

CALOR Y TERMODINAMICA

UNIDAD N°1: Fundamentos de la termodinámica.

La **Termodinámica** estudia las situaciones en que la temperatura o el estado (sólido, líquido o gaseoso) de un sistema cambian debido a la transferencia de energía.

La **Temperatura** es un concepto que tiene que ver con la cantidad de energía que contiene un cuerpo por unidad de volumen (energía mecánica, cinética, potencial). Y el **Calor** es la transferencia de energía mecánica a nivel molecular.

Dos objetos en contacto térmico mutuo pueden intercambiar energía debido a una diferencia de temperatura. El **Equilibrio Térmico** es una situación en la que dos objetos no intercambian energía, si entran en contacto térmico. La temperatura puede ser considerada como la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros.

Si se quiere determinar si dos objetos (A y B) están en equilibrio térmico uno con el otro, se colocará un termómetro en contacto térmico con el objeto "A" hasta que se llegue a un equilibrio térmico y la temperatura sea constante; lo mismo se realizara con el objeto "B". Si las dos lecturas son iguales, ambos objetos están en equilibrio térmico uno con el otro.



Al poner en contacto mutuo a los objetos "A y B", no hay intercambio de energía entre ellos. A estos resultados se los resumen en el enunciado de la "Ley Cero de la Termodinámica"

Ley Cero de la Termodinámica: "Si dos objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, en tal caso A y B están en equilibrio térmico entre sí".

Las temperaturas de cualquier sistema suelen medirse con ciertos dispositivos llamados **Termómetros** los cuales se basan en principio de que alguna propiedad física de un sistema cambia a medida que varía la temperatura, estas pueden ser: El volumen de un líquido, la presión de un gas a volumen constante o la resistencia eléctrica de un conductor.

El **termómetro**, se calibra al colocarlo en contacto térmico con un sistema natural que permanezca a temperatura constante. Para determinar el punto de cero grados Celsius se utiliza agua y hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica y para los 100 grados Celsius se utiliza vapor y agua en equilibrio térmico a presión atmosférica. Luego se mide la distancia entre ambos y se la divide en 100 partes obteniendo la escala Celsius, la cual no es útil cuando se necesitan medidas con extrema precisión o están fuera del intervalo.

Escalas de temperatura:

- Temperatura en Fahrenheit: $T^{\circ}f = \frac{9}{5} \cdot T^{\circ}c + 32^{\circ}$
- Temperatura en Kelvin: $T^{\circ}k = T^{\circ}c + 273^{\circ}$

La **Energía Interna** es toda energía de un sistema asociada con sus componentes microscópicos, átomos y células. El **Calor**, es la transferencia de energía entre dos o más cuerpos, debido a sus distintas temperaturas.

La Capacidad Calorífica: Es la cantidad de calor necesario para elevar un grado la temperatura de 1 mol de sustancia. Indica la dificultad de cambiar la temperatura de dicha sustancia, dependiendo de la cantidad de materia.

$$Cap. C = \frac{Q}{\Delta T}$$

El Calor Específico: Es la energía necesaria para elevar un grado la temperatura de 1gr. De masa o sustancia. Es la razón entre capacidad calorífica y masa.

$$Ce = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

De donde se deduce que el calor (Q) es:

$$Q = m \cdot Ce \cdot \Delta T$$

Tipos de calor:

- **Calor sensible:** Es el calor que recibe un cuerpo y hace que aumente su temperatura sin que afecte a su estructura molecular, por lo tanto su estado no cambia. Hay un cambio térmico pero NO físico.

- **Calor Latente:** Es la energía requerida por una sustancia para cambiar de fase. Ya sé de sólido a líquido (Calor de Fusión L_f) o de líquido a gaseoso (Calor de Vaporización L_v). En este caso la energía interviene en el cambio de fase pero no en el cambio de temperatura.

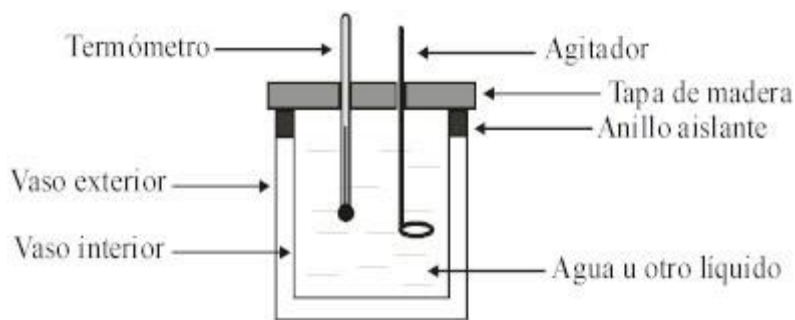
La Calorimetría es una técnica para medir el calor específico que consta de introducir una muestra de agua a temperatura conocida y colocarla en un recipiente que contenga agua de masa y temperatura conocida menor que la del agua introducida para luego obtener una variación de temperatura, esto se realiza en dispositivos llamados **Calorímetros**.

Si el sistema se encuentra aislado, debido al principio de la conservación de la energía, la cantidad de energía que sale debe ser igual a la que entra, en este caso como la energía se transfiere en forma de calor " $\sum Q = 0$ " y puede ser escrita como:

$$Q_{Frio} = -Q_{Caliente}$$

Donde el calor caliente es negativo debido a que es la energía que sale de la sustancia, es decir que se pierde. En cambio el calor frío es lo contrario.

El calorímetro es un recipiente aislante del calor y se lo llama adiabático debido a que no hay transferencia de calor hacia el exterior.



El Equivalente en Agua " π " de un del calorímetro, es una masa de agua ficticia que absorbe o cede la misma cantidad de calor que todos los componentes del calorímetro en equilibrio térmico constante con el agua del calorímetro.

El calculo del equivalente π se obtiene por medio del principio de conservación $\sum Q = 0$

Donde:

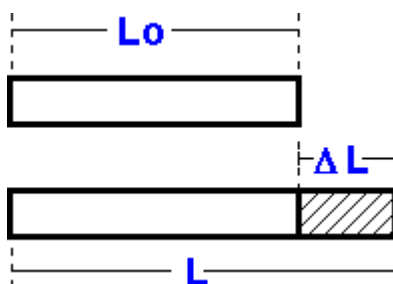
- Calor que cede el agua: $Q_1 = m_1 \cdot C_e \cdot (T - T_1)$
- Calor que recibe el calorímetro: $Q_2 = \pi \cdot C_e \cdot (T - T_2)$

Entonces: $\sum Q = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 \cdot C_e \cdot (T - T_1) = -\pi \cdot C_e \cdot (T - T_2)$

$$\therefore \boxed{\pi = \frac{m \cdot (T_1 - T)}{T - T_2}}$$

Expansión Térmica en Sólidos y Líquidos: Debido al cambio de temperatura se pueden producir cambios físicos:

- **Expansión Longitudinal** (en una única dimensión)



$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (1)$$

$$\Delta L = L - L_0 \quad (2)$$

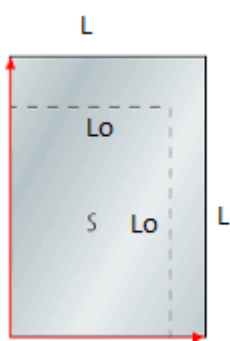
Donde α es el coeficiente de expansión lineal. De unidad $[\text{°C}^{-1}]$

Igualando (1) y (2) se obtiene:

$$L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = L - L_0$$

$$\boxed{L = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)}$$

- **Expansión de Área** (en dos dimensiones)



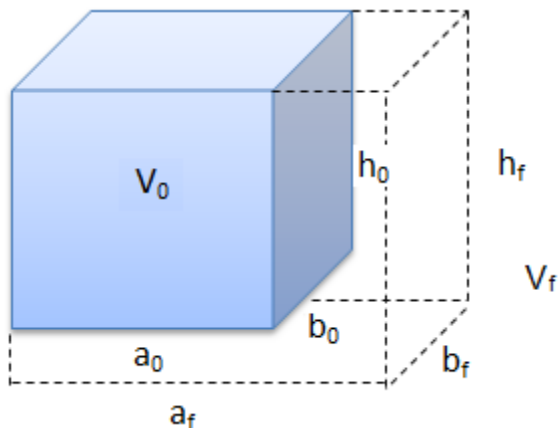
- Donde $A_0 = L_0^2$ y $A = L^2$;

Entonces: $A = L_0^2 \cdot (1 + \Delta T)^2 \Rightarrow A = L_0^2 \cdot (1 + 2\alpha\Delta T + \alpha^2\Delta T^2)$

- 2α toma el nombre de γ que es el coeficiente de dilatación en dos dimensiones
- $\alpha^2\Delta T^2$ es despreciado por ser muy pequeño

$$A = L_0^2(1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

• Expansión Volumétrica:



- Donde $V_0 = L_0^3$ y $V = L^3$

- Entonces: $V = L_0^3(1 + \alpha\Delta T)^3$

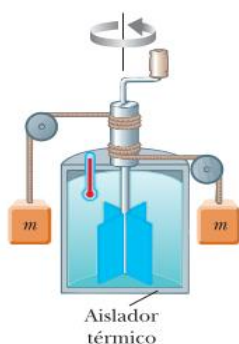
$$V = 1 + 3\alpha^2\Delta T + 3\alpha\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3$$

- $3\alpha^2$ toma el nombre de β y se lo conoce como coeficiente de expansión térmico en 3 dimensiones

- $3\alpha\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3$ se lo desprecia por ser muy pequeño.

$$V = L_0^3(1 + \beta \cdot \Delta T)^3$$

El equivalente mecánico del calor:



Este sistema es un contenedor de agua térmicamente aislado, sobre el cual se invierte el trabajo mediante una rueda de paletas giratorias, que se impulsan mediante bloques que caen con velocidad constante. Si los bloques caen una distancia h , la pérdida de energía será de $2mgh$ y esta misma energía será la que aumentará la temperatura del agua debido a la fricción de las paletas con el agua.

James P. Joule descubrió al variar las condiciones del experimento, que la pérdida de energía mecánica es proporcional al producto de la masa de agua y el aumento de la temperatura.

La constante de proporcionalidad que encontró Joule de $4.18 \text{ J/g} \cdot ^\circ\text{C}$ por lo tanto para elevar la temperatura de 1g. de agua en 1°C se necesitan 4.18J de energía mecánica.

$$1 \text{ Cal} = 4.18 \text{ J}$$

Igualdad conocida como
"Equivalente mecánico del calor"

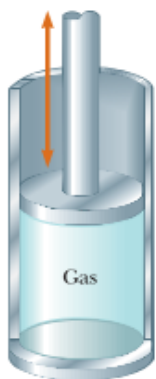
GASES

El comportamiento de los gases se rige por:

- **Su volumen:** Dependiente del recipiente que los contiene.
- **Su presión:** Que es el cociente de fuerza sobre el área. $P = \frac{\text{FUERZA}}{\text{AREA}}$
- **Su Temperatura:** Estado energético específico dado por la cantidad de partículas.

Un **Gas Ideal** implica que las moléculas de gas no interactúan, excepto en colisión y que el volumen molecular es despreciable comparado con el volumen del contenedor, estos gases no existen pero los gases reales a bajas temperaturas se comportan como gases ideales.

La masa del gas (m) es igual al producto de la cantidad de moles (n) por su masa molar (M). $m = n \cdot M$



Considerando un gas ideal confinado en un contenedor cilíndrico sin fugas, lo que supone que la masa (o número de moles) es constante y cuyo volumen puede variar gracias a un pistón móvil.

Para tal sistema, los experimentos proporcionan la siguiente información:

1. Cuando el gas se mantiene a una temperatura constante, su presión es inversamente proporcional al volumen. (Ley de Boyle-Mariotte.) $P \propto 1/V$ $T = \text{cte.}$
2. Cuando la presión del gas se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a la temperatura. (Ley de Charles.) $V \propto T$ $P = \text{cte.}$
3. Cuando el volumen del gas se mantiene constante, la presión es directamente proporcional a la temperatura. (Ley de Gay-Lussac.) $P \propto T$ $V = \text{cte.}$

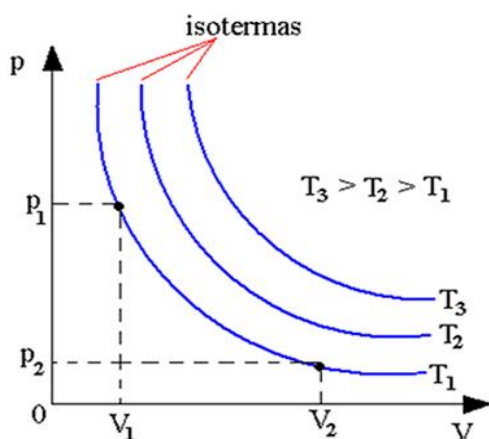
1) Ley de Boyle-Mariotte (transformación isotérmica, $T = \text{cte.}$)

“La presión ejercida por una prueba física es inversamente proporcional al volumen de una masa gaseosa, siempre y cuando su temperatura se mantenga constante”.

$$P \propto \frac{1}{V} \quad \therefore \quad P \cdot V = k (\text{cte})$$

Considerando un gas de cierto volumen V_1 a una presión P_1 . Si variamos la presión hasta llegar a una nueva presión P_2 , el volumen del gas variaría automáticamente hasta un nuevo volumen V_2 :

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$



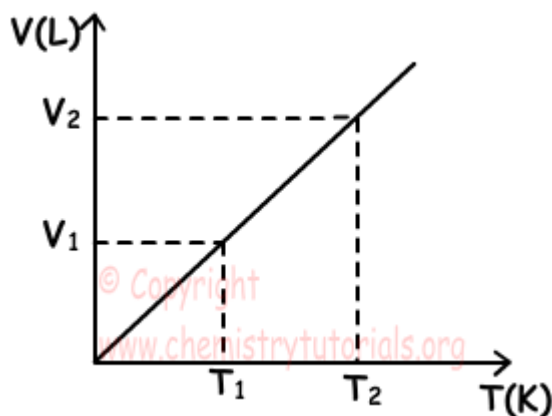
Del gráfico se puede deducir:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} P = 0 \quad \wedge \quad \lim_{V \rightarrow 0} P = \infty$$

Esta ley relaciona la presión de un gas con el volumen que ocupa en una transformación isotérmica.

A temperatura constante, la presión a la que está sometido un gas y el volumen que ocupa son inversamente proporcionales

2) Ley de Charles (transformación isobárica $P = \text{cte.}$)



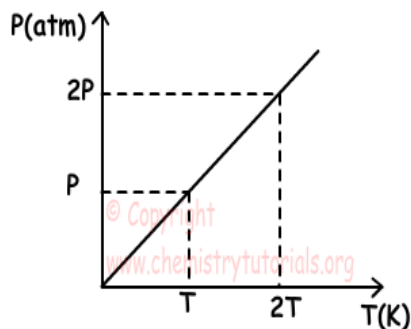
“La temperatura y el volumen son directamente proporcionales a una presión constante”

$$V \propto T \quad \therefore \quad \frac{V}{T} = k (\text{cte})$$

Considerando un volumen V_1 a una temperatura T_1 a presión constante, al hacer variar la temperatura, llegamos hasta una temperatura T_2 y por lo tanto obtendremos un nuevo volumen V_2 :

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

3) Ley de Gay-Lussac (transformación isocórica V=cte.)



"A volumen constante la presión de un gas es directamente proporcional a la temperatura"

$$P \propto T \quad \therefore \quad \boxed{\frac{P}{T} = k \text{ (cte)}}$$

Considerando un gas definido por un volumen constante con una presión P_1 y una temperatura T_1 . Al variar la temperatura, hasta llegar a una temperatura nueva T_2 , la presión variara hasta llegar a P_2 :

$$\boxed{\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}}$$

Esta ley relaciona el volumen que ocupa un gas con su temperatura en una transformación isocórica. A presión constante, el volumen ocupado por un gas es proporcional a su temperatura.

Relación entre las leyes (para gases ideales)

Relacionando algebraicamente las tres leyes se llega a la siguiente conclusión: $P \cdot V \times \frac{V}{T} \times \frac{P}{T} = k \cdot k \cdot k$

$$\frac{P^2 \cdot V^2}{T^2} = k \Rightarrow \boxed{\frac{P \cdot V}{T} = k \text{ (cte)}}$$

Ecuación General de Estado de los Gases Ideales:

Empleando la relación entre las leyes y tomando como condiciones iniciales al estado de "n" moles de cierto gas a condiciones normales de presión, temperatura y volumen tenemos:

Condiciones normales:

- $P = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 101325 \text{ N/m}^2$
- $T = 273 \text{ K}$
- $V = 22.414 \text{ L} = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$ (Volumen molar de los gases ideales)

De este modo:

$$\frac{P \cdot V}{T} = k \Rightarrow k = \frac{101325 \text{ N/m}^2 \cdot 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}}{273 \text{ K}}$$

La constante es denominada como **Constante Universal de los gases** y se denomina con la letra R:

$$R = 8.315 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

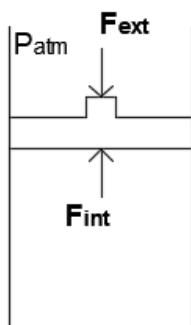
Finalmente, teniendo en cuenta la cantidad de moles que posee el gas, la ecuación se puede escribir como:

$$\boxed{P \cdot V = n \cdot R \cdot T}$$

Donde la constante de los gases puede adquirir el valor:

$$\boxed{R = 0.08206 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8.315 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}$$

Trabajo sobre un gas:



- **Expansión:** $F_{int} > F_{ext} \Rightarrow W(-)$
- **Compresión:** $F_{int} < F_{ext} \Rightarrow W(+)$

Siendo: $F_{int} = -F_{ext}$

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = P \cdot A$$

$$A \cdot \Delta x = \Delta V$$

$$W = F_{ext} \cdot \Delta x \Rightarrow W = -F_{int} \cdot \Delta x \Rightarrow W = -P \cdot A \cdot \Delta x$$

$$W = -P \cdot \Delta V \Rightarrow dW = -P \cdot dV$$

$$\int_{W_0}^W dW = \int_{V_i}^{V_f} -P \cdot dV \Rightarrow \boxed{W = - \int_{V_i}^{V_f} P \cdot dV}$$

UNIDAD N°2: Los principios de la termodinámica.

Primera ley de la termodinámica: La primera ley de la termodinámica es un caso especial de la ley de conservación de la energía que describe procesos que solo cambian la energía interna y las únicas transferencias de energía son por calor y trabajo.

$$\Delta E_{int} = Q - W$$

Donde la causa del signo menos es que el trabajo se define en este caso como el trabajo invertido por el gas y no sobre el gas. Por lo tanto si el gas realiza un trabajo positivo, la energía sale del sistema, lo que conduce al signo negativo: $\Delta u = -W$.

