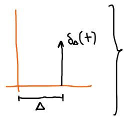
1. Funciones impulso unitario y escalón unitario en tiempo continuo y discreto. Definiciones. Representación incremental. Propiedades del impulso y relación matemática entre ambas señales.

① Impulso unitario.

ⓐ Definición:  señal que vale ∞ cuando $t=0$, y vale 0 cuando $t \neq 0$.

La única condición es que su área vale 1. $\int \delta(t)\, dt = 1$

ⓑ Para poder entender por qué vale ∞, hay que entender la representación incremental del impulso.

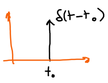


Para que se dé que su área vale 1, la base por la altura debe dar 1.

$$\text{base} \cdot \text{altura} = 1$$
$$\Delta \cdot \text{altura} = 1$$
$$\text{altura} = \frac{1}{\Delta}$$

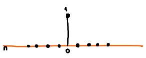
Cuanto más pequeño sea Δ, más grande es la altura, entonces si $\Delta \to 0$, altura $\to \infty$.

Cuanto más pequeño sea Δ, $\delta_\Delta(t)$ tiende a $\delta(t)$. Entonces: $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$

ⓒ Impulso desplazado en el tiempo: 

$$\begin{cases} \infty, & \text{cuando } t = t_0 \\ 0, & \text{cuando } t \neq t_0 \end{cases}$$

ⓓ Impulso en tiempo continuo



$$\delta[n] \begin{cases} 1 & \text{cuando } n = 0 \\ 0 & \text{cuando } n \neq 0 \end{cases}$$

ⓔ Propiedades del impulso

↳ Si multiplicamos una señal por un impulso nos da la señal en el t del impulso multiplicado por el impulso:

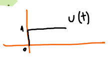
$x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t)$, $x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$

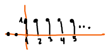
↳ El área de una señal por un impulso es el valor de la señal en el t del impulso.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(0)}_{\text{constante}}\cdot\delta(t)\, dt = x(0)\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\, dt}_{\text{vale } 1} = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

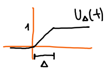
② Escalón unitario.

ⓐ Definición  señal que vale 1 cuando $t>0$ y 0 cuando $t<0$. Hay una discontinuidad en 0.

En tiempo discreto se representa así: 

$$u[n] \begin{cases} 1 & \text{cuando } n \geq 0 \\ 0 & \text{cuando } n < 0 \end{cases}$$

ⓑ Representación incremental



Δ es el tiempo que tarda en pasar de 0 a 1.

$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$

③ Relación matemática entre ambas señales.

ⓐ $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$

ⓑ $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$