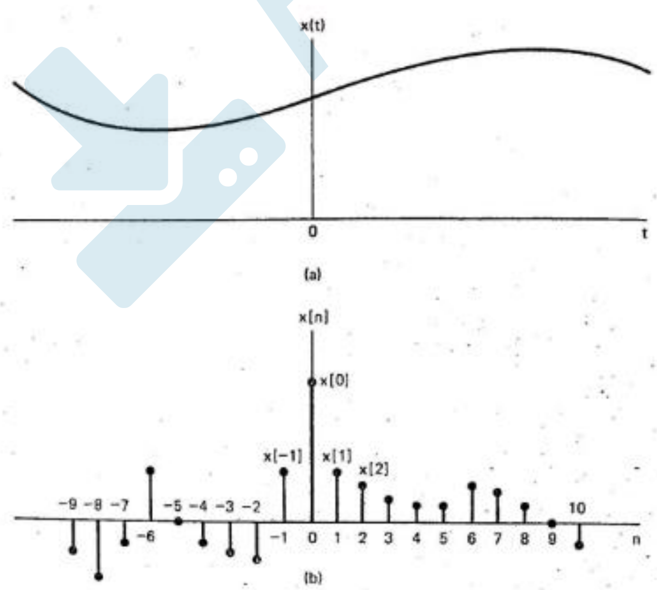


Figura 2.6 Representaciones gráficas de señales de (a) tiempo continuo y (b) tiempo discreto.

- Descritos en ***tiempo continuo***, cuya raíz corresponde a la física, circuitos eléctricos y comunicaciones. La variable independiente es continua, por lo que las señales están definidas para una sucesión continua de valores de la variable independiente.
- Descritos en ***tiempo discreto***, cuya raíz corresponde al análisis numérico, estadística. La variable independiente toma sólo un conjunto de valores discretos

Con relativas restricciones se puede convertir una señal de tiempo

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

continuo en una señal de tiempo discreto.

Señales y sistemas

- Señal de tiempo continuo **x (t)**
- Señal de tiempo discreto **x [n]**

El símbolo ***t*** denota la variable de tiempo continuo y ***n*** la variable de tiempo discreto. Para las señales de tiempo continuo encerraremos la variable independiente en paréntesis **( )**, mientras que para la variable independiente de las señales de tiempo discreto se usan corchetes **[ ].**

Una señal de tiempo discreto x[n] puede representar un fenómeno para el cual la variable independiente es inherentemente discreta.

Una señal de tiempo discreto x[n] puede representar muestras sucesivas de un fenómeno subyacente para el cual la variable independiente es continua. La señal x[n] está definida sólo para valores enteros de n.

Transformaciones de la variable independiente

A partir de una señal de tiempo continuo, se pueden generar otras señales, introduciendo modificaciones que afectan la variable ***independiente t***. Existen tres operaciones básicas:

- ***Desplazamiento en el tiempo x(t – to)***: consiste en restar o sumar una constante (**to**) a la variable **independiente t**, generando una nueva señal, que mantiene la forma de la señal original, pero desplazada a la derecha o izquierda, en el eje de t.

  - (- to) desplaza a la derecha
  - (+to) desplaza a la izquierda

- ***Escalamiento x(a.t):*** se multiplica la variable independiente por una constante a y esto produce un ensanchamiento o acortamiento en la forma de la señal, dependiendo si el valor de la constante es mayor o menor a 1. La reducción en los intervalos de tiempo debe realizarse siempre partiendo del origen (t=0), hacia la derecha (valores positivos de t) y a la izquierda (valores negativos de t).

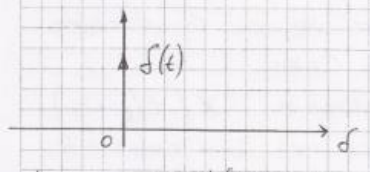
  Lifehack: todos los puntos del gráfico original se dividen por la constante **a** dando así los nuevos puntos del nuevo gráfico. Si a > 1 el grafico se achica y si 0< a < 1 el gráfico se agranda.

- ***Reflexión x(-t)***: cuando se introduce un cambio de signo en la variable independiente t.

Estas operaciones pueden combinarse, para eso, se van realizando de a una a la vez en el siguiente orden: desplazamiento – escalamiento – reflexión.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Impulso unitario d(t)



$\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$

$\delta(t) = \infty$ para $t = 0$

Es una señal cuyo único valor no nulo se produce para t=0 y su valor es infinito en t=0. Su área o superficie es 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Cuando se **multiplica** por otra señal x(t), afecta solo al valor de x(t) para t=0, quedando la siguiente propiedad:

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$$

e integrando resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(0)}_{cte} \cdot \delta(t)\, dt$$

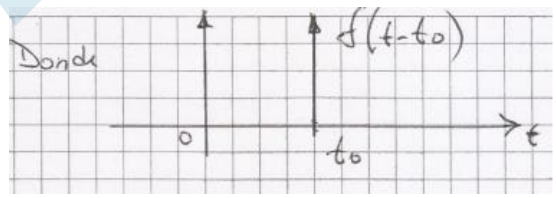
$$= x(0) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt}_{1}$$

$$= x(0).$$

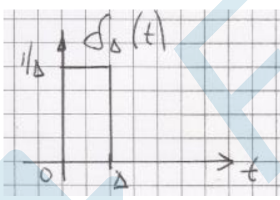
Si se aplica un desplazamiento en el tiempo to, las propiedades quedan:

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0)$$



Este impulso unitario d(t) se visualiza con el impulso unitario incremental dΔ(t):



$\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}$; Para $0 \leq t < \Delta$

$\delta_\Delta(t) = 0$; Para otros t.

Este pulso rectangular, tiene una duración finita que es Δ y una altura finita que es 1/Δ, conservando así la condición fundamental de poseer área unitaria. Entonces definiendo al impulso d(t) a partir de dΔ(t), resulta:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

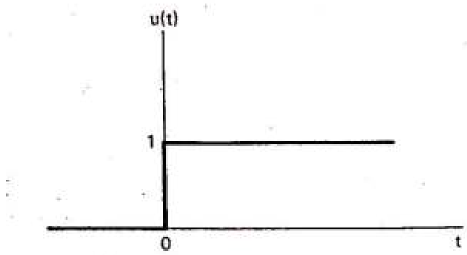
Si Δ → 0, 1/ Δ → ∞ nos encontraríamos con d(t).

Escalón unitario u(t)

Es una señal básica de tiempo continuo que es discontinua en t=0.

FILADD.COM

Este archivo fue descargado de https://filadd.com



$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

El escalón unitario se relaciona con el impulso unitario a través de la ecuación:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Siendo u(t) la integral de la función impulso unitario.

Sugiriendo:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

y considerando u(t) como el límite de una función continua, definimos uΔ(t):

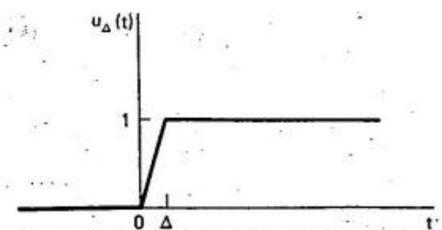


Figura 2.19 Aproximación continua al escalón unitario.

siendo u(t) igual al límite de uΔ(t) cuando Δ→ 0.

Definiendo a dΔ(t) como:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

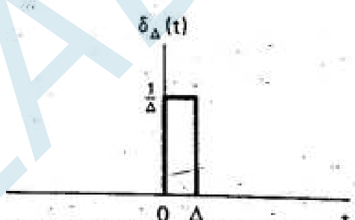


Figura 2.20 Derivada de $u_\Delta(t)$.

dΔ(t) tiene un área unitaria para cualquier valor de Δ y es cero fuera del intervalo 0 ≤ t ≤ Δ. Conforme Δ → 0, dΔ(t) se hace más angosta y más alta manteniendo el área unitaria.

Un impulso escalado kd(t) tendrá un área k y entonces:

$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)\, d\tau = ku(t)$$

el valor en t=0 es infinito pero la altura de la flecha que representa el impulso escalado representa su área.

