Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba

Ingeniería en Sistemas de Información

<u>Análisis Numérico</u>

Resumen Teórico-Práctico

2025

Índice

Introducción--5

Unidad 1: Introducción a las Señales y los Sistemas --6

Señales y Sistemas--7

Transformaciones de la variable Independiente --7

Impulso Unitario δ (t) --7

Propiedades del Impulso en Tiempo Continuo---7

Representación Incremental del Impulso Unitario --8

Escalón Unitario u(t)--8

Propiedades del Escalón en Tiempo Continuo ---8

Representación Incremental del Escalón Unitario---8

Relación de Impulso Unitario con Escalón Unitario ---9

Considerando desplazamiento del intervalo de integración---9

Impulso Escalado ---10

Impulso y Escalón en Tiempo Discreto ---10

Unidad 2: SLIT – Convolución en Tiempo Continuo y Discreto ---11

Propiedades de los Sistemas --11

Descomposición de una señal cualquiera en Combinación Lineal de Señales Básicas-----------------------12

Convolución ---15

Escudriñamiento de Señal de Entrada y Convolución en Tiempo Discreto -------------------------------------15

Propiedades de la Convolución--16

Condiciones que debe cumplir h(t) de un SLIT para cumplir con propiedades: SM – I – E – C-------------17

Unidad 3: Análisis de Fourier en Tiempo Continuo (Serie, Transformada y E.D. Mediante Fourier) ------18

Repaso de Números Complejos ---18

Señal Básica Exponencial Compleja --18

Definición y Demostración del Período Fundamental ---19

Exponenciales Complejas Imaginarias Puras Armónicamente relacionadas en T----------------------------21

Serie de Fourier--21

Determinación de Coeficientes ‘$\boldsymbol{ak}$’ --21

Convergencia de la Serie de Fourier--24

Condiciones de Dirichlet ---24

Transformada de Fourier en Tiempo Continuo---25

Desarrollo de fórmulas de la Transformada de Fourier en Tiempo Continuo----------------------------------25

Propiedades de la Transformada de Fourier (nombramiento y demostración) ------------------------------28

Coeficientes de la Serie de Fourier como muestras de la Transformada en un periodo -----------------------31

Ejercicio Teórico Integrador de Transformada de Fourier ---31

Unidad 4: Análisis de Fourier en Tiempo Discreto ---------- **33**
Periodicidad en el tiempo ---------- 33
Periodicidad en la frecuencia ---------- 33
Funciones Armónicas en Tiempo Discreto ---------- 34
Serie de Fourier en Tiempo Discreto ---------- 36
Desarrollo de fórmulas de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto ---------- 36
Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (TFTD) ---------- 36
Anti Transformada de Fourier en Tiempo Discreto ---------- 37
Transformada Discreta de Fourier (TDF o DFT) ---------- 37
Anti Transformada Discreta de Fourier ---------- 38
Relación de la TDF con la Serie de Fourier ---------- 38
Transformada Rápida de Fourier (FFT) ---------- 39
Convolución FFT ---------- 39
Unidad 5: Muestreo de Señales Analógicas y Diseño de Filtros FIR ---------- **40**
Clasificación de Filtros ---------- 41
Filtro de Media Móvil ---------- 42
Filtro Pasa Bajo en Frecuencia - Senc de Ventanas ---------- 42
Procedimiento ---------- 42
Filtros Digitales ---------- 45
Filtro Pasa Alto: Inversión Espectral ---------- 45
Filtro Pasa Alto: Reversión Espectral ---------- 46
Filtro Pasa Banda ---------- 47
Filtro Rechaza Banda ---------- 47
Muestreo de Señales ---------- 48
Teorema de Muestreo ---------- 49
Muestreo de señales analógicas y relación con la Transformada Discreta de Fourier (TDF) ---------- 50
Frecuencia de Nyquist ---------- 51
Efecto del enventanado en el muestreo – Funciones de ventana ---------- 51
Unidad 6: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) ---------- **53**
Sistemas de ecuaciones lineales: ---------- 53
Aproximación o Ajuste de una Curva por el Método de Mínimos Cuadrados ---------- 54
Método de Mínimos Cuadrados ---------- 54
Minimización del funcional de desviación → Obtención de los coeficientes ---------- 54
Unidad 7 - Ecuaciones No Lineales ---------- **56**
Raíces de la función ---------- 56
a) Aislamiento de las raíces ---------- 56
b) Aplicación del método para hallar las raíces ---------- 57

1. Método Iterativo de Punto Fijo o Aproximaciones Sucesivas ---------------------------------- 57
2. Método Indirecto de Newton-Raphson -- 58
Interpretación gráfica del método: -- 59
Convergencia Cuadrática de Newton-Raphson --- 60
¿Hasta cuándo se ejecuta Newton-Raphson?-- 60
Unidad 8: Ecuaciones Diferenciales-- 61
Soluciones de una Ecuación Diferencial -- 61
Ejemplo de planteamiento de ejercicio de una EDO de 1er Orden con CI --------------------------- 61
Métodos Numéricos de Runge-Kutta (Directos) -- 62
Método de Euler -- 62
Método de Euler Mejorado: -- 63
Método de Runge-Kutta de 4to Orden -- 64
Resolución de ejemplo de planteamiento de ejercicio de una EDO de 1er Orden con CI-------------------- 64
Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias -- 65
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior con C.I.--- 66

Introducción

Este apunte fue desarrollado con el fin de servir como un único apunte de estudio teórico para el examen final regular de Análisis Numérico de 2025, de manera personal.

Para la realización de este apunte, se tuvieron en cuenta las clases grabadas teórico-prácticas de 2021 de las profesoras *Santillán, Marcela* y *Garay, Marcela* (con aportes del práctico al teórico), junto con las PPTs actualizadas de la materia de 2024, el libro Oppenheim, y ciertos agregados del resumen que ya circulaba de la materia.

Además de la teoría y desarrollos exigidos, se incluyeron en este apunte, acotaciones en lenguaje coloquial que ayudan aún más a la comprensión de los temas explicados.

Desarrollo de Unidades

Contenidos a continuación:

- Unidad 1: **Introducción a las Señales y los Sistemas**
- Unidad 2: **SLIT - Convolución en Tiempo Continuo y Discreto**
- Unidad 3: **Análisis de Fourier en Tiempo Continuo (Serie, Transformada y Ecs. Dif. Mediante Fourier)**
- Unidad 4: **Análisis de Fourier en Tiempo Discreto**
- Unidad 5: **Muestreo de señales analógicas y diseño de filtros FIR**

Unidad 1: Introducción a las Señales y los Sistemas

Las ***señales*** son funciones de una o más variables dependientes, en función de una o más variables independientes, que pueden contener información acerca de la naturaleza de algún fenómeno físico. Estas pueden variar de forma continua en el tiempo o representar su evolución en forma de puntos discretos del tiempo.

x(t) -> SISTEMA -> y(t)

Los ***sistemas*** son procesos por los cuales la señal de entrada x(t) se transforma en una señal de salida y(t).

- Pueden procesar señales de maneras particulares, por ejemplo, restaurar señales que han sido degradadas.
- Se pueden modificar las características de un sistema utilizando el concepto de retroalimentación.

El análisis de señales y sistemas puede ser para fenómenos y procesos:

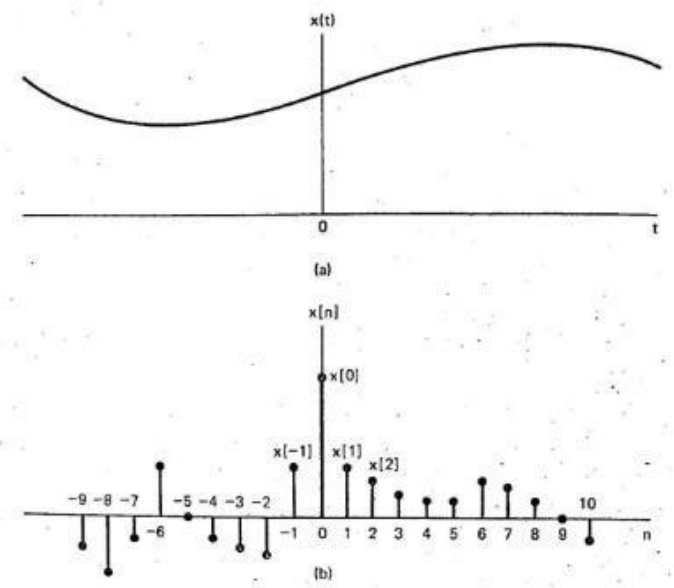


Figura 2.6 Representaciones gráficas de señales de (a) tiempo continuo y (b) tiempo discreto.

- Descritos en ***tiempo continuo***, cuya raíz corresponde a la física. La variable independiente es continua, por lo que las señales están definidas para una sucesión continua de valores de la variable independiente.
- Descritos en ***tiempo discreto***, cuya raíz corresponde al análisis numérico o la estadística. La variable independiente toma sólo un conjunto de valores discretos, y la señal representa “muestras” sucesivas del fenómeno en el cual la variable independiente es continua

Con relativas restricciones se puede convertir una señal de tiempo continuo en una señal de tiempo discreto.

Señales y Sistemas

Señal de tiempo continuo **x (t)** con t = tiempo (variable independiente)
Señal de tiempo discreto **x [n]** con n = tiempo (variable independiente)

El símbolo ***t*** denota la variable de tiempo continuo y ***n*** la variable de tiempo discreto. Para las señales de tiempo continuo encerraremos la variable independiente en paréntesis **( )**, mientras que para la variable independiente de las señales de tiempo discreto se usan corchetes **[ ].**

Una señal de tiempo discreto x[n] puede representar un fenómeno para el cual la variable independiente es inherentemente discreta.

Una señal de tiempo discreto x[n] puede representar muestras sucesivas de un fenómeno subyacente para el cual la variable independiente es continua. La señal x[n] está definida sólo para valores enteros de n.

Transformaciones de la variable Independiente

A partir de una señal de tiempo continuo, se pueden generar otras señales, introduciendo modificaciones que afectan la variable independiente t. Existen tres operaciones básicas:

Desplazamiento en el tiempo x(t – to): Consiste en restar o sumar una constante (to) a la variable independiente t, generando una nueva señal, que mantiene la forma de la señal original, pero desplazada a la derecha o izquierda, en el eje de t.

Escalamiento x(a.t): (NO LO USAMOS PARA TIEMPO DISCRETO) Se multiplica la variable independiente por una constante **a** y esto produce un ensanchamiento o acortamiento en la forma de la señal, dependiendo si el valor de la constante es mayor o menor a 1. La reducción en los intervalos de tiempo debe realizarse siempre partiendo del origen (t=0), hacia la derecha (valores positivos de t) y a la izquierda (valores negativos de t).

Reflexión x(-t): Cuando se introduce un cambio de signo en la variable independiente t.

(- to) desplaza a la derecha
(+to) desplaza a la izquierda

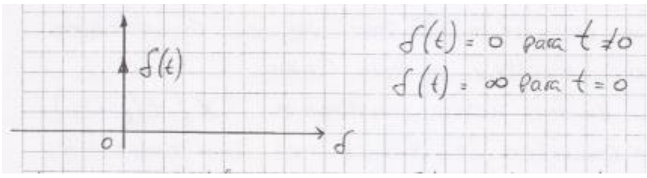
Estas operaciones pueden combinarse, para eso, se van realizando de a una a la vez <u>en el siguiente orden</u>:

1. Desplazamiento
2. Escalamiento
3. Reflexión.

<u>Lifehack:</u> todos los puntos del gráfico original se dividen por la constante **a** dando así los nuevos puntos del nuevo gráfico. Si a > 1 el gráfico se achica y si 0< a < 1 el gráfico se agranda.

Impulso Unitario δ(t)

Es una señal cuyo único valor no nulo se produce para t=0 y su valor es infinito en t=0. Su área es siempre 1.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

<u>Propiedades del Impulso en Tiempo Continuo</u>

Producto con señal x(t): $x(t).\delta(t)=x(0).\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t)dt = x(0)$$

Desplazado: $x(t).\delta(t–t0) = x(t0).\delta(t–t0)$

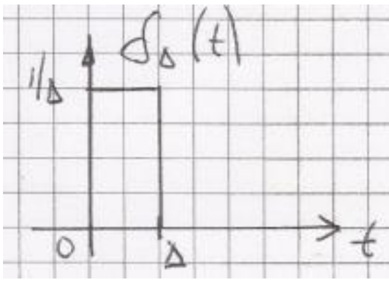
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t0)dt = x(t0)$$

Producto con señal x(t): Afecta solo al valor de x(t) para t=0, y como x(0) es cte, lo saco de integral y uso impulso.

Desplazado: Si desplazo en el tiempo "t0", obtengo un **impulso desplazado en el tiempo** "δ(t–t0)".

Representación Incremental del Impulso Unitario

Este impulso unitario δ(t) se visualiza con el impulso unitario incremental δΔ(t), que es un pulso rectangular de duración finita Δ y altura finita 1/Δ, conservando así el área = 1:



$$\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}; \quad \text{Para } 0 \le t \le \Delta$$

$$\delta_\Delta(t) = 0, \quad \text{Para otros } t.$$

Entonces definiendo al impulso δ(t) a partir de δΔ(t), resulta:

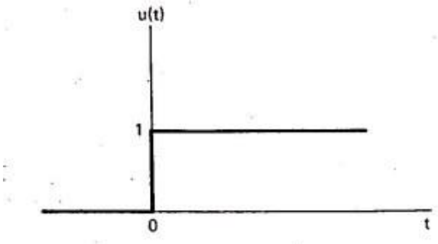
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Si Δ → 0, 1/ Δ → ∞, nos encontraríamos con δ(t)

Representado incrementalmente, el impulso unitario es infinitamente angosto (en eje X) e infinitamente alto (en eje Y).

Escalón Unitario u(t)

Es una señal básica de tiempo continuo que es discontinua en t=0.

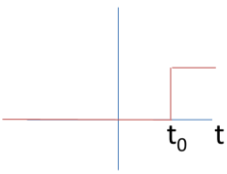


$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Propiedades del Escalón en Tiempo Continuo

Desplazado:

Escalón Unitario desplazado en el tiempo: $U(t - t_0)$



$$\begin{cases} 1 \text{ para } t \ge t_0 \\ 0 \text{ para } t < t_0 \end{cases}$$

Representación Incremental del Escalón Unitario

UΔ(t) es una aproximación continua al escalón unitario.

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u\Delta(t)$$

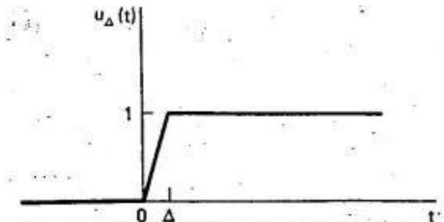


Figura 2.19 Aproximación continua al escalón unitario.

Relación de Impulso Unitario con Escalón Unitario

Ambos se relacionan mediante la siguiente ecuación, donde se utiliza el 'tao' para no repetir la letra 't' como variable independiente dentro de la integral: $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$ Aquí u(t) es la integral de la función impulso unitario.

De esta ecuación entendemos que consecuentemente, al derivar u(t) obtenemos el impulso: $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

Si ahora consideramos u(t) como el límite de una función continua, usamos la <u>representación incremental del escalón unitario</u>. Con dicha definición, reescribimos la derivada anterior como: $\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$

Y si ahora graficamos esta última ecuación tendremos:

En este gráfico $\delta\Delta(t)$ tiene un área unitaria para cualquier valor de Δ y es cero fuera del intervalo $0 \leq t \leq \Delta$. Conforme $\Delta \rightarrow 0$, $\delta\Delta(t)$ se hace más angosta y más alta manteniendo el área unitaria.

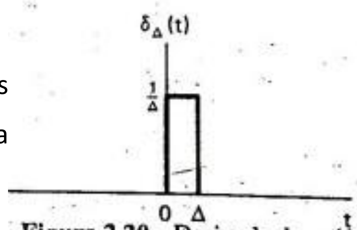


Figura 2.20 Derivada de $u_\Delta(t)$.

<u>Considerando desplazamiento del intervalo de integración</u>

Si reemplazamos 'tao' de la ecuación que relaciona impulso con escalón, por 't – σ(sigma)', obtenemos:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t - \sigma)(-d\sigma)$$

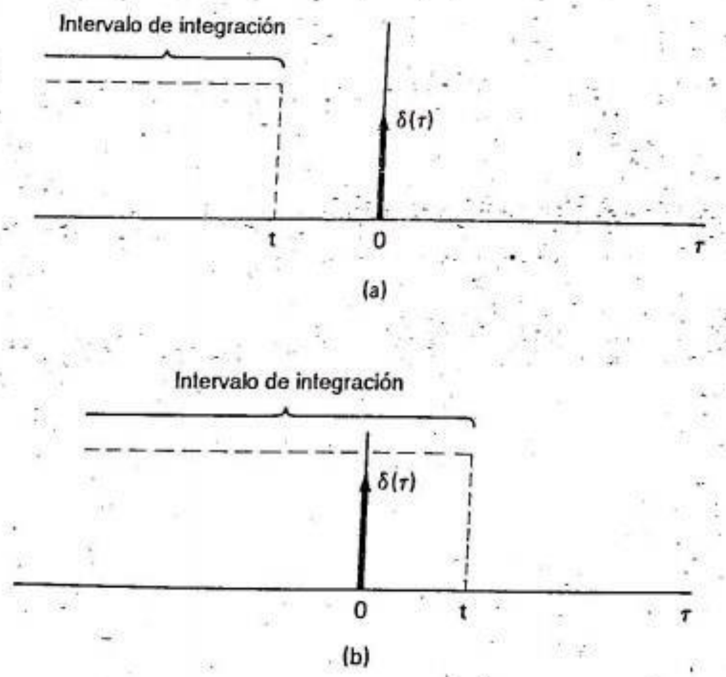


Figura 2.23 Integral dada en la ecuación (2.19): (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

Impulso Escalado

Un impulso escalado kδ(t) tendrá un área 'k', y el valor en t=0 es infinito pero la altura de la flecha que representa el impulso escalado, representa su área:

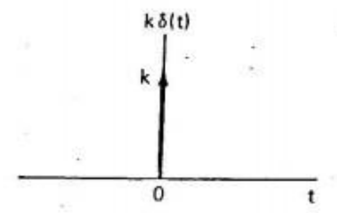


Figura 2.22 Impulso escalado.

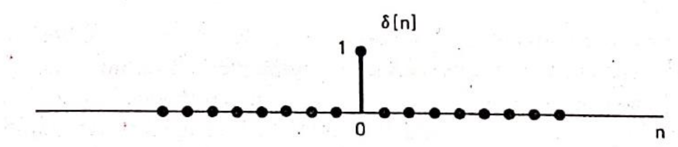
$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)\, d\tau = ku(t)$$

Impulso y Escalón en Tiempo Discreto

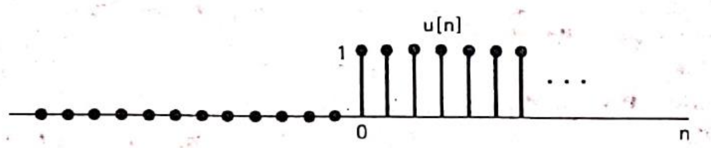
$$x[n].\delta[n] = x(0).\delta[n]$$

Impulso: δ[n] será 1 para n=0 y será 0 para n!=0.

Es simple, si multiplicamos el impulso por una señal x[n], el resultado será el valor de la señal en 0.



