8. Transformada de Fourier: deducción a partir de la serie de Fourier. Interpretación gráfica. Condiciones de convergencia.

Par de transformadas de Fourier.

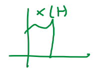
Nos permiten pasar del tiempo a la frecuencia y viceversa, pero sigue siendo la misma señal.

$$x(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} X(w)$$

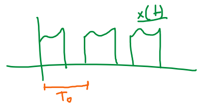
Deducción a partir de la Serie de Fourier

La serie de Fourier es para señales periódicas. Vamos a adaptar este análisis para señales no periódicas.

Supongamos una señal no periódica $x(t)$



Vamos a hacer una señal semejante $\underline{x}(t)$ periódica



Si $T_0 \longrightarrow \infty$, podemos decir que $\underline{x}(t) \longrightarrow x(t)$, y tratar a $x(t)$ como una señal periódica.

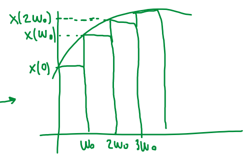
Partimos de la serie de Fourier de $\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}(t) \cdot e^{-jkw_0 t}\, dt}_{X(kw_0)}$$

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \cdot X(kw_0) \cdot e^{jkw_0 t}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kw_0) \cdot e^{jkw_0 t} \cdot w_0$$



Interpretación Gráfica

cuanto más pequeño sea w_0, $\underline{x}(t) \rightarrow x(t)$:

$$\sum \rightarrow \int \qquad kw_0 \rightarrow w \qquad w_0 \rightarrow dw \qquad \underline{x}(t) \rightarrow x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) \cdot e^{jwt}\, dw$$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jwt}\, dt$$

Condiciones de Convergencia

En un intervalo finito T_0:

ⓐ Debe ser integrable $\int_{T_0} |x(t)|\, dt < \infty$

ⓑ Cantidad finita de máx y min.

ⓒ Cantidad finita de discontinuidades