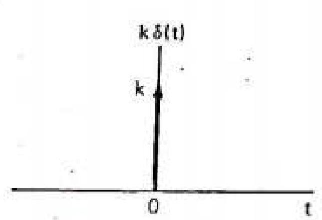


Figura 2.22 Impulso escalado.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

A partir de la ecuación que relaciona el escalón unitario con el impulso unitario si se cambia la variable de integración de:

τ a $\sigma = t - \tau$, Resulta la grafica

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t - \sigma)(-d\sigma)$$

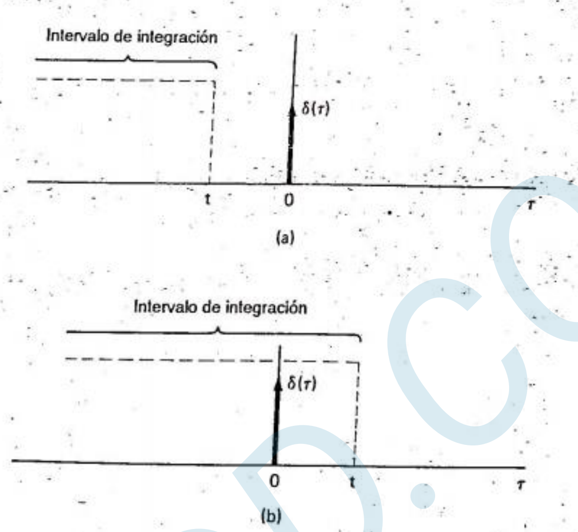


Figura 2.23 Integral dada en la ecuación (2.19): (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

O en forma equivalente:

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \sigma)\, d\sigma$$

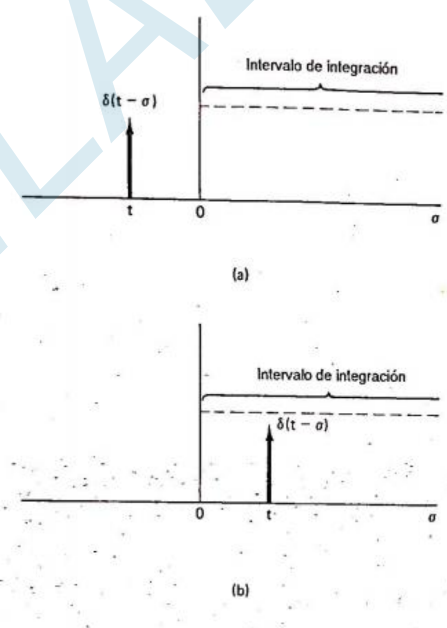


Figura 2.24 Relación dada en la ecuación (2.23): (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

FILADD.COM

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

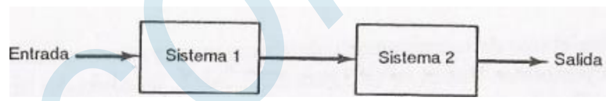
Sistemas

Es un proceso por el cual la señal de entrada x(t) se transforma en una señal de salida y(t).

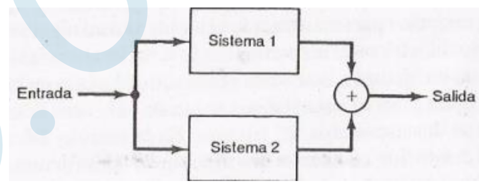
Un ***sistema de tiempo continuo*** es aquel en el que las señales de entrada de tiempo continuo son transformadas en señales de tiempo continuo.

Un ***sistema de tiempo discreto*** transforma entradas de tiempo discreto en salidas de tiempo discreto.

Un ***Sistema complejo*** es la conexión de sistemas más elementales, las cuales pueden ser interconexiones:



- ***En serie o cascada***: conocidos como diagramas de bloque en donde la salida de un ***sistema 1*** es la entrada de un ***sistema 2***.



- ***En paralelo o suma***: donde la misma señal de entrada se aplica al ***Sistema 1*** y al ***Sistema 2***.

Se pueden combinar ambas interconexiones para tener un sistema mucho más complejo.

Interconexión de retroalimentación: se produce retroalimentación en el sistema, es decir, la salida que se produce es la nueva entrada en el sistema.

Propiedades de los sistemas

t = instante de tiempo t

t-1 =tiempo anterior

t+1= tiempo posterior

- ***Sistemas con memoria / sin memoria:*** Un Sistema es sin memoria, si la salida en un instante de tiempo t, depende de la entrada en el mismo instante de tiempo t. Un sistema sin memoria simple es el ***sistema identidad*** cuya salida es idéntica a su entrada.
- ***Invertibilidad: Sistemas inversos*:** Un Sistema es invertible, si a la señal de salida y(t) le aplicamos otro Sistema (Sistema Inverso) que arroja por salida nuestra entrada original x(t).
- ***Causalidad*:** Un Sistema es causal, si los valores de la salida en un instante de tiempo t, depende de los valores de la entrada en el mismo instante de tiempo t o tiempos anteriores (sistema no anticipativo, ya que la salida no anticipa valores futuros de entrada). Por lo que, si un sistema es causal es sin memoria.
- ***Estabilidad***: cuando la entrada es acotada o limitada (es decir, si su magnitud no crece de forma ilimitada), la salida también lo es. Las entradas conducen a respuestas que no divergen.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

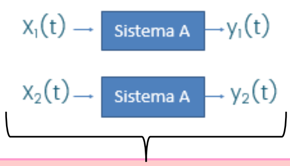
- **I*nvarianza en el tiempo:*** Un Sistema es invariante en el tiempo, cuando un desplazamiento en el tiempo en la entrada, produce el "mismo" desplazamiento en la salida.
- ***Linealidad*:** Si conocemos dos entradas de un sistema y sus respectivas salidas, un Sistema va a ser lineal si se cumple con el ***Principio de superposición.***

Muchos sistemas en la naturaleza pueden modelarse exitosamente como lineales e invariantes en el tiempo.

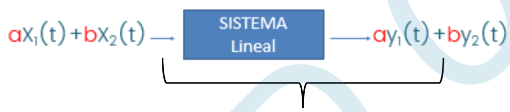
Principio de superposición

La respuesta a una ***combinación lineal*** de las entradas será la "misma" combinación lineal aplicada a las salidas. Es decir, si la entrada al sistema es una suma de varias señales, entonces la salida es la superposición (la suma de las respuestas del sistema a cada una de estas señales).

Un sistema puede ser lineal sin ser invariante en el tiempo. Y puede ser invariante sin ser lineal.



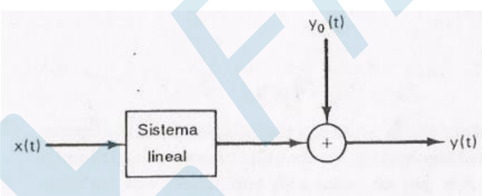
Aditividad de un sistema lineal



Propiedad de escalamiento u homogeneidad

En los sistemas lineales una entrada 0 da una salida 0 (excepto cuando hay una suma).

Un ***sistema incremental lineal*** de tiempo continuo o discreto es aquel que responde de manera lineal a cambios en la entrada. Es decir, la ***diferencia*** (resta) entre las respuestas de un sistema incremental lineal a cualquiera de dos entradas es una función lineal (aditiva y homogénea) de la diferencia entre las dos entradas.



La respuesta del sistema es igual a la suma de la respuesta de un sistema lineal y otra señal que no es afectada por la entrada.

Unidad 2

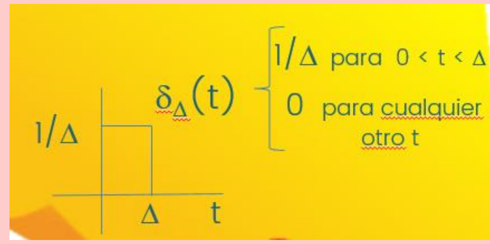
Descomposición de una señal cualquiera en Combinación Lineal de Señales Básicas

Una Señal cualquiera en tiempo continuo x(t) puede ser representada como una Combinación Lineal de impulsos (en representación Incremental) desplazados en el tiempo y cuyos pesos o alturas de cada impulso son los valores de $x(k\Delta)$.