Cuando el sistema se somete a un cambio infinitesimal de estado en el que una pequeña cantidad de energía dQ se transfiere mediante calor y una pequeña cantidad de trabajo dW se invierte, la energía cambia en una pequeña cantidad dE_{int} . Debido a estos procesos infinitesimales la primera ley se puede expresar como:

$$dE_{int} = dQ - dW$$

Pero como Q y W no son variables de estado pero dE_{int} si lo es. Por lo tanto, dQ y dW son diferenciales inexactos y se los representa como $\bar{d}Q$ y $\bar{d}W$ y se puede reescribir la ecuación como: $dE_{int} = \bar{d}Q - \bar{d}W$

Ahora se considera un sistema aislado que no interactúa con sus alrededores. En este caso no tiene lugar la transferencia de energía por calor y el trabajo consumido por el sistema es cero, la energía interna permanece constante, de este modo $Q = W = 0 \Rightarrow \Delta E_{int} = 0$.

Recordando que la variación de energía interna Δu de un sistema, está relacionada con el trabajo de las fuerzas externas W_{ext} aplicado sobre el sistema

$$-W_{ext} = \Delta u$$

Por otra parte, el trabajo de las fuerzas externas es el mismo que el realizado por el gas pero cambiado de signo. Si el gas realiza un trabajo positivo, en contra de las fuerzas externas, que realizan un trabajo negativo. Además otra forma de administrar energía a un sistema es en forma de calor Q y si este no realiza trabajo en el proceso, la energía interna aumenta en cantidad igual al calor $\Delta u = Q$. Entonces, el cambio total de energía interna es:

$$\Delta u = Q - W$$

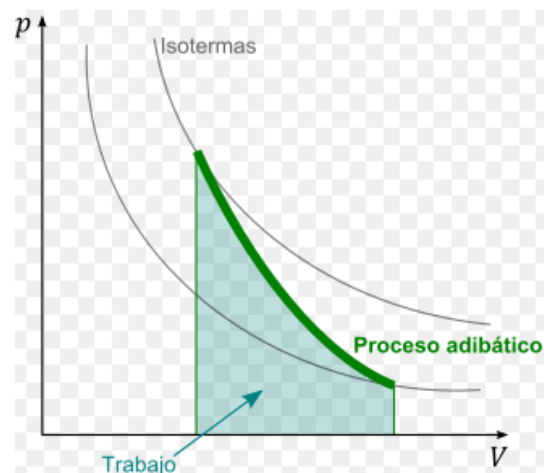
Este enunciado del principio de conservación de la energía aplicado a sistemas termodinámicos se lo conoce como "primer principio de la termodinámica".

Aplicaciones en transformaciones:

- **Proceso Adiabático:** No entra ni sale energía del sistema en forma de calor ($Q = 0$). Entonces:

$$\Delta u = -W$$

Este resultado demuestra que si se comprime adiabáticamente un gas, la temperatura del mismo aumenta. Por lo contrario, la temperatura de un gas disminuye cuando este se expande adiabáticamente.



- **Proceso Isobárico:** Este proceso se presenta a presión constante. En él, los valores del calor Q y del trabajo W son distintos de cero.

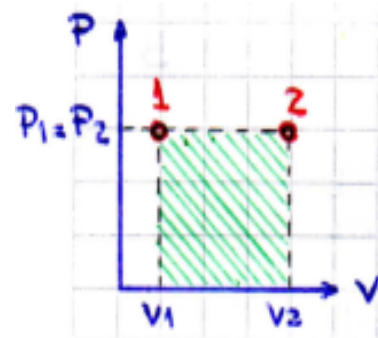
Donde el trabajo consumido por el gas es:

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P \cdot dV = -P \cdot (V_f - V_i)$$

Donde la presión P permanece constante y lo que varía es su volumen.

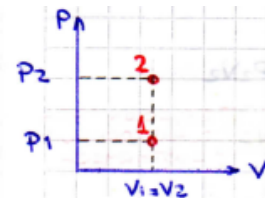
Si $\Delta u = Q - W$ para un proceso isobárico la variación de energía interna es:

$$\Delta u = Q + P(V_f - V_i)$$



- **Proceso Isocórico:** Proceso que tiene lugar a volumen constante. En tal proceso, el volumen del gas no cambia, por lo tanto el trabajo es nulo. Entonces:

$$W = 0 \Rightarrow \Delta u = Q$$

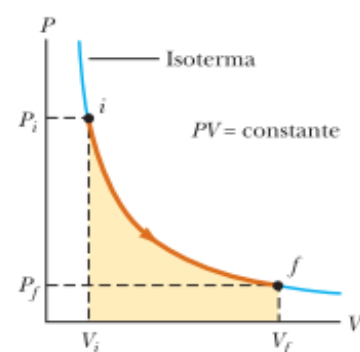


- **Proceso Isotérmico:** Este proceso se representa a temperatura constante. Dado que la energía de un gas en forma de trabajo W , abandona el sistema en forma de calor Q , por lo tanto $Q = W$ y $\Delta u = 0$.

Gracias a que la temperatura es constante, es posible integrar la ecuación de estado de los gases ideales en relación al volumen o a la presión:

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P \cdot dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = -n \cdot R \cdot T \cdot [\ln(V_f) - \ln(V_i)]$$

$$W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$



Ecuación de Mayer: Esta ecuación es válida para gases ideales y relaciona la capacidad calorífica de un gas a presión constante con la capacidad calorífica a volumen constante del mismo gas.

Podemos deducir una relación sencilla entre C_p y C_v para un gas ideal colocando n moles del gas a una temperatura constante. Considerando lo siguiente:

- $Q_p = n \cdot C_p \cdot \Delta T \Rightarrow \text{Presión} = \text{cte}$
- $Q_v = n \cdot C_v \cdot \Delta T \Rightarrow \text{Volumen} = \text{cte}$

$C_p \Rightarrow$ Capacidad calorífica a Presión constante.

$C_v \Rightarrow$ Capacidad Calorífica a Volumen constante.

Según el primer principio de la termodinámica:

- **A presión constante:** $W = P \cdot \Delta V$
 $\Delta u = Q_p - W$

$$\Delta u = n \cdot C_p \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V \quad (1)$$

- **A volumen constante:** $W = 0$
 $\Delta u = Q_v - W$

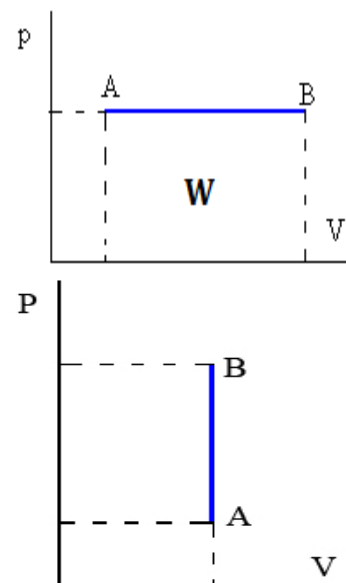
$$\Delta u = n \cdot C_v \cdot \Delta T \quad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2):

$$n \cdot C_p \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

$$n \cdot C_p \cdot \Delta T - n \cdot R \cdot \Delta T = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

$$n(C_p - C_v) = n \cdot R$$



Recordando que: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$$P \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$$

$$C_p - C_v = R$$

La capacidad calorífica molar del gas ideal a presión constante es mayor que a volumen constante $C_p > C_v$; la diferencia entre ambas es la constante de los gases ideales: $R = 8.135 \text{ J/mol.K}$

Transformaciones Adiabáticas (proceso irreversible):

En estas transformaciones no se produce intercambio de calor con el exterior, es decir, $Q = 0$. Por lo tanto en las transformaciones adiabáticas se cumple:

$$\Delta u = -W \Rightarrow n \cdot C_v \cdot \Delta T = -P \cdot \Delta V$$

$$n \cdot C_v \cdot \Delta T = -n \cdot R \cdot T \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

$$C_v \cdot \frac{\Delta T}{T} = -R \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

$$C_v \cdot \frac{\Delta T}{T} = -(C_p - C_v) \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

$$C_v \cdot \frac{\Delta T}{T} = -C_v \left(\frac{C_p}{C_v} - 1 \right) \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = -(\gamma - 1) \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

$$\frac{\Delta T}{T} + (\gamma - 1) \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0 \Rightarrow \text{Integrando ambos miembros.}$$

Recordando que:

$$\Delta u = n \cdot C_v \cdot \Delta T \quad \text{y} \quad W = P \cdot \Delta V$$

También por la Ecuación de Estado de los gases ideales:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

Y por la ecuación de Mayer: $C_p - C_v = R$

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Donde γ es el coeficiente adiabático.

Posterior a utilizar la regla de Barrow se aplica la propiedad de los logaritmos que dice:

$$\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = 0$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{(\gamma-1)} = 0$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{(\gamma-1)} = -\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{(\gamma-1)} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow$$

$$T \cdot V^{(\gamma-1)} = T_0 \cdot V_0^{(\gamma-1)} = \text{Cte.}$$

También utilizando la ecuación de estado de los gases ideales, $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$, se puede deducir que:

$$\frac{P \cdot V}{n \cdot R} \cdot V^{(\gamma-1)} = \frac{P_0 V_0}{n \cdot R} \cdot V_0^{(\gamma-1)}$$

ECUACION DE POISSON

$$P \cdot V^\gamma = P_0 \cdot V_0^\gamma = \text{Cte.}$$

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow T = \frac{P \cdot V}{n \cdot R}$$

$$V \cdot V^{(\gamma-1)} = V^1 \cdot V^{(\gamma-1)} = V^{(1+\gamma-1)} = V^\gamma$$

Trabajo en transformaciones adiabáticas:

Recordando que ninguna energía sale en forma de calor, $Q = 0$, entonces $\Delta u = -W$

$$\Delta u = n \cdot C_v \cdot \Delta T = -W$$

Entonces:

$$W = -n \cdot C_v \cdot (T_f - T_i)$$

$$\text{Sabiendo que } T = \frac{P \cdot V}{n \cdot R}$$

$$W = n \cdot C_v \cdot \left(\frac{P_i \cdot V_i}{n \cdot R} - \frac{P_f \cdot V_f}{n \cdot R} \right) \Rightarrow W = n \cdot C_v \cdot \frac{1}{n \cdot R} \cdot (P_i \cdot V_i - P_f \cdot V_f)$$

Puesto que $R = C_p - C_v$ e $\gamma = C_p/C_v$ entonces, $C_v = R/\gamma - 1$

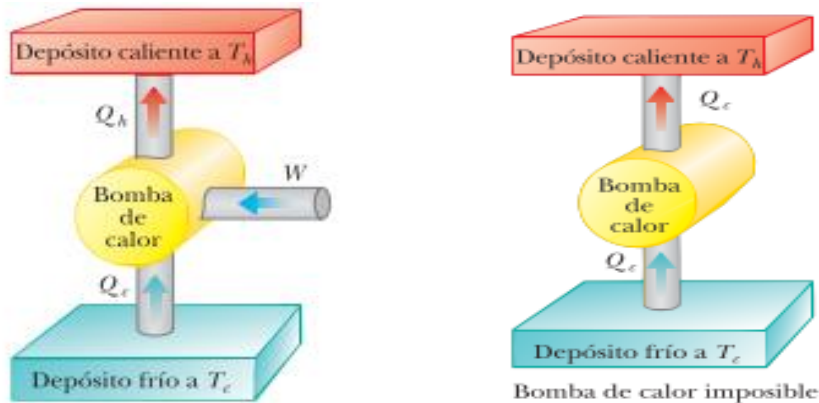
$$W = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{R} \cdot (P_i \cdot V_i - P_f \cdot V_f)$$

$$\therefore W = \frac{(P_i \cdot V_i - P_f \cdot V_f)}{\gamma - 1}$$

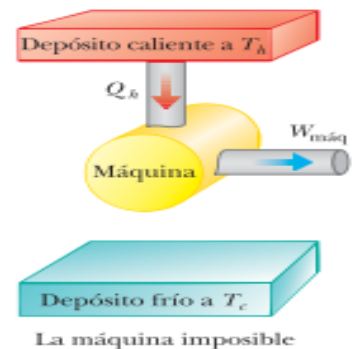
Segundo Principio de la Termodinámica:

Este principio completa al primero, determinando el sentido en que deben efectuarse las transformaciones en los sistemas aislados, limitando la disponibilidad de la energía y sus formas de uso.

- **Según Clausius:** “Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea transferir energía de manera continua mediante calor desde un objeto a otro a una mayor temperatura sin la entrada de energía por trabajo”.



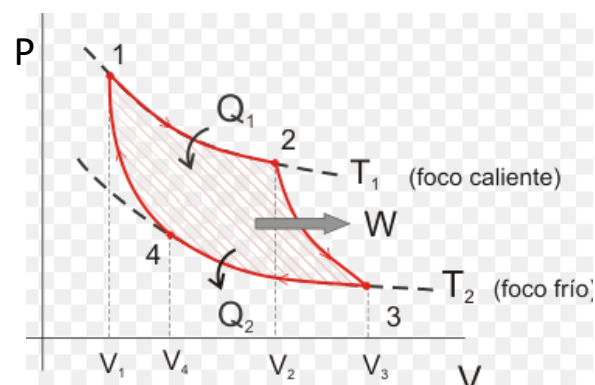
- **Según Kelvin-Planck:** “Es imposible construir una máquina térmica que, funcionando en un ciclo, no produzca otro efecto que la entrada de energía por calor de un depósito y la realización de una cantidad igual de trabajo”. En otras palabras, es imposible construir un motor que recibiendo calor de una fuente caliente, lo transforme en trabajo, sin ceder una parte a una fuente fría.



Ciclo de Carnot

Es un ciclo reversible que utiliza un gas ideal y consta de dos transformaciones isotérmicas y dos adiabáticas.

- Tramo 1-2 \Rightarrow Expansión Isotérmica a temperatura caliente.
 $T_C = T_{12}$
 $Q_C = Q_{12}$
- Tramo 2-3 \Rightarrow Expansión Adiabática.
 $Q = 0 = Q_{23}$
- Tramo 3-4 Compresión Isotérmica a temperatura fría.
 $T_F = T_{34}$
 $Q_F = Q_{34}$
- Tramo 4-1 Compresión Adiabática.
 $Q = 0 = Q_{41}$



Todas estas transformaciones son reversibles.

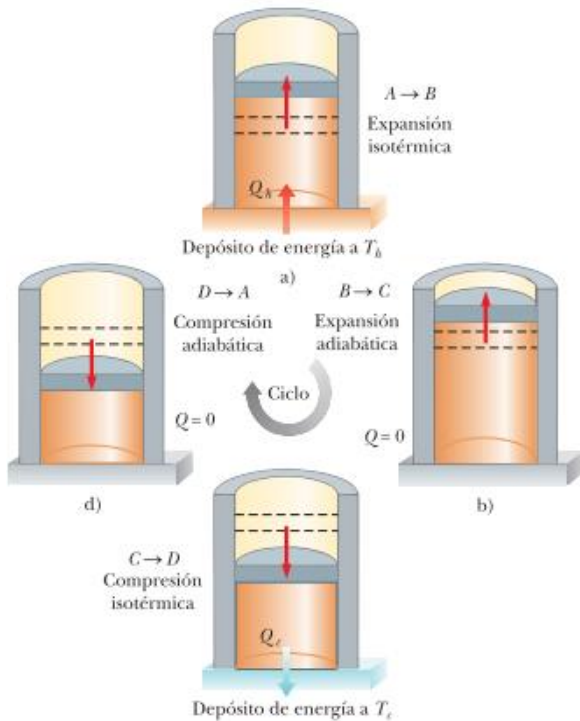
$$Q_C + W_{12} + W_{23} + Q_F + W_{34} + W_{41} = 0$$

$$W_{23} = -W_{41}$$

Carnot estableció: “ninguna máquina térmica que funcione entre dos depósitos de energía puede ser más eficiente que una Máquina de Carnot que funcione entre los mismos dos depósitos”.

Una máquina térmica es un dispositivo que toma energía por calor y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo.

Para describir el ciclo de Carnot que tiene lugar entre las temperaturas T_c y T_h , suponga que la sustancia de trabajo es un gas ideal contenido en un cilindro adaptado con un pistón móvil en un extremo. Las paredes del cilindro y el pistón son térmicamente no conductoras.



- **En el proceso A→B** Durante la expansión, el gas absorbe energía Q_c del depósito a través de la base del cilindro y realiza trabajo $W_{A \rightarrow B}$ para elevar el pistón. La temperatura se mantiene constante

La energía interna es: $\Delta u_{A \rightarrow B} = Q_c + W_{A \rightarrow B}$

- **En el proceso B→C** La base del cilindro se sustituye por una pared térmicamente no conductora y el gas se expande adiabáticamente. Durante la expansión, la temperatura del gas disminuye de T_c a T_f y el gas realiza trabajo $W_{B \rightarrow C}$ para elevar el pistón.

La energía interna es: $\Delta u_{B \rightarrow C} = W_{B \rightarrow C}$

- **En el proceso C→D** El gas se coloca en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_f y se comprime isotérmicamente a temperatura constante. El gas expulsa energía Q_f al depósito y el trabajo que el pistón realiza sobre el gas es $W_{C \rightarrow D}$

La energía interna es: $\Delta u_{C \rightarrow D} = Q_f - W_{C \rightarrow D}$

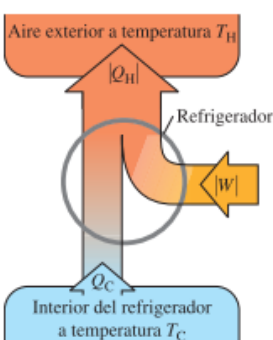
- **En el proceso D→A** La base del cilindro se sustituye por una pared no conductora y el gas se comprime adiabáticamente. La temperatura del gas aumenta de T_f a T_c y el trabajo que el pistón realiza sobre el gas es $W_{D \rightarrow A}$.

La energía interna es: $\Delta u_{D \rightarrow A} = -W_{D \rightarrow A}$

El rendimiento de una motor térmico se define como la relación del trabajo neto invertido por el motor durante un ciclo, a la entrada de energía a la mayor temperatura durante el ciclo:

$$e = \frac{|W_{\text{máq}}|}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} < 1$$

Desde un punto de vista económico, el mejor ciclo de refrigeración es el que saca el máximo de calor frío Q_f del refrigerador con el menor gasto de trabajo mecánico W ; Por tanto, la razón relevante es Q_f/W ; cuanto mayor sea dicha razón, mejor será el refrigerador. Llamamos a esta razón **coeficiente de rendimiento (K)**.