Escalón: u[n] será 1 para n>=0 y será 0 para n<0



Unidad 2: SLIT – Convolución en Tiempo Continuo y Discreto

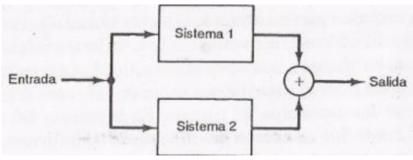
Un ***sistema de tiempo continuo*** es aquel en el que las señales de entrada de tiempo continuo son transformadas en señales de tiempo continuo.

Un ***sistema de tiempo discreto*** transforma entradas de tiempo discreto en salidas de tiempo discreto.

Un ***Sistema complejo*** es la conexión de sistemas más elementales, las cuales pueden ser interconexiones:

- ***En serie o cascada***: conocidos como diagramas de bloque donde la salida de un ***sistema 1*** es la entrada de un ***sistema 2***.

- ***En paralelo o suma***: donde la misma señal de entrada se aplica al ***Sistema 1*** y al ***Sistema 2***.



Se pueden combinar ambas interconexiones para tener un sistema mucho más complejo.

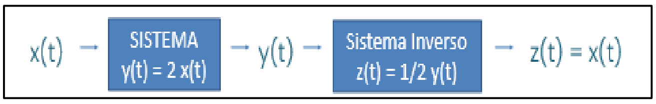
En una ***Interconexión de retroalimentación*** se produce retroalimentación en el sistema, es decir, la salida que se produce es la nueva entrada en el sistema.

Propiedades de los Sistemas

- **Sistemas con/sin memoria:** Un Sistema es sin memoria, si la salida en un instante de tiempo t, depende de la entrada en el mismo instante de tiempo t. Un sistema sin memoria simple es el sistema identidad cuya salida es idéntica a su entrada.

Ejemplo 'con memoria': y(t)=x(t-1)

- **Invertibilidad**: Para que un sistema sea invertible, a cada entrada diferente la respuesta es diferente, por lo que a partir de la salida se puede identificar la entrada, si se cumple que a la señal de salida y(t) le aplicamos otro Sistema (Sistema Inverso), arroja por salida nuestra entrada original x(t).



- **Causalidad**: Un Sistema es causal, si los valores de la salida en un instante de tiempo t, depende de los valores de la entrada en el mismo instante de tiempo t o tiempos anteriores (sistema no anticipativo, ya que la salida no anticipa valores futuros de entrada). Por esto si un sistema es causal es con memoria.

Causal $y(t) = x(t) - x(t-1)$

No causal $y(t) = x(t) - x(t+1)$

- **Estabilidad**: cuando la entrada es acotada (es decir, si su magnitud no crece de forma ilimitada), la salida también lo es. Las entradas conducen a respuestas que no divergen.

El siguiente ejemplo no es estable

si la entrada es $x(n) = u(n)$ escalón unitario en tiempo discreto

el valor máximo es 1 (entrada acotada y limitada)

si la salida es $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

$y(0)=1$ $y(1)= 1+1$ $y(2) = 1+1+1$ $y(3) = 4$ … $y(1000)=1001$

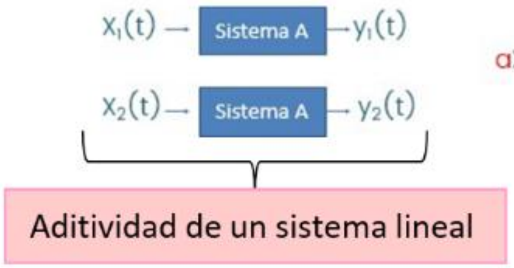
La entrada es acotada en cambio la salida crece indefinidamente.

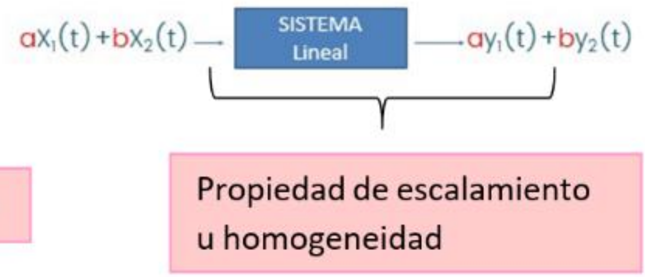
- **Invarianza en el tiempo**: Un Sistema es invariante en el tiempo, cuando hay un desplazamiento en el tiempo en la entrada, se produce el "mismo" desplazamiento en la salida.

- **Linealidad**: Si conocemos dos entradas de un sistema y sus respectivas salidas, un Sistema va a ser lineal si se cumple con el Principio de superposición. En los sistemas lineales una entrada 0 da una salida 0 (excepto cuando hay una suma).

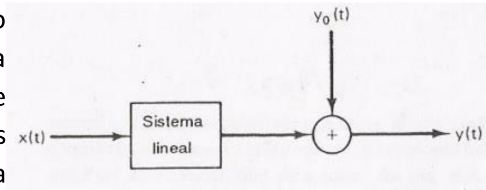
Un sistema puede ser lineal sinser invariante en el tiempo. Y puede ser invariante sin ser lineal.

  - **Principio de Superposición**: La respuesta a una combinación lineal de las entradas será la "misma" combinación lineal aplicada a las salidas. Es decir, si la entrada al sistema es una suma de varias señales, entonces la salida es la superposición (la suma de las respuestas del sistema a cada una de estas señales).





Un **sistema incremental lineal** de tiempo continuo o discreto es aquel que responde de manera lineal a cambios en la entrada. Es decir, la **diferencia** (resta) entre las respuestas de un sistema incremental lineal a cualquiera de dos entradas es una función lineal (aditiva y homogénea) de la diferencia entre las dos entradas.

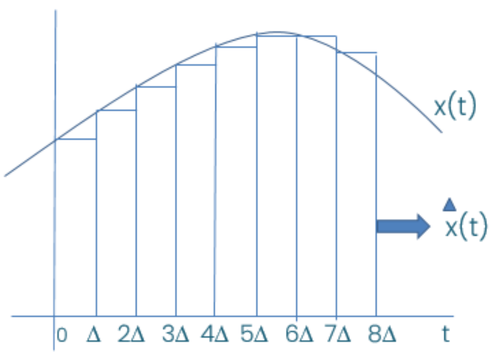


La respuesta del sistema es igual a la suma de la respuesta de un sistema lineal y otra señal que no es afectada por la entrada.

Descomposición de una señal cualquiera en Combinación Lineal de Señales Básicas

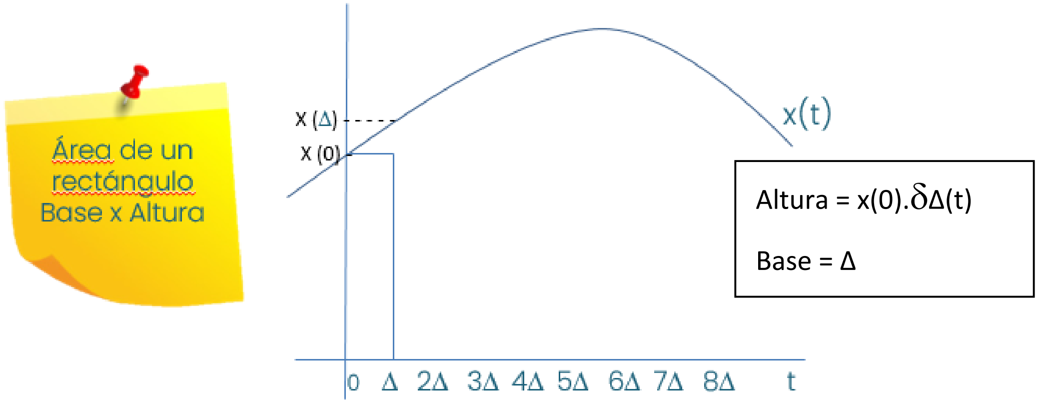
Una Señal cualquiera en tiempo continuo x(t) puede ser representada como una Combinación Lineal (o "Sumatoria Ponderada") de impulsos (en representación Incremental) desplazados en el tiempo, cuyos pesos o alturas son los valores de x(kΔ) por Δ (donde Δ es el incremento). *(Recordar la representación incremental del impulso)*.

El impulso unitario se puede utilizar como un bloque elemental para construir muchas señales de tipo general.



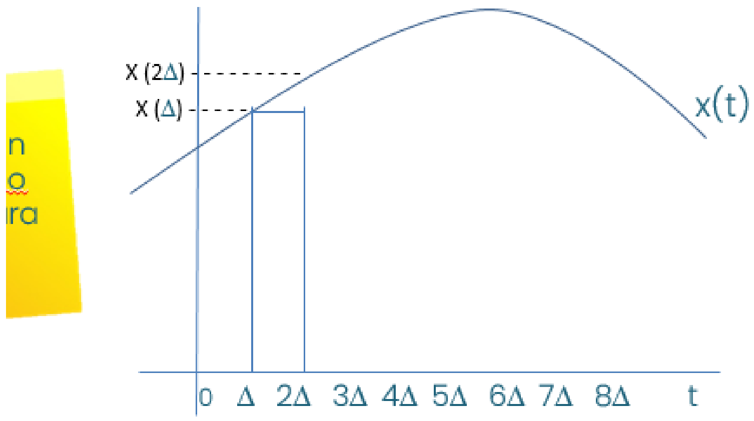
Nosotros queremos formar a $\hat{x}(t)$ ('x sombrero de t') que no es mi señal original, sino una **aproximación** a dicha señal. Es importante mirar siempre el 'extremo superior izquierdo' de cada rectángulo, ya que ahí estará marcada la altura de mi impulso en representación incremental.

Veamos paso a paso: El primer impulso no está desplazado, y por lo tanto x(0) representa el punto en la función x(t) que determinará la altura de mi impulso, pero al ser 'punto suelto' no me sirve ya que necesito el impulso en dicho punto, y por eso, lo multiplico por $\delta_\Delta(t)$, donde queda:



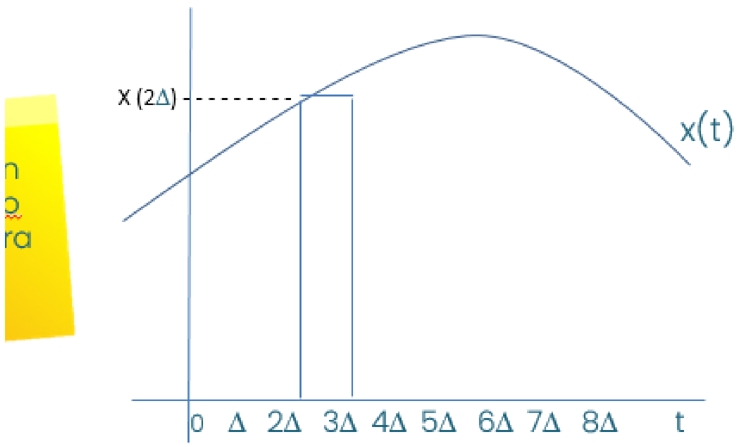
El primer impulso sería: $x(0).\ \delta_\Delta(t).\ \Delta$

Para el segundo impulso, misma lógica, donde el punto ahora está en x(Δ), y el impulso es el que está desplazado 'en Δ hacia la derecha' (por eso el signo '-'). La base no cambia, pero la altura sí, debido al desplazamiento:



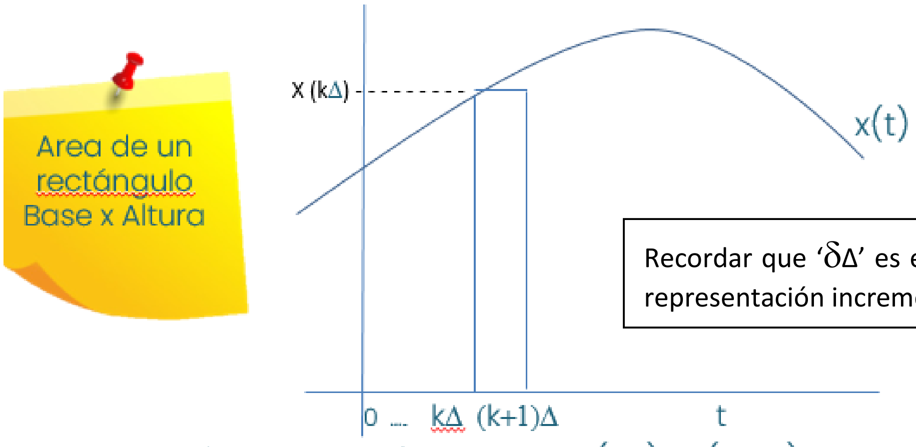
segundo impulso sería: $x(\Delta).\ \delta_\Delta(t-\Delta).\ \Delta$

Y el tercer impulso quedaría:



tercer impulso sería: $x(2\Delta).\ \delta_\Delta(t-2\Delta).\ \Delta$

Considerando todo esto, podemos definir a un impulso de manera general llamado **k**, en representación incremental, que forma $\hat{x}(t)$, y está desplazado en **kΔ**, de la siguiente forma:



Recordar que 'δΔ' es el impulso en representación incremental.

El k impulso sería: $x(k\Delta).\ \delta_{\Delta}(t-k\Delta).\ \Delta$

Ahora tomando esta última definición, formalmente **representamos a una señal cualquiera mediante una combinación lineal de impulsos (o 'señales básicas')**:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta).\ \delta_{\Delta}(t-k\Delta).\ \Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = x(t)$$

Ahora lo más **importante**, es cuando Δ -> 0, ya que ocurren los siguientes hechos:

- Lo discreto tiende a lo continuo, ya que al achicar 'Δ', éste deja de tener valores discretos.
- kΔ tiende a 'τ' o 'z' ('tao' (variable continua)), que es el nuevo valor que surge de achicar 'Δ'.
- La sumatoria de áreas se convierte en una integral.
- Como Δ no es 0 (tiende a 0), por concepto de diferencial, Δ se convierte en 'dτ' o 'dz'.
- Como Δ tiende a 0, por definición, obtenemos δ(t) a partir de δΔ(t).

Reemplazando todos los valores nuevos, obtenemos el conocido **Escudriñamiento de la señal de entrada en tiempo continuo**:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ .\ \delta(t-\tau)\,d\tau$$

El signo '-' implica que la variable 'z' está reflejada, y 't' es mi desplazamiento.

Ahora bien, esta es mi señal de entrada, y a mí me interesa la salida de la misma. Como tengo un SLIT:

- Cuando la entrada está desplazada, la salida también lo estará, en el mismo instante de tiempo (por la propiedad de Invarianza en el tiempo).
- Como tengo una combinación lineal en la señal de entrada, por el principio de superposición (de la propiedad de Linealidad), puedo armar la misma combinación lineal.

Entonces obtenemos un concepto fundamental: **En sistemas lineales se cumple el principio de superposición cuando la respuesta a una combinación lineal de entradas, será la 'misma' combinación lineal aplicada a las salidas.**

Todo esto fue en referencia a la 'entrada' (x(t)), pero ahora necesito analizar la salida (y(t)), y ahí aparece el concepto de Convolución.

Convolución

Se define como una nueva operación que se realiza entre dos señales y utilizamos el símbolo ***** para identificarla: y(t) = x(t) * h(t).

La convolución de tiempo continuo es conmutativa, asociativa y distributiva, aunque estas propiedades son particulares de los sistemas LTI.

Si en un SLIT, la entrada es el Impulso unitario, la salida la llamaremos '<u>respuesta al impulso h(t)</u>' (siempre):

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{\text{SLIT}} \rightarrow h(t)$$

<u>Un SLIT está completamente caracterizado por **la respuesta al impulso h(t)**</u> (por eso lo pongo dentro del cuadradito del SLIT):

$$x(t) \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h(t)\end{matrix}} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Por lo tanto lo único que debo hacer para obtener la <u>**integral de convolución**</u>, es reemplazar al impulso por h(t) en la fórmula del escudriñamiento, donde me quedaría:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,.\,\delta(t-\tau)\,d\tau \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h(t)\end{matrix}} \rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,.h(t-\tau)\,d\tau$$

<u>x(***t***) es la señal de entrada</u> en donde cambia la variable t → ***z***

h(t) es la señal que me dan, donde se cambia por h(t-z)

h(t-***z***)es una señal que va a estar reflejada y desplazada en el tiempo en **t**

x(t) es una suma de impulsos ponderados y desplazados, donde el peso en el impulso δ(t-z) es "x(t).δ(t)", por lo que, la integral de convolución representa la superposición de las respuestas a cada una de estas entradas y, por linealidad, el peso en la respuesta h(t) con respecto al impulso desplazado δ(t-z) también es "x(t).δ(t)".

Escudriñamiento de Señal de Entrada y Convolución en Tiempo Discreto

Una Señal cualquiera en tiempo discreto x[n] puede ser representada como una Combinación Lineal (o "Sumatoria Ponderada") de impulsos desplazados en el tiempo, cuyos pesos o alturas son los valores de x[k] (casi la misma definición de antes):

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,.\,\delta[n-k]$$

En el tiempo discreto, se cumple lo mismo, y la salida y[n] del SLIT ante la C.L. de x[n] es la C.L. de las salidas, con los mismos desplazamientos en n:

<u>Suma de Convolución</u>

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,.\,\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h[n]\end{matrix}} \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,.\,h[n-k]$$

Propiedades de la Convolución

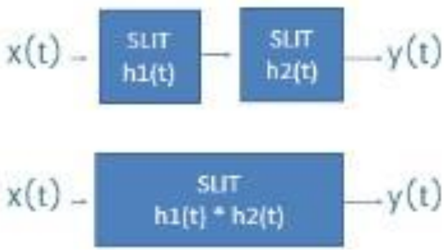
1) Propiedad Conmutativa: $y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) . h(t-\tau)\, d\tau} \longrightarrow \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) . x(t-\tau)\, d\tau}$$

2) Propiedad Asociativa: $y(t)=x(t) * h1(t) * h2(t)$

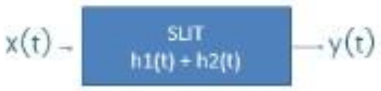
$$y(t)=[x(t) * h1(t)] * h2(t)$$

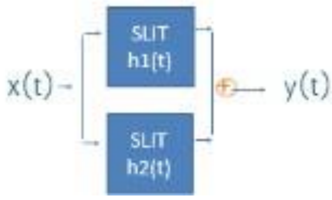
$$y(t)= x(t) * [h1(t) * h2(t)]$$



3) Propiedad Distributiva respecto de la Suma o Resta:

$y(t)=x(t) * [h1(t) + h2(t)]$ $\quad$ $y(t)=[x(t) * h1(t)] + [x(t) * h2(t)]$





4) <u>Propiedad del Impulso como Elemento Neutro de la Convolución:</u>

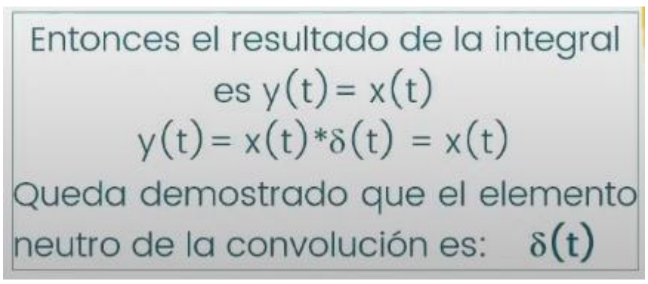
$$\boxed{x(t).\delta(t-t0) = x(t0).\delta(t-t0)}$$

Primero es importante diferenciar 3 cosas:

- Una cosa es multiplicar una señal por un impulso (me da una señal con forma de impulso escalado que tiene el valor de la señal donde se encuentre el impulso, que puede estar desplazado).
- Una cosa es integrar una señal multiplicada por un impulso (me da un número que representa el valor de la señal donde se encuentre el impulso).
- Una cosa es convolucionar una señal con un impulso.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t0)dt = x(t0)}$$

La integral de -infinito a infinito de una señal por un impulso es la señal valuada en donde está el impulso.