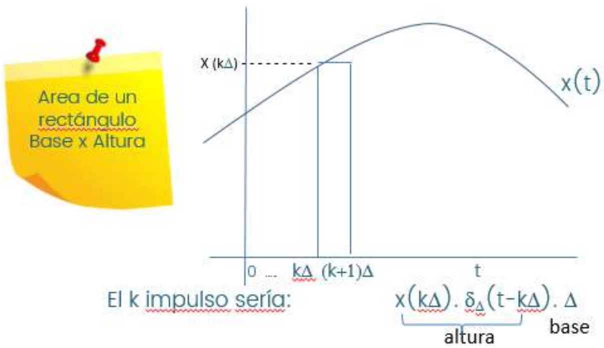
El impulso unitario se puede utilizar como un bloque elemental para construir muchas señales de tipo general.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Representación incremental del impulso:



Un impulso general, al que llamaremos k, en representación incremental que forma x(t), está desplazado en kΔ y sería:



La aproximación se puede expresar como una combinación lineal de pulsos retrasados.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) . \delta_\Delta(t-k\Delta) . \Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = x(t)$$

Cuando $\Delta \to 0$ discreto $\to$ continuo

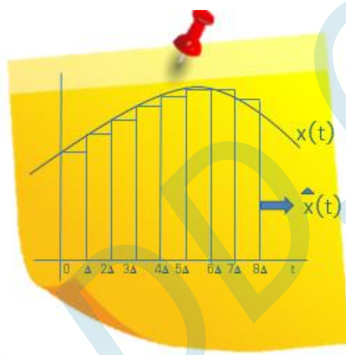
kΔ $\to$ τ var continua

Σ $\to$ $\int$ (integral)

Δ tiende a cero **(no es cero)**

$\Delta \to d\tau$

concepto de diferencial



Una señal de tiempo continuo se puede expresar como el límite de una combinación lineal de pulsos desplazados.

cuando Δ → 0, la sumatoria se aproxima a una integral entonces, se obtiene el ***escudriñamiento del impulso unitario de la señal de entrada en tiempo continuo***.

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) . \delta(t-\tau)\, d\tau}$$

Convolución

Se define como una nueva operación que se realiza entre dos señales y utilizamos el símbolo * para identificarla: y(t) = x(t) * h(t).

$\delta(t) \to$ SLIT $\to h(t)$

La convolución de tiempo continuo es conmutativa, asociativa y distributiva, aunque estas propiedades son particulares de los sistemas LTI.

Si en un sistema SLIT (sistema lineal de tiempo invariable) la entrada es el Impulso unitario la salida la llamaremos la respuesta al impulso h(t).

Un Sistema SLIT está completamente caracterizado por la respuesta al impulso h(t).

$x(t) \to$ SLIT h(t) $\to y(t) = x(t) * h(t)$

FILADD.COM

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Integral de convolución o integral de superposiciones

Si la entrada x(t) que obtuvimos (cuando Δ → 0), ingresa a un ***sistema lineal invariante en el tiempo***, por lo que la salida va a ser la misma combinación lineal de las entradas, con las mismas salidas conocidas (respuesta al impulso) y con los mismos desplazamientos en el tiempo.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \, . \, \delta(t-\tau) \, d\tau \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT} \\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow$$

Integral de Convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \, . h(t-\tau) \, d\tau$$

Desplazamiento en el tiempo

Variable reflejada

Variable

x(***t***) es la señal de entrada en donde cambia la variable t → ***t***

h(t-***t***)es la señal h en donde cambia la variable t → t-***t***

h(t-***t***)es una señal que va a estar reflejada y desplazada en el tiempo en **t**

X(t) sería una suma de impulsos ponderados y desplazados, donde el peso en el impulso d(t-***t***) es x(***t***)d***t***, por lo que, la integral de convolución representa la superposición de las respuestas a cada una de estas entradas y, por linealidad, el peso en la respuesta h***t***(t) con respecto al impulso desplazado d(t-***t***) también es x(***t***)d***t***.

Las características de un sistema LTI son determinadas por su respuesta al impulso.

Propiedades de la convolución

- ***Propiedad Conmutativa***

$$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

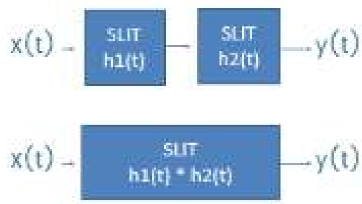
$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \, .h(t-\tau) \, d\tau} \longrightarrow \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \, .x(t-\tau) \, d\tau}$$

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

- ***<u>Propiedad Asociativa</u>***:

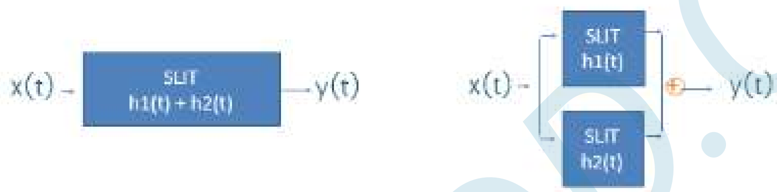
$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) \qquad y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$



- ***<u>Propiedad Distributiva respecto de la Suma:</u>***

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \qquad y(t) = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)]$$



- ***<u>Elemento neutro de la convolución:</u>*** es d(t) ya que recordemos que su área es igual a 1. Por esto, la integral de menos infinito a infinito de una señal por un impulso es la señal valuada en donde está el impulso.

Condiciones que debe cumplir la respuesta al impulso h(t) de un SLIT para:

- ***<u>No poseer memoria:</u>*** En la integral de convolución, en h(t –*t*) no debe existir el desplazamiento:

$$h(t-\tau) = 0 \quad t \neq \tau$$
$$h(t-\tau) \neq 0 \quad t = \tau$$

La única señal que responde a estas condiciones es el impulso unitario por lo tanto: ***h*(t) = d(t) . k** (un impulso de altura k).

- ***<u>Ser invertible</u>***:

$$z(t) = x(t) * h(t) * h_1(t)$$

Para que el Sistema sea invertible $z(t) = x(t)$

Por lo tanto debe cumplir con la siguiente condición:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

La convolución de la respuesta al impulso del SLIT y de su Sistema inverso debe ser igual al impulso. Siendo [x(t) * d(t) = x(t)].

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

- ***Ser estable***:

Integral de Convolución y la propiedad conmutativa

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).\underbrace{x(t-\tau)}_{\beta}\,d\tau$$

Recordemos:
Propiedad Estabilidad:
Entradas acotadas,
Salidas acotadas (que no tiendan al infinito)

Si definimos una Entrada acotada: $|x(t)| < \beta \Rightarrow |x(t-\tau)| < \beta$
tomamos para $x(t-\tau)$ el mayor valor posible que puede adoptar para todo t ;
este valor es β y trabajamos con la integral de convolución conmutada

$$|y(t)| \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).\beta\,d\tau\right| \Rightarrow |y(t)| \leq \left|\beta \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).d\tau\right| \Rightarrow$$

Para que la salida sea también acotada, la condición a cumplir es:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).d\tau\right| \leq \infty$$

Absolutamente Integrable

- ***Ser causal***: se debe cumplir h(t) = 0 para t <0. La salida depende de valores de x(t) hasta t causal, ***t*** <=t. Para que solo participen de la salida valores de t <=t
  - h(t-t)=0 para t > t, y si despejamos 0>t- t, h(t) tiene que ser nula para valores de t negativos.

Para que el sistema sea causal, la respuesta al impulso debe cumplir:

$h(t) \neq 0 \quad t \geq 0$
$h(t) = 0 \quad t < 0$

Para que sea ***NO CAUSAL*** se debe cumplir que h(t) sea distinto de 0 para t < 0 y en este caso, la salida depende de valores de x(t) posteriores a t hasta t_0.

Unidad 3

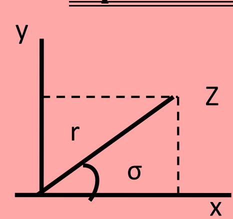
Repaso de números complejos:

Los **números complejos** son aquellos que están formados por una parte real y una parte imaginaria.