Tomando Q_c como Q_f y Q_H como Q_c

Como muestra el diagrama, el calor Q_c que sale de la sustancia de trabajo y se cede a la fuente caliente siempre es mayor que el calor frío Q_f tomado de la fuente fría. Observando la relación se puede definir a Q_c como:

$$Q_c = Q_f + W \quad \therefore W = Q_c - Q_f$$

Entonces siendo:

$$K = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{Q_c - Q_f} = \frac{Q_f}{Q_c} - 1$$

La **Entropía** es una medida cuantitativa del desorden de un sistema, involucra la transferencia de energía por calor durante un proceso reversible.

Considere cualquier proceso infinitesimal en el que un sistema cambia de un estado de equilibrio a otro. Si dQ_r es la cantidad de energía transferida por calor cuando el sistema sigue una trayectoria reversible entre los estados, el cambio en entropía dS es igual a esta cantidad de energía para el proceso reversible dividida entre la temperatura absoluta del sistema:

$$dS = \frac{dQ_r}{T}$$

Donde se considera que la temperatura es constante porque el proceso es infinitesimal

El cambio en entropía durante un proceso sólo depende de los puntos extremos, por lo que es independiente de la trayectoria real seguida. Entonces, para calcular el cambio en entropía para un proceso finito, primero reconozca que T , por lo general, no es constante.

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T}$$

- Cuando el sistema absorbe energía, dQ_r es positiva y la entropía del sistema aumenta.
- Cuando el sistema expulsa energía, dQ_r es negativa y la entropía del sistema disminuye

Ahora considerando un sistema que consiste en un depósito caliente y un depósito frío en contacto térmico y aislados térmicamente. Durante un proceso la energía Q se transfiere por calor del depósito caliente a temperatura T_c al depósito frío a temperatura T_f . Entonces su entropía será:

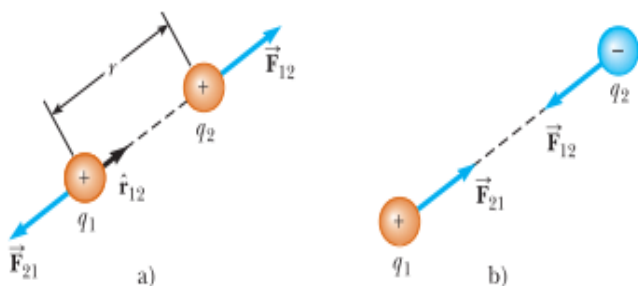
$$\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f} > 0$$

Debido a que $T_c > T_f$ la entropía del sistema es mayor a cero.

ELECTROMAGNETISMO: El electromagnetismo es una rama de la física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría.

UNIDAD N°3: Electroestática y campos eléctricos:

La **carga eléctrica** es una propiedad intrínseca que presentan algunas partículas subatómicas, la cual se manifiesta a través de atracciones y repulsiones, que determinan las interacciones electromagnéticas entre ellas, siendo positivas o negativas en sus cargas. Cualquier material tiene cargas y dichas cargas generan un campo electromagnético cuando están en movimiento.



Las cargas se transfieren por contacto o frotamiento y estas pueden ser positivas y negativas. Si dos cargas son de igual signo se repelen, si son de diferente signo se atraerán.

La unidad de la carga se denomina **Columbio [C]** y se define como la cantidad de carga que pasa por una sección transversal de un determinado conductor durante el lapso de un segundo y con una corriente eléctrica de un **Amperio [A]**

Ley de Coulomb

“La fuerza electrostática entre dos cargas puntuales es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y posee la dirección que las une”.

$$|\vec{F}| = k \cdot \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Donde la constante k recibe el nombre de constante de coulomb y compatibiliza con:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{m^2 \cdot N}{C^2}$$

r es la distancia entre las cargas

\vec{F} es la fuerza de atracción entre las cargas

ϵ_0 es la permitividad en el vacío:

$$8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2 \cdot m^2}{N}$$

El **Campo Eléctrico** es la región del espacio que rodea la carga eléctrica y donde otra carga eléctrica puntual puede sufrir los efectos de la fuerza eléctrica. Se define al campo eléctrico \vec{E} asociado con un cierto conjunto de cargas en términos de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba positiva q_0 en un punto particular:

$$\vec{E} = \frac{|\vec{F}_e|}{q_0}$$

Donde las unidades de \vec{E} son $\frac{[N]}{[C]}$ o $\frac{[Volt]}{[metro]}$

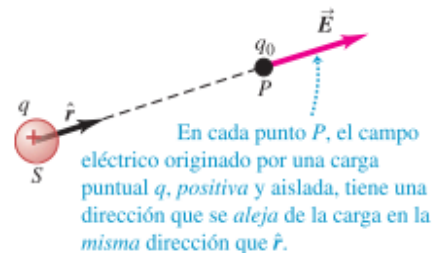
Si la fuente de distribución es una carga puntual q , será fácil encontrar el campo eléctrico que produce. A la ubicación de la carga la llamamos el punto de origen; y al punto P donde se determina el campo, el punto del campo. También es útil introducir un vector unitario \hat{r} que apunte a lo largo de la línea que va del punto de origen al punto del campo

Por definición el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{|\vec{F}_e|}{q_0}$$

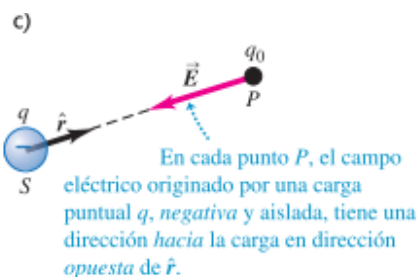
Y por la ley de Coulomb sabemos que la fuerza \vec{F}_e es:

$$\vec{F}_e = k \cdot \frac{|q \cdot q_0|}{r^2}$$



De este modo, el campo eléctrico para una carga puntual queda definido como:

$$\vec{E} = \frac{k \cdot \frac{|q \cdot q_0|}{r^2}}{q_0} \cdot \hat{r} \Rightarrow \vec{E} = k \cdot \frac{|q|}{r^2} \cdot \hat{r}$$



En cualquier punto P, el campo eléctrico total debido a un grupo de cargas fuente es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas. Este **principio de superposición** aplicado a los campos se deduce de la suma vectorial de las fuerzas eléctricas. Por lo tanto, el campo eléctrico en el punto P debido a un grupo de cargas fuente se expresa como la suma vectorial:

$$\vec{E} = k_e \sum \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \hat{r}$$

donde r_i es la distancia desde la i-ésima carga fuente q_i hasta el punto P y \hat{r} es un vector unitario dirigido de q_i hacia P.

Un **Dipolo Eléctrico** es un par de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos (una carga positiva q y una carga negativa $-q$) separadas por una distancia d .

Las fuerzas F_+ y F_- en las dos cargas tienen una magnitud de qE , pero sus direcciones son opuestas y su suma es igual a cero. La fuerza neta sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme es cero.

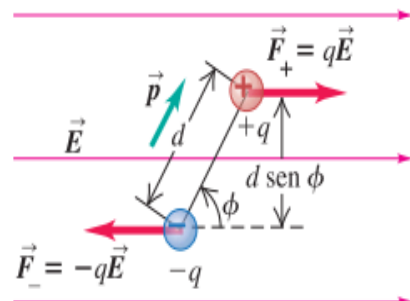
Sin embargo, las dos fuerzas no actúan a lo largo de la misma línea, por lo que sus pares de torsión, no suman cero. Los pares se calculan con respecto al centro del dipolo, donde ϕ es el Angulo entre el campo eléctrico E y el eje del dipolo. Y su brazo de palanca es igual a $d/2 \cdot \sin \phi$, por lo tanto el momento de torsión neto es:

$$\tau = 2 \cdot (qE) \cdot \left(\frac{d}{2} \cdot \sin \phi \right) \Rightarrow \tau = (qE) \cdot (d \cdot \sin \phi)$$

donde $d \cdot \sin \theta$ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas.

El producto de la carga q y la separación d es la magnitud de una cantidad llamada **momento dipolar eléctrico**, que se denota con p : $p = q \cdot d$ y de acuerdo a p , la magnitud τ del par de torsión ejercido por el campo se convierte en:

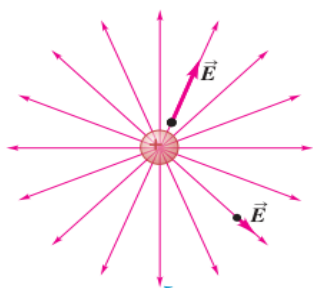
$$\tau = p \cdot E \cdot \sin \phi$$



Líneas de Campo: Líneas imaginarias para visualizar la dirección del campo al pasar de un punto a otro del espacio. Estas son:

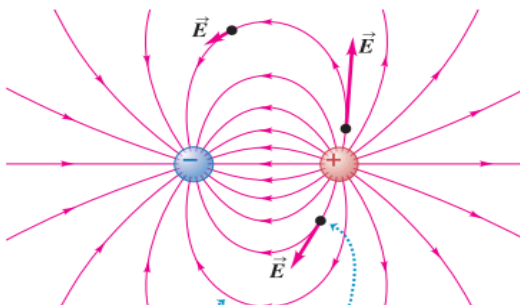
- Tangente al campo eléctrico
- Tiene configuración radial, es la de la carga puntual aislada.
- Tiene simetría esférica
- Tiene la dirección del campo eléctrico

a) Una sola carga positiva



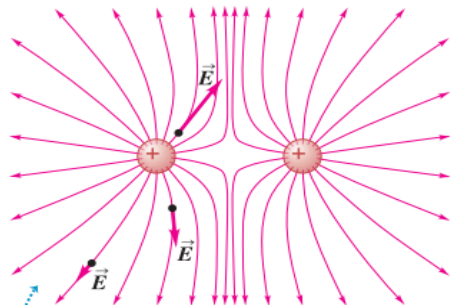
Las líneas de campo siempre apuntan *alejándose* de las cargas (+) y *hacia* las cargas (-).

b) Dos cargas iguales y opuestas (un dipolo)



En cada punto en el espacio, el vector de campo eléctrico es *tangente* a la línea de campo que pasa a través de ese punto.

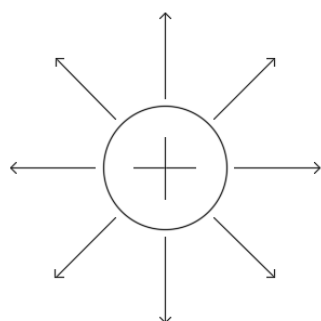
c) Dos cargas positivas iguales



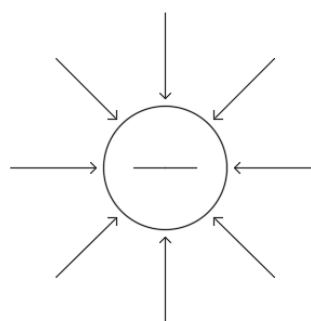
Las líneas de campo están muy cercanas donde el campo es intenso, y más alejadas donde el campo es más débil.

Propiedades:

- La dirección de la línea es igual a la carga del campo eléctrico E. es la de la fuerza sobre una carga positiva colocada en el campo de acuerdo con la partícula en un modelo de campo
- El número de líneas es proporcional al campo eléctrico
- Líneas cercanas donde el campo sea intenso y alejadas donde sea débil.



Cargas **positivas** salientes



Cargas **negativas** entrantes

ELECTROSTÁTICA

Flujo de campo eléctrico: Suma de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie Gaussiana (Superficie hipotética, Geométrica y cerrada de área S), cuya unidades son: $N \cdot m^2 / C$

$$d\phi_E = E \cdot dS$$

$$d\phi_E = E \cdot dS \cdot \cos(\alpha)$$

1. Si la superficie es perpendicular al campo

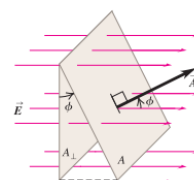
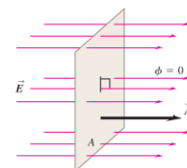
$$\alpha = 0 \Rightarrow \cos(0) = 1$$

$$d\phi_E = E \cdot dS \cdot \cos(0) = E \cdot dS$$

2. En caso de que la superficie no sea perpendicular al campo eléctrico:

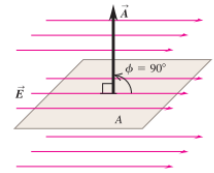
$$d\phi_E = E \cdot dS \cdot \cos(\alpha)$$

3. Cuando la superficie es paralela al campo eléctrico



$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos(90^\circ) = 0$$

$$d\phi_E = E \cdot dS \cdot \cos(90^\circ) = 0$$



4. Flujo de un campo eléctrico no uniforme de superficie abierta:

$$\phi_E = \iint_S E \cdot ds$$

5. Flujo eléctrico para un campo no uniforme sobre una superficie cerrada (principio de superposición):

$$\phi_E = \phi_{E_1} + \phi_{E_2} + \dots + \phi_{E_n}$$

Ley de Gauss

La ley de Gauss relaciona el flujo total ϕ_E a través de una superficie cerrada imaginaria (conocida como superficie Gaussiana, la cual puede o no encerrar cargas) con la carga neta q_N encerrada en la superficie:

$$\phi_E = \iint_S E \cdot ds = \frac{q_N}{\epsilon_0}$$

La ley de Gauss predice que el flujo ϕ_E es cero cuando la superficie cerrada (superficie Gaussiana) considerada no encierra ninguna carga

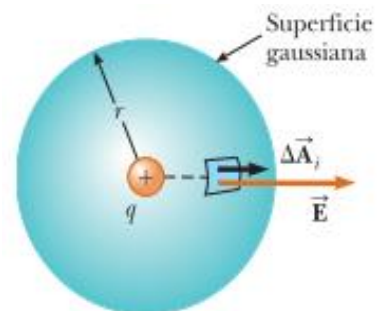
$$\frac{q_N}{\epsilon_0} = 0$$

La superficie Gaussiana es una superficie cerrada a través de la cual se calcula el flujo de un campo vectorial.

Considerando una esfera como superficie Gaussiana de radio r , la cual encierra una carga puntual q en el centro:

El campo eléctrico en todos los puntos de la superficie es $E = k \cdot \frac{q}{r^2}$

Las líneas de campo están distribuidas radialmente hacia afuera y por lo tanto son perpendiculares a la superficie, de esta forma:



$$\phi_E = \oint E \cdot dS \Rightarrow \phi_E = E \oint dS$$

$$\phi_E = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} = E \oint dS$$

El campo eléctrico E es constante.

$$\oint dS = 4\pi r^2$$

Superficie de una esfera: $4\pi r^2$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss

- Plano (o placa) Infinito Cargado Uniformemente:

Consideramos una superficie Gaussiana de forma cilíndrica, cuyo eje longitudinal es perpendicular al plano o placa. De esta forma el campo eléctrico E atraviesa solamente las tapas de dicho cilindro.

Por definición el flujo del campo eléctrico es:

$$\phi_E = \oint E \cdot dS$$

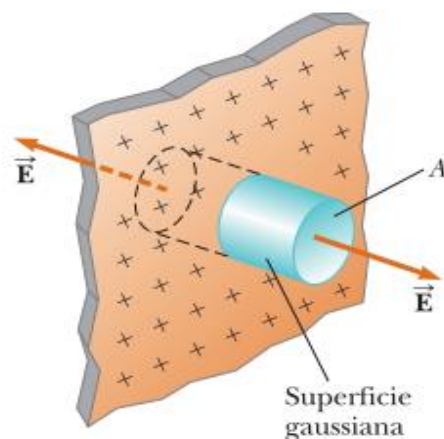
Pero tenemos que calcular el flujo eléctrico que atraviesan las superficies A_1 y A_2 . Por lo tanto:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot dA_1 + \oint \vec{E} \cdot dA_2 = 2\vec{E} \oint dA = \frac{q_N}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q_N}{A} \cdot \frac{1}{2\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Donde: $\frac{q_N}{A} = \sigma$ se conoce como densidad de carga de área.



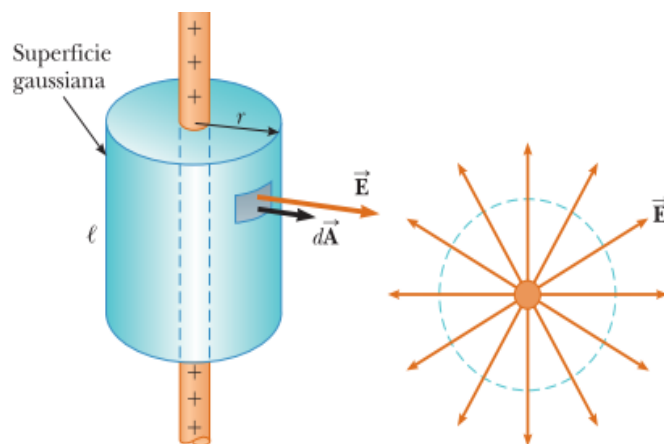
- Línea Infinita de Carga o Hilo Conductor Infinito:

Si el hilo es infinito, las líneas de fuerza fuera del mismo son de simetría radial.

Consideramos la superficie Gaussiana de forma Cilíndrica, cuyo eje longitudinal es paralelo al hilo conductor, por lo cual el flujo atraviesa la superficie Gaussiana excluyendo las tapas del cilindro:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot dA = \frac{q_N}{\epsilon_0} = \vec{E} \oint dA$$

$$\vec{E} \cdot A = \frac{q_N}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$$



Donde el área del cilindro es: $A = 2\pi r \cdot L$

Densidad de carga lineal: $\lambda = \frac{q_N}{L}$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \Rightarrow \text{Divido y multiplico por 2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\lambda}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

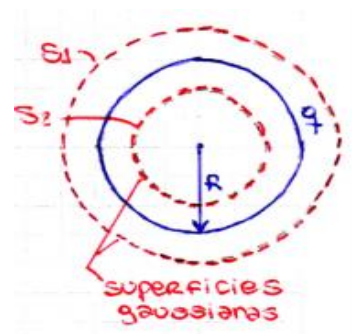
- Esfera Conductora con Carga en la Superficie:

Conociéramos dos superficies gaussianas de la forma de dos esferas, cada una con radios r_1 y r_2 respectivamente.

Primer caso: $r_1 < R$

Como la superficie Gaussiana considerada no encierra ninguna carga neta q_N tenemos que:

$$\vec{E} = 0$$



Segundo Caso: $r_2 > R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_N}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} \cdot A = \frac{q_N}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_N}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_N}{r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = k \cdot \frac{q_N}{r^2}}$$

$$\text{Área: } A = 4\pi r^2$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

El campo eléctrico varía en función del radio r_2

UNIDAD N°4: Potencial Eléctrico

El **Potencial Eléctrico** se define como la energía potencial por unidad de carga de prueba.