- ➔ $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- ➔ $x(t) * \delta(t-t0) = x(t-t0)$
- ➔ $x(t) * a.\delta(t) = a.x(t)$

Condiciones que debe cumplir h(t) de un SLIT para cumplir con propiedades: SM – I – E – C

(SM (Sin Memoria) - I (Ser Invertible) - E (Ser Estable) - C (Ser Causal)) y (h(t) = "Respuesta al Impulso")

1) Sin Memoria: El h(t-z) dentro de la Integral de Convolución debe cumplir con lo expuesto a continuación, ya que tiene sentido porque el impulso unitario solo es distinto de cero cuando en el eje "z", z=t, siendo t donde se encuentra ubicado el impulso unitario (no importa su altura 'k').

En $h(t-\tau)$ necesitamos que :

$h(t-\tau) = 0 \quad t \neq \tau$

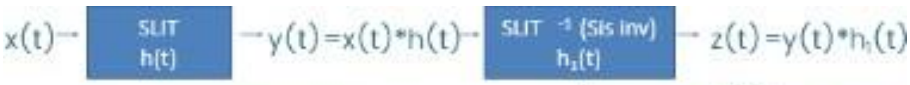
$h(t-\tau) \neq 0 \quad t = \tau$

La única señal que responde a estas condiciones es el impulso unitario por lo tanto:

$$h(t) = \delta(t)\,.\,k$$

Un impulso de altura k

2) Ser Invertible: Por prop. Asociativa, no necesito calcular y(t) para demostrar esto, directamente convoluciono h(t) con h1(t), que es el 'h' del sistema invertido, y ya demuestra que con impulso x(t)=z(t).



$$z(t) = x(t) * h(t) * h_1(t)$$

Para que el Sistema sea invertible $z(t) = x(t)$

Por lo tanto debe cumplir con la siguiente condición:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

3) Ser Estable: Implica que la integral de 'h', siendo 'h' la que 'dejo fija', sea convergente,

Integral de Convolución y la propiedad conmutativa

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,.h(t-\tau)\,d\tau \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\underbrace{.x(t-\tau)}_{\beta}\,d\tau$$

Recordemos:
Propiedad Estabilidad:
Entradas acotadas,
Salidas acotadas (que no tiendan al infinito)

Si definimos una Entrada acotada: $|x(t)| < \beta \Rightarrow |x(t-\tau)| < \beta$
tomamos para $x(t-\tau)$ el mayor valor posible que puede adoptar para todo t;
este valor es β y trabajamos con la integral de convolución conmutada

$$|y(t)| \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,.\beta\, d\tau\right| \Rightarrow |y(t)| \leq \left|\beta \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,.d\tau\right| \Rightarrow$$

Beta es el mayor número que toma x(t)

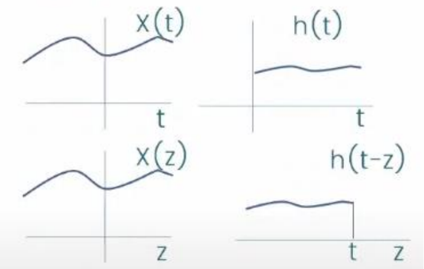
Para que la salida sea también acotada, la condición a cumplir es:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,.d\tau\right| \leq \infty$$

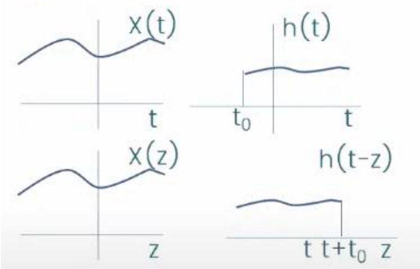
Absolutamente Integrable

4) Ser Causal: "Es causal cuando h(t) está desplazado a la <u>DERECHA</u>. h(t) a la izquierda NO ES CAUSAL".

Ejemplo de Sistema causal:



Ejemplo de Sistema NO causal:



Para que el sistema sea causal, la respuesta al impulso debe cumplir:

$h(t) \neq 0 \quad t \geq 0$

$h(t) = 0 \quad t < 0$

Unidad 3: Análisis de Fourier en Tiempo Continuo (Serie, Transformada y Ecs. Dif. Mediante Fourier)

Repaso de Números Complejos

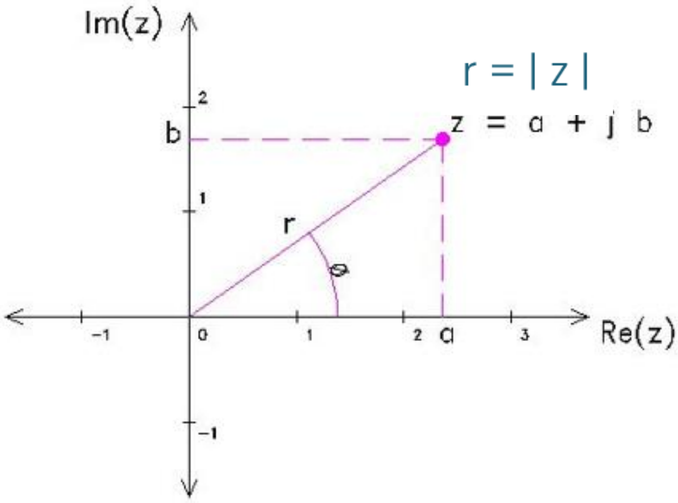
Representación analítica:

- Cartesiana o rectangular: “**Z = a + j . b”** donde a y b son números reales y j = “Raíz de -1”

Por identidades trigonométricas se cumple:

sen(θ) = b / |Z|; cos(θ) = a / |Z|; tg(θ) = b / a

Además podemos representar al número complejo conjugado mediante: **Z* = a - j . b**



- Polar: **“**Z = |Z|.(cos(θ) + j |Z| sen(θ))**”** donde la forma definitiva de la Forma Polar es “**Z = |Z|. e^jθ**” debido a que ‘cos(θ) + j . sen(θ)’ = ‘e^jθ’, y el complejo conjugado es **Z* = |Z|. e^-jθ.**

- Forma de Euler: **“e^jθ”** y el conjugado es “**e^-jθ**” (‘cos(θ) - j . sen(θ)’) donde es importante considerar 2 casos. En el primero sumo un número complejo (en Forma de Euler) con su conjugado, y en el segundo caso le resto su conjugado, quedando así:

(Así quedan cuando despejo del 1er y 2do Caso) ->

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

Último paso: ‘Cambio de variables porque al libro le pintó’ ->

$Z=a\ ;\ a=r\ ;\ b=\omega_0$

Nueva Forma Cartesiana
$a = r + j\omega_0$

Señal Básica Exponencial Compleja

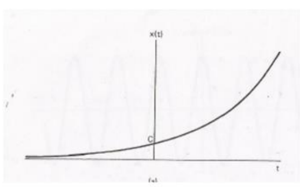
Ahora al impulso y escalón unitario, se les suma una nueva señal básica llamada ‘Exponencial Compleja’. Sirven como bloques básicos para construir con ellos otras señales y así entenderlas mejor.

$$\text{Forma Genérica de la señal } (t) = c.e^{at}$$

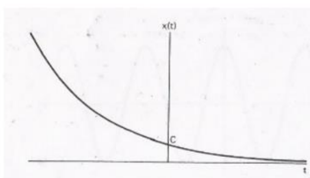
Esta ‘Forma Genérica tiene 3 casos particulares:

1) **Exponencial Real (‘c’ y ‘a’ son reales)**: (Esta es muy fácil y no la solemos usar)

(corta al eje Y en ‘c’)



a > 0



a < 0

Con a = 0; sería una constante c

Defino 'c' y 'a' de la siguiente forma, donde ambos son números imaginarios 'completos':

c: forma polar $c = |c|\, e^{j\theta}$

a: forma cartesiana $a = r + j\omega_0$

2) **Forma General**: (Esta es muy difícil y no la vamos a usar)

Ahora reemplazo en la ‘Forma Genérica’ a ‘c’ y ‘a’:

$$x(t) = |c|\,.\,e^{j\theta}\,.\,e^{(r+j\omega 0).t}$$

$$x(t) = |c|\,.\,e^{j\theta}\,.\,e^{rt}\,.\,e^{j\omega 0t}$$

$$x(t) = |c|\,.\,e^{rt}\,.\,e^{j\theta}.\,e^{j\omega 0t}$$

$$x(t) = |c|\,.\,e^{rt}\,.\,e^{j\boldsymbol{(\theta+\omega 0t)}}$$ -> Donde la parte resaltada es ‘Φ’ (‘Titote’ según la profe)

$$x(t) = |c|\,.\,e^{rt}\,.\,e^{j\Phi}$$

Y a ‘Titote’ lo podemos representar según la forma de Euler para complejos (**“e^jΦ =cos(Φ) + j . sen(Φ)”**), donde estoy usando el ‘Titote’, en vez de ‘Theta’. Con esto puedo reescribir la ecuación:

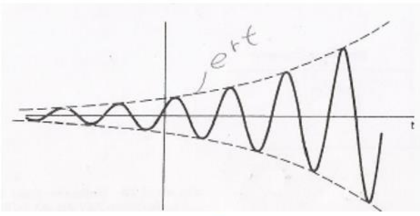
$$x(t) = |c|\,.\,e^{rt}\,.\,[\cos\Phi + j.\ \ \sin\Phi]$$ -> Donde si reemplazo ‘Titote’ quedaría ->

$$x(t) = |c|\,.\,e^{rt}\,.\,[\cos(\theta + \omega 0t) + j.\ \ \sin(\theta + \omega 0t)]$$

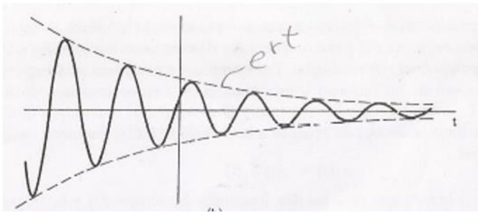
$$x(t) = |c|\,.\,e^{rt}\,.\cos(\theta + \omega 0t) + |c|\,.\,e^{rt}.\,j.\ \ \sin(\theta + \omega 0t)$$

Donde queda la parte Real y la parte Imaginaria

Aquí tengo ambos funciones senoidales (seno y coseno), multiplicadas por la exponencial ‘e^rt’, donde esta exponencial, actúa como envolvente de estas señales senoidales:



r > 0



r < 0

3) **Imaginaria Pura**: (Esta es la que vamos a usar)

Acá ‘c’ es real y para ‘a’ usamos la Forma Cartesiana con ‘r=0’ (sin parte real). Por esto ‘a = jω0’.

Considerando esto, definimos a x(t) como:

$x(t) = c\,.\,e^{j\omega 0t}$ = <u>Exponencial Compleja Imaginaria Pura</u>

Donde es fundamental saber que acá x(t) es PERIÓDICA.

Definición y Demostración del Período Fundamental

Una señal es periódica cuando produce el mismo valor de la señal cada cierto instante de tiempo “T”, o múltiplos de T.

x(t) = x(t+T) = x(t+2T) = x(t+3T)=…=x(t+k.T) **para k = 0; ± 1; ± 2; ± 3…**

Para demostrar esto partimos de la definición de que x(t) = x(t+T), donde lo que vamos a hacer es reemplazar ambos lados por sus versiones “Exponenciales Complejas Imaginarias Puras”, quedando de la siguiente forma:

$$c\,.\,e^{j\omega 0t} = c\,.\,e^{j\omega 0(t+T)}$$

$$c\,.\,e^{j\omega 0t} = c\,.\,e^{j\omega 0t}\,.\,e^{j\omega 0T}$$ -> Aplico misma lógica de 'Titote'

Además, notar que para que se cumpla la igualdad, 'e^jω0T' debe ser = 1, donde tendría:

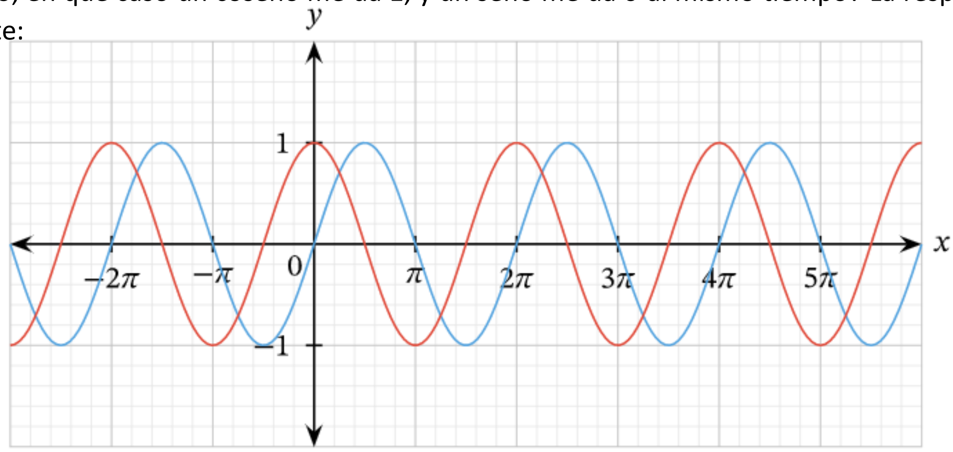
$$c\,.\,e^{j\omega 0t} = c\,.\,e^{j\omega 0t}.\left[\cos(\omega 0.\mathrm{T}) + j.\;\sin(\omega 0.\mathrm{T})\right]$$

Pero necesito como condición que se cumpla que:

$$c\,.\,e^{j\omega 0t} = c\,.\,e^{j\omega 0t}.\left[1 + j\,.\,0\right]$$

Y acá me pregunto, en qué caso un coseno me da 1, y un seno me da 0 al mismo tiempo? La respuesta es obvia gráficamente:

(Cada 2π)



T = 1/f

f = 1/T

ω = 2π/T = 2π.f

ω.T = 2π

Mejor dicho, ocurre cada '2π.k' con k = 0; ± 1; ± 2; ± 3… y por lo tanto, puedo definir que $\omega 0.T$=2π.k para que 'e^jω0T' sea = 1, a partir de lo cual puedo despejar:

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\Pi.\mathrm{k}}{\omega_0}} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{2\Pi.\mathrm{k}}{\mathrm{T}}}$$

Acá 'T' y '$\omega 0$' son un 'Período T cualquiera', y una 'Frecuencia $\omega 0$ cualquiera'. Le llaman 'frecuencia', aunque en realidad es la velocidad angular, pero no cambia mucho ya que la velocidad angular es la frecuencia por 2π.

De esta forma definimos al **Período Fundamental 'T0'** como el mínimo valor positivo de T, diferente de 0, ósea con k=1:

(Y obvio la frecuencia también)

$$\boxed{\mathrm{T}_0 = \frac{2\Pi}{\omega_0}} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{2\Pi}{\mathrm{T}_0}}$$

Período Fundamental | Frecuencia Fundamental

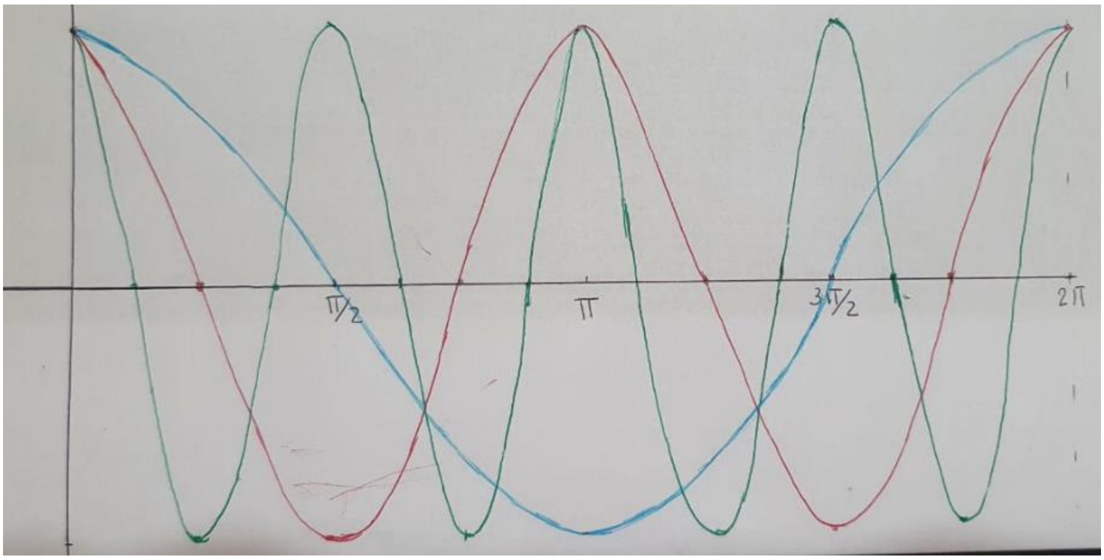
Con esto demostramos que la señal 'Exponencial Compleja Imaginaria Pura', no sólo es periódica, sino que es periódica por excelencia, y es 'tan periódica', que nos permite definir el período o frecuencia fundamental de cualquier señal periódica.

Exponenciales Complejas Imaginarias Puras Armónicamente relacionadas en T

Son todas aquellas, cuyas frecuencias son todas múltiplos de una frecuencia positiva de $\omega 0$ y comparten el mismo período T. Lo podemos identificar como:

$$x(t) = c.\, e^{j\omega 0.k.t}$$

Donde k representa todas las armónicas, que pueden ser ∞, y son así para k=1,2,4 y T0=$2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}$, respectivamente:



Serie de Fourier

Es una forma de representar señales que **son periódicas en el tiempo** (si no son periódicas no puedo representarlas con la Serie), utilizando como funciones básicas las señales senoidales en su forma Exponencial Compleja Imaginaria Pura.

Armamos una combinación lineal (sumatoria) de las infinitas señales complejas imaginarias puras armónicamente relacionadas con período fundamental T0 y frecuencia fundamental $\omega 0$ obtenemos:

Fórmula de Serie de Fourier:

$$X(t)= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\text{coeficientes}} \overbrace{e^{j\omega_0 kt}}^{\text{armónicas}}$$

Esta definición es para la Serie de Fourier de la señal de entrada. En las clases grabadas de 2021, se define también la Serie de Fourier para la señal de salida, pero en 2024 no se incluyó esto en las PPTs.

Determinación de Coeficientes 'a_k'

Para esto debemos tomar la fórmula de la Serie de Fourier para x(t), donde vamos a modificarla según los siguientes pasos para llegar a la fórmula de 'ak' ('a sub k').