Representación analítica:

- ***Cartesiana o rectangular:*** Z= x + i.y donde x e y son números reales y i = $\sqrt{-1}$ por lo que x= Re{Z} (parte real) e y=Im{Z} (parte imaginaria).
- ***Polar:*** $Z = r.e^{i\theta}$ donde r=|Z| (magnitud de z), $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo de fase y **r > 0**.
- ***Relación de Euler:*** $\boxed{e^{i\theta} = cos\theta + i.sen\theta}$

Representación gráfica



x ; y (coordenadas cartesianas de Z)

r, σ (coordenadas polares de Z)

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Permite relacionar ambas formas de representar, otra forma de expresarla es: $\boxed{e^{-i\theta} = cos\theta - i.sen\theta}$

Además, $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \theta = arctg\ y/x}$

El * (asterisco) significa conjugado

Números conjugados: si $\begin{cases} Z = x + iy\ ;\ z^* = x - iy \\ Z = r.e^{i\theta}\ ;\ z^* = r.e^{-i\theta} \end{cases}$

Señales exponenciales complejas de tiempo continuo

Es otra señal básica de tiempo continuo al igual que el impulso unitario y el escalón unitario. Permiten representar fenómenos que ocurren con frecuencia en la naturaleza y sirven como bloques básicos para construir con ellos otras señales y examinarlas y entenderlas mejor.

Forma general de la señal exponencial compleja

$\boxed{x(t) = c.e^{at}}$ donde **c** y **a** son números complejos.

Por lo que: **c= |c|.$e^{i\theta}$ (forma polar)**

a = r + jw_o (forma rectangular)

Si **C** y **a** son reales **x(t)** recibe el nombre de ***exponencial real***.

Casos particulares de la exponencial compleja:

1) ***Con c y a números reales (sin parte imaginaria)***

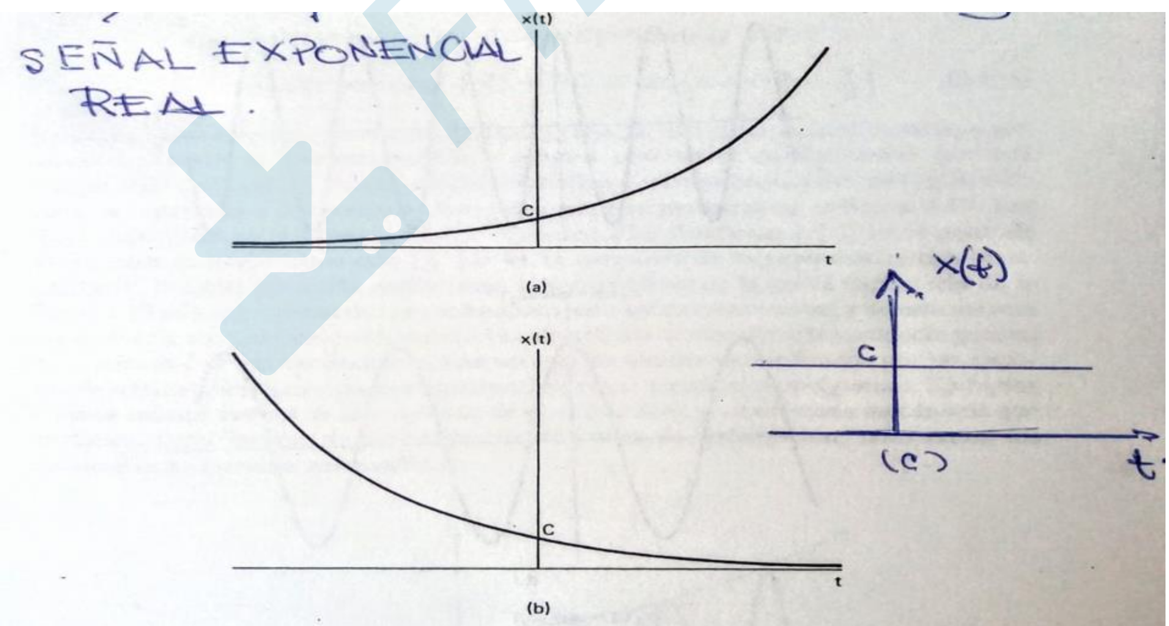


Figura 2.14 Exponencial real de tiempo continuo $x(t) = Ce^{at}$: (a) $a > 0$; (b) $a < 0$. (c) $a = 0$.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

2) ***Con a imaginario puro***: tiene dos formas de expresión.

- ***Expresado en forma polar***: $\boxed{x(t) = c.e^{iwot}}$

Su característica fundamental es la de ser periódica con periodo fundamental $\boxed{T_O = \frac{2\pi}{W_O}}$

Si 1 $\boxed{T = T_O\,.\,m\ ;\ T = \frac{2\pi m}{W_O}}$ donde m es el múltiplo de veces de T_O.

Por ser periódica debe ser x(t) = x(t + T), (se repite en T) entonces:

$$c.e^{iwot} = c.e^{iwo\,(t+T)}$$

$$= c.e^{iwot}\,.\underbrace{e^{iwoT}}_{\text{Debe ser = 1}}$$

Utilizando la relación de Euler:

$e^{iwoT} = cosW_OT + i.senW_OT\ = 1$ **(DEBE SER IGUAL A 1)**

Teniendo en cuenta 1 **entonces** $W_OT\ = 2\pi m$

$cos\,2\pi = 1$

$sen\,2\pi = 0$

Y reemplazando resulta:

$\boxed{e^{iwoT} = 1}$

- **Para m= 1 y m= -1 con** $2\pi m = 1$ ➡ $\frac{2\pi 1}{W_O} = \frac{2\pi(-1)}{W_O}$ ➡ $T_O = \frac{2\pi}{|W_O|}$
- **Entonces las señales** e^{iwot} $y\ e^{-iwot}$ **tienen el mismo** T_O

- ***Expresada con sen y cos: Función senoidal***

La ecuación 2.11 a la que refiere es:

$$T_O = \frac{2\pi}{|W_O|}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (2.12)$$

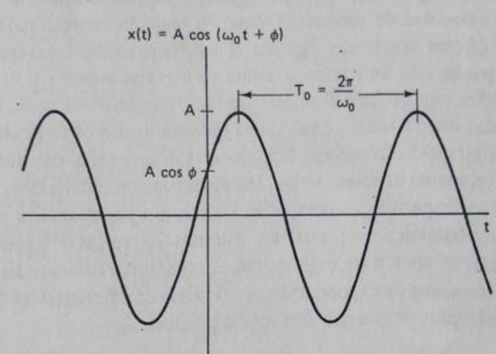


Figura 2.15 Señal senoidal de tiempo continuo.

tal como se muestra en la figura 2.15. Siendo segundos las unidades de t, las de ϕ y ω_0 son radianes y radianes por segundo respectivamente. Es también común escribir $\omega_0 = 2\pi f_0$, donde f_0 tiene las unidades de ciclos por segundo o Hertz (Hz). La señal senoidal también es periódica con período fundamental T_0 dado por la ecuación (2.11).

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Relación entre ambas expresiones:

Usando la relación de Euler: $e^{iwoT} = cosW_0T + i.senW_0T$

y su asociada $cosW_0T = \frac{1}{2}\ \ e^{iwot} + \frac{1}{2}e^{-iwot}$

Expresamos $x(t) = \ e^{iwot}$ en ***términos senoidales***

El periodo fundamental To de una señal senoidal de tiempo continuo o una exponencial compleja periódica es inversamente proporcional a $|W_0|$ la cual es la **frecuencia fundamental.**

$\boxed{x(t) = \frac{A}{2}\ cos(W_0T + \theta)\ .\frac{A}{2}\ \ e^{i(W_0T+\theta)} + \frac{A}{2}\ \ e^{-i(W_0T+\theta)}}$ **siendo A una constante y θ el ángulo de fase**

Si disminuimos la magnitud de W_0**,** reducimos la velocidad de oscilación y por lo tanto incrementamos el periodo.

Si $W_0 = 0$, x(t) es constante y es periódica con periodo T para cualquier valor positivo de T. Entonces, el periodo fundamental de una señal constante es indefinido (velocidad de oscilación = 0).

3) ***Forma general con c y a complejos***: tanto la parte real como la parte imaginaria, son funciones senoidales, multiplicadas por exponenciales que pueden ser crecientes para r>0 y decrecientes para r<0.