Suponiendo la presencia de un conjunto de cargas y que se desea determinar el potencia eléctrico en un punto p en particular. Se sitúa una carga de prueba q_0 positiva a una distancia infinita del conjunto de cargas, donde el campo eléctrico sea nulo. Luego se desplaza la carga de prueba q_0 desde esa separación infinita hasta p (se le invierte trabajo) y en el proceso la energía potencial cambia de cero a U_p .

$$W = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{F}_{ext} = -q_0 \cdot \vec{E} \Rightarrow W = - \int q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

El potencial eléctrico V en el punto p debido al conjunto de cargas se define como:

$$\boxed{V_p = \frac{U_p}{q_0}}$$

Sabiendo que $\Delta U_{\infty \rightarrow p} = -W_{\infty \rightarrow p}$

Unidad del potencial eléctrico: $\frac{[J]}{[C]} = [V](Volt)$

De este modo:

$$\boxed{V_p = \frac{U_p}{q_0} = - \frac{W_{a \rightarrow p}}{q_0}}$$

Se supone que la carga q_0 es muy pequeña. De modo que no tiene efecto significativo sobre el conjunto de cargas cuyo potencial se quiere medir.

Si el potencial eléctrico V fuera positivo, esto significa que la carga de prueba q_0 es positiva y que el trabajo necesario para mover la carga es de repulsión, es negativo. Si la carga es negativa, el trabajo es positivo (atracción) y el potencial negativo. Un potencia nulo significa que el campo eléctrico no realiza ningún trabajo neto para mover la carga.

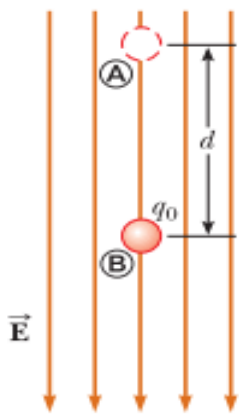
Diferencia de potencial: Se define como el cambio en energía potencial al mover una carga de prueba q_0 entre dos puntos (A y B) en un campo eléctrico:

$$\boxed{\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q_0} = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}$$

La diferencia de potencia ΔV se genera por cargas que se mantienen en reposo, de modo que el movimiento de la carga q_0 no cambia la diferencia de potencial ΔV . El campo eléctrico es conservativo, por lo tanto, la diferencia de potencial entre los puntos A y B dependen de las ubicaciones de dichos puntos y no de la trayectoria seguida.

El trabajo consumido por un agente externo al desplazar una carga q a través de un campo eléctrico con una velocidad constante es: $\boxed{W = q \cdot \Delta V}$

Potencial Eléctrico en un Punto:



Dado el campo eléctrico \vec{E} se puede calcular el potencial eléctrico V , teniendo en cuenta los puntos A y B , separados por una distancia d .

Supongamos que la carga de prueba q_0 se mueve de A hasta B a lo largo de una línea recta que une dichos puntos.

La fuerza eléctrica sobre la carga de prueba es igual a $\vec{F}_{ext} = q_0 \vec{E}$ y apunta en la misma dirección que el campo eléctrico. Cuando la carga de prueba se mueve de A hasta B en dirección ds , el trabajo realizado por el campo eléctrico es dado por:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-q_0 \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -q_0 \vec{E} \cdot d$$

De este modo:

$$\Delta V = -\frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0} = -\frac{(-q_0 \vec{E} \cdot d)}{q_0} \Rightarrow \Delta V = \vec{E} \cdot d$$

En el caso que el campo eléctrico E no sea uniforme y que la carga de prueba q_0 se mueve a lo largo de una trayectoria no recta, la diferencia de potencia queda definida por :

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Podemos considerar entonces, el potencial en un punto arbitrario p :

$$V_p = - \int_{\infty}^p \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

De este modo podemos calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, sin importar su dirección o el campo eléctrico donde se encuentren

Si se desea calcular el potencial en cualquier punto, en lugar de la diferencia de potencial entre dos puntos, entonces elegimos que A sea infinito, por lo tanto el potencial de A es nulo ($V_A = 0$). También teniendo en cuenta que el producto punto entre el vector unitario \hat{r} y el desplazamiento infinitesimal es igual a $\hat{r} \cdot d\vec{s} = ds \cdot \cos\theta$, además $ds \cdot \cos\theta$ es la proyección de ds sobre \hat{r} ; debido a eso $ds \cdot \cos\theta = dr$ por lo tanto:

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{k \cdot q}{r^2} \cdot dr = V_B - V_A = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \Rightarrow V_B = \frac{k \cdot q}{r_B}$$

$$\vec{E} = \frac{k \cdot q}{r^2}$$

Generalizando:

$$V = \frac{k \cdot q}{r}$$

El Potencial Total V_T , debido a varias cargas puntuales esféricas en un punto p es simplemente la suma de los potenciales debido a cada carga (principio de superposición)

$$V_T = \sum_{i=1}^{i=n} V_i = k \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{r_i}$$

Calculo Del Campo Eléctrico A Partir Del Potencial:

Como ya sabemos: $\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$; entonces:

$$\int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{s}}$$

En general, el potencial eléctrico es una función de las tres coordenadas espaciales. Si V se da en coordenadas cartesianas, las componentes E_x , E_y y E_z del campo eléctrico pueden ser determinadas fácilmente a partir de $V(x, y, z)$ como derivadas parciales:

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad \vec{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad \vec{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En notación vectorial, a menudo \vec{E} se escribe en los sistemas de coordenadas cartesianas de la forma:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \hat{k}\right)$$

Donde ∇V es el gradiente del potencial eléctrico.

1. **Potencial de un plano infinito con distribución de carga uniforme σ :**

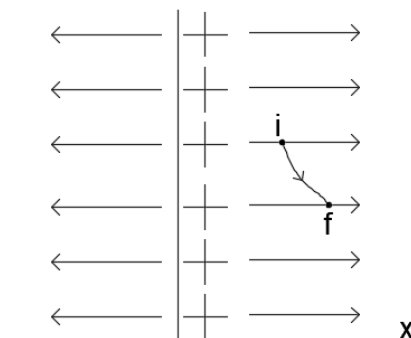
$\Delta V = 0 \Rightarrow$ Las superficies equipotenciales son paralelas al plano. Si me alejo del plano, disminuye la potencia

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$\Delta V = \int_{x_i}^{x_f} \vec{E} \cdot d\ell \Rightarrow \Delta V = - \int_{x_i}^{x_f} \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot dx$$

$$\Delta V = - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_f} \Rightarrow \Delta V = - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot (x_f - x_i)$$

Donde el potencial decrece linealmente.



2. **Potencial de alambre rectilíneo con distribución de carga uniforme:**

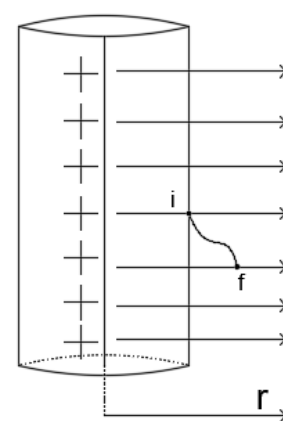
La superficie equipotencial es perpendicular a la línea recta de campo.

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Delta V = - \int_{r_i}^{r_f} \vec{E} \cdot d\ell = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot dr$$

$$\Delta V = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_f}{r_i}\right)$$

En el infinito el potencial es cero. Decrece logarítmicamente

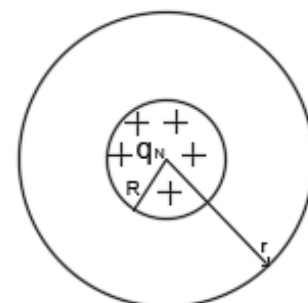


3. **Potencial de una distribución de carga con simetría esférica:**

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q_N}{r^2}$$

$$V = k \cdot \frac{q_N}{r}$$

Actúa como una carga puntual. El potencial decrece a partir de R



UNIDAD Nº 5: Propiedades Eléctricas de la Materia y Capacidad Eléctrica:

Materiales:

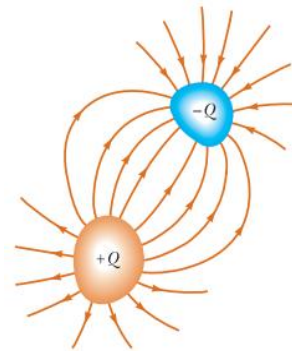
- **Conductores:** Metales. En la última capa electrónica poseen electrones de valencia ligados a los átomos con poca energía, si se le aplica un fenómeno electrostático se desprenden y viajan en el espacio de un campo eléctrico con una carga libre.
- **Aisladores:** No Metales. No provocan desplazamiento de cargas porque no poseen electrones de valencia.

Principio de desplazamiento de cargas: se pasan electrones de valencia en sentido contrario al campo eléctrico hasta llegar al equilibrio.

La **permitividad** (llamada también *constante dieléctrica*) es una constante física que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio. La permitividad del vacío es $\epsilon_0 = 8.8541878176 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$.

La permitividad está determinada por la tendencia de un material a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico y de esa forma anular parcialmente el campo interno del material.

Un **Capacitor** es un dispositivo que almacena energía en un campo electrostático. Es una combinación de dos conductores, llamados *placas*. Si los conductores llevan carga de igual magnitud y signo opuesto, se dice que está cargado y existe una diferencia de potencial ΔV entre ellos. Podemos cargar un capacitor conectando las dos placas a una batería.



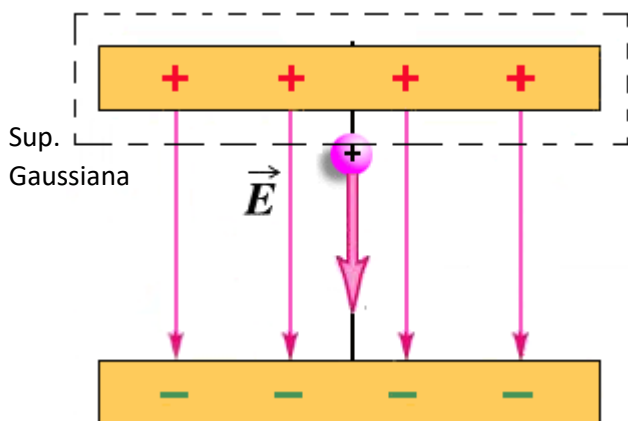
Existe una proporcionalidad directa entre la magnitud de la carga q y su potencial eléctrico v :

$$q = C \cdot V$$

Donde C es la constante de proporcionalidad llamada **Capacitancia**.

Calculo de Capacitancias: Como los capacitores pueden tener un gran número de geometrías diferentes, desarrollamos un procedimiento general para el cálculo de la capacitancia:

1. Suponemos una carga q entre las placas.
2. Calculamos el campo eléctrico entre las placas en términos de carga utilizando la ley de Gauss:



El campo eléctrico se relaciona con la carga en las placas según la ley de Gauss:

$$\epsilon_0 \oint E \cdot dA = q$$

Consideramos cuando el flujo pasa a través de la superficie Gaussiana, el campo eléctrico E es constante. De este modo la ecuación anterior la expresamos como:

$$\epsilon_0 \cdot E \cdot A = q$$

Donde A es el área de la Sup. Gaussiana a través de la cual pasa el flujo considerado.

3. Cálculo de la diferencia de potencial:

La diferencia de potencial entre las placas se relaciona con el campo eléctrico mediante la ecuación:

$$\Delta V = - \int_i^f E \cdot ds$$

Debido a que los vectores de \vec{E} y $d\vec{s}$ poseen una misma dirección:

$$V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Los signos + y - son porque la trayectoria de integración comienza en la placa positiva y termina en la negativa

Como E es proporcional a q , puesto que V es proporcional a q , la razón q/V es una constante C , llamada **Capacitancia**:

$$C = \frac{q}{V}$$

Tipos de Capacitores:

- Capacitor Plano:** Suponemos que las placas del capacitor se encuentran tan próximas entre sí que podemos despreciar la distorsión de las líneas del campo eléctrico en los bordes de las placas. De esta forma, consideramos que el campo eléctrico es constante. Trazamos una superficie Gaussiana que incluya a la carga q_+ en la placa positiva. El campo eléctrico se puede calcular:

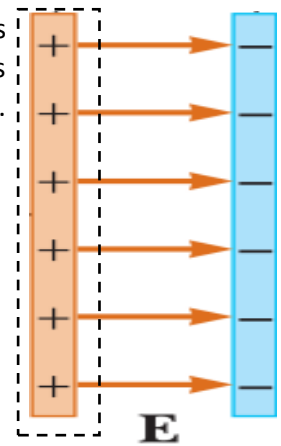
$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad A \text{ es el área de las placas}$$

De este modo:

$$V = \int_+^- E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0 A} \cdot ds \Big|_0^d \Rightarrow V = \frac{qd}{\epsilon_0 A}$$

Recordando que: $C = q/V$

$$C = \frac{q}{\frac{qd}{\epsilon_0 A}} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$



Capacitancia para un capacitor plano.

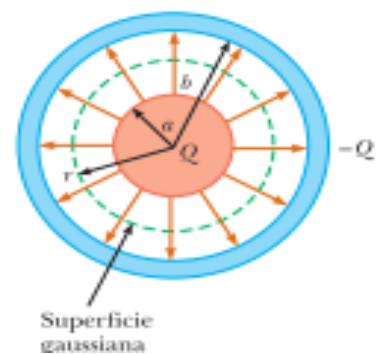
- Capacitor Cilíndrico:** Es la sección transversal de un capacitor cilíndrico de longitud l , formado por dos cilindros coaxiales de radios A y B . Suponemos un cilindro de longitud l y radio r como superficie Gaussiana, cerrado en los extremos por dos tapas. De este modo:

Donde el área del cilindro es $A = 2\pi r^2 \cdot l$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} \Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi r \cdot l}$$

$$V = \int_+^- E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



Capacitancia para un capacitor cilíndrico.

- Capacitor Esférico:** El mismo consta de dos cascarones esféricos concéntricos de radios A y B . Como superficie Gaussiana, trazamos una esfera de radio r . De este modo:

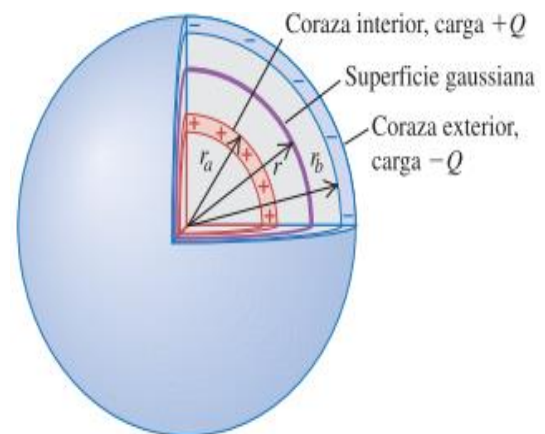
$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} \Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$

Campo eléctrico debido a una distribución esférica uniforme de carga

$$V = \int_+^- E \cdot ds = kq \int_a^b \frac{dr}{r^2} = kq \cdot \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] \Rightarrow V = kq \cdot \frac{ba}{b-a}$$

$$C = \frac{q}{V} = C = \frac{q}{kq \cdot \frac{ba}{b-a}} \Rightarrow C = \frac{ab}{k(b-a)} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a}$$



Capacitancia para un capacitor esférico.

Energía en un Capacitor:

Un capacitor cargado tiene almacenado una energía potencia eléctrica U igual al trabajo W que se requiere para cargar el capacitor. Esta energía se recupera si se permite que el capacitor se descargue.

Supongamos que en un tiempo t se transfiere una carga q' de una placa a la otra, la diferencia de potencial V' entre las placas en ese momento es $V' = q'/C$. Si ahora se transfiere un incremento de carga dq' , el pequeño cambio de energía potencial eléctrica dU es:

$$dU = V' \cdot dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Si este proceso continua hasta que se haya transferido una carga q , la energía potencial total es:

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

Se define a la **densidad de energía u_E** como a la energía potencia eléctrica U alamsenada por unidad de volumen ($A \cdot d$) y deberá ser constante entre las placas del capacitor:

$$u_e = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CV^2}{Ad}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot \frac{V^2}{ad}$$

Obtenemos que:

$$u_E = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2$$

Donde: $E = \frac{V}{d}$

$u_E = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$

Energía almacenada por
unidad de volumen

Capacitores en Paralelo: Existen tres propiedades que los caracterizan:

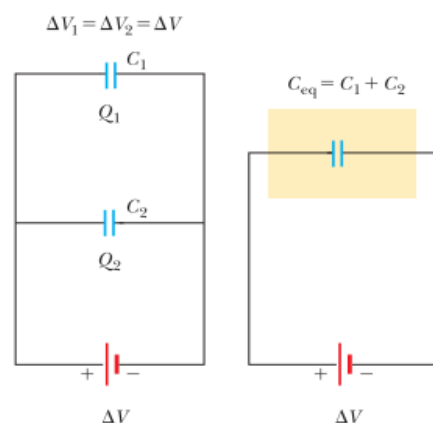
1. Al viajar la carga puede tomar cualquier trayectoria.
2. Las diferencias de potencial individuales a través de capacitores conectados en paralelo son las mismas e iguales a la diferencia de potencial aplicada a través de la combinación:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

Donde ΔV es el voltaje de terminal de la batería.

3. La carga total en capacitores conectados en paralelo es la suma de las cargas en los capacitores individuales:

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2$$



Suponga que quiere sustituir estos dos capacitores por un **capacitor equivalente** que tenga una capacitancia C_{eq} . El efecto que este capacitor equivalente tiene sobre el circuito debe ser exactamente el mismo que el efecto de la combinación de los dos capacitores individuales. Es decir, el capacitor equivalente debe almacenar carga Q_{tot} cuando se conecte a la batería. El voltaje a través del capacitor equivalente es ΔV porque el capacitor equivalente se conecta directamente a través de las terminales de la batería. De este modo:

$$Q_{tot} = C_{eq} \cdot \Delta V$$

De este modo para las cargas de cada capacitor podemos deducir que:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V \quad \wedge \quad Q_2 = C_2 \cdot \Delta V$$

Entonces:

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2$$

$$C_{eq}\Delta V = C_1\Delta V + C_2\Delta V$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^m C_i$$

Capacitancia equivalente en paralelo

En consecuencia, la capacitancia equivalente de una combinación de capacitores en paralelo es la suma algebraica de las capacitancias individuales y además, debe ser mayor que cualquiera de las capacitancias individuales.