1) Multiplico ambos lados por la 'armónica enésima y conjugada', donde reemplazo también 'k' por 'n':

Esto no es una fórmula, es un paso intermedio para la fórmula de los coeficientes.

$$x(t).\, e^{-jn\omega 0t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \,.\, e^{jk\omega 0t}.\, e^{-jn\omega 0t}$$

2) Integro según el período fundamental y aplico potencia de igual base dentro de la sumatoria:

$$\int_0^{T0} x(t)\,.\,e^{-jn\omega 0t}dt = \int_0^{T0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \ .\,e^{j\omega 0t.(k-n)}dt$$

3) Despejo la sumatoria de ‘ak’:

$$\int_0^{T0} x(t)\,.\,e^{-jn\omega 0t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{T0} e^{j\omega 0t.(k-n)}\ dt$$

4) Empiezo a resolver la integral del lado derecho y analizo el <u>primer caso</u> donde k = n:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T0}} \boldsymbol{e^{j\omega 0t.(k-k)}}\ \boldsymbol{dt} = \int_0^{T0} e^{j\omega 0t.(0)}\ dt = T0 - 0 = \boldsymbol{T0}\ (para\ k = n)$$

5) Ahora debo resolver lo mismo para el caso en que k ≠ n:

Acá es resolver una integral básica

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T0}} \boldsymbol{e^{j\omega 0t.(k-n)}}\ \boldsymbol{dt} = \frac{1}{j\omega 0.(k-n)}\,.\left[e^{j\omega 0.T0.(k-n)} - 1\right]$$

Ahora reemplazo $\omega 0$ por la fórmula de frecuencia fundamental y reescribo según ‘forma de Euler’:

$$\frac{1}{j\omega 0.(k-n)}\,.\left[e^{j.\frac{2\pi}{T0}.T0.(k-n)} - 1\right]$$

$$\frac{1}{j\omega 0.(k-n)}\,.\left[e^{j.2\pi.(k-n)} - 1\right]$$

$$\frac{1}{j\omega 0.(k-n)}\,.\left[e^{j.2\pi.(k-n)} - 1\right]$$

$$\frac{1}{j\omega 0.(k-n)}\,.[\cos(2\pi.(k-n)) + \mathrm{j}.\sin(2\pi.(k-n)) - 1]$$

Ahora recordamos lo visto en la página 19, donde cada 2π el coseno dará 1 y el seno 0. Por lo tanto:

$$\frac{1}{j\omega 0.(k-n)}\,.[1 + j\,.0 - 1] = 0\ \therefore\ \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T0}} \boldsymbol{e^{j\omega 0t.(k-n)}}\ \boldsymbol{dt = 0}\ (para\ k \neq n)$$

6) Dado este escenario, el hecho de **k = n se convierte una <u>condición</u>**, ya que la integral en el cuadro dorado se anularía por completo si estuviera multiplicada por 0. Por eso debo trabajar ahora con k = n:

$$\int_0^{T0} x(t)\,.\,e^{-jn\omega 0t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ .T0$$

Ahora como ‘k’ solo puede ser igual a ‘n’, la sumatoria de –infinito a infinito desaparece, y además reemplazo a ‘n’ en el lado izquierdo por ‘k’ para que quede todo en función de ‘k’, donde queda:

$$\int_0^{T0} x(t)\,.\,e^{-jk\omega 0t}dt = \ a_k\,.\,T0$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T0}\int_0^{T0} x(t)\,.\,e^{-jk\omega 0t}dt}}$$

Acá estaría obtenidas la fórmula para obtener los ‘ak’. **Importante: En la fórmula de la serie de Fourier, recordar que ‘ak’ representa los coeficientes, y los ‘e elevados’ representan las infinitas armónicas.**

Además de la ‘Fórmula de Serie de Fourier’ y la ‘Fórmula de los ak’, para el práctico necesitamos considerar:

Los 4 tipos de ejercicios para señales periódicas:

- En casos 1 y 2 tenemos un número <u>finito</u> de coeficientes.
- En casos 3 y 4 tenemos un número <u>infinito</u> de coeficientes.

Fórmulas de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$$
$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$$

<u>Caso 1 de Ejercicios</u>: La señal x(t) ya viene expresada como serie. Se resuelve por Deducción, encontrar las armónicas, determinar $\omega 0$ (máximo común divisor), T0, los ‘k’, los ‘ak’.

<u>Caso 2 de Ejercicios</u>: La señal x(t) son senos o cosenos. Se transforma con las Fórmulas de Euler. Debemos transformar este ejercicio en un ‘Caso 1’.

<u>Caso 3 de Ejercicios</u>: La señal x(t) está representada con un gráfico. Debemos determinar T0 y tiene infinitos ‘ak’. Se debe calcular con la formula y luego armar x(t).

<u>Caso 4 de Ejercicios:</u> La señal x(t) es una función analítica, se resuelve de manera similar al ‘Caso 3’.

Ahora unos ejemplos:

a) Transformar con fórmulas de Euler (‘Caso 2’): $x(t) = \sin(\omega 0.t)$

$$x(t) = (1).\frac{1}{2j}\,.\,e^{j\omega 0t} - (1).\frac{1}{2j}\,.\,e^{-j\omega 0t} \ = \ \frac{1}{2j}\,.\,e^{j\omega 0t} - \frac{1}{2j}\,.\,e^{-j\omega 0t}$$

Acá lo amarillo son coeficientes y lo verde son armónicas, por lo tanto: $\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2j}\ y\ a_{-1} = -\frac{1}{2j}}$

b) Expresar en Serie de Fourier la siguiente señal periódica

$$x(t) = \tfrac{1}{4}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \cos(6\pi t) + 1$$

$$x(t) = \tfrac{1}{4}\,e^{j2\pi t} + \tfrac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \tfrac{1}{2}\,e^{j6\pi t} + \tfrac{1}{2}\,e^{-j6\pi t} + 1$$

COEF. ARMÓNICA COEF ARM COEF ARM COEF ARM COEF
K=1 K= -1 K=3 K= -3 K=0

Donde podemos ver que el máximo común divisor de los exponentes es 2π y por eso: $\boldsymbol{\omega 0 = 2\pi}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{4}\ ,\ a_{-1} = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}\ ,\ a_{-3} = \frac{1}{2}\ y\ a_0 = 1\ \therefore\ \forall\ otro\ k, a_k = 0}$

Convergencia de la Serie de Fourier

Hay casos en los que los valores de 'ak' que se obtengan sean infinitos, donde la Serie diverge. Hay otros casos, en donde, aunque los 'ak' den valores finitos, al sustituirlos en la serie, puede divergir.

Condiciones de Dirichlet

Si la señal diverge, no la puedo representar como Serie. Si converge, ahí sí.

La convergencia, se asegura mediante el cumplimiento de las Condiciones de Dirichlet, donde si no se cumple aunque sea una de ellas, no se puede asegurar que la señal converge.

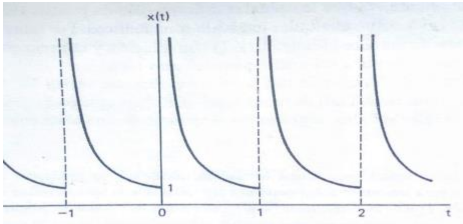
Condición 1: x(t) debe ser absolutamente integrable en cualquier período

$$\int_{T_0} |x(t)|\, dt < \infty$$

Si por ejemplo tengo: x(t)=1/t con 0<t<1

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt = Divergente$$

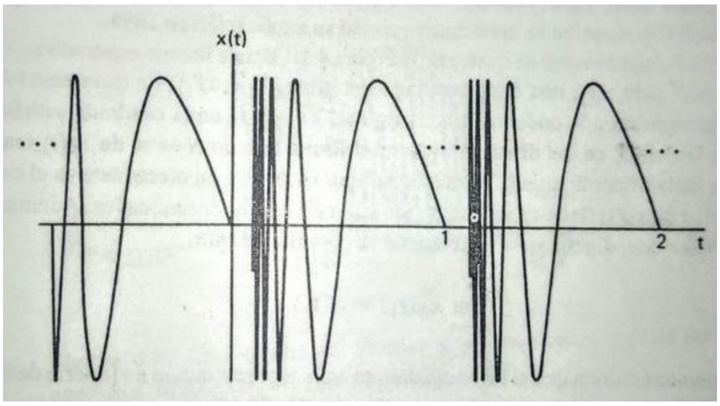
(x(t) es periódica con T=1)(Ver gráfico)



Condición 2: La variación de x(t) en cualquier intervalo finito de tiempo está acotada, es decir que debe haber un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier período de la señal.

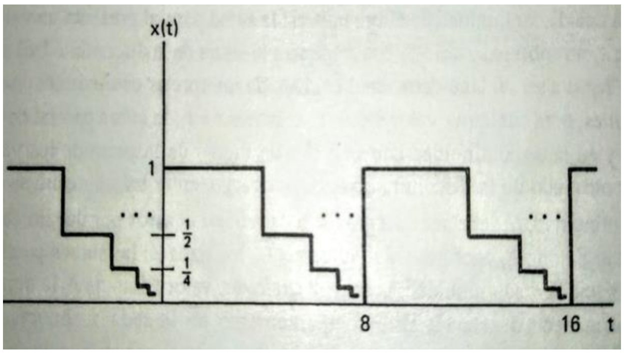
Donde se arma el 'quilombo', puedo tener infinitos máximos y mínimos, ya que puede tener una frecuencia 'infinita' en las dos zonas donde se arman esos 'quilombos'.

La señal esta cumple con la Condición 1, pero **no** con la Condición 2.



Condición 3: En cualquier intervalo finito de tiempo hay solo un número finito de discontinuidades.

(Esta señal **no** cumple con la Condición 3)



*En el práctico **sólo podemos demostrar la Condición 1**, no la 2 ni la 3.*

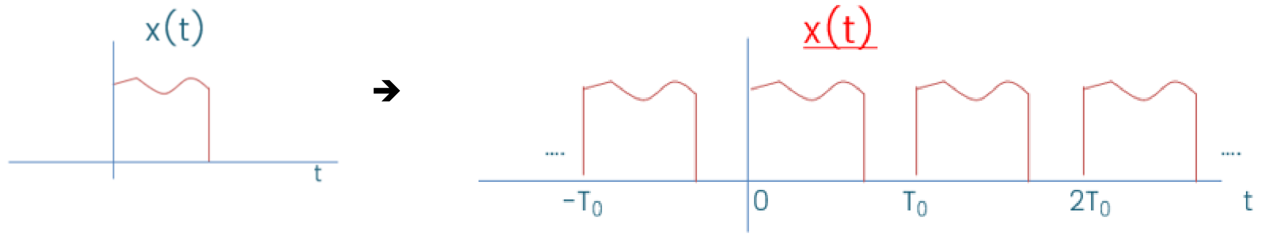
t = variable en el tiempo

ω = variable en la frecuencia

Transformada de Fourier en Tiempo Continuo

El par de Transformadas de Fourier nos permite pasar del tiempo a la frecuencia (Transformada) y viceversa (Anti Transformada), pero sigue siendo la misma señal. La Transformada sirve para señales no periódicas.

Dada una señal no periódica x(t), voy a construir una señal periódica 'x(t)' (x(t) subrayado) donde coincidirá en el origen con x(t) tendrá un período fundamental:



Ahora que pasa cuando el período fundamental 'T0' tiende a infinito? Van a pasar las siguientes cosas:

- La señal no periódica tenderá a la señal periódica.
- x(t) tenderá a x(t).
- $\omega 0$ tenderá a 0 (porque es inversamente proporcional a T0).
- Como x(t) es periódica, puedo usar las fórmulas de la Serie:

$$\underline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\text{COEF.}} \cdot \overbrace{e^{jk\omega_0 t}}^{\text{ARMONICAS}} \qquad a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \underline{x(t)} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Desarrollo de fórmulas de la Transformada de Fourier en Tiempo Continuo

$$\underline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_0^{T_0} \underline{x(t)} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt}_{X(k\omega_0)}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot X(k\omega_0)$$

No explican cómo calcular esta integral, así que directamente asumimos que vale **'X grande' de 'k. $\omega 0$'**

$$\underline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \cdot X(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Las flechas amarillas grandes marcan las **únicas** fórmulas que me interesan, con las que voy a trabajar más adelante.

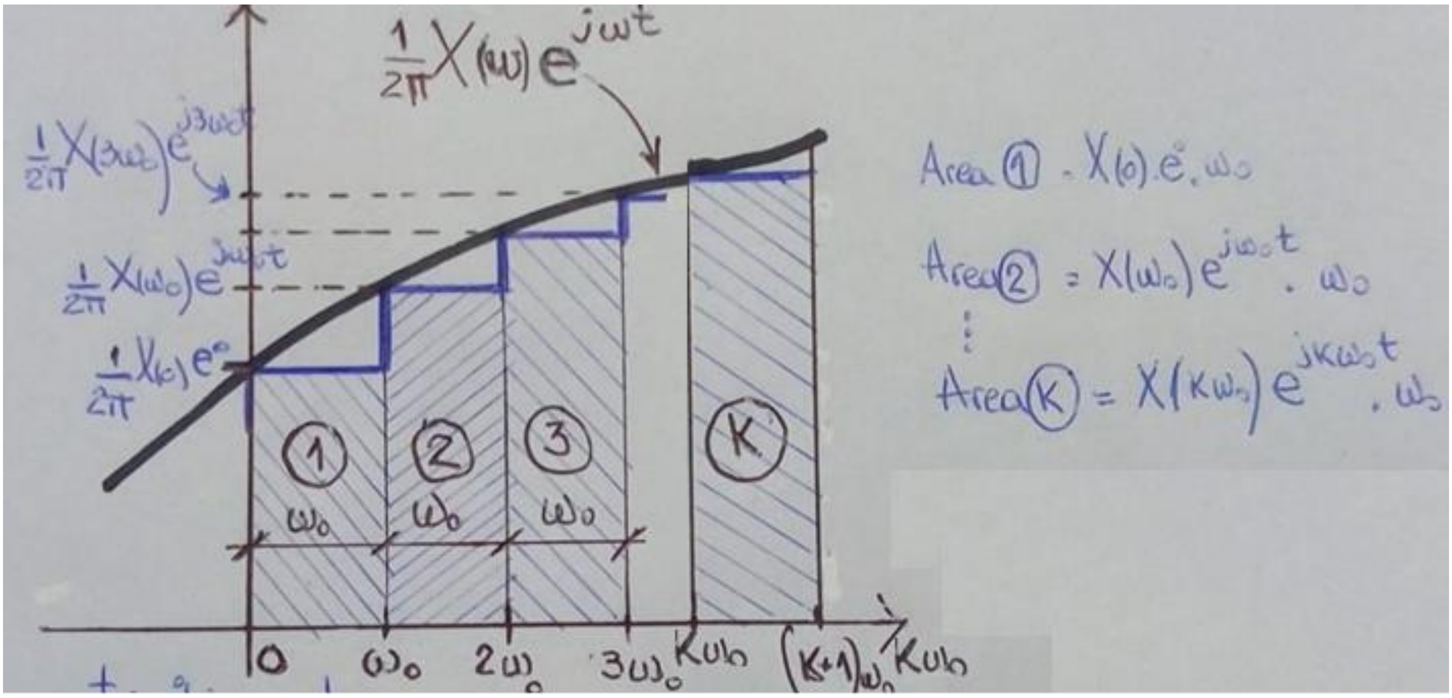
$$\underline{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cdot X(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

Acá reemplazo en fórmula de T fundamental, y separo numerador de denominador.

Como dice el apartado anterior y este, tenemos dos cosas a juntar (ver flechas naranja grandes). La primera es el hecho de que T0 tiende a infinito, y segundo es la forma que tenemos de aproximar la señal periódica a la no periódica, dada originalmente.

Para esto, el razonamiento es el mismo que para la transformación de una sumatoria de áreas, a una integral.

Como en el eje X tenemos valores discretos definidos sobre la variable **'k. $\omega 0$'** con k=1, 2,3,... lo que va a pasar es que **$\omega 0$** tenderá a 0, y así pasaremos 'de lo discreto a lo continuo'. Gráficamente:



Considerando este gráfico, y los puntos anteriores, obtenemos lo siguiente:

- **T0** → ∞
- x(t) → <u>x(t)</u>
- $\boldsymbol{\omega 0 \rightarrow 0}$
- **k.** $\boldsymbol{\omega 0 \rightarrow \omega}$
- **Discreto** → **Continuo**
- $\sum \rightarrow \int(integral)$
- $\boldsymbol{\omega 0 \rightarrow d\omega}$ **(**acá es diferencial porque al $\boldsymbol{\omega 0}$ <u>tender</u> a 0, el diferencial representa un número infinitesimal.

Ahora reemplazo con estas nuevas equivalencias en las fórmulas marcadas con flechas amarillas grandes:

PAR DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Anti-Transformada (Tiempo $\leftarrow F^{-1} \leftarrow$ **Frecuencia)** y **Transformada (Tiempo** $\rightarrow F \rightarrow$ **Frecuencia)**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, .d\omega \qquad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Aquí las condiciones de convergencia siguen siendo las condiciones de Dirichlet, menos la '1', que queda:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty}$$

(Para los límites de la integral de X($\boldsymbol{\omega}$), el '0 a T0' cambia por '-infinito a +infinito', porque cuando T0 tiende a infinito, es una 'referencia', a que T0 ocupará **todo** el eje X, lo cual va de '-infinito a +infinito').

<u>**Ejemplos Básicos**</u>

Acá empezamos a usar las tablas de propiedades y pares básicos.

a) x(t) = $\delta(t)$

Obtengo x(w) -> $x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \,.\, e^{-j\omega t} dt = \, e^{-jw.0} = 1 \; (propiedad \; 10)$

b) x(t) = $e^{-at}.u(t)$

El escalón elimina lado negativo.

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}.u(t)\,.\; e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\,.\; e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{(a+j\omega)-t}dt$$

$$x(\omega) = -\frac{1}{a+j\omega}\,.(e^{-\infty} - e^{0}) = -\frac{1}{a+j\omega}\,.(0-1) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a+j\omega}}\;(cumple\;prop\;13)$$

c) x(t) = $e^{-a|t|}$

Reescribo x(t) para adaptarla a la integral, ya que el valor absoluto no está definido para la integral y por eso divido en dos intervalos: $[\,(t<0\;(de-\infty\;a\;0)\,;\;x(t) = e^{at})]\;y\;(t>0\;(de\;0\;a\;\infty)\,;\;x(t) = e^{-at})$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at}\,.\; e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}\,.\; e^{-j\omega t}dt$$

En la parte amarilla es aplicable la prop 13, pero en lo otro se resuelve la integral.

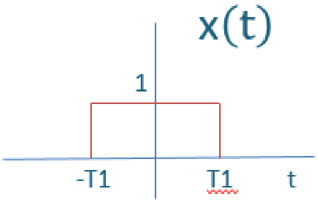
$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt + \frac{1}{a+j\omega}$$

$$x(\omega) = \frac{1}{a-j\omega}\,.\;(e^{0} - e^{-\infty}) + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{a-j\omega}\,.\;(1-0) + \frac{1}{a+j\omega}$$

$$x(\omega) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a-j\omega}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a+j\omega}}$$

Acá apliqué la propiedad 13 **+ fórmula**, ya que donde tuve que resolver la integral, no está tal cual está el par básico en tabla de 'Pares Básicos', y por ello se dice que apliqué 'fórmula' (resolver integral) + prop 13.

d) x(t) =



$$x(\omega) = \int_{-T1}^{T1} 1\,.\; e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{j\omega}\,.(e^{-j\omega T1} - e^{j\omega T1})$$

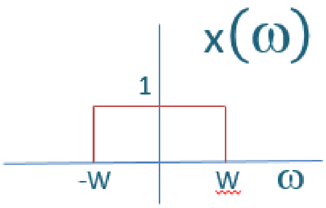
Forma de Euler

$$x(\omega) = -\frac{1}{j\omega}\,.[(\cos(\omega T1) - j\sin(\omega T1)) - (\cos(\omega T1) + j\sin(\omega T1))]$$

$$x(\omega) = -\frac{1}{j\omega}\,.[\cancel{\cos(\omega T1)} - j\sin(\omega T1) - \cancel{\cos(\omega T1)} - j\sin(\omega T1)]$$

$$x(\omega) = -\frac{1}{j\omega}\,.(-2j\sin(\omega T1)) = \frac{\mathbf{2\,.\sin(\boldsymbol{\omega}T1)}}{\boldsymbol{\omega}}\;(prop\;8\;lo\;resuelve)$$

e) x(ω) =



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} . \int_{-W}^{W} 1 . e^{-j\omega t} d\omega \ = \frac{1}{2\pi j t} . \left(e^{jWt} - e^{-jWt}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j t} . [(\cos(Wt) + j. \sin(Wt)) - (\cos(Wt) - j. \sin(Wt))]$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j t} . [2 . \mathrm{j}. \sin(Wt)] = \frac{\mathbf{sin}(\boldsymbol{Wt})}{\boldsymbol{\pi t}} \ ('propiedad\ 9^{\ -1}{}' lo\ resuelve)$$

Propiedades de la Transformada de Fourier (nombramiento y demostración)

1) Linealidad:

"La transformada de Fourier de una combinación lineal de dos señales es la misma combinación lineal de las transformadas de los componentes individuales. Simplemente 'copio y pego' los coeficientes".

