

9. Propiedades de la Transformada:

Demostrar: Desplazamiento en el tiempo, convolución.

Propiedades de la Transformada

① Desplazamiento en el tiempo

$$\begin{aligned}
 x(t) &\xrightarrow{F} X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 x(t-t_0) &\xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &\quad \text{llamamos esto } \Delta \\
 &\quad \Delta = t-t_0 \Rightarrow t = \Delta+t_0 \Rightarrow dt = d\Delta + dt_0 \Rightarrow dt = d\Delta \quad \text{constante} \\
 x(t-t_0) &\xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega(\Delta+t_0)} d\Delta \\
 x(t-t_0) &\xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega\Delta} \cdot e^{-j\omega t_0} d\Delta \\
 &\quad \text{constante} \\
 x(t-t_0) &\xrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega\Delta} d\Delta \\
 &\quad \xrightarrow{\quad} X(\omega) \\
 x(t-t_0) &\xrightarrow{F} X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}
 \end{aligned}$$

② Convolución

$$\begin{aligned}
 y(t) &\xrightarrow{F} Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 x(t) * h(t) &\xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &\quad \text{Acomodamos para integrar primero } dt \\
 x(t) * h(t) &\xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \text{esto es la transformada de } h(t-\tau) \text{ y} \\
 &\quad \text{gracias a la propiedad de desplazamiento} \\
 &\quad \text{sabemos que } F\{h(t-\tau)\} = H(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} \\
 x(t) * h(t) &\xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot H(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &\quad \text{constante} \\
 x(t) * h(t) &\xrightarrow{F} H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &\quad \xrightarrow{\quad} X(\omega) \\
 x(t) * h(t) &\xrightarrow{F} H(\omega) \cdot X(\omega)
 \end{aligned}$$