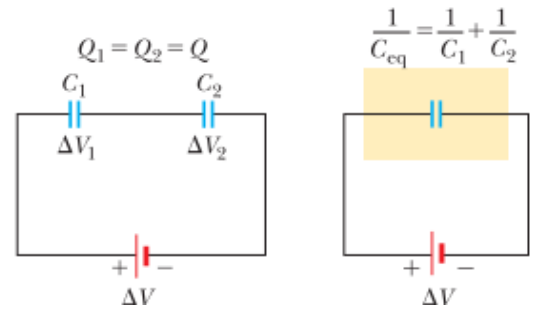
Capacitores en Serie: También existen tres propiedades que distinguen a las conexiones en serie:

1. La corriente deberá pasar por todos los capacitores del circuito.
2. Las cargas de los capacitores conectados en serie son iguales:

$$Q = Q_1 = Q_2$$

3. La diferencia de potencial total aplicada a cualquier cantidad de capacitores conectados en serie es la suma de las diferencias de potencial presentes entre cada uno de los capacitores individuales:

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$



Al aplicar la definición de capacitancia al circuito:

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow \Delta V_{tot} = \frac{q}{C_{eq}}$$

Entonces:

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad \wedge \quad V_2 = \frac{q}{C_2}$$

De este modo la capacitancia equivalente para un capacitor en paralelo queda definida por:

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Capacitancia equivalente en serie.

Esto demuestra que el inverso de la capacitancia equivalente es igual a la suma algebraica de los inversos de las capacitancias individuales y que la capacitancia equivalente de una combinación en serie siempre es menor que cualquiera de las capacitancias individuales incluidas en la combinación.

Capacitores con material Dieléctrico: Un dieléctrico es un material no conductor (hule, vidrio, papel encerado, etc.).

La presencia del material dieléctrico entre las placas de un capacitor altera la capacitancia del mismo y posiblemente el campo eléctrico entre las placas.

Consideremos un capacitor de placas paralelas que, sin dieléctrico, Posee una capacitancia inicial $C_0 = q/V_0$, luego a este capacitor se le agrega en medio de sus placas un material dieléctrico, el cual altera la capacitancia de forma que ahora $C = q/V$. La carga q es la misma en ambos casos y V es menor que V_0 , donde la capacitancia C con el dieléctrico presente es mayor que C_0 . Cuando el espacio entre las placas está lleno por completo por el dieléctrico, la razón de C a C_0 (igual que la de V_0 a V) se denomina **Constante Dieléctrica** del material $K\epsilon$:

$$K_e = \frac{C}{C_0}$$

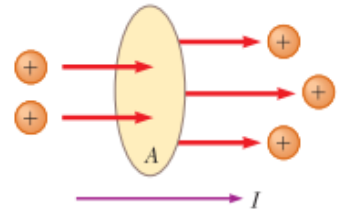
K_e es un factor adimensional por el cual crece la capacitancia en relación con su valor C_0 cuando no hay dieléctrico presente. Es una propiedad fundamental del material dieléctrico y es independiente del tamaño o forma de este.

ELECTRODINAMICA

UNIDAD N° 6: Corriente Eléctrica

Si a través de cualquier superficie pasa una carga neta dq en un intervalo dt , se dice que se ha establecido una **Corriente Eléctrica I**

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{[C]}{[s]} = [A] \text{ Ampere}$$



La carga neta que pasa a través de cualquier superficie en un intervalo de tiempo se calcula:

$$q = \int I \cdot dt$$

Si la corriente es constante en el tiempo, entonces la carga q que fluye en el tiempo t determina la corriente

$$I = \frac{q}{t}$$

Por simplicidad y consistencia algebraica, adoptamos como convención: “La dirección de la corriente es la dirección en que se moverían las cargas positivas”. Si los portadores de carga fueran negativos, simplemente se mueven en la dirección contraria a la dirección de la corriente.

Densidad de Corriente Eléctrica: La densidad de corriente (J) en el conductor se define como la corriente por unidad de área:

$$\vec{J} = \frac{I}{A}$$

La densidad de corriente (\vec{J}) en un conductor depende del campo eléctrico (\vec{E}) y de las propiedades del material. De acuerdo con el material, a determinada temperatura, la densidad de corriente es casi directamente proporcional al campo eléctrico.

$$J = \sigma E$$

Ley de Ohm Vectorial

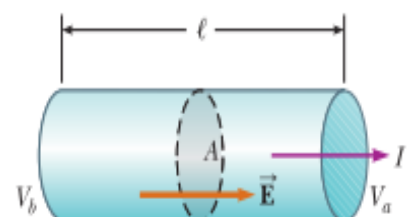
donde la constante σ se conoce como **conductividad** del conductor. Los materiales que obedecen esta ecuación, siguen la **Ley de Ohm**, que afirma:

“En muchos materiales (inclusive la mayor parte de los metales) la relación de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante σ que es independiente del campo eléctrico que produce la corriente”.

Los materiales que obedecen la ley de Ohm y por tanto cumplen esta simple correspondencia entre E y J , se conocen como *materiales óhmicos*. La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, sino más bien una relación empírica válida únicamente para ciertos materiales.

Si consideramos un segmento de alambre recto de área de sección transversal uniforme A y de longitud l . De un extremo a otro se mantiene una diferencia de potencial $\Delta V = V_b - V_a$, lo que genera en el alambre un campo eléctrico y una corriente. Si supone que el campo es uniforme, la diferencia de potencial está relacionada con el campo mediante la relación:

$$\Delta V = El$$



Por lo tanto, la densidad de corriente en el alambre se expresa en la forma:

$$J = \frac{I}{A} = \sigma E \Rightarrow J = \sigma \frac{\Delta V}{l}$$

Ya que $J = I/A$, la diferencia de potencial a través del alambre es:

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma} J = \left(\frac{l}{\sigma A} \right) \cdot I$$

Donde la cantidad $l/\sigma A$ se conoce como **Resistencia** del conductor que es definida como la relación de la diferencia de potencial aplicada a un conductor entre la corriente que pasa por el mismo:

$$\text{Ley de Ohm Escalar: } V = R \cdot I$$

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

Las unidades de una resistencia son:

$$[\Omega] = \frac{[V]}{[A]}$$

La mayoría de los circuitos eléctricos usan elementos llamados **Resistores** para controlar la corriente en las diferentes partes del circuito.

El recíproco de la conductividad es la resistividad ρ

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Donde ρ está en ohms-metros (Ωm). Ya que $R = l/\sigma A$, es posible expresar la resistencia a lo largo de la longitud l de un bloque uniforme de material de la forma:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Potencia Eléctrica

Este circuito es una batería conectada a una caja negra. Existe una corriente estable en los alambres de conexión y una diferencia de potencial constante entre las terminales a y b . La energía potencial de una carga dq que se mueve a través de la caja de a a b disminuye en dqV_{ab} en función del tiempo dt que tarda al pasar por el resistor, de modo que:

$$dU = dqV_{ab} = I \cdot dt \cdot V_{ab}$$

En donde:

$$I = \frac{q}{t} \wedge dU = V \cdot dq \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = I \cdot \Delta V$$

Si el dispositivo de la caja es un resistor, podemos entonces obtener las siguientes relaciones:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \mathcal{P} = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Estas ecuaciones se conocen como **Ley de Joule**, esta ley es una forma particular de escribir el principio de conservación de la energía para el caso especial en que se transfiera energía interna en un resistor.

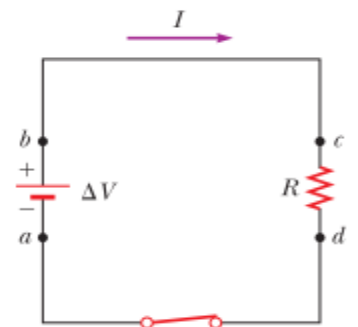
La unidad de potencia es:

$$\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{[J]}{[s]} = [W] \text{ Watt}$$

UNIDAD N° 7: Circuito Eléctrico

Ya que en un circuito particular la diferencia de potencial en las terminales de la batería es constante, la corriente en el circuito es constante en magnitud y dirección y recibe el nombre de **Corriente Directa**.

A la batería se le conoce como *fuerza de fuerza electromotriz*, o más comúnmente, **fuerza de fem**. La fem ε de una batería es el voltaje máximo posible que ésta puede suministrar entre sus terminales.



La terminal positiva de la batería se encuentra a un potencial más alto que la negativa. Puesto que una batería está hecha de materia, existe una resistencia al flujo de las cargas dentro de la misma. Esta resistencia recibe el nombre de resistencia interna r_i , por lo que la diferencia de potencia entre las placas de una batería es:

$$\Delta V = \varepsilon - Ir_i$$

Es claro que el voltaje entre las terminales ΔV debe ser igual a la diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia externa R , conocida como resistencia de carga. El resistor representa una carga en la batería porque ésta debe suministrar energía para que el aparato que contiene la resistencia funcione. La diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia de carga es $\Delta V = IR$

Por lo que la fem ε es igual a:

$$\varepsilon = IR + Ir_i$$

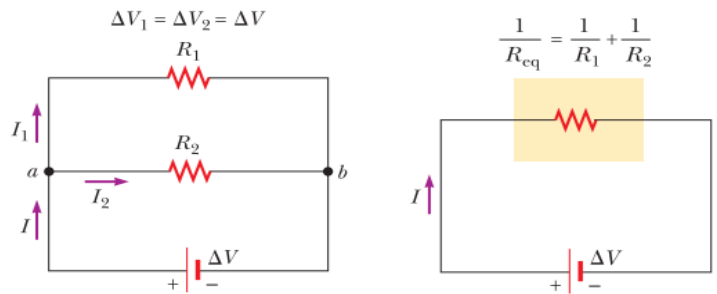
Ahora si la ecuación es multiplicada por I en ambos términos, se obtendría la potencia entregada por la fem:

$$I\varepsilon = I^2 \cdot R + I^2 \cdot r_i$$

Conexión de Resistencias

- **En Paralelo:** La diferencia de potencial entre los extremos de cada resistor es $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$, la corriente en cada uno de los resistores es:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \quad \wedge \quad I_2 = \frac{V}{R_2}$$



Como la carga no se acumula, la corriente total I_{tot} debe ser la suma de las demás corrientes en los resistores:

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

Para reemplazar la combinación en paralelo por una sola resistencia equivalente R_{eq} debe cumplir la condición de que debe fluir la misma cantidad de corriente I , de modo que:

$$I = \frac{V}{R_{eq}}$$

Combinando las expresiones anteriores:

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

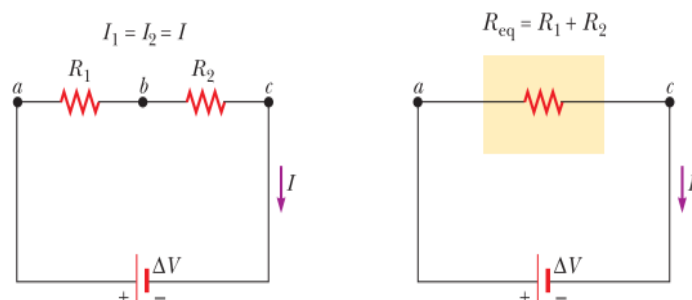
$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

De esta expresión se ve que el inverso de la resistencia equivalente de dos o más resistores conectados en una combinación en paralelo es igual a la suma de los inversos de las resistencias individuales. Además, la resistencia equivalente siempre es menor que la resistencia más pequeña en el grupo.

- **En serie:** En una conexión en serie, si una cantidad de carga Q sale de un resistor R_1 , deberá también entrar en el segundo resistor R_2 . De otra forma, la carga se acumularía en el alambre entre los resistores. Por lo tanto, en un intervalo determinado de tiempo, la misma cantidad de carga pasa a través de ambos resistores.:

$$I = I_1 = I_2$$

De otra forma, la carga se acumularía en el alambre entre los resistores. Por lo tanto, en un intervalo determinado de tiempo, la misma cantidad de carga pasa a través de ambos resistores:



$$\Delta V = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

La diferencia de potencial entre las terminales de la batería también está aplicada a la resistencia equivalente R_{eq} :

$$\Delta V = I R_{eq}$$

donde la resistencia equivalente tiene el mismo efecto en el circuito que en la combinación en serie porque resulta de la misma corriente I en la batería. Al combinar estas ecuaciones para ΔV se sustituyen los dos resistores en serie por una sola resistencia equivalente, cuyo valor es la suma de las resistencias equivalentes:

$$\Delta V = I R_{eq} = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Esta correspondencia indica que la resistencia equivalente de una combinación en serie de resistores es la suma numérica de las resistencias individuales y siempre es mayor que cualquier resistencia individual.

Es posible notar que las resistencias en paralelo se suman como los capacitores en serie, y que las resistencias en serie se suman como los capacitores en paralelo. Esto tiene que ver con la manera en la que se definen las dos cantidades:

$$R = \frac{\text{Potencial}}{\text{Corriente}} \quad \wedge \quad C = \frac{\text{Carga}}{\text{Potencial}}$$

Leyes de Kirchhoff

Cuando se tienen varios circuitos interconectados con varias fuentes resulta muy difícil o imposible resolver las incógnitas aplicando la *Ley de Ohm*. Para ellos se aplica el *Método de Kirchhoff* basado en dos leyes:

1. Primera ley de Kirchhoff o **Ley de los Nodos**: En cada nodo, la suma de las corrientes (que entran y salen) deben ser igual a cero:

$$\sum I = 0$$

2. Segunda ley de Kirchhoff o **Ley de las Mallas**: la suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier malla, incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, debe ser igual a cero:

$$\sum V = \sum \varepsilon - \sum IR = 0$$

Cabe diferenciar los siguientes términos:

- **RED**: Conjunto de circuitos interconectados.
- **MALLAS**: "Caminos" cerrados (circuitos) que integran la red.
- **NODO**: Todos los puntos donde concurren tres o más hilos conductores.
- **RAMAS**: "Caminos" abiertos por donde pueden pasar las corrientes, entre dos nodos consecutivos.

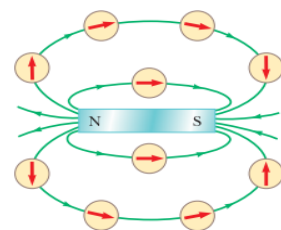
MAGNETISMO

UNIDAD N° 8: Magneto estática e interacción magnética

El **campo magnético** (\vec{B}) se describe como el espacio alrededor de un imán permanente o de un conductor que transporta una corriente eléctrica.

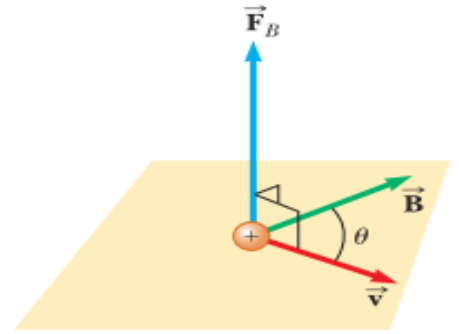
Hay una relación entre la carga eléctrica en movimiento y el campo magnético. Una carga eléctrica en movimiento o una corriente eléctrica generan un campo magnético, el cual puede entonces ejercer una fuerza magnética sobre otras cargas o corrientes en movimiento.

En un campo magnético, la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento es siempre perpendicular a las líneas de B . Las líneas del campo magnético B siempre forman anillos cerrados, mientras que las de los campos eléctricos siempre comienzan y terminan en cargas.



Los experimentos efectuados en diferentes partículas con carga que se mueven en un campo magnético, dan los siguientes resultados:

- La magnitud de F_B de la fuerza magnética ejercida sobre la partícula es proporcional a la carga q y a la rapidez v de dicha carga
- Cuando una partícula con carga se mueve paralela al vector de campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre ella es igual a cero.
- Cuando el vector de velocidad de la partícula forma un ángulo $\theta \neq 0$ con el campo magnético, la fuerza magnética actúa en dirección perpendicular tanto a v como a B ; F_B es perpendicular al plano formado por v y por B .
- La fuerza magnética ejercida sobre una carga positiva tiene dirección opuesta a la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga negativa que se mueva en la misma dirección
- La magnitud de la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula en movimiento es proporcional a $\sin \theta$, donde θ es el ángulo que el vector de velocidad de la partícula forma con la dirección de B



Para resumir estas observaciones la fuerza magnética se describe como: $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ que por definición del producto vectorial es perpendicular tanto a \vec{v} como a \vec{B} . La magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada es: $F_B = |q|vB\sin \theta$ donde θ es el ángulo menor entre \vec{v} y \vec{B} . Por esta expresión F_B es nula si \vec{v} y \vec{B} son paralelas ($\theta = 0 = 180^\circ$) y máxima si \vec{v} y \vec{B} son perpendiculares ($\theta = 90^\circ$). La unidad del campo magnético B es:

$$B = \frac{F_B}{qv} = \frac{[N]}{[C \cdot m/s]} = \frac{[N]}{[A \cdot m]} = [T] \quad \text{Donde } [T] \text{ es tesla y } 1T = 10^4 \text{ Gauss}$$

Existen varias diferencias de importancia entre las fuerzas eléctrica y magnética:

- El vector fuerza eléctrica actúa a lo largo de la dirección del campo eléctrico, en tanto que el vector fuerza magnética actúa perpendicularmente al campo magnético.
- La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula con carga sin importar si ésta se encuentra en movimiento, en tanto que la fuerza magnética actúa sobre una partícula con carga sólo cuando está en movimiento.
- La fuerza eléctrica efectúa trabajo al desplazar una partícula con carga, en tanto que la fuerza magnética asociada con un campo magnético estable no efectúa trabajo cuando se desplaza una partícula, debido a que la fuerza es perpendicular al desplazamiento.

La Fuerza de Lorentz:

Si tanto un campo eléctrico E como un campo magnético B actúan sobre una partícula cargada, la fuerza total sobre ella puede expresarse como

$$\vec{F}_{tot} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Esta fuerza es simplemente la suma de la fuerza eléctrica y magnética que actúan simultáneamente sobre la partícula. La fuerza eléctrica actúa en cualquier partícula cargada ya sea que este en reposo o no, en cambio, la fuerza magnética solo actúa en partículas cargadas en movimiento.

La fuerza de interacción magnética depende de:

- El valor de carga q (carga eléctrica).
- Módulo, dirección y sentido de la velocidad
- El campo magnético \vec{B} en el punto por donde pasa la carga.