2) Simetría en W:

Si x(t) es una función del tiempo real, entonces $\boxed{X(-\omega) = X^*(\ \omega) \text{ con } x(t) \text{ real}}$ donde el '*' denota el *complejo conjugado*, denominada '***simetría conjugada'***. Esta simetría en la Transformada de Fourier se obtiene valuando el complejo conjugada en la fórmula de la Transformada de X(ω):

$$x^*(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) .\ e^{-j\omega t} dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x * (t) .\ e^{j\omega t} dt$$

Aplicando el hecho de que x(t) es real, se cumple que x(t)=x*(t) y por lo tanto nos queda:

$$x^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) .\ e^{j\omega t} dt \ = \ x(-\omega)$$

3) Dualidad:

"La transformada y transformada inversa de Fourier tienen una simetría definida (son similares, pero no precisamente idénticas), lo que conduce a la propiedad de dualidad.'

Para dos funciones que se relacionan mediante la expresión integral: $f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v). e^{-juv} \ dv$

Si se compara con el par de Fourier, entonces u = ω y v = t: $f(\omega) = \mathfrak{F}\{g(t)\}$

Mientras que por otro lado, si entonces u = t y v = ω: $g(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}\{f(t)\}$

Considerando todo esto, resumimos diciendo:

$$g(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} f(\omega) \quad \text{y} \quad f(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi g(-\omega)$$

4) Diferenciación:

Cuando se diferencian (derivan) ambos lados de la ecuación de la transformada de Fourier se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\big(x(t)\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega). \frac{d}{dt}(\ e^{j\omega t})\ d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\ .\ X(\omega)\ .\ e^{j\omega t}\ d\omega \ \therefore \ \boldsymbol{\frac{d}{dt}\big(x(t)\big)} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{j\omega . X(\omega)}$$

$\boxed{e^{jwt} \text{ es lo único derivable porque solo ahí está 't'.}}$

5) Desplazamiento en el tiempo: Si x(t) $\leftrightarrow$ X(ω) entonces $\boxed{x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jwt_0} X(\omega)}$

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega(\Delta+t_0)}\, d\Delta$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega\Delta} e^{-j\omega t_0}\, d\Delta$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega\Delta}\, d\Delta\right]}_{x(\omega)} . e^{-j\omega t_0}$$

Δ Variable en el tiempo
t_0 constante, número
t Variable en el tiempo

$t - t_0 = \Delta$

$t = \Delta + t_0$

$dt = d\Delta + \cancel{dt_0}$ 0

t_0 desplazamiento en el tiempo

$$\boxed{x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(\omega).e^{-j\omega t_0}}$$

6) Convolución: "La convolución en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación en el de la frecuencia".

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

-> Reemplazo y(t) por fórmula de convolución

$$X(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, .h(t-\tau) d\tau\right) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

-> Reordeno ecuación y diferenciales

$$X(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt\right] d\tau$$

-> En corchetes tengo prop. De desplazamiento

$$X(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, H(\omega).e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

-> Como 'h' está desplazada, uso 'H' y 'z' en vez de 'X' y 't0'

$$\boxed{X(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(\omega).H(\omega)}$$

-> Saco 'H(ω)' de la integral, y como 'z' es en el tiempo, me sirve de igual forma para reemplazar en fórmula de Transformada

7) Modulación: $x(t)\,.\,y(t) = \frac{1}{2\pi}\,.\,X(\omega) * Y(\omega)$

"La multiplicación en el dominio del tiempo corresponde a la convolución en el dominio de la frecuencia".

Proceso 1:

a) Primero debo convertir mi x(t) y mi h(t) ('y(t)' en fórmula original), del tiempo a la frecuencia con tabla.
b) Luego, debo realizar la convolución, armando la/las integral/es (sumatoria si hace falta), donde aparece la variable 'z', para lo cual debo reemplazar todos los ω. Los de x(t) serán 'z', y los de h(t) serán 'ω-z' (igual que en convolución).

Proceso 2:

Reemplazo la multiplicación en el tiempo, en la fórmula de x(ω).

Ejemplo Básico: $x(t) = (e^{-a\,.\,t}\,.\cos(\omega_0.t))\,.\,u(t)$

Amarillo: Prop. 13

Verde: Prop. 3

Las uno con fórmula de modulación.

Resolución con 'Proceso 1':

$$x(t) = (e^{-a\,.\,t}\,.\,u(t)\,.\cos(\omega_0.t)\,)$$

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,.\left[\frac{1}{a+j\omega} * \pi\,[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\right]$$

Distributiva de la convolución.

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,.\left[\pi\,\left[\delta(\omega-\omega_0) * \frac{1}{a+j\omega} + \delta(\omega+\omega_0) * \frac{1}{a+j\omega}\right]\right]$$

Cancelo Pi's e 'integro' impulsos

(valúo nada más)

$$x(\omega) = \frac{\pi}{2\pi}\,.\left[\left[\delta(\omega-\omega_0) * \frac{1}{a+j\omega} + \delta(\omega+\omega_0) * \frac{1}{a+j\omega}\right]\right]$$

Fija: z

Liberada: $\omega - z$

$$x(\omega) = \frac{1}{2}\,.\left[\left[\int \delta(z-\omega_0).\frac{1}{a+j(\omega-z)}\,dz + \int \delta(z+\omega_0).\frac{1}{a+j(\omega-z)}\,dz\right]\right]$$

$$\boldsymbol{x(\omega) = \frac{1}{2}\,.\left[\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)}\right]}$$

*Anti intuitivamente, si tengo 'z-ω_0', ω_0 **no tiene signo menos**. Por eso al reemplazar, obtengo '$\omega-\omega_0$'.* $*^1$

Resolución con 'Proceso 2':

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,.\,e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} (e^{-at}.\cos(\omega_0.t))\,.\,e^{-j\omega t}dt$$

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} \cos(\omega_0.t)\,.\,e^{-j\omega t-at}dt$$

Reescribo coseno con Euler.

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} (\frac{1}{2}\,e^{j\omega_0.t} + \frac{1}{2}\,e^{-j\omega_0.t})\,.\,e^{-j\omega t-at}dt$$

$$x(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{j\omega_0.t}\,.\,e^{-j\omega t-at}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-j\omega_0.t}\,.\,e^{-j\omega t-at}dt$$

$$x(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{(j(\omega-\omega_0)+a).(-t)}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{(j(\omega+\omega_0)+a).(-t)}dt$$

El '|' significa que valúo la integral.

$$x(\omega) = \frac{1}{2}\,.\,(\frac{1}{-(j(\omega-\omega_0)+a)}\,e^{(j(\omega-\omega_0)+a).(-t)}|) + \frac{1}{2}\,.\,(\frac{1}{-(j(\omega+\omega_0)+a)}\,e^{(j(\omega+\omega_0)+a).(-t)}|)$$

$$x(\omega) = \frac{1}{2}\,.\left(\frac{1}{-(j(\omega-\omega_0)+a)}.\;(0-1)\right) + \frac{1}{2}\,.\left(\frac{1}{-(j(\omega+\omega_0)+a)}.\;(0-1)\right)$$

$$\boldsymbol{x(\omega) = \frac{1}{2}\,.\left(\frac{1}{(j(\omega-\omega_0)+a)} + \frac{1}{(j(\omega+\omega_0)+a)}\right)}$$

Mismo resultado.

Coeficientes de la Serie de Fourier como muestras de la Transformada en un periodo

(Transformada de Fourier para Señales Periódicas)

Es importante notar que en la tabla de 'Pares Básicos' de la Transformada, hasta la 'propiedad 7', hay valores en la tercera columna (de coeficientes), ya que hasta la 'propiedad 7' son señales periódicas, y por eso en sus Transformadas, tenemos impulsos.

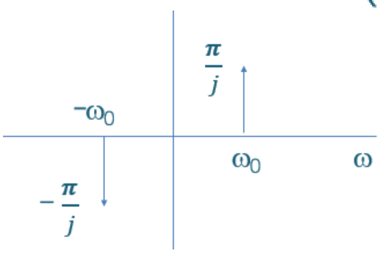
Cuando a una señal periódica en el dominio del tiempo le aplicamos la Transformada de Fourier, obtenemos un impulso en el dominio de la frecuencia, con un área ponderada en 2π.

¿Qué pasa cuando tengo una C.L. de impulsos en la frecuencia? En el tiempo, obtengo la Serie de Fourier, lo cual está definido en la 'propiedad 1' (propiedad de linealidad que aparece en la otra tabla).

Resumiendo: **La Transformada de Fourier de una señal periódica, es un tren de impulsos armónicamente relacionados en la frecuencia, siendo las áreas de los impulsos proporcionales a 2π veces, a los coeficientes 'ak' de la Serie de Fourier.**

Ejemplo 4.14 $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$

$$x(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} \qquad a_1 = \frac{1}{2j} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$



$$X(\omega) = \frac{1}{\cancel{2}j}.\cancel{2}\pi\,\delta(\omega - 1\omega_0) - \frac{1}{\cancel{2}j}.\cancel{2}\pi\,\delta(\omega + 1\omega_0)$$

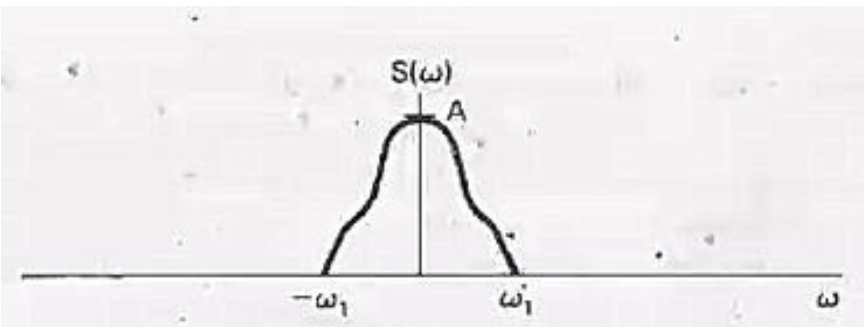
$$X(\omega) = \frac{\pi}{j}\,\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\,\delta(\omega + \omega_0)$$

IMPORTANTE: Cuando llevo el coseno a la forma de Euler, ya quedaría expresado como serie.

En el resto del ejemplo simplemente aplica la 'propiedad 1' de la Transformada con los 'ak'.

Ejercicio Teórico Integrador de Transformada de Fourier

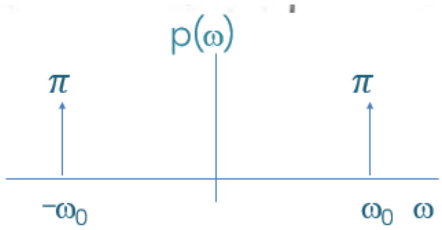
Se pide calcular R(ω) de la señal r(t)=s(t).p(t). Sea s(t) una señal cuyo espectro S(ω) es la que se presenta en el dibujo y p(t)=cos(ω_0t)



Lo primero que hacemos es claramente convertir p(t) a p(ω) por propiedad 3 de tabla. Luego, por propiedad de modulación, armamos la transformada de 's(t).p(t)', que como ya tenemos s(ω) y p(ω), nos permite armar la convolución, debido a la última propiedad mencionada, quedando:

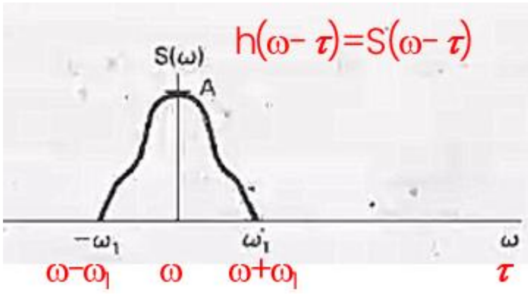
$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi}.\{\pi\,[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] * S(\omega)\}$$

Ahora, al tener una convolución de S(ω), cuya función desconozco, no me interesa porque la estoy convolucionando con dos impulsos, y dichos impulsos, se valúan en dicha señal (no debo integrar nada, sino reemplazar según la integral de convolución). Visualmente, los impulsos se verán así:



¿Ahora como 'valúo el impulso gráficamente'? Lo primero a considerar es 'cual dejo fija' y 'cual libero del eje'. En este caso libero del eje a S(ω) y dejo fija a P(ω).

Ahora, siguiendo el procedimiento de convolución, debo 'arrastrar' S(ω) sobre esos dos impulsos, donde en ese 'arrastre', se van a marcar los puntos de S(ω) sobre los impulsos. Eso significa que mi señal se va a 'duplicar', y para ello debo considerar los puntos iniciales de la señal (Unidad 1 de la materia):



'h(t-z)' es una referencia a que '"s" es el "h" que librero del eje'.

Analíticamente, para valuar los impulsos debo reemplazar en la integral de convolución, intercambiando los ω según corresponda entre 'la que queda fija' y la 'liberada del eje', obteniendo:

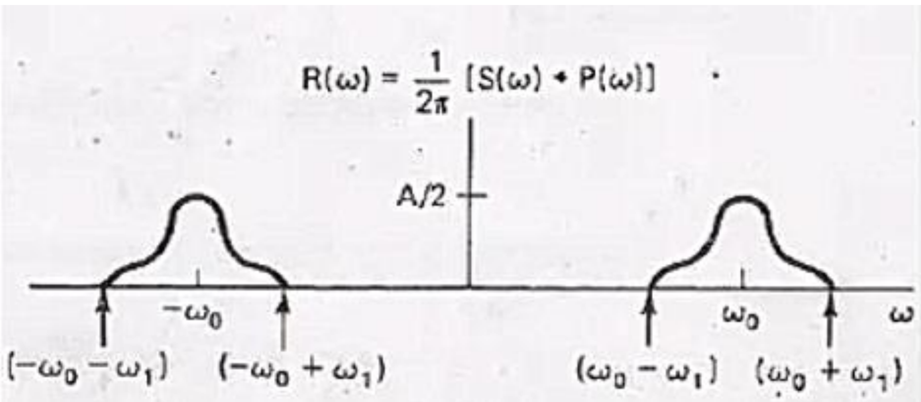
Fija: z

Liberada: $\omega - z$

$$R(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int \delta(z - \omega_0) . S(\omega - z)\, dz + \int \delta(z + \omega_0) . S(\omega - z)\, dz \right\}$$

$$\boldsymbol{R(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \{ S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0) \}}$$

Los signos de '$-\omega_0$' y '$+\omega_0$' están dados por el mismo razonamiento en página 29 en: $*^1$. Gráficamente:



Donde el $\frac{1}{2}$ va a cortar la mitad la altura de los impulsos, cuando se valúen con S(ω). Fin.

Unidad 4: Análisis de Fourier en Tiempo Discreto

En el tiempo discreto [n], la variable independiente solo toma valores enteros (discretos). Las variables pasan a denominarse de forma diferente:

Variables	Tiempo continuo (t)	Tiempo discreto [n]
Velocidad o frecuencia angular	W_0	Ω_0
Período fundamental	$T_0 = \frac{2\pi}{W_0}$	$N = \frac{2\pi}{\Omega_0}$
Exponencial compleja imaginaria pura	e^{jWokt}	$e^{j\Omega okn}$
Frecuencia fundamental	Frecuencia analógica $F_0 = \frac{W_0}{2\pi}$	Frecuencia digital $f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{N}$

Una señal es periódica en el tiempo discreto, cuando produce el mismo valor de la señal cada instantes de tiempo discretos, separados por un período fundamental "N": $\boldsymbol{x[n] = x[n+N]}$

Teniendo en cuenta que para la representación de la serie de Fourier se usa la exponencial compleja imaginaria pura, entonces se plantea la igualdad con: $\boldsymbol{x[n] = e^{j\,\omega_0\,n}}$

Periodicidad en el tiempo

$$x[n] = x(n+N)$$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)}$$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n} . \underbrace{e^{j\Omega_0 N}}_{\text{= 1 para respetar la igualdad}}$$

Por euler:

$$e^{j\Omega_0 N} = \cos(\Omega_0 N) + j\,\text{sen}\,(\Omega_0 N)$$

$$1 \quad = \quad 1 \quad + j \quad 0$$

La condición de que el coseno valga 1 y el seno 0 a la vez ocurre en N = 2π cada o cada 2πm intervalos, siendo m = ±1, ±2, ±3... (multiplos de 2π)

$$\Omega_0 N = 2\pi . m$$

$$\boxed{\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}}$$ Es una relación de enteros

Utilizando la frecuencia en lugar de la vel. angular $\Omega_0 = 2\pi . f_0$ $\rightarrow$ $\frac{\cancel{2\pi} . f_0}{\cancel{2\pi}} = \frac{m}{N}$

$$\boxed{f_0 = \frac{m}{N}}$$

Condición de periodicidad se cumple si f_0 es una relación de enteros

Periodicidad en la frecuencia

Las frecuencias en el tiempo discreto generan funciones exponenciales, que se repiten cada frecuencias múltiplos de 2π:

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} . \underbrace{e^{j\cancel{2\pi} n}}_{1} \rightarrow e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{j2\pi n} = \cos(2\pi . n) + j\,\text{sen}\,(2\pi . n) \\ 1 \quad = \quad 1 \quad + j \quad 0 \end{array}}$$

$$\boxed{x_k[n] = e^{j(\Omega_0 + k\,2\pi)\,n}}$$ con k= 0, 1, 2 ,...

$$\Omega_0 = 2\pi\, f_0$$
$$0 \leq 2\pi\, f_0 < 2\pi$$
$$\underbrace{0/\cancel{2\pi}}_{0} \;\leq\; f_0 < \underbrace{\cancel{2\pi}/\cancel{2\pi}}_{1}$$

En consecuencia, las funciones exponenciales son diferentes para velocidades angulares dentro del intervalo: $\boldsymbol{0 \leq \Omega_0 < 2\pi}$ ó $\boldsymbol{-\pi \leq \Omega_0 < \pi}$

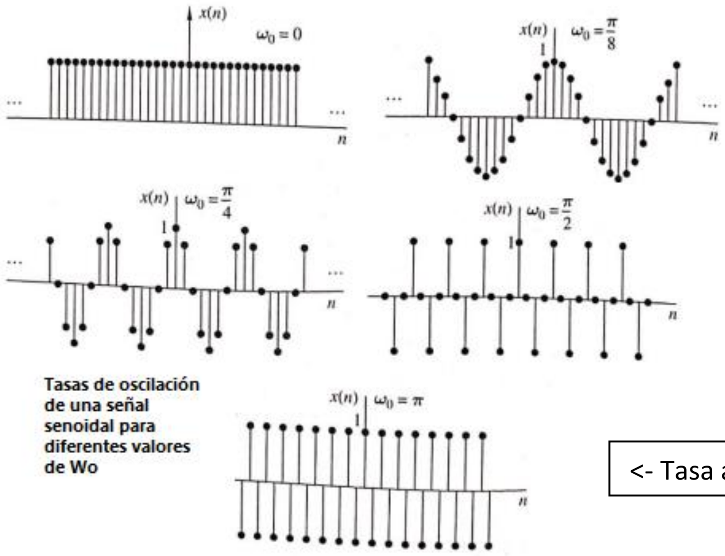
En frecuencia, las funciones exponenciales son diferentes para:

$\boldsymbol{0 \leq f_0 < 1}$ ó $\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leq f_0 < \frac{1}{2}}$

Cualquier función exponencial que tenga valores de $|\boldsymbol{\Omega_0}| > \boldsymbol{\pi}$ ó $|\boldsymbol{f_0}| > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, es idéntica a la señal cuyos valores de velocidad angular o frecuencia son $|\boldsymbol{\Omega_0}| < \boldsymbol{\pi}$ ó $|\boldsymbol{f_0}| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, ya que a partir de ahí se repiten en el siguiente periodo múltiplo del fundamental. Estas señales exponenciales que se repiten para distintos valores se llaman **alias**.