Las señales senoidales multiplicadas por las exponenciales decrecientes se denominan senoides amortiguadas.

x(t) = c.e^{at} siendo: c = |c|. $e^{i\phi}$ (forma polar) y a = r + j ω_0 (forma rectangular)

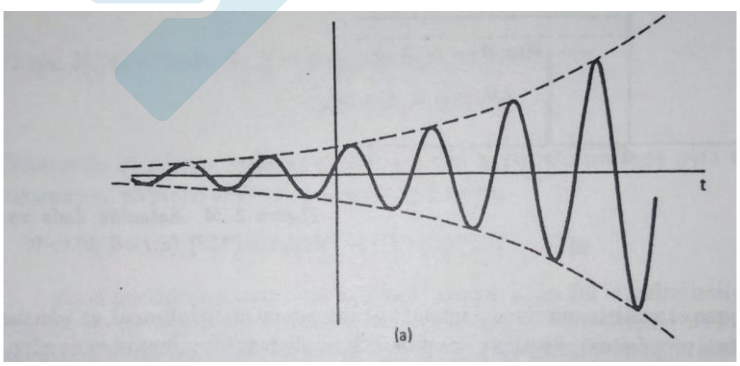
Reemplazando x(t) =|c| . $e^{j\phi}$. $e^{(r+j\omega_0)t}$

Acomodando términos x(t) =|c| . e^{rt} . $e^{j(\omega_0 t+\phi)}$

La parte imaginaria es la que se multiplica por j y r es un número real

Expresado por EULER

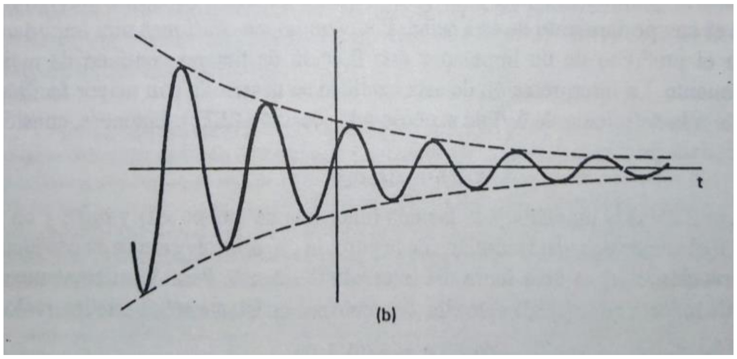
x(t) =|c| . e^{rt} . $\cos(\omega_0\, t + \phi)$ + j |c| . e^{rt} $\text{sen}(\omega_0\, t + \phi)$



(a) Señal senoidal creciente:

x(t) = $C.e^{rt}.cos(W_0T + \theta)$**,** con r > 0.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com



(b) Señal senoidal decreciente:

x(t) = $\boldsymbol{C.e^{rt}.cos(W_0T+\theta)}$, con r < 0.

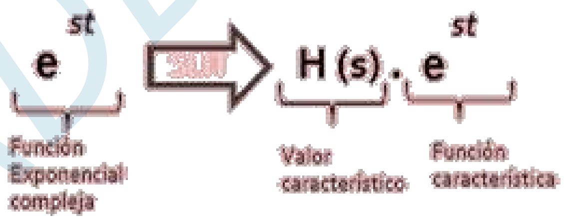
Funciones e^{st} como funciones características de los SLIT

- Las series y transformadas de Fourier son excelentes herramientas para analizar fenómenos físicos (vibraciones, difusión de calor, etc.).
- Permite analizar respuestas SLIT a entradas de tipo senoidal o combinación de senoidales de diferentes periodos.
- Se utilizan en tiempo continuo y discreto.

Respuesta de los SLIT a exponenciales complejas e^{st}

Las $\boldsymbol{e^{st}}$ (señales básicas) permiten representar una amplia variedad de señales y expresar la respuesta de un SLIT de modo simple y como una combinación lineal de señales básicas. (s = número complejo).

H(s) es una variable compleja que depende de s y está relacionada con h(t).



La respuesta de un sistema LTI a una entrada exponencial compleja es la misma exponencial compleja modificada sólo en amplitud.

Demostración de que las funciones e^{st} son funciones características de los SLIT

Consideramos un SLIT con respuesta al impulso h(t).

La salida a una x(t)= $\boldsymbol{e^{st}}$ se obtiene por convolución:

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} h(T).x(t-T).d(T)$$

S = $\sigma + jw$

(número complejo)

$$= \int_{\infty}^{-\infty} h(T).\ \boldsymbol{e^{s(t-T)}}.d(T)$$

$$= \boldsymbol{e^{st}} \int_{\infty}^{-\infty} h(T).\ \boldsymbol{e^{-sT}}.d(T)$$

Esto es H(s)

$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = H(s).\ e^{st}}}$$

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Serie Fourier de tiempo continuo

En caso de ser x(t) una combinación lineal de señales complejas:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . H(s_k) . e^{s_k t}$$

Donde:

H(s)= $\int_{\infty}^{-\infty} h(T).\ \boldsymbol{e^{skT}}.d(T)$

Si la x(t) es combinación lineal de exponenciales complejas sin parte real ($\sigma = 0$), será:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . e^{iw_0 kt}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . H(\ ikw_0) . e^{ikw_0 t}$$

$\Phi_k(t)$ son funciones armónicas

Señales armónicas

Las señales complejas armónicamente relacionadas, asociadas a la exponencial compleja: $\boldsymbol{e^{iwoT}}$ son $\Phi_k(t) =\ \boldsymbol{e^{ikwoT}}$ **con k= 0, ±1, ±2, …**

Poseen frecuencias w múltiplos de w_0 y son periódicas en el mismo periodo T. Una combinación lineal de exponenciales complejas armónicas, también es periódica en T. Entonces, representando una x(t):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . e^{iw_0 kt}$$

K=0 es un término constante

K= ± 1, componentes fundamentales o de la primer armónica (tienen periodo T_0).

K= ± 2, componentes de la segunda armónica (T=1/2T_0 , w=2w_0).

K= ± n, componentes de la enésima armónica.

Las señales **armónicas** son periódicas en el mismo período T y sus frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental.

Coeficientes de la serie de Fourier en un SLIT

Para una señal periódica x(t) con representación en serie de Fourier:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . e^{iw_0 kt}$, aplicando a esta señal a la entrada de un SLIT cuya respuesta al impulso h(t), la salida va a ser periódica también, con el mismo T.

Y(t) se obtiene calculando los a_k (que es el coeficiente de la serie de Fourier), de la salida en términos de los de la entrada:

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . H(\, ikw_0). e^{ikw_0 t}$

Esta es la fórmula definida anteriormente y los $H(\, ikw_0)$ se denotan como $H(\, kw_0)$

Si $\{a_k\}$ es el conjunto de los coeficientes de la serie de Fourier para la entrada x(t), entonces $\{a_k . H(kw_0)\}$ es el conjunto de coeficientes para la salida y(t).

siendo los valores característicos de la salida

$H(\, kw_0) = \int_{T=-\infty}^{\infty} h(T).\, \boldsymbol{e}^{-ikw_0 t}. d(T)$

Calculo de los coeficientes de la serie de Fourier (a_k)

Partimos de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . e^{iw_0 kt}$$

Multiplicamos ambos miembros por $e^{-iw_0 nt}$

$$e^{-iw_0 nt}. x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k . e^{-iw_0 nt}. e^{iw_0 kt}$$

Integramos ambos miembros entre 0 y $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ **(un periodo)**

Agrupamos y sacamos la sumatoria fuera de la integral:

a

$$\boxed{\int_0^{t_o} e^{-iw_0 nt}. x(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^{t_o} e^{i(k-n)w_0 t} dt\right]}$$

Resolvemos la integral a usando la relación de Euler:

$$\int_0^{t_o} e^{i(k-n)w_0 t} dt = \int_0^{t_o} \cos[w_0 t\,(k-n)]\, dt + i \int_0^{t_o} sen[w_0 t\,(k-n)]\, dt$$

$$= sen \frac{\{w_0 t\,(k-n)\}}{w_0\,(k-n)} \Big|_0^{t_0} - i\, cos \frac{\{w_0 t\,(k-n)\}}{w_0\,(k-n)} \Big|_0^{t_0}$$

Reemplazando $\boldsymbol{W_0} = \boldsymbol{2\pi}/T_0$ (esto es, la frecuencia fundamental):

- Para K≠ n

$$\left[sen \frac{\left(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{T_0}. T_0\ \ (k-n)\right)}{w_0\,(k-n)} - 0 \right] - i \left[cos \frac{\left(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{T_0}. T_0\ \ (k-n)\right)}{w_0\,(k-n)} - \frac{1}{w_0\,(k-n)} \right]$$

$$= [0-0] - i \left[\frac{1}{w_0\,(k-n)} - \frac{1}{w_0\,(k-n)} \right]$$

$$= \boxed{0}$$

$\boldsymbol{sen\ 2\pi}$ **= 0**

$\boldsymbol{sen\ n. 2\pi}$ **= 0**

Cos 0 =1

Cos $\boldsymbol{2\pi}$ **= 1**

Cos $\boldsymbol{n. 2\pi}$ **= 1**

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

- Para K= n

$$\int_0^{t_0} e^{iw_0 t(n-n)}\,dt = \int_0^{t_0} e^{0}\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} dt = \boxed{T_0}$$

Los coeficientes complejos miden la porción de la señal x(t) que está en cada armónica de la componente fundamental.