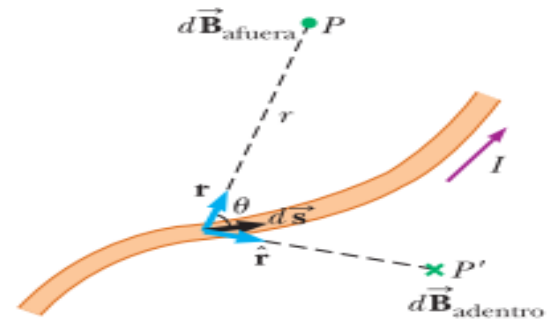
Si la velocidad es perpendicular al campo magnético; $\theta = 90^\circ \Rightarrow F_B = 0$

Si la velocidad es paralela al campo magnético; $\theta = 0^\circ \Rightarrow F_B$ es máxima: $F_B = |q| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}|$

Ley de Biot-Savart

Describe como una corriente eléctrica genera un campo magnético; esta dada por la experiencia y no tiene justificación teórica.

Biot y Savart consiguieron formular una expresión para el campo magnético en un punto del espacio en términos de la corriente generada por dicho campo.



- El vector $d\vec{B}_p$ es perpendicular tanto a $d\vec{s}$ (que apunta en la dirección de la corriente) como al vector unitario \hat{r} dirigido desde hacia p .
- La magnitud $d\vec{B}_p$ es inversamente proporcional a r^2 , donde r es la distancia de $d\vec{s}$ a p .
- La magnitud $d\vec{B}_p$ es proporcional a la corriente y a la magnitud ds del elemento de longitud $d\vec{s}$.
- La magnitud $d\vec{B}_p$ es proporcional a $\sin \theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $d\vec{s}$ y \hat{r}

De este modo, una contribución infinitesimal del campo magnético en el punto p está dado por:

$$d\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Para hallar el campo magnético total B , debido a la distribución de la corriente, se debe integrar todos los elementos de corriente $I \cdot dL$:

$$\int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \cdot d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

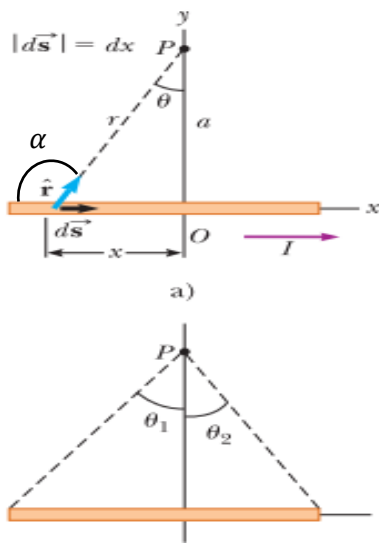
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

μ_0 es la permeabilidad del medio en el vacío.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

Aplicaciones de la Ley de Biot-Savart

- Campo magnético alrededor de un conductor recto delgado



Para conocer el campo magnético generado por el conductor por el cual circula una corriente I en un punto p .

A partir de la ley Biot Savart, se espera que la magnitud del campo sea proporcional a la corriente en el alambre y disminuya conforme aumente la distancia a desde el alambre al punto p :

$$dB_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \vec{ds} \cdot \text{sen}\alpha}{r^2}$$

$$dB_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dx \cdot \text{sen}\alpha}{r^2}$$

Donde α es el ángulo opuesto a θ : $\alpha = 90^\circ + \theta$. De este modo:

$$dB_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dx \cdot \text{sen}(90^\circ + \theta)}{r^2}$$

Puesto que $\text{sen}(90^\circ + \theta) = \text{sen}90^\circ \cos\theta + \text{sen}\theta \cos90^\circ = \cos\theta$; entonces:

$$dB_p = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{dx \cdot \cos\theta}{r^2}$$

A partir de la geometría se puede observar que $r = \frac{a}{\cos\theta}$ y que $\tan\theta = -x/a$ a partir del triángulo rectángulo, el signo negativo es porque \vec{ds} se encuentra en un valor negativo para x , entonces: $x = -a \tan\theta$. Por lo tanto dx es igual a:

$$dx = -a \sec^2 \theta d\theta = -\frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Sustituyendo en dB_p se obtiene:

$$dB_p = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{(a d\theta) \cos\theta \cos^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta} = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cos\theta d\theta$$

Integrando todos los elementos de longitud del alambre, donde los ángulos subtendidos varían entre θ_1 y θ_2 :

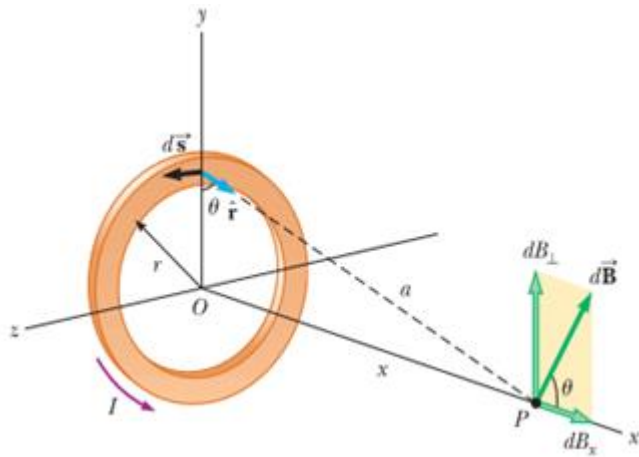
$$\int dB_p = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta \Rightarrow B_p = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} [\text{sen } \theta_1 - \text{sen} \theta_2]$$

En el caso particular de que el alambre sea infinito, la ecuación se define como:

$$B_p = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a}$$

- Campo magnético en el eje de una espira de corriente circular

Considere una espira de alambre circular de radio r ubicado en el plano yz y que porta una corriente estable I y se desea calcular su campo magnético en un punto p concéntrico a una distancia x del centro del anillo O .



La figura muestra la aportación al campo magnético dB_p en p debido a un solo elemento de corriente en lo alto del anillo. Este vector de campo se puede resolver en componentes db_x paralelo al eje del anillo y dB_{\perp} perpendicular al eje. Piense en las aportaciones al campo magnético de un elemento de corriente en la parte baja de la espira.

Debido a la simetría de la situación, las componentes perpendiculares del campo debido a los elementos en las partes superior e inferior del anillo se cancelan.

Esta cancelación se presenta para todos los pares de segmentos alrededor del anillo, de modo que puede ignorar la componente perpendicular del campo y enfocarse exclusivamente en las componentes paralelas, que simplemente se suman. Por lo tanto, podemos reemplazar a la integral vectorial de todas las dB por una integral escalar de las componentes paralelas únicamente:

$$dB_p = \int dB_x$$

Cada elemento de longitud \vec{ds} es perpendicular al vector \hat{r} en la ubicación del elemento. Por lo tanto, $|\vec{ds} \times \hat{r}| = ds \cdot \sin 90^\circ = ds$. Además, todos los elementos de longitud alrededor de la espira están a la misma distancia a de p , donde $a^2 = r^2 + x^2$:

$$dB_p = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{ds} \times \hat{r}|}{a^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{ds}{(r^2 + x^2)}$$

Y la componente x del campo es:

$$dB_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{ds}{(r^2 + x^2)} \cdot \cos\theta$$

Integrando a lo largo de toda la espira:

$$\oint dB_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint \frac{ds}{(r^2 + x^2)} \cdot \cos\theta \Rightarrow B_p = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint \frac{ds}{(r^2 + x^2)} \cdot \cos\theta$$

A partir de la geometría:

$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{(r^2 + x^2)}}$$

Sustituyendo $\cos\theta$ en la integral e integrando alrededor de la espira:

$$B_p = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint \frac{ds}{(r^2 + x^2)} \cdot \frac{r}{\sqrt{(r^2 + x^2)}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \oint ds$$

$$B_p = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r^2}{2(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La superficie de la espira es $2\pi r$ por lo tanto:

$$\oint ds = 2\pi r$$

Si el punto p se encuentra en el centro del anillo:

$$B_p = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r^2}{2(r^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow B_p = \frac{\mu_0 \cdot I}{2r}$$

Ley de Ampere

Al evaluar el producto $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ para un elemento de longitud $d\vec{s}$, sumando todos los elementos de una trayectoria cerrada, los vectores \vec{B} y $d\vec{s}$ son paralelos en cada punto así que $\vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot d\vec{s}$ por lo tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint d\vec{s} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

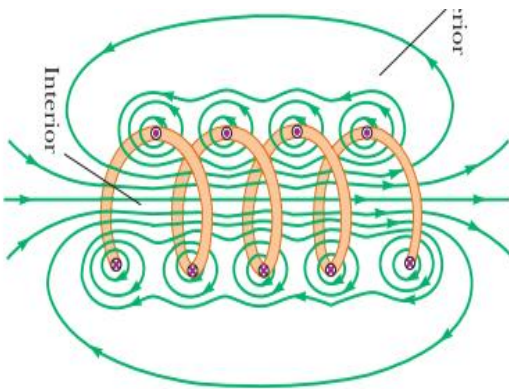
Donde $\oint d\vec{s} = 2\pi r$ es la circunferencia de la trayectoria circular cerrada, la cual es llamada **Anillo Amperiano**. El sentido en que recorramos la trayectoria, nos determinara la dirección de $d\vec{s}$. El lado derecho de la relación, es la corriente total que pasa por los alambres que perforan la superficie cerrada.

La ley de Ampere, puede enunciarse como: "La integral de línea de $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es independiente del radio e igual a $\mu_0 \cdot I$ donde I es la corriente total estable que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada".

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

Aplicación

- **Solenoides:** El Solenoide, es un alambre larga devanado en una hélice fuertemente apretada y conductor de corriente I .

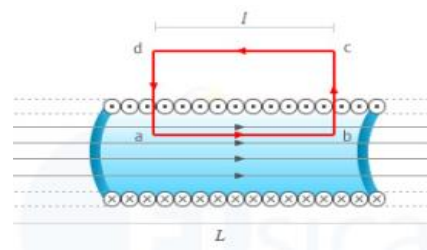


El campo magnético B es paralelo al eje del solenoide y se considera constante.

Para un punto p , el campo magnético creado por la parte superior de las espiras del solenoide tiende a cancelar el campo magnético creado en la parte inferior. Por lo tanto se considera que el campo magnético B por fuera del solenoide es cero.

Para calcular el campo magnético dentro del solenoide, consideramos el anillo Amperiano que se muestra en la imagen y aplicamos la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$



A la integral, se la puede escribir como la suma de cuatro integrales, una por cada segmento de la trayectoria:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Donde la segunda y la cuarta integral son nulas, debido a que cada una de estas trayectorias es perpendicular al campo magnético B y el tercer segmento es nulo debido a que por fuera del solenoide el campo magnético es cero. Entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot \int_a^b ds = B \cdot l$$

Entonces tenemos que:

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I_0$$

La corriente neta que pasa por el anillo Amperiano rectangular, no es la misma corriente I en el solenoide porque el devanado atraviesa el anillo más de una vez. Por lo tanto la corriente neta I_0 es definida como: $I_0 = I \cdot n \cdot l$ donde n es el número de espiras por unidad de longitud.

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I \cdot n \cdot l$$

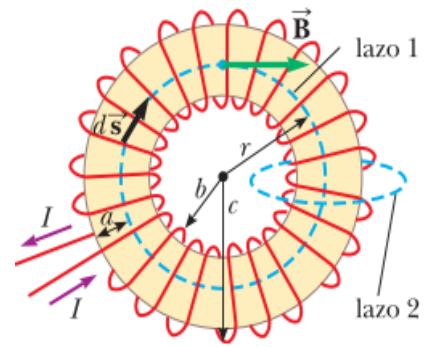
$$B = \mu_0 \cdot I \cdot n$$

Por lo tanto el campo magnético dentro del solenoide depende únicamente de las de la corriente I y el numero de espiras n por unidad de longitud.

- **Toroide:** Se usa con frecuencia para crear un campo magnético casi uniforme en algún área cerrada. El dispositivo consiste en un alambre conductor enrollado alrededor de un anillo hecho de un material no conductor. Para un toroide que tiene N vueltas de alambre muy juntas una de otra.

Elegimos un círculo concéntrico de radio r como anillo Amperiano y lo recorremos en sentido horario, al aplicar la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B \cdot 2\pi r$$



De este modo:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0$$

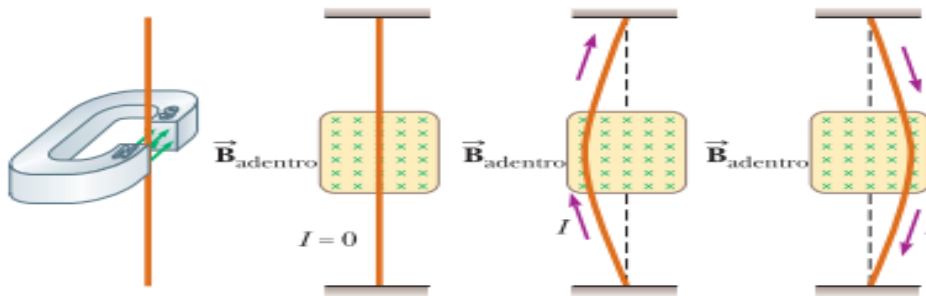
Donde I_0 es la corriente neta, la cual se define como: $I_0 = N \cdot I$, donde N es el número total de espiras. Por lo tanto:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi r}$$

Donde B depende del radio r

El campo fuera del toroide es nulo. El denominador $2\pi r$, es la circunferencia central del toroide y $N/2\pi r$ es justamente n (número de espiras por longitud), por ello se dice que un toroide se considera como un solenoide en forma de rosca.

Fuerza Magnética sobre una Corriente Eléctrica



El campo magnético al ejercer una fuerza sobre una carga también lo hace sobre el conductor por el cual fluye la corriente. Por lo tanto, ejerce una fuerza lateral sobre los electrones en el conductor pero como estos no pueden escapar lateralmente, la fuerza se transmite al conductor.

Considerando las cargas individuales que fluyen por el conductor y suponemos que los electrones se mueven a una velocidad constante a la cual se llamara *velocidad de arrastre* V_d . La dirección real del movimiento de los electrones, es opuesta a la dirección de la corriente I en el conductor.

Cuando el conductor pasa a través de un campo magnético B , la fuerza lateral sobre cada electrón ($q = e^-$) debido al campo magnético B , es:

$$F_e = qV_d \times B$$

Ya que el volumen del segmento es $A \cdot \ell$, el numero de cargas en el segmento es igual a $n \cdot A \cdot \ell$; donde n es el numero de cargas por unidad de volumen, por esto la fuerza magnética total se puede escribir como:

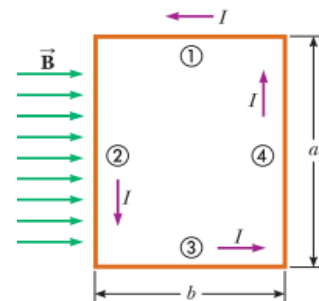
$$F_e = (e^- V_d \times B) n \cdot A \cdot \ell$$

Puesto que $I = nAe^- V_d$, la **fuerza sobre el segmento** se puede describir como:

$$F_e = I \cdot \ell \times B$$

Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme

Considere una espira rectangular que tiene una corriente I en presencia de un campo magnético uniforme dirigido paralelamente al plano de la espira. Sobre los lados 1 y 3 no actúa ninguna fuerza magnética, ya que estos alambres son paralelos al campo; por lo que para estos lados $qv \times B = 0$. Sin embargo, para los lados 2 y 4, las fuerzas magnéticas están orientadas perpendicularmente al campo.



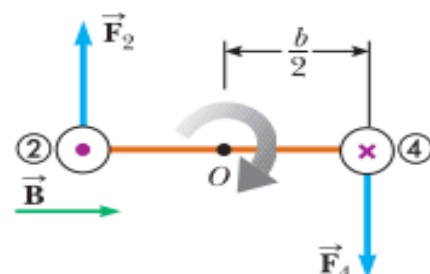
La dirección F_2 es la fuerza magnética ejercida sobre el alambre 2, alejándose de la página y F_4 es la fuerza magnética ejercida sobre el alambre 4, hacia el interior de la página.

$$F_2 = F_4 = IaB$$

Si se logra que la espira gire alrededor del punto O , estas dos fuerzas producen, en relación con este punto, un momento de torsión que hace que la espira gire en el sentido de las manecillas del reloj. La magnitud de este momento de torsión $\tau_{\text{máx}}$ es:

$$\tau_{\text{máx}} = F_2 \cdot \frac{b}{2} + F_4 \cdot \frac{b}{2} = (IaB) \frac{b}{2} + (IaB) \frac{b}{2}$$

$$\tau_{\text{máx}} = IabB \Rightarrow \tau_{\text{máx}} = IAB$$



Donde $b/2$ es el momento de palanca con relación a O para ambas fuerzas y ab es el área A de la espira.

Ahora se supone que el campo magnético uniforme forma un ángulo $\theta < 90^\circ$ con una línea perpendicular al plano de la espira, el momento de torsión neto será:

$$\tau = F_2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin\theta + F_4 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin\theta = (IaB) \frac{b}{2} \sin\theta + (IaB) \frac{b}{2} \sin\theta$$

$$\tau_{\text{neto}} = IAB \sin\theta$$

Una expresión conveniente para el momento de torsión ejercido sobre una espira colocado en un campo magnético uniforme \vec{B} es:

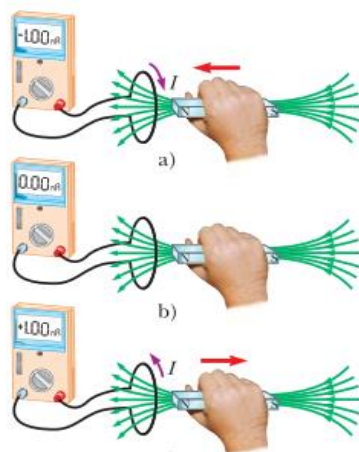
$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

El producto $I\vec{A}$ representa el **Momento Dipolar Magnético** $\vec{\mu}$ de la espira y su unidad es ampere.metro² ($A \cdot m^2$). Con esta definición el momento de torsión ejercido en una espira de corriente I en un campo magnético \vec{B} se expresa como:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \mu \cdot B \cdot \sin\theta$$

UNIDAD 9: Inducción Magnética

Ley de Faraday



A fin de poder observar cómo es posible inducir una fem debido a un campo magnético cambiante, considere una espira de alambre conectada a un amperímetro sensible; cuando el imán se acerca a la espira, la lectura del amperímetro cambia desde cero en una dirección. En cuanto se deja el imán en reposo y se le mantiene fijo en relación con la espira se observa una lectura de cero. Cuando el imán es alejado de la espira, la lectura en el amperímetro cambia en la dirección opuesta.