La tasa de oscilación de la señal es baja para los valores de Ω_0 cercanos a 0 y a 2π y para valores de f_0 cercanos a 0 y 1, es decir, en los valores de los extremos, mientras que la tasa de oscilación es más alta mientras se acerque más al valor central (Ω_0 cercano a π; f_0 cercano a 1/2).

Tasa baja acá ->



Tasas de oscilación de una señal senoidal para diferentes valores de Wo

<- Tasa alta acá

Funciones Armónicas en Tiempo Discreto

Son todas las exponenciales complejas imaginarias puras cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental Ω_0, que son periódicas y comparten el mismo periodo N.

En el tiempo discreto hay solo N armónicas diferentes (a diferencia del tiempo continuo, donde había de $-\infty$ *a* ∞).

$$x_k[n] = e^{j(\Omega_0 + k\,2\pi)\,n} \rightarrow \boxed{\varphi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)\,n}} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, .. N\text{-}1$$

Armónicas de frecuencia $\Omega o = k\,(2\pi/N)$

K es ≤ N-1 porque si k = N no se cumple la igualdad, por lo tanto el máximo valor que k puede tomar es N-1 (al ser valores discretos)

$$0 \leq k\,\frac{2\pi}{\mathbf{N}} < 2\pi$$

$\frac{\cancel{N}\,2\pi}{\cancel{N}} < 2\pi \rightarrow 2\pi < 2\pi$ **No se cumple**

En $\varphi[n]$ (Phi), tenemos 'N' (número total de muestras de la señal), f_0 (frecuencia fundamental) y 'n' (Indica el momento específico dentro de la secuencia discreta donde se evalúa la función exponencial compleja).

A medida que k toma valores de 0 a N-1, las oscilaciones varían, donde tenemos diferentes armónicas. Cuando k = N se anula el cociente al que se eleva la exponencial y el resultado es que no hay oscilaciones en frecuencia y la función es cte. Cuando k > N se repiten las mismas armónicas de 0 a N-1.

Es importante notar que **el período debe ser menor o igual a la cantidad de muestras**.

<u>Ejemplo práctico:</u> (PONER CALCULADORA EN RADIANES)

$$\Omega_0 = \frac{2\pi \,.\, k}{N} \text{ (Reemplazo } f_0 \text{ por } \frac{k}{N} \text{)}$$

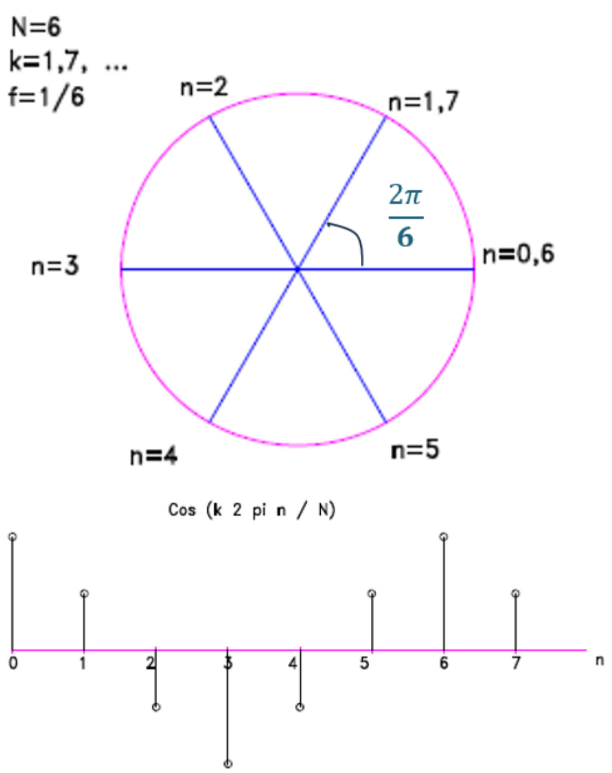
Supongamos que N = 6 y que $f_0 = \frac{1}{6}$

Lo que esto quiere decir es que nosotros vamos a tomar 6 muestras con una periodicidad cada 6 de ellas (ósea que a partir de la sexta se empiezan a repetir).

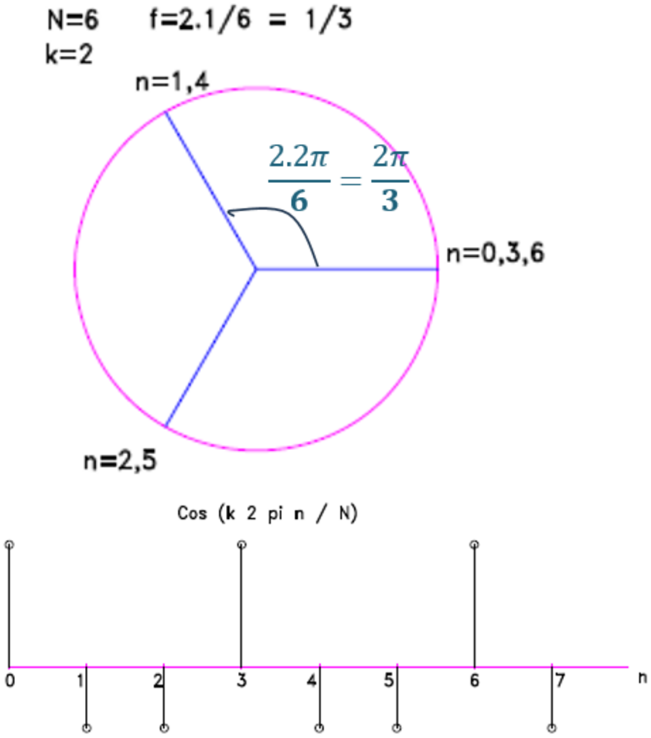
Lo que nosotros vamos a hacer es analizar en este momento los valores de **k** y de **n**. En donde k va a asumir valores hasta N -1, ósea desde 0 hasta 5.

Entonces lo único que haces de ahora en más es ir reemplazando en la fórmula de Ω_0, según los distintos valores de k y eso me va a dar como resultado los distintos valores de la velocidad angular

Si la armónica es 1 => k= 1



Si la armónica es 2 => k=2

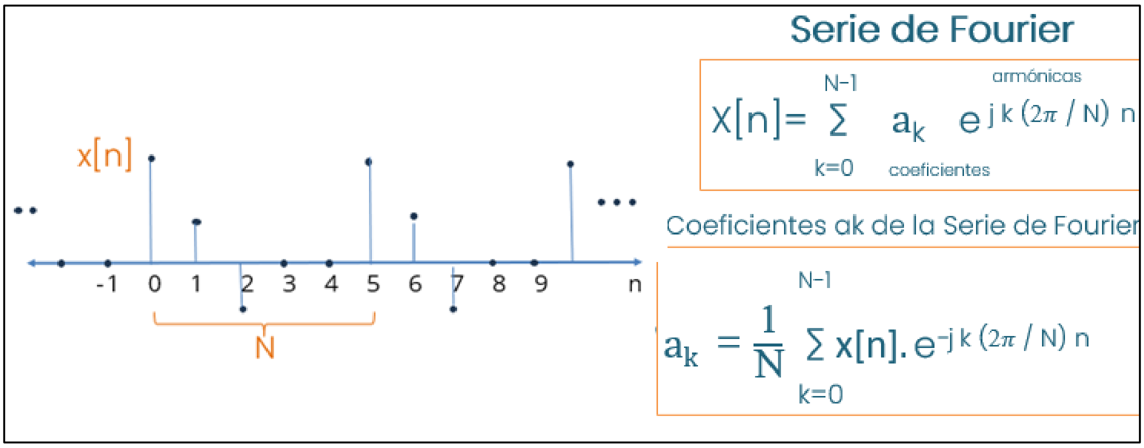


Notar que si reemplazo con los diferentes 'k' y los diferentes 'n' en la fórmula de $\cos(k \,.\, 2\pi \,.\, \frac{n}{N})$, voy a tener graficados los valores discretos que están debajo de los círculos.

Otra aclaración importante, es que la armónica 7 va a ser igual que la 1, pero como tomamos sólo 6 muestras, no llegamos a ver esa séptima.

Serie de Fourier en Tiempo Discreto

Es una forma de representar señales periódicas en el tiempo discreto, como C.L. de coeficientes ‘ak’ y N armónicas diferentes dentro de un período fundamental N. Dada ‘x[n]’ con período ‘n’, tendremos:

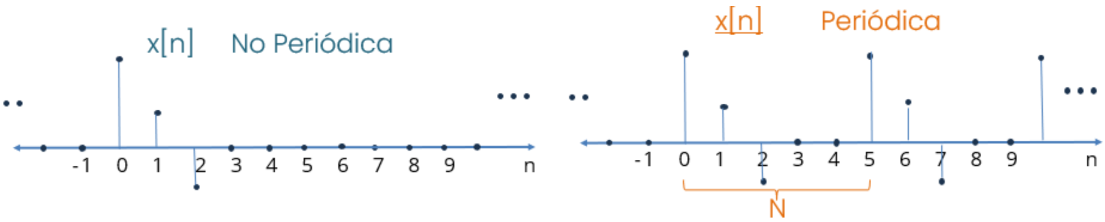


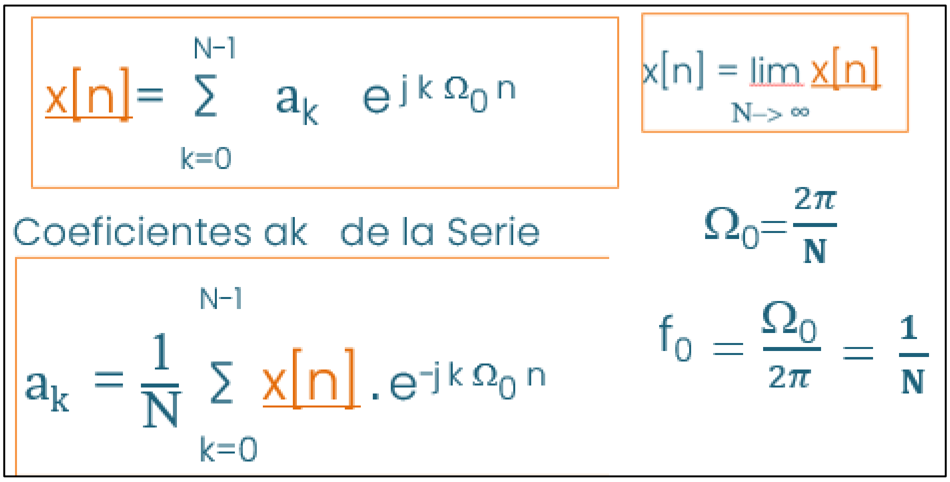
Desarrollo de fórmulas de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

<u>Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (TFTD)</u>

Se usa para transformar una señal en el tiempo discreto en una representación en el dominio de la frecuencia continua.

De forma similar al tiempo continuo, se analiza una señal no periódica x[n] haciéndola coincidir con un período N de otra señal x[n], que es periódica, utilizando la representación en serie de Fourier.





Notar que ‘x[n] azul’ es una <u>señal no periódica</u> en todo el desarrollo, mientras que ‘x[n] naranja’ representa una <u>señal periódica</u>.

La sumatoria en la fórmula de los coeficientes puede verse como otra función de variable $k\Omega_0$, lo cual es literalmente lo mismo que hicimos para tiempo continuo, tal que:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} x[n].e^{-jk\Omega_0 n} = a_k = \frac{1}{N}.X(k\Omega_0)$$

$$\underbrace{\sum_{\langle N\rangle} x[n].e^{-jk\Omega_0 n}}_{X(k\Omega_0)}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \Rightarrow f_0$$

$$X(k\Omega_0) = \sum_{\langle N\rangle} x[n].e^{-jk\Omega_0 n}$$

Despejando x[n] (ya se hizo que N tienda a infinito)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)\cdot e^{jk\Omega_0 n}.\Omega_0$$

Si N tiende a infinito, para hacer de nuevo no periódica a la señal y volver a x[n] ocurre que:

- ***Ωo tiende a 0*** (no es cero, al ser inversamente proporcional a N se va a acercar infinitesimalmente a 0) por lo que ***Ωo → dΩ***
- ***k Ωo → Ω*** (la variable se hace continua, se pasa al dominio de la frecuencia Ω)

(todo el eje x desde -∞ a +∞ es afectado)

$$\boxed{X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j\Omega n}}$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto

$$\boxed{\begin{array}{l} X(\Omega_0 + k\,2\pi) = X(\Omega) \\ \text{Periódica en } \Omega\text{, con período } 2\pi \end{array}}$$

Anti Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Partiendo de los resultados obtenidos al hacer que N →∞, si tomamos límite en la transformada de Fourier, ocurre que en la ecuación de x[n], ésta última se transforma en x[n], y la sumatoria de dicha ecuación tiende a ser una integral (por definición de integral), de forma que:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)\cdot e^{jk\Omega_0 n}.\Omega_0$$

$$X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j\Omega n}$$

Tomamos límite para N → ∞
La sumatoria se hace integral

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\cdot e^{j\Omega n}.d\Omega}$$

Antitransformada de Fourier en tiempo discreto

La integral se hace en un ciclo de tamaño 2π, porque es el valor periódico en el que no se repite la señal. Cuando pasamos del dominio del tiempo a la frecuencia utilizando la transformada discreta, la frecuencia se vuelve una variable continua, por lo que no es útil para digitalizar las señales.

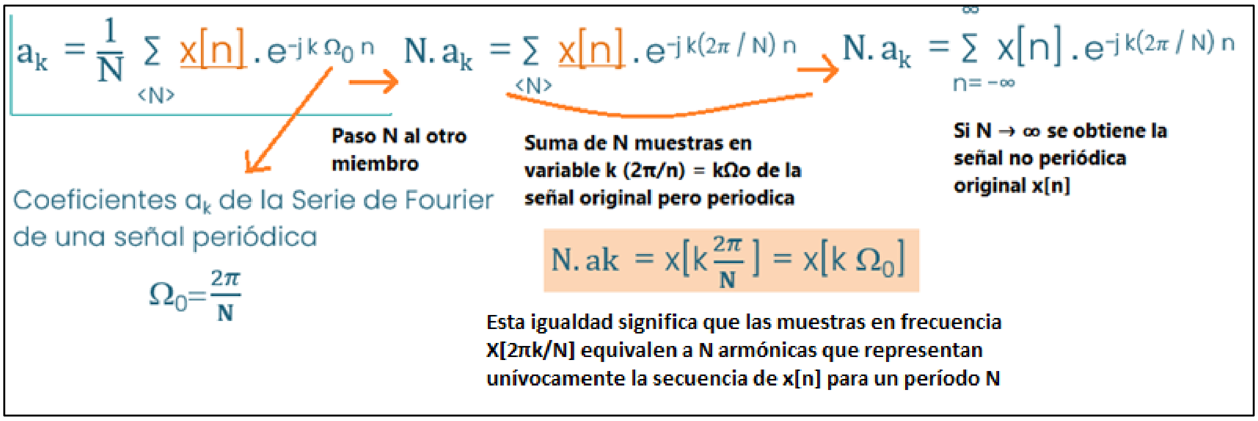
Transformada Discreta de Fourier (TDF o DFT)

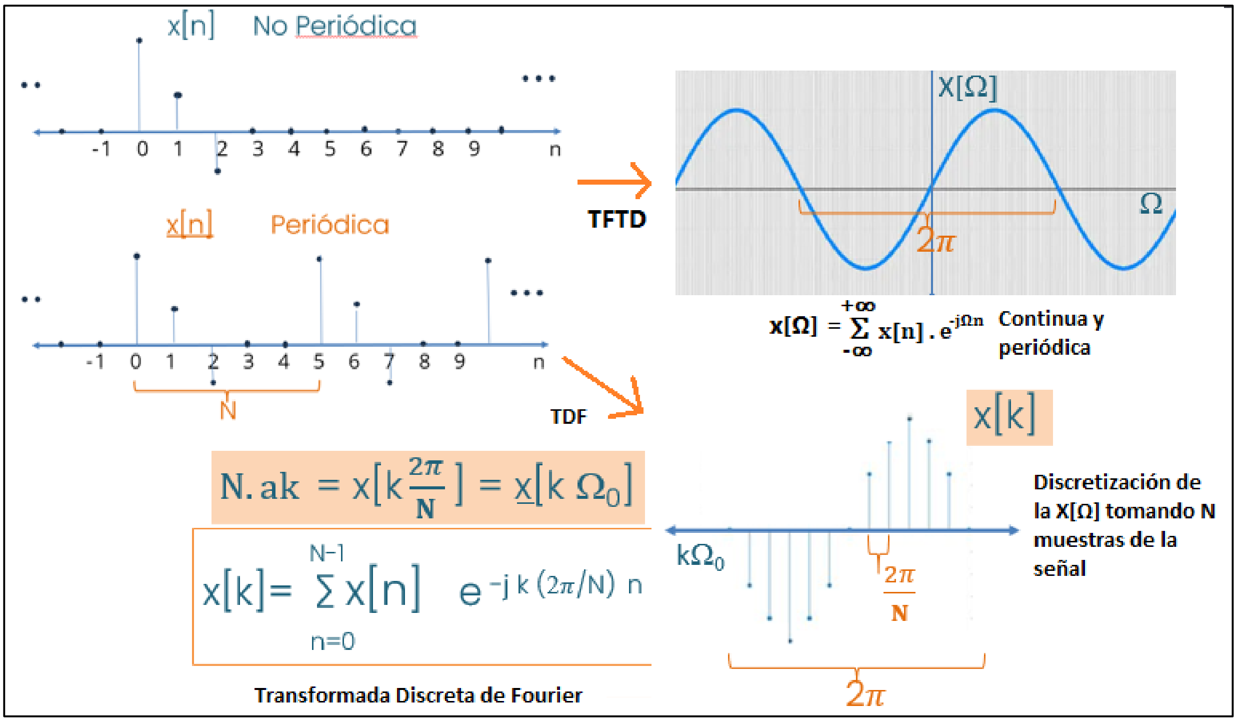
Se utiliza para señales de longitud finita y convierte una señal de tiempo discreto en una representación discreta en el dominio de la frecuencia.

Es un muestreo en el dominio de la frecuencia de la TFTD, que es útil para discretizar las señales de tiempo discreto en el dominio de la frecuencia, a diferencia de la TFTD, que aplicada a una función, resulta en otra que es continua en el dominio de la frecuencia.

Esto hace que al llevar la señal a la frecuencia, en la TFTD, el rango de frecuencias resultante sea de -infinito a +infinito. En la TDF, la señal resultante en la frecuencia tiene un rango finito de valores discretos, que resultan de tomar un período fundamental de la señal de entrada no periódica en el tiempo discreto.

De la expresión de la TFTD para la señal no periódica x[n] ('x azul'), si se toma una señal 'x[n]' ('x naranja') resultante de hacer que se repita periódicamente, en un periodo correspondiente al rango completo de valores de la señal (N), las coeficientes de la serie de Fourier de x[n] son muestras de X(Ω) para frecuencias correspondientes a armónicas en kΩ0.