Entonces $\int_0^{T_o} x(t).\,e^{-iw_0 nt}\,dt = a_n.T_0$ Desaparece la sumatoria por ser un solo termino

Despejando a_n y expresándolo como a_k resulta:

$$\boxed{\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)}.\,e^{-iw_0 kt}\,dt}$$

Coeficiente de la serie de Fourier para señales periódicas

Convergencia de la serie de Fourier (Condiciones de Dirichlet)

Cuando $\boldsymbol{a_k} = \infty$ significa que **la serie diverge.** Aunque puede suceder que los valores de $\boldsymbol{a_k}$ den valores finitos y al sustituirlos en la serie, pueden no converger. No hay dificultades de convergencia si x(t) es continua.

Dirichlet garantiza que x(t) será igual a x(t) excepto en valores aislados de t en los cuales x(t) es discontinua.

La convergencia se asegura con el cumplimiento de las condiciones de Dirichlet:

- **Condición 1**: x(t) debe ser absolutamente integrable sobre cualquier periodo, esto garantiza que cada coeficiente de $\boldsymbol{a_k}$ **será finito.**

$$\boxed{\int_{T_0} |x(t)|dt < \infty}$$

Una señal periódica que no cumple esta condición por ejemplo es x(t)= 1/t ; 0 < t ≤ 1 donde x(t) es periódica con periodo 1.

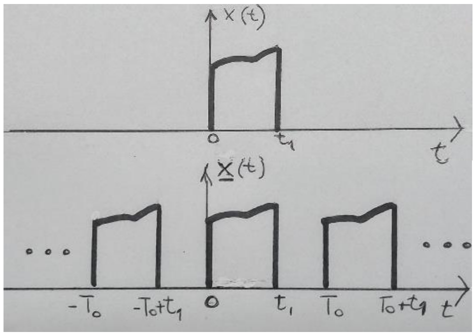
- ***Condición 2***: La variación de x(t) en cualquier intervalo finito de tiempo está acotada, es decir que ***debe haber un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier período de la señal.***
- ***Condición 3***: En cualquier intervalo finito de tiempo hay solo un numero finito de discontinuidades y cada una de estas discontinuidades debe ser finita.

La que verificamos que se cumpla usualmente es la condición 1.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Transformada de Fourier de tiempo continuo

Es una representación de señales no periódicas, a diferencia de la serie de Fourier que era para señales periódicas.



Dada una señal x(t) no periódica y finita en el tiempo, se construye una señal $\underline{x}$(t) periódica que coincida con la x(t) no periódica entre 0 y t_1 (es decir, x(t) es un periodo de $\underline{x}$(t)).

La x(t) no periódica se define también como una señal periódica con $t_{0\to\infty}$ (lo que nos permite representarla como una combinación lineal de exponenciales complejas).

Entonces ahora se puede representar a x(t) en serie de Fourier, teniendo en cuenta las fórmulas de x(t) y a_k presentadas en el apartado de la serie de Fourier.

La diferencia acá es que:

A

$$\boxed{a_k = \frac{1}{t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-jkw_0 t}\ dt}$$

Ya que $\underline{x}$(t) entre 0 y t_0 (un periodo), es igual a x(t) entre $-\infty\ y + \infty$

A partir de A planteada para valores discretizados de kw_o, se define una nueva función X(w), que toma como variable independiente continua a la frecuencia w, siendo así, X(w) la que se utiliza para representar señales no periódicas:

B

$$\boxed{X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-jwt}\ dt}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

El par de Fourier

A partir de la x(t) de la serie de Fourier y de A y B definidas anteriormente expresamos los a_k en función de los kw_o

$$\boxed{a_k = \frac{1}{t_0}X(k.w_0)}$$

Recordando que:

$w_0 = \frac{2\pi}{t_0}$ entonces $\frac{1}{t_0} = \frac{w_0}{2\pi}$

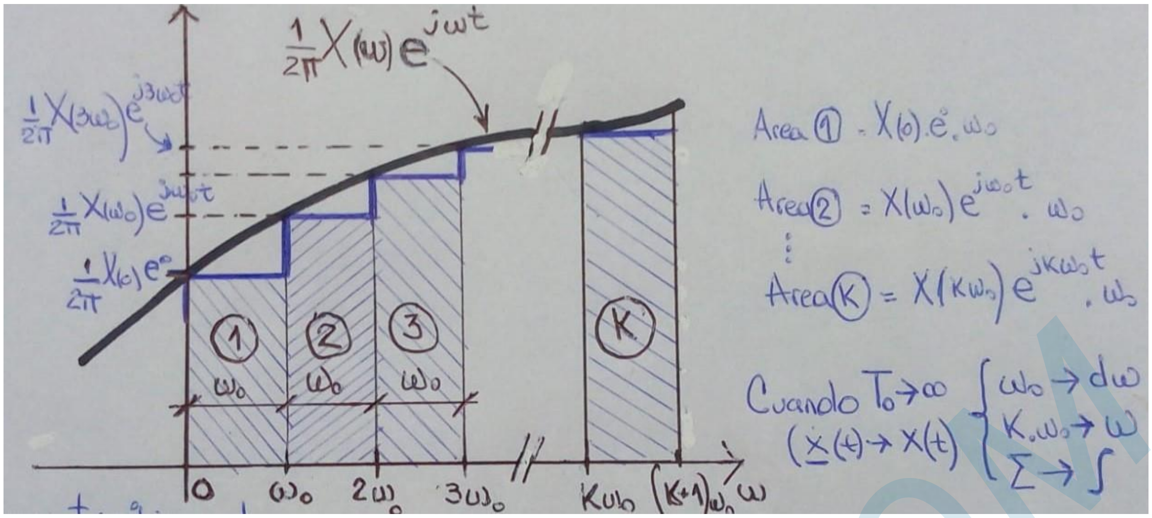
Entonces la ***función periódica*** resulta:

$$\boxed{x\ (t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(k.w_0)\,.\,e^{jkw_0 t}.w_o}$$

Conforme $t_0 \to \infty$, entonces, $w_0 \to 0$ y el lado derecho de esta ecuación pasa a ser una integral

Esta sumatoria se puede interpretar por medio de una aproximación escalonada de la función continua $\frac{1}{2\pi}.X(w).e^{jwt}$ y comparar el área bajo la curva con la suma de las áreas de los rectángulos bajo la escalonada:

Este archivo fue descargado de https://filadd.com



Por lo tanto, se pueden escribir las expresiones anteriores:

PAR DE FOURIER

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(w).\, e^{jwt} \, dw$$

$F^{-1}\{X(w)\}$ ***Transformada inversa de Fourier*** (Ecuación de síntesis) que corresponde a la descomposición de la señal en una combinación lineal de exponenciales complejas.

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\, e^{-jwt} \, dt$$

F {X(t)} ***Transformada de Fourier o la Integral de Fourier de x(t)*** (Ecuación de análisis)

- X(t) de la ecuación de síntesis se utiliza para representar señales no periódicas
- El par de Fourier permite pasar del dominio del tiempo a la frecuencia (w) y de la frecuencia al tiempo.
- Para señales no periódicas, las exponenciales complejas ocurren en una sucesión continua de frecuencias.
- La transformada X(w) de una señal no periódica x(t) se conoce como espectro de x(t), ya que proporciona información acerca de cómo x(t) está compuesta por señales senoidales en diferentes frecuencias.