A partir de estas observaciones, se concluye que la espira detecta que el imán se está moviendo respecto a la espira, y esta detección se correlaciona con un cambio en el campo magnético. Debido a eso, parece existir una correspondencia entre la corriente y un campo magnético cambiante.

La corriente que aparece en este experimento se llama **Corriente Inducida** y es originada por una *fuerza electromotriz inducida o fem inducida*. Es habitual decir que una fem inducida se produce en

la espira debido al campo magnético cambiante y es determinada por la velocidad de cambio en el número de líneas que pasan a través del anillo.

Donde Φ_B es el flujo magnético que pasa a través de la espira y es igual a:

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

La integración se lleva a cabo sobre toda la superficie donde se quiere calcular el flujo. Si el campo magnético tiene una magnitud constante, como así un área plana A ; el flujo puede escribirse como:

$$\Phi_B = B \cdot A \cdot \cos \theta$$

Donde θ es el ángulo entre la normal de la superficie y la dirección del campo.

La ley de la inducción de Faraday establece: “La fuerza electromotriz inducida en un circuito es igual al negativo de la velocidad con que cambia en el tiempo el flujo a través del circuito.”

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

El signo negativo, indica la dirección de la fem inducida.

Si la bobina consta de N espiras (vueltas):

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

FEM de movimiento

Consideremos una varilla conductora móvil conectada a un conductor en forma de U , formando de este modo una espira.

El campo magnético exterior B_{ext} es uniforme y se lo considera entrante.

Si movemos la varilla hacia la derecha a una velocidad constante v aplicando una fuerza F entonces una partícula cargada q en la varilla experimenta una fuerza magnética:

$$F_B = qv \times B$$

Esta fuerza magnética hace que las cargas libres en una varilla se muevan, lo que crea un exceso de carga positiva en el extremo superior a y de carga negativa en el extremo inferior b . Esto a la vez, crea un campo eléctrico E en el interior de la varilla con sentido $a \rightarrow b$, la carga eléctrica continua acumulándose en los extremos hasta que E se hace lo suficientemente grande para que la fuerza eléctrica: $F_e = qE$.

Al estar las fuerzas en equilibrio $F_B = F_e$ por lo tanto $qE = qvB$

El campo eléctrico que se produce en el conductor está relacionado con la diferencia de potencial a través de los extremos del conductor, de acuerdo con la correspondencia $\Delta V = El$. Entonces para la condición de equilibrio:

$$\Delta V_{ab} = El = vBl$$

En consecuencia, se mantiene una diferencia de potencial entre los extremos del conductor siempre que éste se siga moviendo a través del campo magnético uniforme.

Considerando que el flujo Φ_B del circuito completo encerrado por la espira es: $\Phi_{B_{ext}} = BA$, hallamos el área encerrada por la FEM ε , partiendo de la ley de Faraday:

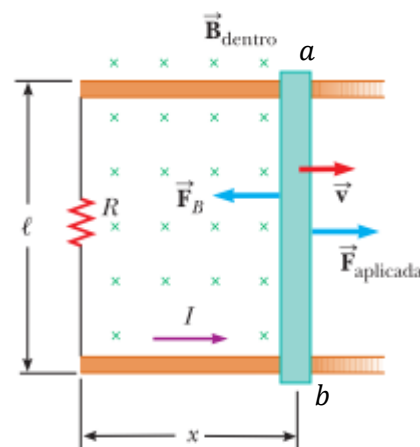
$$\varepsilon = \frac{d\Phi_{B_{ext}}}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = d(Bl \cdot x) = Bl \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\varepsilon = Blv$$

Debido a la diferencia de potencial dentro de la varilla, esta se transforma en una FEM de movimiento $\varepsilon = Blv$.

La FEM ε genera una corriente inducida en la espira dada por:



$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

Donde R es la resistencia de la espira.

La potencia mecánica del agente externo para mover la varilla está dada por:

$$\mathcal{P} = \frac{dw}{dt}$$

Donde $dw = Fdx$ entonces:

$$\mathcal{P} = F \cdot \frac{dx}{dt} = Fv$$

Puesto que la única fuerza que se opone al movimiento de la espira es F_B que debe ser igual y opuesta a la fuerza utilizada para mover la espira:

$$F_B = I\ell B$$

$$\mathcal{P} = F_B v = I\ell B v = \frac{B\ell v}{R} \cdot \ell B v$$

$$\mathcal{P} = \frac{B^2 v^2 \ell^2}{R}$$

Siendo entonces \mathcal{P} la potencia necesaria para desplazar la varilla conductora. Esta potencia es igual a $\mathcal{P} = I^2 R$ ya que:

$$\mathcal{P} = I^2 R = \frac{B^2 v^2 \ell^2}{R^2} R \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{B^2 v^2 \ell^2}{R}$$

Ley de Lenz: "La corriente inducida en una espira está en la dirección que crea un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético en el área encerrada por la espira." Es decir, la corriente inducida tiende a mantener el flujo magnético original a través de la espira por alteración.

Inductancia

Cualquier circuito que conduzca una corriente variable tiene una FEM inducida en él, por la variación en su propio campo magnético. Está se denomina **FEM Autoinducida**. El efecto e intensifica si en el circuito se incluye una bobina con N espiras.

Como resultado de una corriente I , hay un flujo magnético Φ_B a través de cada vuelta a la bobina. Se define a la autoinductancia L del circuito como:

$$L = N \frac{\Phi_B}{I}$$

Cuya unidad es el Henrio:

$$[H] = \frac{[V \cdot s]}{[A]}$$

Si la corriente I en el circuito cambia, también lo hace el flujo magnético Φ_B , por lo tanto, la ley de Faraday debe incluirse en una FEM ε a través del inductor:

$$\frac{d(LI)}{dt} = \frac{d(N\Phi_B)}{dt}$$

$$L \frac{dI}{dt} = N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

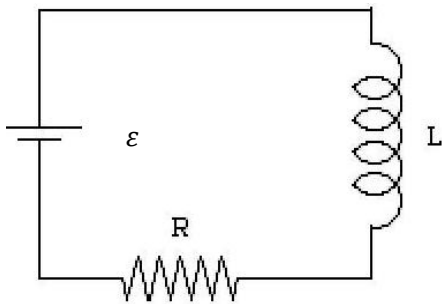
Donde:

$\frac{dI}{dt}$ es la variación de la corriente con respecto al tiempo.

Por ley de Faraday:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Energía en una Bobina con Corriente (Energía del Campo Magnético)



Se muestra una fuente FEM ε conectada a un resistor R y a un inductor L . Por análisis del circuito sabemos que (leyes de Kirchhoff):

$$\varepsilon = I \cdot R + L \frac{dI}{dt}$$

A multiplicar cada uno de los términos por I y reordenando:

$$\varepsilon I = I^2 R + L \cdot I \frac{dI}{dt}$$

- El primer miembro: εI es la velocidad con la que entrega energía al circuito la fuente FEM (potencia).
- El segundo miembro: $I^2 R$ es la velocidad con la que se disipa la energía del resistor.
- El tercer miembro: $L I \frac{dI}{dt}$ representa la velocidad a la cual se almacena la energía del campo magnético U_B .

U_B representa la energía almacenada del campo eléctrico, entonces la velocidad a la que se almacena energía es dU_B/dt . De esta forma, podemos igualar las siguientes expresiones:

$$\frac{dU_B}{dt} = L \cdot I \frac{dI}{dt} \Rightarrow \boxed{dU_B = L \cdot I \cdot dI}$$

La energía almacenada puede calcularse integrando la ecuación anterior:

$$\int dU_B = L \int_0^I I \cdot dI$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2} L \cdot I^2}$$

Energía almacenada en una inductancia L que conduce una corriente I

Densidad de Energía y Campo Magnético

Considerando un solenoide muy largo de área de sección transversal A y una porción de longitud l encierra un volumen Al .

La energía almacenada debe estar distribuida uniformemente en todo el volumen del solenoide porque el campo magnético es uniforme en cualquier parte del interior. Entonces, podemos escribir la densidad de energía como:

$$\rho_{U_B} = \frac{U_B}{Al}$$

$$\rho_{U_B} = \frac{L \cdot I^2}{2Al}$$

Para expresar esta igualdad en términos de campo magnético resolvemos que:

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot n \Rightarrow I = \frac{B}{\mu_0 \cdot n} \quad \wedge \quad L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot A$$

$$\rho_{U_B} = \frac{(\mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot A) \left(\frac{B}{\mu_0 \cdot n} \right)^2}{2Al} \Rightarrow \boxed{\rho_{U_B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0}}$$

En un solenoide:

Campo magnético B :

$$B = I \cdot \mu_0 \cdot n \cdot l$$

Flujo a través de N espiras:

$$\Phi_B \cdot N = N^2 \cdot I \cdot \mu_0 \cdot A \cdot l$$

Inductancia L :

$$L = N^2 \cdot \mu_0 \cdot A \cdot l$$

Esta ecuación es la densidad de energía almacenada en cualquier punto donde el campo magnético es B . La ecuación se cumple para todas las configuraciones del campo magnético, aun cuando la dedujimos considerando un caso especial, el solenoide.

UNIDAD N°10: Propiedades Magnéticas de la Materia

Interacción del Campo Magnético con la Materia

Todas las sustancias son influenciadas en menor o mayor medida por un campo magnético. Toda materia contiene electrones en movimiento, los cuales forman espiras microscópicas de corriente que producen campos magnéticos

por sí mismos. Se representa al electrón e^- como si se desplazara en una órbita circular. Esta carga es equivalente a una espira de corriente I con área A y tiene un momento dipolar magnético $\mu = I \cdot A$. Cuando un material se coloca en un campo magnético aparecen pares de torsión $\tau = \mu \times B$ que tienden a alinear los momentos dipolares magnéticos con el campo, es decir, en la posición de mínima energía potencial. Entonces decimos que el material se ha magnetizado:

$$B = B_0 + B_\mu$$

El campo magnético adicional B_μ debido a la magnetización del material es proporcional al momento magnético total por unidad de volumen.

$$B_\mu = \mu_0 \cdot \frac{\bar{m}_{total}}{Volumen}$$

Donde el vector μ_{tot}/V es definido por el nombre de **Magnetización del material** y se denota por \bar{M} . De este modo:

$$B_\mu = \mu_0 \bar{M}$$

Por otro lado, podemos expresar al campo B_0 independientemente del medio mediante un vector de **excitación o intensidad magnética** \bar{H} . Entonces \bar{H} representa la inducción magnética a la que sometemos el material definiendo solo la excitación de los electrones. De este modo:

En el vacío: $\bar{H} = \frac{B_0}{\mu_0}$ En otro material: $\bar{H} = \frac{B}{\mu}$

De este modo: $B_0 = \bar{H} \cdot \mu_0$

Entonces podemos redefinir la primer ecuación como:

$$B = \bar{H} \cdot \mu_0 + \mu_0 \bar{M}$$

Donde la relación entre los tres vectores queda definida por:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \bar{H} + \bar{M}$$

Permeabilidad Relativa: Es el cociente de la permeabilidad efectiva de un fluido a una saturación determinada entre la permeabilidad absoluta de ese mismo fluido y la saturación total:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r = k_m$$

La magnetización: Es la densidad de momentos dipolares magnéticos de un material:

$$\bar{M} = \frac{dm}{dV}$$

Susceptibilidad Magnética: es la cantidad en la que la permeabilidad difiere de la unidad

$$\chi_m = k_m - 1$$

Paramagnetismo: Las sustancias paramagnéticas tienen un magnetismo pequeño pero positivo, cuando la sustancia paramagnética se coloca en un campo magnético externo, sus momentos atómicos tienden a alinearse con el campo. Es decir, los materiales paramagnéticos son materiales atraídos por imanes, pero no se convierten en materiales permanentemente magnetizados.

$$\chi_m > 0$$

Diamagnetismo: Cuando se aplica un campo magnético externo a una sustancia diamagnética, se induce un momento magnético débil en dirección opuesta al campo aplicado, esto hace que las sustancias diamagnéticas sean débilmente repelidas por un imán.

$$\chi_m < 0$$

Ferromagnetismo: Unas pocas sustancias cristalinas exhiben efectos magnéticos intensos, estas sustancias contienen momentos magnéticos atómicos permanentes que tienden a alinearse paralelamente uno con otro incluso en presencia de un campo magnético externo débil. Una vez alineados los momentos, la sustancia se mantiene magnetizada después de haberse retirado el campo externo.

$$\chi_m \gg 0$$

CORRIENTE ALTERNA

Corriente "Alterna" significa que la corriente cambia de dirección, alternando periódicamente de una dirección a otra. Por lo general varían de forma senoidal o cosenoidal con el tiempo. Donde su diagrama de circuito es:

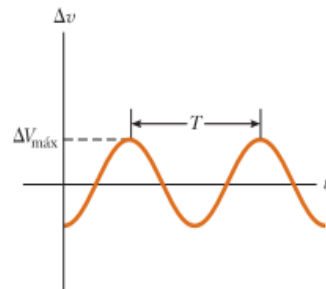


Un circuito de CA está conformado por elementos de circuito y una fuente de energía que proporciona un voltaje alterno Δv . Este voltaje, que varía con el tiempo de acuerdo con la fuente, está descrito por:

$$\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t)$$

donde $\Delta V_{\text{máx}}$ es el máximo voltaje de salida de la fuente de

El voltaje de salida de una fuente CA varía de manera sinusoidal con el tiempo, el voltaje es positivo durante una mitad del ciclo y negativo durante la otra mitad. De la misma manera, la corriente en cualquier circuito conductor para una fuente de CA es una corriente alternante que también varía senoidalmente con el tiempo.



La frecuencia angular ω del voltaje de CA es:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Donde f es la frecuencia de la fuente y T el periodo. La fuente determina la frecuencia de la corriente en cualquier circuito conectado a ella.

Resistores en un circuito de CA

Considere un circuito CA simple formado por un resistor y una fuente de CA. En cualquier instante, la suma algebraica de los voltajes alrededor de una espira cerrada en un circuito debe ser cero (ley de las mallas de Kirchhoff). Por lo tanto:

$$\Delta v - \Delta v_R = 0$$

Pero teniendo en cuenta la ecuación para voltajes en un resistor:

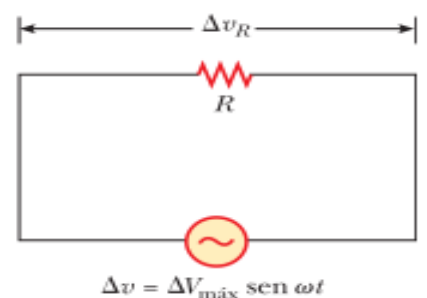
$$R = \frac{\Delta V}{I} \Rightarrow \Delta v_R = I_R R$$

Al reagrupar esta expresión y sustituir $\Delta V_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t)$ por Δv la corriente instantánea en el resistor es:

$$\Delta V_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t) - I_R R = 0$$

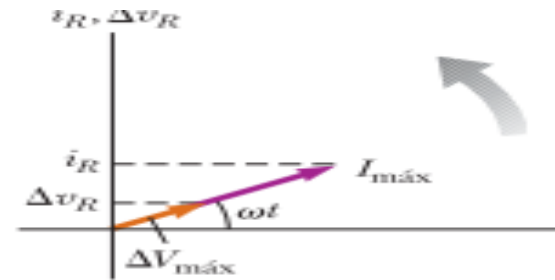
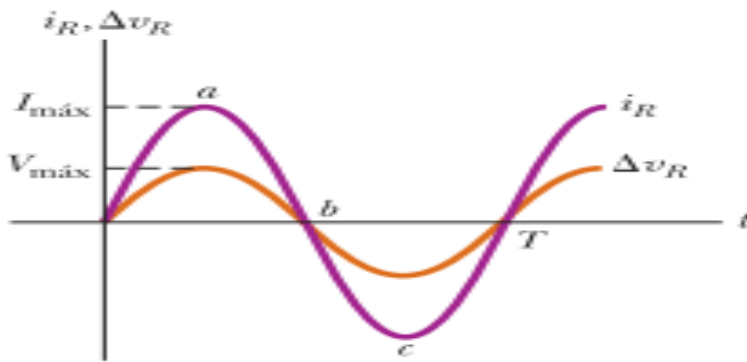
$$I_R = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{R} \text{sen}(\omega t) \Rightarrow I_R = I_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t)$$

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{R}$$



Donde el voltaje instantáneo a través del resistor se obtiene al multiplicar en la ecuación $I_R = I_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t)$ por R ambos términos:

$$I_R R = I_{m\acute{a}x} R \text{sen}(\omega t)$$



Se muestra una gráfica del voltaje y la corriente en función del tiempo para este circuito. En el punto *a*, la corriente tiene un valor máximo en una dirección positiva. Entre los puntos *a* y *b*, la corriente decrece en magnitud, pero aún está en la dirección positiva. En *b*, la corriente es por el momento cero; por lo tanto empieza a aumentar en la dirección negativa entre los puntos *b* y *c*. En *c*, la corriente ha llegado a su valor máximo en la dirección negativa.

La corriente y el voltaje están sincronizados entre sí porque varían de manera idéntica con el tiempo. Porque I_R y Δv_R varían ambos como $\text{sen}(\omega t)$ y alcanzan sus valores máximos al mismo tiempo, se dice que están **en fase**. Para un voltaje senoidal aplicado, la corriente en un resistor siempre está en fase con el voltaje en las terminales del resistor.

Para simplificar el análisis de circuitos que contienen dos o más elementos, se usa una representación gráfica denominada **diagramas de fasores**. Un **fasor** es un vector cuya longitud es proporcional al valor máximo de la variable que representa ($\Delta V_{m\acute{a}x}$ para el voltaje y $I_{m\acute{a}x}$ para la corriente) y que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez angular igual a la frecuencia angular asociada con la variable. La proyección del fasor sobre el eje vertical representa el valor instantáneo de la cantidad que representa.