Anti Transformada Discreta de Fourier

Es la que permite obtener la señal x[n] de tiempo discreto, desde las muestras tomadas en la frecuencias usando la TDF. El par de transformadas discretas de Fourier es la que se usa principalmente en el procesamiento digital de señales, su implementación computacional es sumamente eficiente.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k].e^{jk(2\pi/N)n}$$

Antitransformada Discreta de Fourier

Relación de la TDF con la Serie de Fourier

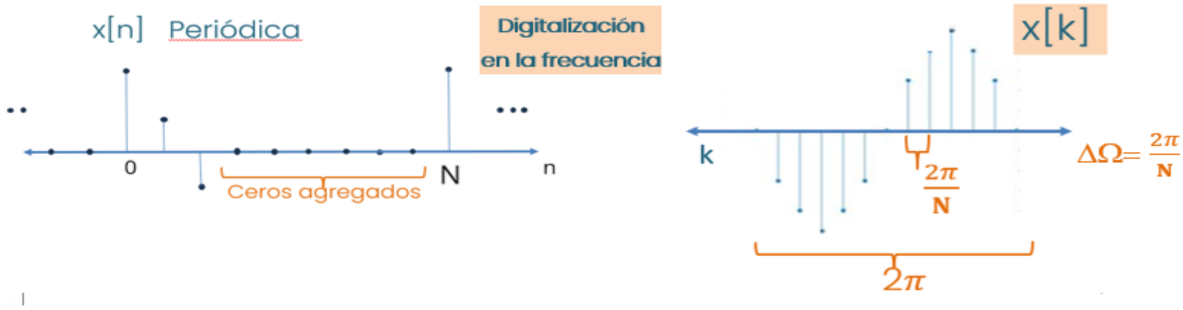
La TDF se puede interpretar como una Serie de Fourier aplicable a señales periódicas, ya que dada una secuencia periódica x[n] ('naranja') con <u>valores de n de 0 a N-1</u>, su TDF es **x[k] = k.a_k** siendo a_k los coeficientes de la Serie de Fourier. Por lo que, una TDF muestreada en N puntos equivale al espectro de líneas exacto de una secuencia periódica de período fundamental N.

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Es un algoritmo eficiente para calcular la TDF. Reduce su tiempo de cálculo de $O(N^2)$ a $O(N.\log(N))$.

En Octave, para usar la FFT no se puede agarrar una secuencia ∞ de datos. Por esto, generamos una señal con N elementos completando con valores nulos. Se genera un vector de dimensión N, igual al número de elementos de un ciclo en la señal periódica donde una parte tendrá valores de señal y se completa hasta llegar a N con valores nulos. Al completar con valores nulos, creamos una señal que es periódica dentro de la ventana de análisis, lo que permite una representación precisa de las frecuencias en la señal original cuando aplicamos la DFT o FFT.

En la práctica, para trabajar con señales no periódicas, se utiliza la TDF implementando distintos algoritmos computacionales, donde uno de ellos es la FFT (no usamos las fórmulas vistas antes, sino esto), que parte de una señal no periódica, sobre la que se genera otra señal x[n] periódica, tomando N elementos de la primera señal, y completando con valores nulos hasta N-1, ya que en la longitud N la señal se repite de nuevo. Es decir, se toma la señal no periódica en un intervalo 0 hasta N y se rellena con 0 hasta N -1.



El valor del período N afecta la cantidad de muestras en la frecuencia de la transformada, ya que, si se toman más valores de N, el periodo es más grande y la señal tarda más en completar una oscilación. A menor N, la señal se muestrea más, porque el período es menor y las oscilaciones en frecuencia son muchas.

Convolución FFT

La convolución FFT (convolución en dominio de frecuencia) es una técnica que utiliza la TDF para realizar de forma más eficiente la convolución de 2 señales, llevándolas al dominio de la frecuencia, lo que es más rápido que realizarla en el dominio del tiempo, especialmente para señales muy largas, ya que la convolución en el tiempo se corresponde con la multiplicación de las señales en la frecuencia. Entonces, se calcula la TDF de ambas señales, multiplica, y vuelve al dominio del tiempo con 'Antitransformada discreta'.

Considerando que la convolución lineal diverge cuando las señales son ∞ o son finitas (pero no periódicas), trabajamos con señales periódicas "implícitas" (conjunto de datos finitos tomados como periódicas en el tiempo de una señal que puede ser no periódica, asumiendo que se repite en una longitud finita).

Procedimiento:

1) Dadas dos señales no periódicas x1[n] y x2[n], se redefinen para un mismo periodo N como:

$$\widehat{x1}[n] \text{ y } \widehat{x2}[n]$$

2) El período N se toma como la suma de las longitudes de ambas, si L1 y L2 son respectivas longitudes (valores finitos en los que existe cada señal) entonces N >= L1 + L2 – 1
3) Calcular la TDF de c/u de las señales, obteniendo la representación discreta en la frecuencia para c/u.
4) Se realiza la multiplicación de ambas señales resultantes de la TDF, es decir, una multiplicación "punto a punto" en el periodo N de las muestras de cada señal en la frecuencia. El resultado es una señal:

$$\hat{y}[k] = \widehat{x1}[n] \,.\, \widehat{x2}[n]$$

5) Se usa la Antitransformada Discreta para obtener y[n], que es la señal equivalente a haber hecho la convolución en el tiempo de ambas señales.

$$\hat{x}_1[n] = \begin{cases} x_1[n] & \text{para } 0 <= n <= L_1 - 1 \\ 0 & \text{para } L_1 < n <= N - 1 \end{cases}$$

$$\hat{x}_2[n] = \begin{cases} x_2[n] & \text{para } 0 <= n <= L_2 - 1 \\ 0 & \text{para } L_2 < n <= N - 1 \end{cases}$$

Señales redefinidas
en Periodo N = L1 + L2 -1

$$\boxed{y[n]= x[n]*h[n] \xrightarrow{\text{T.D.F}} y[k]=x[k].h[k]}$$

(Suma punto a punto en todo el periodo N definido)

Convolución periódica: $y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_1[k] . \hat{x}_2[n-k]$

$$\hat{y}[k]= \hat{x}_1[k].\hat{x}_2[k] \xrightarrow{\text{T.D.F inversa}} y[n]$$

Resultado de la convolución en tiempo discreto

Unidad 5: Muestreo de Señales Analógicas y Diseño de Filtros FIR

La mayoría de las señales cotidianas son analógicas (tiempo continuo), como la voz humana, audio o video. Actualmente, el procesamiento de las señales se hace en gran parte por medios digitales, por lo que para poder digitalizar estas señales, se las tiene que convertir en una **secuencia de números finitos o discretos, con precisión finita** (conversión analógica – digital).

*"Todos los filtros pueden representarse como SLIT, con señales de entrada (a filtrar) y señales de salida (filtradas), y están caracterizados por una **respuesta al impulso**, tanto en el tiempo como en frecuencia."*

DSP: Digital Signal Processing -> Los filtros digitales son una parte clave en el DSP.

Los filtros básicamente tienen 2 usos:

1) Separación: Necesaria cuando una señal ha sido contaminada con interferencia, ruido u otras señales.

Ejemplo: imagina un dispositivo que mide la actividad eléctrica del corazón del bebe mientras está todavía en la panza. Normalmente la 'raw signal' va a estar contaminada por otras señales como la respiración y el propio latido de la madre, por ende el filtro lo usas para separar estas señales y analizar lo que nos interesa.

2) Restauración: Esto es usado cuando una señal ha sido distorsionada de alguna manera.

Ejemplo: una grabación de audio realizada con equipamiento pobre podría ser filtrada para lograr una mejor representación del sonido

Dentro de DSP, es común decir que las señales de entrada y salida de un filtro estén en el dominio del tiempo, porque la señal generalmente se construye tomando muestras a intervalos resultantes de tiempo.

Existen 3 maneras de representar cómo un filtro lineal afecta a una señal de entrada:

1) Respuesta al Impulso:

Es la respuesta del filtro a una señal de impulso unitario. La respuesta al impulso (h(t)) define completamente el comportamiento del filtro en el dominio del tiempo, ya que, por la propiedad de linealidad y tiempo invariante (LTI), cualquier señal de entrada puede ser descrita como una combinación de impulsos. El h(t) se utiliza para calcular cómo el filtro afecta a cualquier señal de entrada.

2) Respuesta al Escalón:

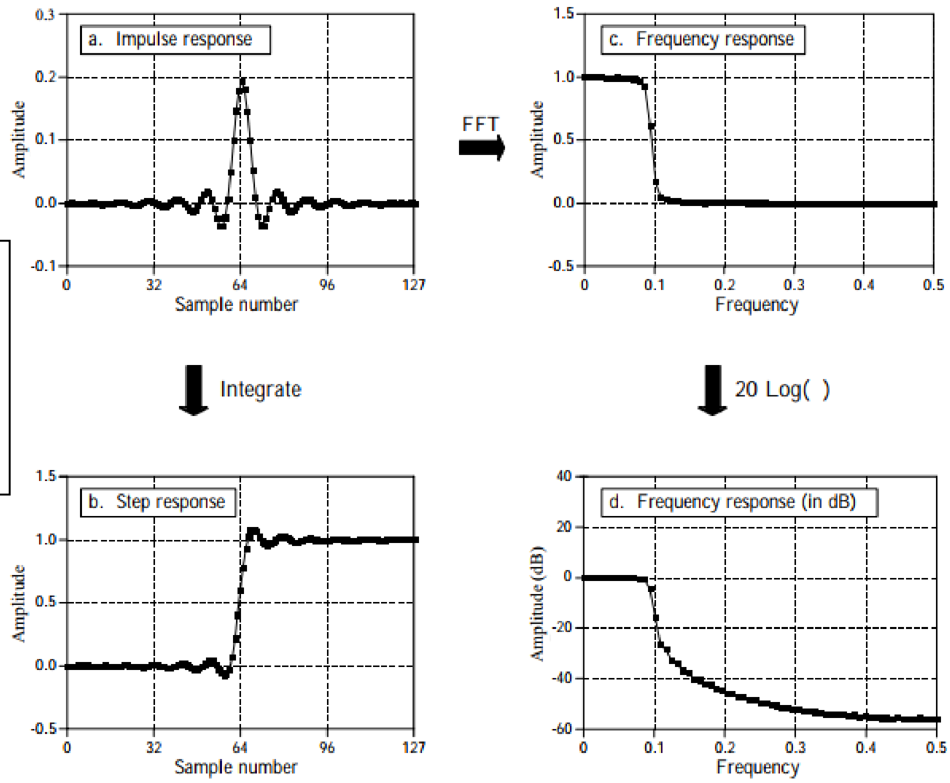
Es la respuesta del filtro a una señal de escalón unitario. Esta respuesta se obtiene integrando la respuesta al impulso. Es útil para entender cómo el filtro responde a un cambio repentino en la señal de entrada, permitiendo observar su comportamiento en términos de cómo se estabiliza ante cambios continuos.

3) Respuesta en Frecuencia:

Describe cómo el filtro afecta a las diferentes componentes de frecuencia de la señal de entrada. Esto se obtiene aplicando la Transformada de Fourier a la respuesta al impulso. La respuesta en frecuencia muestra qué frecuencias pasan a través del filtro sin ser atenuadas y cuáles son reducidas o eliminadas. Es fundamental para el diseño de filtros porque permite diseñar filtros que atenúen ciertas bandas de frecuencia (como un filtro pasa bajas, altas, etc.).

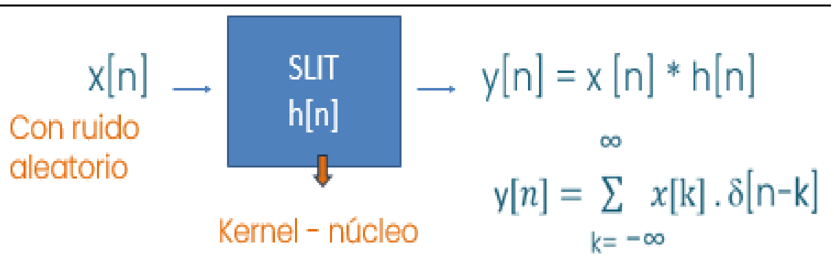
Impulse Response: salida de un sistema que tiene como entrada un impulso.

Step Response: salida de un sistema que tiene como entrada un escalón.



La manera más simple de crear un filtro digital es realizando la convolución de una señal de entrada con la respuesta al impulso que caracteriza dicho filtro digital. Cuando la respuesta al impulso es utilizada de esta manera, los diseñadores de filtros le otorgan el nombre especial de **kernel del filtro o núcleo del filtro h[n]** en el tiempo**.** El kernel (respuesta al impulso del filtro) define cómo se mezclan y ponderan los valores de la señal de entrada para producir la señal de salida.

<u>Nota</u>: En el diseño de filtros ***no es posible optimizar un filtro para aplicaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia simultáneamente.***



Clasificación de Filtros

- FIR (Respuesta al Impulso Finito)
  - Filtro de Media Móvil
  - Filtro SENC de Ventanas
- IIR (Respuesta a Impulsos Infinitos): Creados a través de recursión.
  - Respuesta al Impulso Infinita (no nos interesa)

Filtro de Media Móvil

¿Qué posee? Implementación simple y alta eficiencia.

¿Cómo funciona? Realiza un suavizado de la señal (en el dominio **del tiempo** (no es eficiente en frecuencia (su respuesta es un 'Senc'))), donde cada valor de y[n] es un promedio de los valores de la señal de entrada en "tiempos vecinos".

Aquí el promedio puede ser: centrado (implica número impar de elementos) – lateral total – lateral parcial – a derecha – a izquierda.

La expresión de la respuesta al impulso (o "Kernel/Núcleo") de este filtro es:

(Fórmula generalizada para valores impares de 'M' siendo 'M' la cantidad de puntos a usar para el promedio)

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=n-\frac{M-1}{2}}^{n+\frac{M-1}{2}} \delta[n-k]}$$

Ejemplo: Salida para M=5

$$y[n] = \frac{1}{5}\{x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2]\}$$

Ejemplo: Respuesta al impulso para M=5

Recordar que impulso en $[n+2]$ está en '-2' en eje de abscisas.

$$h[n] = \frac{1}{5}\{\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\}$$

¿Principal utilización? Reducir el ruido blanco o ruido aleatorio que puede contaminar una señal y se la quiere reestablecer.

¿Qué es este ruido? Señal con valores totalmente aleatorios, que no poseen ninguna correlación entre ellos, lo cual hace que su promedio tienda a cero. ***El ruido desaparece, si la cantidad de valores promediados aumenta ('M')***. Su espectro en la frecuencia es plano, ya que posee la misma amplitud en todas las frecuencias, con lo que un filtro selectivo en frecuencia no sería útil.

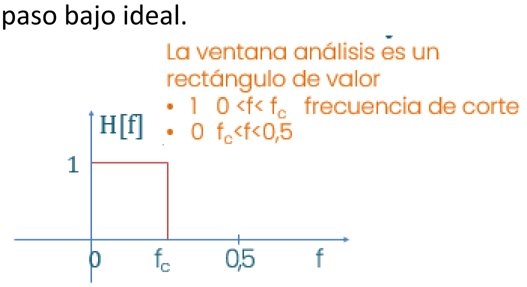
Filtro Pasa Bajo en Frecuencia - Senc de Ventanas

¿Qué posee? Implementación eficiente en el dominio de la frecuencia (pero pobre en dominio del tiempo).

Procedimiento

Para obtener el núcleo del Senc de ventanas, se parte de un filtro paso bajo ideal.

Filtro de paso bajo ideal: un filtro de paso bajo ideal tiene como respuesta en la frecuencia una ventana (Senc en tiempo), para la cual se define una frecuencia de corte, que restringe valores de la señal de entrada superiores a dicha frecuencia, por lo cual vamos a usar la Transformada de Fourier en tiempo discreto.



Habiendo definido esto, ***nuestro núcleo tiene que ser tal que al realizar la convolución con x[n] me anule las frecuencias superiores a la fc.***

Senc(x) = Sen(x)/x

Para esto, llevamos el núcleo del filtro pasa bajo ideal a la forma del Senc mediante el siguiente 'artilugio matemático':

$$h[n] = \frac{sen(2\pi . f_c n)}{\pi . n} \longrightarrow h[n] = 2f_c \frac{sen(2\pi . f_c n)}{2f_c \pi . n} \longrightarrow h[n] = 2f_c \, senc(2f_c \, n)$$

Núcleo del filtro paso bajo ideal

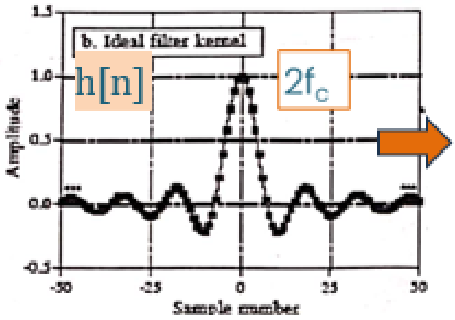
Se multiplica y divide por 2.fc para llevarlo a la definición de un senc

Si n = 0, el senc = 1
h[0] = 2.fc (altura 2.fc en el tiempo).

Para la última sección, se toma el límite (ya que hay indeterminación): $senc(0) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1$

Sin embargo esto nos trae el **Problema 1**:

"En el tiempo discreto, la máxima cantidad de oscilaciones se da en la frecuencia digital f0 = 1/2, a partir de la cual hay alias de la señal. El núcleo obtenido con el Senc tiene valores de n que van de -∞ a +∞, por lo que es imposible de implementar computacionalmente."



La respuesta en el tiempo de

$$h[n] = 2f_c \, senc(2f_c \, n)$$

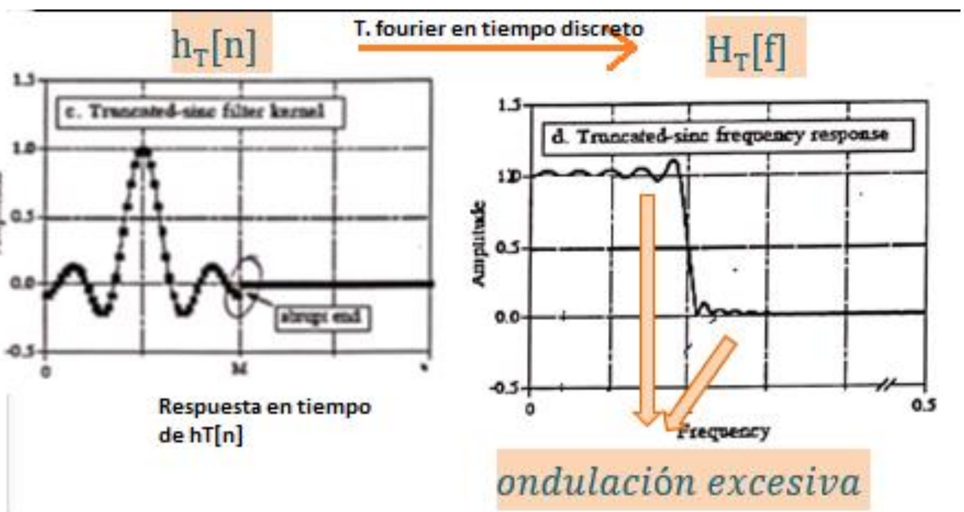
tiene infinitos valores, imposible de implementar

Y llegamos a la **Solución 1**:

"Acotar la duración del núcleo a un valor de 0 a M+1 elementos, simétricos respecto el valor de la señal en x[0]. Esto se realiza aplicando una ventana rectangular que produzca el truncamiento de los M valores, es decir, multiplicando el núcleo obtenido hasta el momento por una ventana rectangular que vaya de 0 a M, produciendo un núcleo hT[n]."

Sin embargo esto nos trae el **Problema 2**:

"El truncamiento en el tiempo produce un corte abrupto de la señal, lo que se traduce a ondulaciones excesivas en la frecuencia, observables en los valores de la banda de paso (f < fc) y banda de parada (f > fc) de la respuesta en frecuencia (Fenómeno de Gibbs)."