Convergencia de la transformada de Fourier

Valen las condiciones de Dirichlet con un cambio en la primera condición:

- ***Condición 1***: x(t) debe ser absolutamente integrable, en todo el dominio del tiempo:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty}$$

La condición 2 y 3 son exactamente iguales que las de la serie de Fourier (página 18 de este resumen xd). Además, la condición 1 es la que determina la convergencia en la gran mayoría de las transformadas de Fourier.

FILADD.COM

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

El espectro del impulso unitario:

$$x(t) = \delta(t)$$

Es: $x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).e^{-jwt}\ dt = 1$

Es decir, el impulso unitario tiene una transformada de Fourier que consiste de contribuciones iguales en todas las frecuencias.

La función senc(x) se define como:

$$\boxed{senc(x) = \frac{sen\ \pi x}{\pi x}}$$

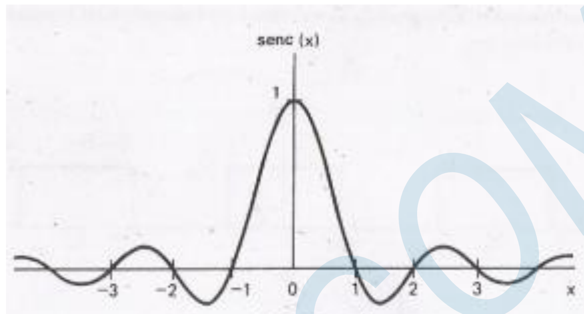


Figura 4.19 La función senc.

Coeficientes de la serie de Fourier como muestras de la transformada de Fourier en un periodo:

Sea s un punto arbitrario en el tiempo, y defina la señal x(t) igual a $\underline{x}$(t) sobre el intervalo $s \le t \le s + T_0$ y 0 en cualquier otro lado, esto es:

$$x(t) = \begin{cases} \underline{x}(t),\ s \le t \le s + T_0 \\ 0,\ t < s \quad ó \quad t > s + T_0 \end{cases}$$

El conjunto de muestras $X(k.w_0)$ es independiente de "s"

Entonces los a_k de $\underline{x}$(t) se pueden expresar en términos de las muestras de la transformada de Fourier X(w) de x(t):

$$\boxed{a_k = \frac{1}{t_0} X(k.w_0)}$$

Los a_k de una señal periódica $\underline{x}$(t) se pueden obtener a partir de las muestras de una envolvente de la transformada X(ω) de una señal no periódica x(t), igual a la $\underline{x}$(t) en un período.

Transformada de Fourier para señales periódicas

Se puede construir la transformada de Fourier de una señal periódica directamente a partir de su representación de la serie de Fourier. La transformada de Fourier resultante para una señal periódica consiste en un tren de impulsos en frecuencia, siendo las áreas de los impulsos proporcionales a los coeficientes de la serie de Fourier.

Considerando una señal x(t) con transformada de Fourier X(w), siendo X(w) una combinación lineal de impulsos igualmente espaciados en frecuencia, es decir:

FILADD.COM

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

$$X(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi .\, a_{k.}\, \delta(w - kw_0)$$

La transformada es un tren de impulsos desplazados en la frecuencia (w).

Para determinar la señal x(t) de la cual ésta es la transformada de Fourier, podemos aplicar la relación de la transformada inversa para obtener:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \,.\, e^{jkw_0 t}$$

Para la demostración, tomamos como señal periódica a la serie de Fourier.

Esta ecuación corresponde a la representación de la serie de Fourier de una señal periódica. Entonces, la transformada de Fourier de una señal periódica con coeficientes a_k de la serie de Fourier, puede interpretarse como un tren de impulsos que ocurren a las frecuencias armónicamente relacionadas y para las cuales el área del impulso en la késima frecuencia armónico kw_0 es 2π veces el k ésimo coeficiente de a_k de la serie de Fourier.

Siendo: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

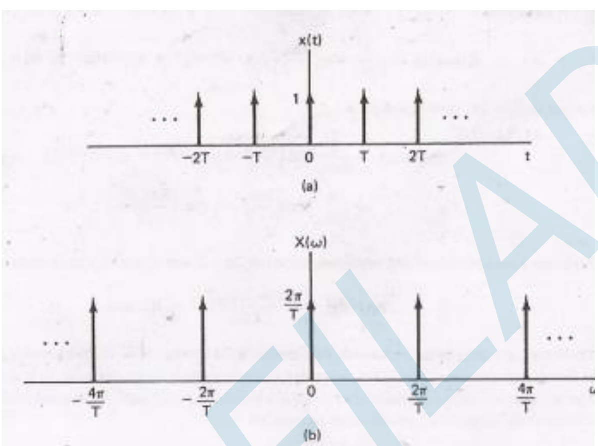


Figura 4.25 (a) Tren de impulsos periódicos; (b) su transformada de Fourier.

La transformada de un tren de impulsos en el tiempo es en sí mismo un tren de impulsos en frecuencia. Conforme el periodo se hace más grande, la frecuencia fundamental se hace más pequeña.

FILADD.COM

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Propiedades de la transformada de Fourier

Periodo de señalamiento	Transformada de Fourier
$x(t)$	$X(\omega)$
$y(t)$	$Y(\omega)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(\omega)\,Y(\omega)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$
$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$
$x(t)$ real	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \mathcal{Re}\{X(\omega)\} = \mathcal{Re}\{X(-\omega)\} \\ \mathcal{Im}\{X(\omega)\} = -\mathcal{Im}\{X(-\omega)\} \\ \lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(\omega) = -\sphericalangle X(-\omega) \end{cases}$
$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{Re}\{X(\omega)\}$
$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$j\mathcal{Im}\{X(\omega)\}$

Dualidad

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)e^{-juv}\,dv$$

$$g(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} f(\omega)$$

$$f(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi g(-\omega)$$

Señales aperiódicas de la relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\,d\omega$$

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Propiedades de la serie de Fourier

Señalamiento periódico	Coeficientes de las series de Fourier
$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ periódico con periodo T_0	a_k b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(2\pi/T_0)t_0}$
$e^{jM(2\pi/T_0)t}x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a^*_{-k}
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ $\left(\text{periódico con periodo } \frac{T_0}{\alpha}\right)$	a_k
$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$	$T_0 a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\frac{2\pi}{T_0}a_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (valor finito y periódico si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk(2\pi/T_0)}\right)a_k$
$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$	$\mathcal{R}e\{a_k\}$
$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$	$j\mathcal{I}m\{a_k\}$

Señales periódicas de la relación de Parseval

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Tablas de pares básicos:

Son útiles para encontrar pares de señales y sus transformadas de Fourier y así evitar calcularlas.

Señalamiento	Transformada de Fourier	Coeficientes de las series (si son periódicas)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, para cualquier otro
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, para cualquier otro
$\operatorname{sen} \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, para cualquier otro
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1$, $a_k = 0, k \neq 0$ (representación de la serie de Fourier para cualquier opción de $T_0 > 0$)
Onda cuadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$ and $x(t + T_0) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{senc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para toda k
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$2T_1 \operatorname{senc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2 \operatorname{sen} \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{W}{\pi} \operatorname{senc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo

Recordar que el par de Fourier también se representa como: x(t) ↔ X(w)

- ***Linealidad***:

Si $\left.\begin{array}{l} x_1(t) \leftrightarrow X_1(w) \\ x_2(t) \leftrightarrow X_2(w) \end{array}\right\}$ entonces $\boxed{a\,x_1(t) + b\;x_2(t) \leftrightarrow a\,X_1(w) + b\,X_2(w)}$

La transformada de Fourier de una combinación lineal de dos señales es la misma combinación lineal de las transformadas de los componentes individuales. Esta propiedad es fácilmente extendida a una combinación lineal de un número arbitrario de componentes.