Lo que es de importancia en un circuito de CA es el valor promedio de corriente, que se conoce como **corriente rms**. La notación rms quiere decir media cuadrática, que en este caso se trata de la raíz cuadrada del valor medio (promedio) del cuadrado de la corriente:

$$I_{prom} = \frac{I_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}$$

La potencia promedio entregada a un resistor que lleva una corriente alterna es: $\mathcal{P}_{prom} = I_{prom}^2 R$

El voltaje alterno también se explica mejor en términos del voltaje rms, y la correspondencia es idéntica a la de la corriente:

$$\Delta V_{prom} = \frac{\Delta V_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}}$$

Capacitores en un circuito de CA

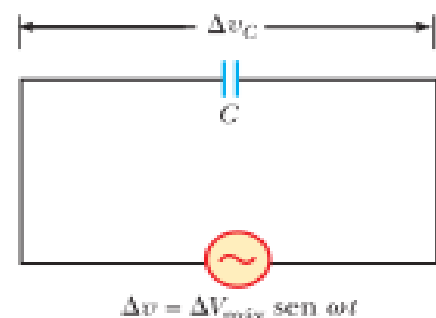
La ley de las mallas de Kirchhoff aplicada a este circuito nos da $\Delta v - \Delta v_C = 0$

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow \Delta v - \frac{q}{C} = 0$$

al sustituir $\Delta V_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t)$ para Δv y reordenar:

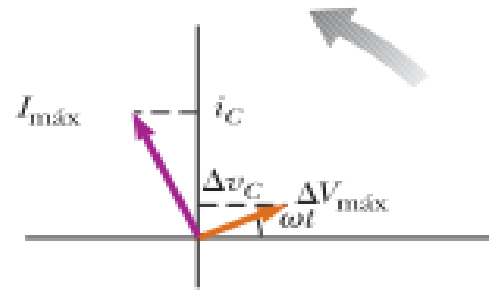
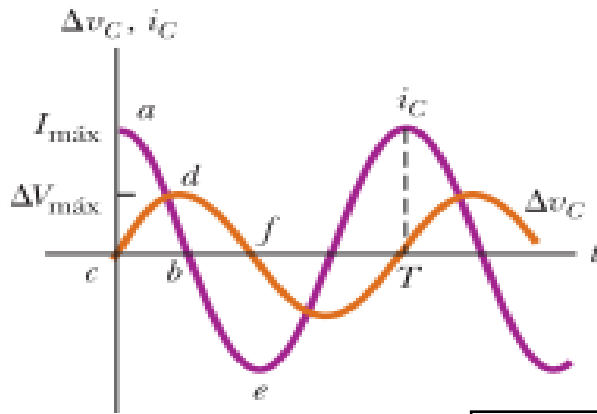
$$\Delta V_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t) - \frac{q}{C} = 0$$

$$q = C \Delta V_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t)$$



donde q es la carga instantánea en el condensador. Al derivar dicha ecuación respecto al tiempo se obtiene la corriente instantánea del circuito:

$$I_C = \frac{dq}{dt} = \omega C \Delta V_{m\acute{a}x} \cos(\omega t)$$



Si usa la identidad trigonométrica:

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Se puede expresar la corriente de un capacitor I_C como:

$$I_C = \omega C \Delta V_{m\acute{a}x} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Al comparar esta expresión con $\Delta v = \Delta V_{m\acute{a}x} \sin(\omega t)$, se observa que la corriente está $\pi/2 \text{ rad} = 90^\circ$ fuera de fase con el voltaje en las terminales del capacitor. Una gráfica de la corriente y el voltaje en función del tiempo muestra que la corriente alcanza su valor máximo un cuarto de ciclo antes de que el voltaje alcance su valor máximo.

Considere el punto b , donde la corriente es cero. Esto se presenta cuando el capacitor logra su carga máxima, de modo que el voltaje en las terminales del capacitor es máximo (punto d). En puntos como el a y el e , la corriente es máxima, lo cual se presenta cuando la carga en el capacitor se vuelve cero y empieza a cargarse con la polaridad opuesta. Cuando la carga es cero, el voltaje en las terminales del capacitor es cero (puntos c y f). Por lo tanto, la corriente y el voltaje están fuera de fase.

Para un voltaje aplicado senoidalmente, la corriente siempre se adelanta 90° al voltaje presente en las terminales del capacitor. La corriente en el circuito alcanza su valor máximo cuando $\cos(\omega t) = \pm 1$:

$$I_{m\acute{a}x} = \omega C \Delta V_{m\acute{a}x} = \frac{\Delta V_{m\acute{a}x}}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)}$$

La combinación $1/\omega C$ se representa con el símbolo X_C , y puesto que esta función varía con la frecuencia, se define como la **reactancia capacitiva**:

$$X_C = \left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

Entonces se puede definir a la corriente en el circuito como:

$$I_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{X_C}$$

La corriente rms se representa de manera semejante a la ecuación (Sustituyendo: $I_{m\acute{a}x}$ por I_{rms} y $\Delta V_{m\acute{a}x}$ por ΔV_{rms})

El voltaje instantáneo en las terminales del condensador se expresa como:

$$\Delta v_C = \Delta V_{m\acute{a}x} \sin(\omega t) = I_{m\acute{a}x} X_C \sin(\omega t)$$

Inductores en un circuito de CA

Ahora considere un circuito de CA formado por un solo inductor conectado a las terminales de una fuente de CA. Si $\Delta v_L = \varepsilon_L = -L \left(\frac{dI}{dt} \right)$ es el voltaje instantáneo autoinducido en las terminales del inductor, aplicado a la ley de las mallas de Kirchhoff a este circuito nos da que: $\Delta v + \Delta v_L = 0$, esto es:

$$\Delta v - L \left(\frac{dI_L}{dt} \right) = 0$$

Cuando sustituye $\Delta V_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t)$ en Δv y reordenando, proporciona:

$$\Delta V_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t) - L \left(\frac{dI_L}{dt} \right) = 0$$

Al resolver esta ecuación:

$$dI_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L} \text{sen}(\omega t) dt$$

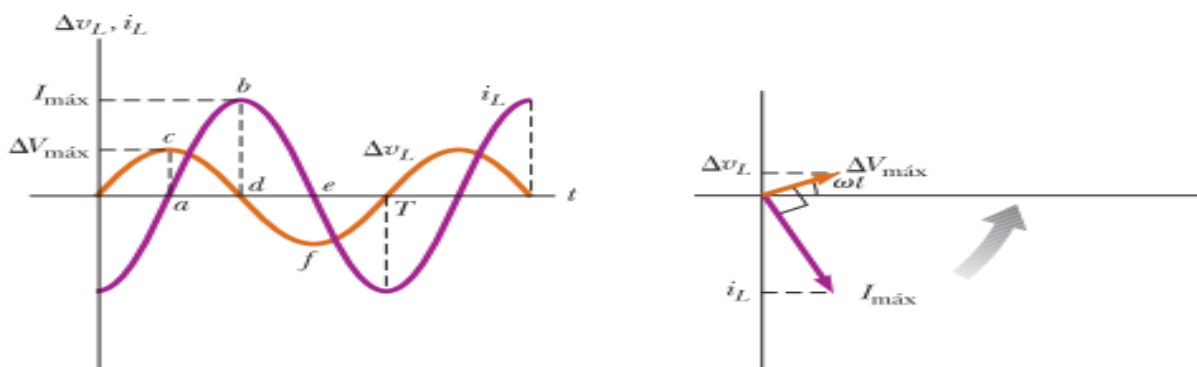
La integración de esta expresión da la corriente instantánea I_L del inductor como función del tiempo:

$$\int dI_L = \int \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L} \text{sen}(\omega t) dt = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L} \int \text{sen}(\omega t) dt \Rightarrow I_L = -\frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} \cos(\omega t)$$

Cuando usa la identidad trigonométrica $\cos(\omega t) = -\text{sen}(\omega t - \pi/2)$, La corriente instantánea queda definida como:

$$I_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cuando la corriente I_L en el conductor es máxima (punto *b*) permanece por el momento sin cambio, de modo que el voltaje en las terminales del inductor es cero (punto *d*). En los puntos como *a* y *e*, la corriente es cero y la rapidez de cambio de corriente está al máximo. Por lo tanto, el voltaje en las terminales del inductor también está al máximo (puntos *c* y *f*). Observe que el voltaje alcanza su valor máximo un cuarto de periodo antes de que la corriente alcance el suyo. Debido a eso, para un voltaje aplicado senoidal, la corriente en un inductor siempre se atrasa 90° respecto al voltaje en las terminales del inductor (un cuarto de ciclo en tiempo).



La corriente en un circuito inductivo alcanza su valor máximo cuando $\cos(\omega t) = \pm 1$:

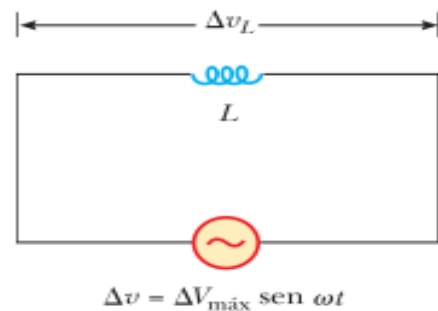
$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L}$$

Ya que ωL depende de la frecuencia aplicada ω , el inductor reacciona de modo diferente, ofreciendo oposición a la corriente, para diferentes frecuencias. Por esta razón, ωL es la reactancia inductiva X_L :

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{X_L}$$

Esta conclusión es consistente con la ley de Faraday: cuanto mayor es la rapidez de cambio de la corriente en el inductor, mayor es la fuerza contraelectromotriz. La mayor fuerza contraelectromotriz se traduce en un aumento en la reactancia y una disminución en la corriente.

El voltaje instantáneo en los extremos del inductor es:



$$\Delta v_L = -L \cdot \frac{dI_L}{dt} = -\Delta V_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t) = -I_{m\acute{a}x} X_L \text{sen}(\omega t)$$

Circuito RLC en serie

un circuito que contiene un resistor, un inductor y un condensador conectados en serie a las terminales de una fuente de voltaje alterno. Si el voltaje aplicado tiene una variaci3n senoidal con el tiempo, el voltaje instant3neo aplicado es:

$$\Delta v = \Delta V_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t)$$

mientras que la corriente varía como: $I = I_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t + \phi)$ donde ϕ es cierto ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicados.

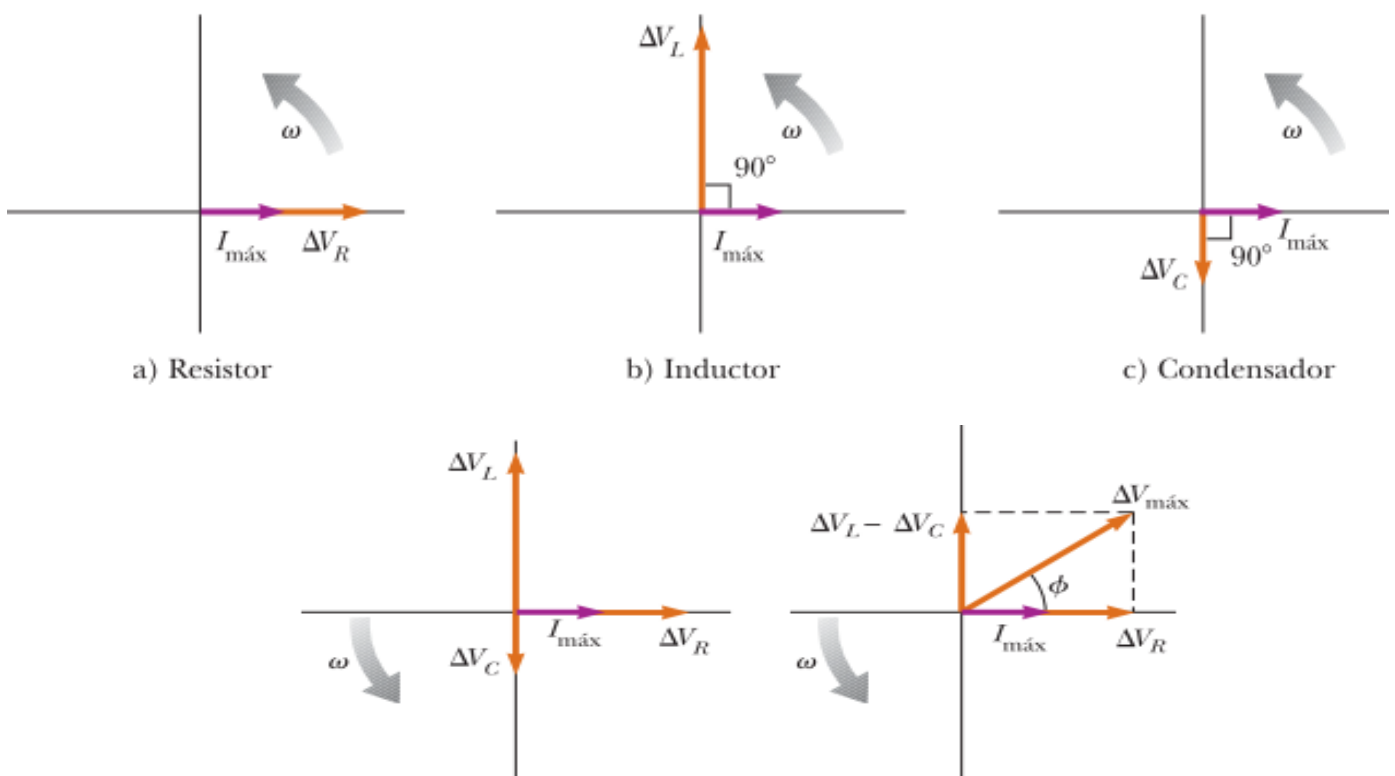
La corriente de un circuito en serie de CA tiene la misma amplitud y fase en cualquier punto. El voltaje en las terminales del resistor est3 en fase con la corriente, el voltaje en las terminales del inductor se adelanta 90° a la corriente y el voltaje en las terminales del capacitor se atrasa 90° a la corriente. Los voltajes instant3neos en las terminales de los tres elementos de circuito se expresan como:

$$\Delta v_R = I_{m\acute{a}x} R \text{sen}(\omega t) = \Delta V_R \text{sen}(\omega t)$$

$$\Delta v_C = I_{m\acute{a}x} X_C \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Delta v_L = I_{m\acute{a}x} X_L \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La suma de los tres voltajes debe ser igual al voltaje de la fuente de CA, pero es importante reconocer que como los tres voltajes tienen diferente correspondencia de fase con la corriente no se pueden sumar directamente. Puesto que los fasores son vectores que giran, combine los fasores de voltaje mediante una suma vectorial. la suma vectorial de los fasores de voltaje. Los fasores de voltaje ΔV_L y ΔV_C est3n en direcciones opuestas a lo largo de la misma lınea, de modo que se puede construir el fasor diferencia $\Delta V_L - \Delta V_C$, que es perpendicular al fasor ΔV_R . Este diagrama muestra que la suma vectorial de las amplitudes de voltaje ΔV_R ; ΔV_L y ΔV_C es igual a un fasor cuya longitud es el m3ximo voltaje aplicado $\Delta V_{m\acute{a}x}$, y que forma un ángulo ϕ con el fasor de corriente $I_{m\acute{a}x}$:



Del triángulo rectángulo se puede obtener $\Delta V_{m\acute{a}x}$:

$$\Delta V_{m\acute{a}x} = \sqrt{(\Delta V_R)^2 + (\Delta V_L - \Delta V_C)^2} = \sqrt{(I_{m\acute{a}x} R)^2 + (I_{m\acute{a}x} X_L - I_{m\acute{a}x} X_C)^2}$$

$$\Delta V_{m\acute{a}x} = I_{m\acute{a}x} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Debido a eso, la corriente máxima se expresa como:

$$I_{m\acute{a}x} = \frac{\Delta V_{m\acute{a}x}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

El denominador de la fracci3n desempeña el papel de resistencia y se llama **impedancia Z** del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Entonces:

$$I_{m\acute{a}x} = \frac{\Delta V_{m\acute{a}x}}{Z}$$

Observe que la impedancia y, por lo tanto, la corriente de un circuito de CA dependen de la resistencia, la inductancia, la capacitancia y la frecuencia.

Por el triángulo rectángulo en el diagrama del fasor, el ángulo de fase ϕ entre la corriente y el voltaje es:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\Delta V_L - \Delta V_C}{\Delta V_R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{I_{m\acute{a}x} X_L - I_{m\acute{a}x} X_C}{I_{m\acute{a}x} R} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)$$

- Cuando $X_L > X_C$ el ángulo de fase es positivo, la corriente se atrasa al voltaje aplicado y el circuito es más inductivo que capacitivo.
- Cuando $X_L < X_C$ el ángulo de fase es negativo, la corriente se adelanta al voltaje aplicado, y el circuito es más capacitivo que inductivo.
- Cuando $X_L = X_C$ el ángulo de fase es cero y el circuito es completamente resistivo.

Potencia en un circuito de CA

La potencia entregada por una batería a un circuito externo de CD es igual al producto de la corriente y al voltaje terminal de la batería. De igual modo, la potencia instantánea entregada por una fuente de CA a un circuito es el producto de la corriente de la fuente y el voltaje aplicado. Para el circuito RLC, la potencia instantánea se expresa como:

$$\mathcal{P} = I \Delta v = I_{m\acute{a}x} \sin(\omega t - \phi) \cdot \Delta V_{m\acute{a}x} \sin(\omega t) \Rightarrow \mathcal{P} = I_{m\acute{a}x} \Delta V_{m\acute{a}x} \sin(\omega t) \sin(\omega t - \phi)$$

La potencia promedio en uno o más ciclos, se puede calcular al usar primero la identidad trigonométrica:

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi)$$

Nos da:

$$\mathcal{P} = I_{m\acute{a}x} \Delta V_{m\acute{a}x} [\sin^2(\omega t) \cos(\phi) - \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\phi)]$$

Ahora considere el tiempo promedio de \mathcal{P} en uno o más ciclos, observe que $I_{m\acute{a}x}$, $\Delta V_{m\acute{a}x}$, ϕ y ω todos son constantes. El tiempo promedio del primer término de la derecha comprende el valor promedio de $\sin^2(\omega t)$, que es $1/2$. El tiempo promedio del segundo término de la derecha del mismo signo es de igual forma cero porque $\sin(\omega t) \cos(\omega t) = 1/2 \sin(2\omega t)$ y el valor promedio de $\sin(2\omega t)$ es igual a cero. Por lo tanto la **potencia promedio** se expresa como:

$$\mathcal{P}_{prom} = \frac{1}{2} I_{m\acute{a}x} \Delta V_{m\acute{a}x} \cos \phi$$

Es conveniente expresar la potencia promedio en términos de la corriente rms y el voltaje rms definidos:

$$\mathcal{P}_{prom} = I_{rms} \Delta V_{rms} \cos \phi$$

Donde la cantidad $\cos \phi$ se denomina **factor de potencia**.

Resonancia en un circuito RLC en serie

Un circuito RLC en serie está en resonancia cuando la frecuencia impulsora es tal que la corriente rms tiene su valor máximo. La corriente rms se puede escribir como:

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{Z} = \frac{\Delta V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

La frecuencia ω_0 a la que $X_L - X_C = 0$ se denomina **frecuencia de resonancia del circuito**. Para hallar ω_0 , use la condición $X_L = X_C$, por la cual obtiene $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$, o sea:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$