- ***Simetría (conjugada)***:

Si x(t) es una función del tiempo real, entonces $\boxed{X(-w) = X^*(w) \qquad [x(t)\text{ real}]}$

El * denota el complejo conjugado. La simetría conjugada de la transformada de Fourier se obtiene al evaluar el complejo conjugado de la ecuación de la transformada de Fourier:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\,e^{-jwt}\;dt$$

Transformada de Fourier

$$X*(w) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\,e^{-jwt}\;dt\right]^*$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t).\,e^{jwt}\;dt$$

Conjugada de la transformada

Como x(t) es real entonces x*(t) = x(t)

$$\boxed{X^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\,e^{jwt}\;dt\; = X(-w)}$$

No tiene parte imaginaria y la segunda igualdad se obtiene a partir de la ecuación de la transformada de Fourier evaluada en (- w)

- Cuando se calcula o se presenta la transformada de Fourier de una función del tiempo real, las partes real e imaginaria o la magnitud y fase de la transformada solo necesitan ser generadas o presentadas para frecuencias positivas porque los valores para frecuencias negativas se pueden determinar directamente a partir de los valores para w>0.
- Si x(t) es real y par, x(w) también será real y par
- Si x(t) es una función del tiempo impar de manera que x(t) = -x (-t), entonces x(w) es imaginaria e impar.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

- La propiedad análoga para la serie de Fourier es que una señal x(t) periódica, real y par tiene coeficientes de Fourier reales y par $(a_k = a_{-k})$. Si x(t) es impar, los coeficientes son impares e imaginarios.
- Una función real se puede representar como una suma de una función par y otra impar

➢ ***Desplazamiento en tiempo***:

Si x(t) ↔ X(w) entonces $\boxed{x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jwt_0} X(w)}$

Para establecer la propiedad se aplica la transformada de Fourier para x(t -t_0) haciendo σ = t -t_0 (siendo σ variable de tiempo igual que t), resulta:

$$'F\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma).e^{-jw(\sigma + t_0)}\, d\sigma = e^{-jwt_0} X(w)$$

La **magnitud** de la transformada de Fourier de una señal que es desplazada en tiempo no se altera.

El efecto de un desplazamiento en el tiempo de una señal es introducir un desplazamiento de fase en su transformada que es una función lineal de w.

➢ ***Diferenciación e integración***:

Cuando se diferencian ambos lados de la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier se obtiene:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} jwX(w).e^{jwt}\, dw$$

Jw aparece porque se deriva respecto de t

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jwX(w)}$$

Propiedad de diferenciación

Esta propiedad reemplaza la operación de diferenciación en el dominio del tiempo con la de multiplicación por jw en el dominio de la frecuencia.

Siendo así, la integración debe involucrar la división por jw en el dominio de la frecuencia:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(t)\, dt \leftrightarrow \frac{1}{jw} X(w) + \pi X(0)\delta(w)}$$

Propiedad de integración

El término del impulso refleja el valor promedio o de CD que puede resultar de la integración

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

- ***Escalamiento en tiempo y en frecuencia***:

Si x(t) ↔ X(w) entonces $\boxed{x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{w}{a}\right)}$ donde a es una constante real.

El escalamiento lineal en tiempo por un factor “a” corresponde a un escalamiento lineal en frecuencia por un factor “1/a” y viceversa.

- ***Dualidad***:

La transformada y la transformada inversa de Fourier tienen una simetría definida (son similares, pero no precisamente de forma idéntica) que conduce a la propiedad de dualidad.

Para dos funciones que se relacionan mediante la expresión integral:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v).e^{-juv}\, dv$$

Esta propiedad permite reducir la complejidad de los cálculos del par de Fourier

Si se compara con el par de Fourier, entonces u = w y v = t, entonces $\boxed{f(w) = F\{ g(t) \}}$

Pero si u = t y v = w, entonces $\boxed{g(-w) = \frac{1}{2\pi} F\{ f(t)\}}$

Por lo que, si nos dan el par de transformadas de Fourier para la función de tiempo g(t) : $\boxed{g(t) \leftrightarrow f(w)}$

Considerando la función de tiempo f(t), su par de transformadas de Fourier es : $\boxed{f(t) \leftrightarrow 2\pi g(-w)}$

- Si hay características de una función del tiempo que tiene implicaciones con respecto a la transformada de Fourier, entonces las mismas características asociadas con una función de frecuencia tendrán implicaciones duales en el dominio del tiempo.

- ***Relación de Parseval***: si x(t) y X(w) son un par de transformadas de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

Esta expresión relaciona la energía total de una señal x(t) en el dominio del tiempo, con la energía de su transformada X(ω) en el campo de la frecuencia

Para señales periódicas se utiliza:

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

donde a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de x(t) y T_0 es su periodo. Aquí, la ecuación de Parseval relaciona la energía contenida en un periodo de la función del tiempo con la energía contenida en los coeficientes de la serie de Fourier. $|a_k|^2$ se interpreta como aquella parte de la energía por periodo que es aportada por la kesima armónica.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

- ***Convolución***:

Considerando un sistema LTI con respuesta al impulso h(t), salida y(t) y entrada x(t), de manera que:

y(t) = $\int_{-\infty}^{\infty} x(T).h(t-T)dT$

y(w) = F { y(t) } = $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\, x(T).h(t-T)dT \,]\, e^{-jwt}\, dt$

Cambiando el orden de integración y notando que x(t) no depende de T se tiene:

Y(w) = $\int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, [\, \int_{-\infty}^{\infty} h(t-T)\, e^{-jwt}\, dt \,]$ dT

Aplicando la propiedad de desplazamiento resulta:

Y(w) = $\int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, e^{-jwt} H(w)\, dT$

Y(w) = H(w) = $\int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, e^{-jwt}\, dT$

La integral es F { x(t) } y en consecuencia, Y(w) = H(w).X(w)

Esto es | y(t) = h(t)*x(t) ↔ Y(w) = H(w).X(w) |

Recordar que H(w):

- Es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de un SLIT.
- La llamamos RESPUESTA EN FRECUENCIA del sistema.
- Es simplemente el cambio en amplitud compleja, experimentado por una exponencial compleja de frecuencia ω, conforme pasa a través de un SLIT

- Si un sistema LTI es estable, la respuesta al impulso es absolutamente integrable, por lo que tiene una respuesta en frecuencia H(w).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

- Si un sistema LTI es inestable, la transformada de Fourier no existe y la respuesta del sistema a una entrada senoidal es infinita.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \infty$$

Convolución periódica

Se refiere a dos señales periódicas ($\overline{x_1}(t)$ y $\overline{x_2}(t)$) con periodos iguales (T_0) cuya convolución se define como:

$$\tilde{y}(t) = \int_{T_0} \tilde{x}_1(\tau)\tilde{x}_2(t-\tau)\, d\tau$$

El resultado es una señal periódica $\overline{y}(t)$

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

➢ ***<u>Modulación</u>***:

La propiedad de convolución establece que la convolución en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación en el dominio de la frecuencia. Debido a la dualidad entre los dominios del tiempo y la frecuencia, se espera una propiedad dual de la convolución (que la multiplicación en el dominio del tiempo corresponda a la convolución en el dominio de la frecuencia).

$$\boxed{r(t) = s(t)\,p(t) \leftrightarrow R(w) = \frac{1}{2\pi}\,[\,S(w) * P(w)\,]}$$

La multiplicación de una señal por otra puede considerarse como el empleo de una señal para escalar o modular la amplitud de la otra. La multiplicación de dos señales se denomina ***modulación en amplitud.***

Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

La expresión general que vincula la señal de entrada con la de salida es, para este tipo de SLIT de tiempo continuo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (1)$$

En el dominio del tiempo, se obtiene la salida y(t) para una entrada x(t) a un SLIT por la convolución**.**

Para conocer la respuesta en frecuencia H(ω) y la respuesta al impulso h(t) del SLIT, utilizamos las propiedades de las transformadas de Fourier para obtener la respuesta en frecuencia. De la propiedad de convolución, conocemos que

Y(ω) = X(ω). H(ω) (por propiedad de convolución), es lo mismo que expresar $\boxed{H(\omega) = Y(\omega) / X(\omega)}$

Donde X(w), Y(w) y H(w) son las transformadas de Fourier de la entrada x(t), la salida y(t) y la respuesta al impulso h(t), respectivamente.

Considerando la aplicación de la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación 1 para obtener:

Este archivo fue descargado de https://filadd.com

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

A partir de la propiedad de linealidad (4.83) esto pasa a ser

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

y de la propiedad de diferenciación (4.87)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

o en forma equivalente

$$Y(\omega)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k\right] = X(\omega)\left[\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k\right]$$

Entonces, a partir de la ecuación (4.142)

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

La ecuación obtenida para H(ω) es una función racional, un cociente de polinomios en jω.

Para encontrar el h(t) del SLIT utilizamos la expansión en fracciones parciales. Obtenemos las antitransformadas por medio de propiedades y tablas.

Este archivo fue descargado de https://filadd.com