Y llegamos a la **Solución 2**:

Ventana de Hamming **v[n]** = $0{,}54 - 0{,}45\ \cos(\frac{2\pi.n}{M})$

“Se introduce un suavizado en el núcleo del filtro truncado (hT[n]), multiplicándolo por una ventana de Hamming **v[n]**, que tienda de manera gradual a 0 en los bordes (frecuencias de corte) y así se elimine el salto abrupto y en consecuencia las ondulaciones.” (Desplazamos hacia derecha (de 0 a M) para usar valores positivos)

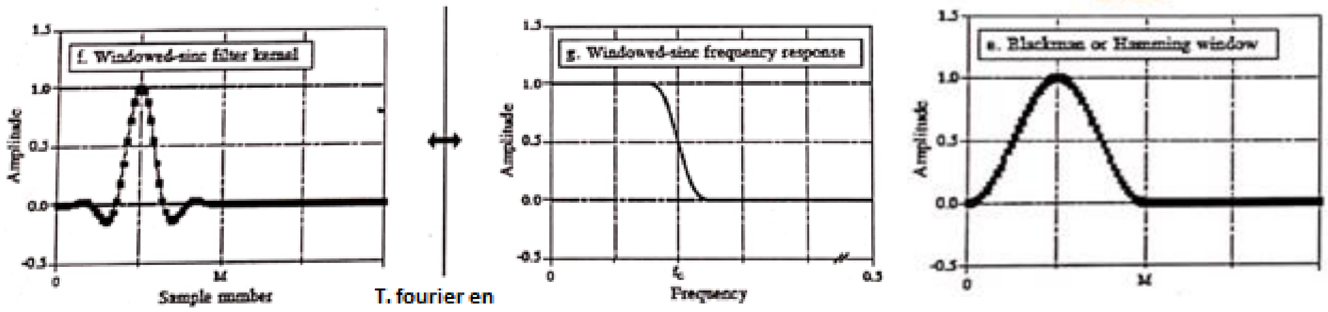
<u>*La ventana de Hamming se aplica para un número par M de valores, es decir, que la cantidad de elementos en la ventana es de M + 1 y va de n = 0 a M.*</u>

Para este requerimiento se usa en el núcleo del filtro una expresión que desplaza el origen (es decir, el centro del senc) de 0 a M/2, para igualar valores pares y mantener los valores de tiempo positivos (hd[n]). El núcleo obtenido en esta etapa se llama núcleo definitivo. La mejora del fenómeno de Gibbs es notable, y mejora a medida que aumenta el valor de M usado.

$$h_d[n] = \frac{\mathrm{sen}\left(2\pi.f_c(n-\frac{M}{2})\right)}{\pi.(n-\frac{M}{2})} \rightarrow$$

Núcleo definitivo
$h[n] = h_d[n].v[n]$

v[n]



Respuesta en el tiempo del núcleo definitivo

T. fourier en tiempo discreto

Respuesta en frecuencia del núcleo definitivo

Sin embargo esto nos trae el **Problema 3**:

“La ventana de Hamming introduce amplitudes modificadas respecto las amplitudes del núcleo definitivo, es decir, en la respuesta en frecuencia no se respeta que H[0] = 1. Las modificaciones en amplitud cambian la ganancia del filtro. La ganancia del filtro tiene que ser = 1 para que no se modifique la señal x[n] de entrada.”

La función ‘Senc(x)’ vale 1 cuando x=0 (Discontinuidad Evitable)

(En el dominio de la frecuencia, la ganancia del filtro en frecuencia cero (o continua) se representa por ‘H[0]’. Idealmente, para un filtro de paso bajo que no debe alterar la amplitud de la señal de entrada, esta ganancia debería ser 1 (o 0 dB). Sin embargo, cuando aplicamos la ventana de Hamming, las modificaciones introducidas pueden alterar esta ganancia.)

Y llegamos a la **Solución 3**:

“Se debe normalizar h[n] para solucionar los cambios de amplitud. Esto se realiza con un promedio de la Serie de Fourier usando la TDF.” De manera que se cumpla:

$$H[k] = \sum_{n=0}^{M} h[n].e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} \rightarrow H[0] = \sum_{n=0}^{M} h[n] = 1$$

La **<u>respuesta al impulso o el núcleo del filtro definitivo normalizado</u>** queda:

$$h_n[n] = \frac{h[n]}{\sum_{n=0}^{M} h[n]}$$

Núcleo del filtro senc de Ventanas

(h[n] es el núcleo definitivo con Ventana de Hamming)

En la **implementación computacional del filtro**, se realiza la convolución de la señal de entrada x[n] con el núcleo normalizado h_n[n]. Para señales largas, el procedimiento se puede agilizar usando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier y la TDF.

Filtros Digitales

Los núcleos de los filtros digitales **Pasa Alto**, **Pasa Banda** y **Rechazo de Banda** se pueden obtener <u>a partir de un núcleo de filtro pasa bajo</u>, teniendo en cuenta el espectro (respuesta en frecuencia) que se espera para cada filtro.

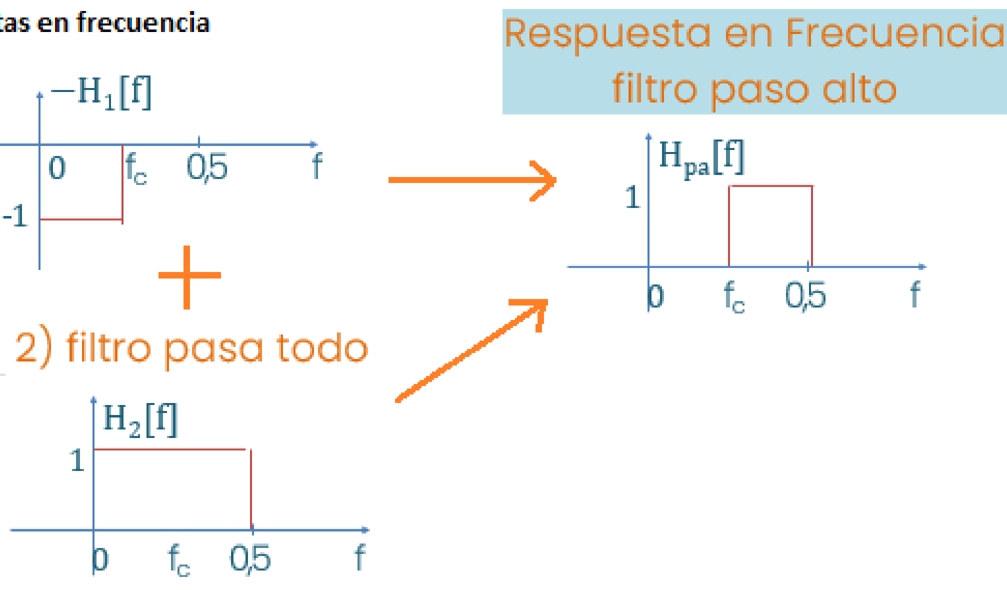
<u>CONCEPTO IMPORTANTE:</u>

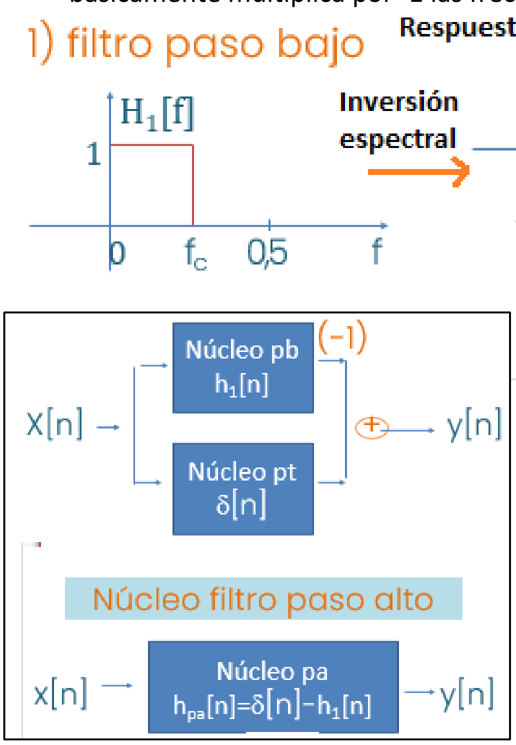
- En procesamiento de señales, cuando hablamos de frecuencias normalizadas en un rango de [0,1], la frecuencia de Nyquist se encuentra en 0.5, donde $f_{Ny} = f_s/2$ siendo f_s la frecuencia de muestreo. La frecuencia de Nyquist es el límite máximo que puede contener una señal muestreada sin causar aliasing (superposición de espectros).
- Cuando se normaliza la frecuencia, se usa una escala donde la frecuencia de muestreo se considera como 1. En esta escala:
  - 0 corresponde a la frecuencia 0 Hz (o continua, DC).
  - 0.5 corresponde a la frecuencia de Nyquist ($f_s/2$).
- No confundirse pensando que la ubicación de 'fc' en el eje de abscisas entre 0 y 0.5 indica un valor de '0.25'. Se pone ahí para simbolizar que 'fc' va a ir de 0 a 0.5, nada más.

<u>Filtro Pasa Alto: Inversión Espectral</u>

Este filtro puede verse como una suma (asociación en paralelo) de dos sistemas cuyas respuestas al impulso correspondan a un filtro pasa bajo y un filtro pasa todo ($\delta[n]$).

La salida del núcleo del filtro paso bajo, antes de sumarse a la del filtro pasa todo, se tiene que *invertir* (cambiar de signo las muestras obtenidas del núcleo) este proceso es lo que se llama **inversión espectral**, y básicamente multiplica por -1 las frecuencias del filtro.





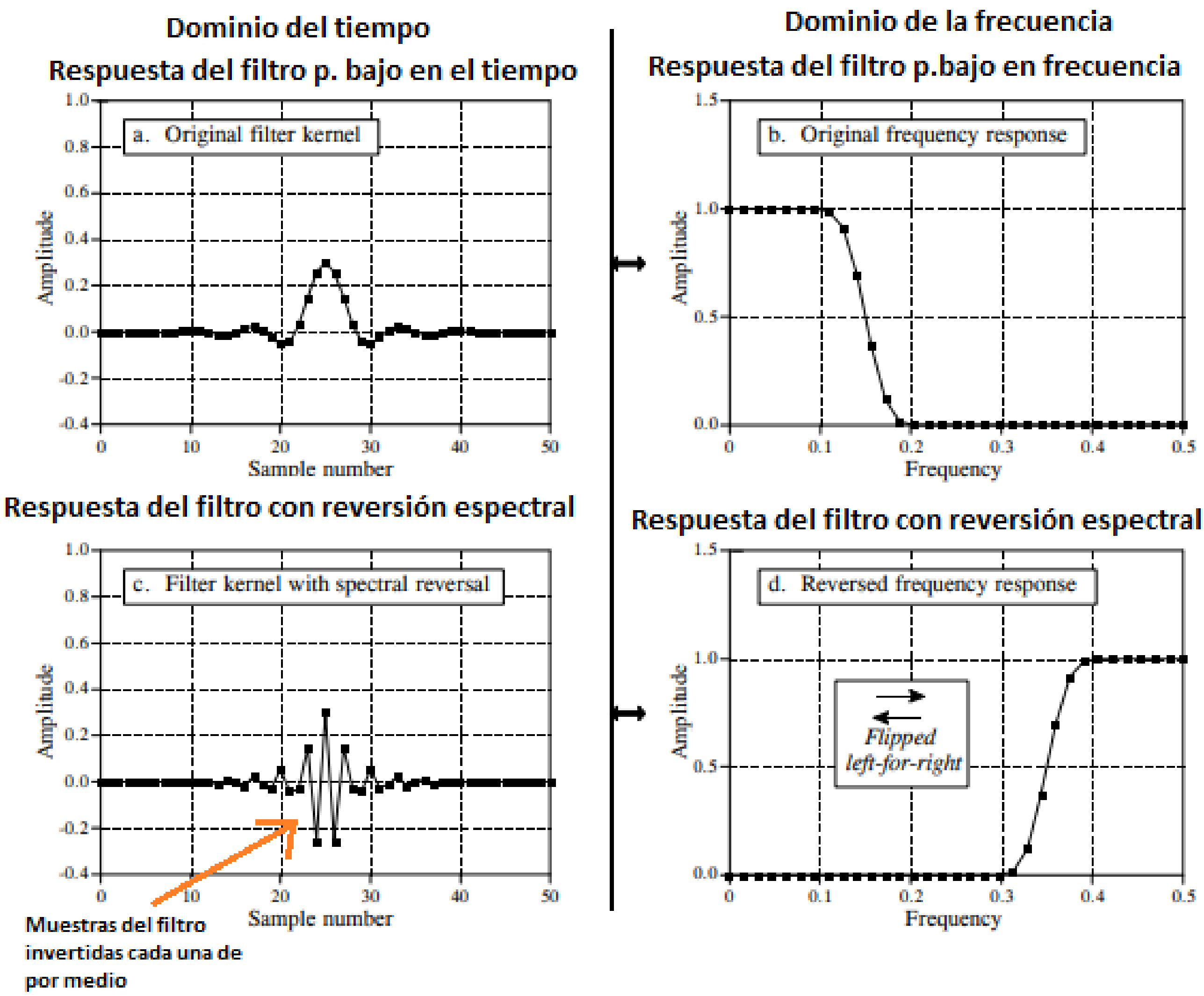
<u>Nota</u>: Al aplicar un filtro pasa bajo con una frecuencia de corte 'fc' a un impulso unitario, el resultado es una función rectangular en el dominio de la frecuencia que es igual a 1 para todas las frecuencias dentro del rango y 0 para todas las frecuencias fuera de ese rango.

Entonces el núcleo de un filtro pasa alto por inversión espectral, es igual a la de un filtro pasa bajo con los signos opuestos en todos sus componentes, sumando un uno (impulso) al valor central el lóbulo principal.

Filtro Pasa Alto: Reversión Espectral

Este otro método para la obtención de un filtro paso alto, consiste en el cambio de signo cada una de por medio, de las muestras de la señal de entrada a un filtro de paso bajo, el efecto de realizar esto en el dominio del tiempo es un **giro o reflexión** en el dominio de la frecuencia (izquierda a derecha y viceversa).

Cambiar el signo de cada muestra una de por medio es equivalente a **multiplicar el kernel o núcleo del filtro paso bajo por una señal sinusoidal de frecuencia 1/2.**

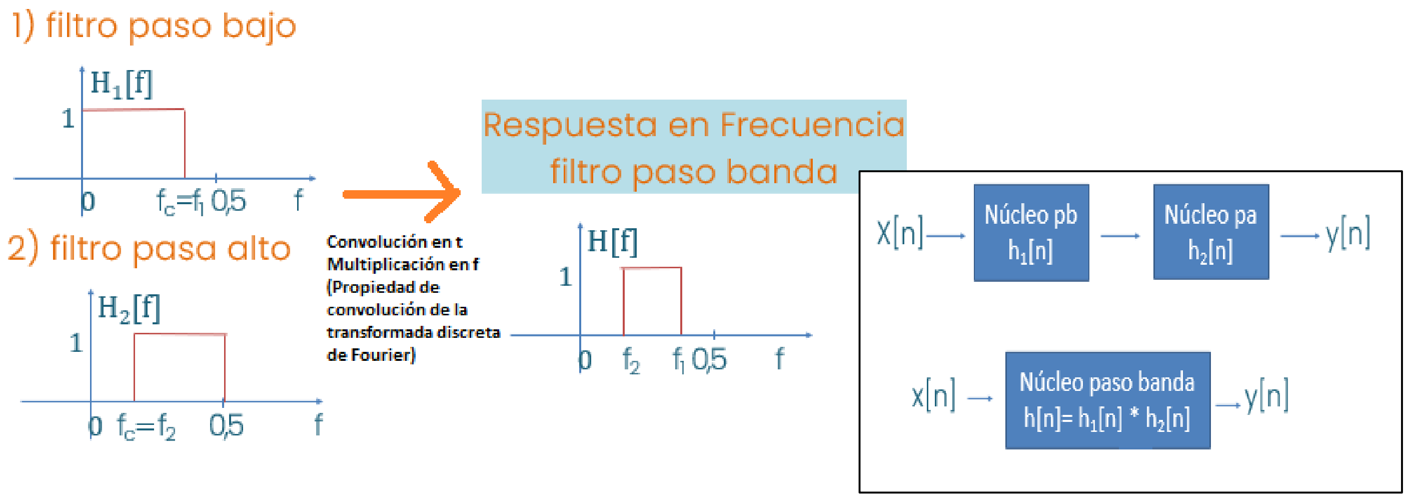


Filtro Pasa Banda

Se puede ver como una sucesión en Serie de dos sistemas, uno de ellos correspondiente a un filtro paso bajo con frecuencia de corte f1, con un filtro paso alto con frecuencia de corte f2 < f1.

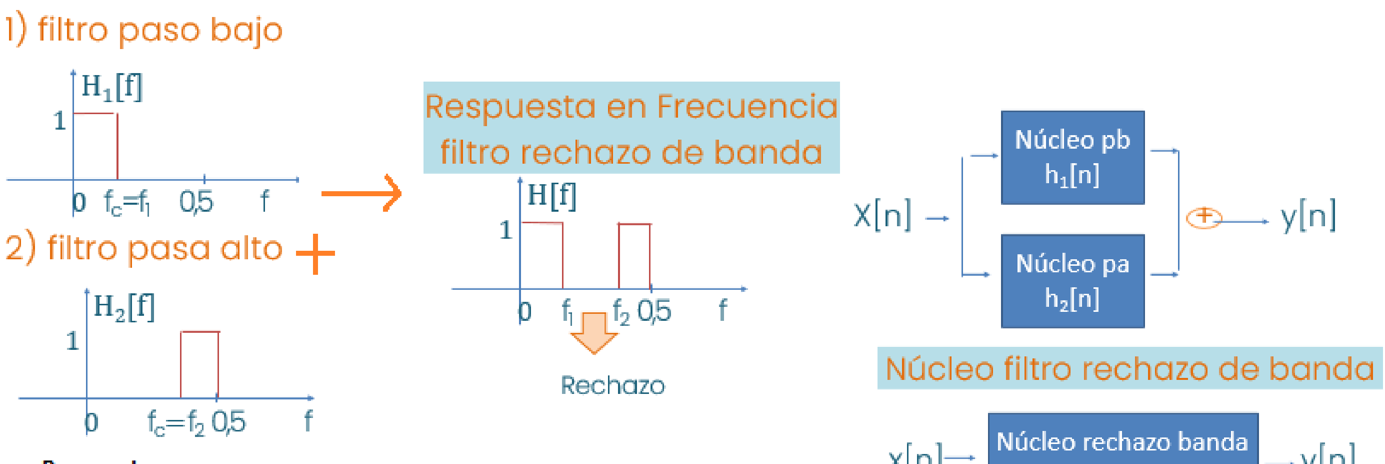
<u>La implementación de este filtro consiste en realizar la convolución de los núcleos de los filtros paso bajo y paso alto en el dominio del tiempo, lo que corresponde a una multiplicación en el dominio de la frecuencia.</u>

Como en la frecuencia la ganancia de los filtros se mantiene =1, realizar una multiplicación de señales no cambia el valor en cuanto a la amplitud, si no que hace que se mantengan los valores de frecuencia entre las frecuencias de corte de cada filtro.



Filtro Rechaza Banda

Se construye con una agrupación en paralelo (suma) de dos sistemas, el primero correspondiente a un filtro paso bajo con una frecuencia de corte f1, y el otro un filtro de paso alto con frecuencia de corte f2 > f1.

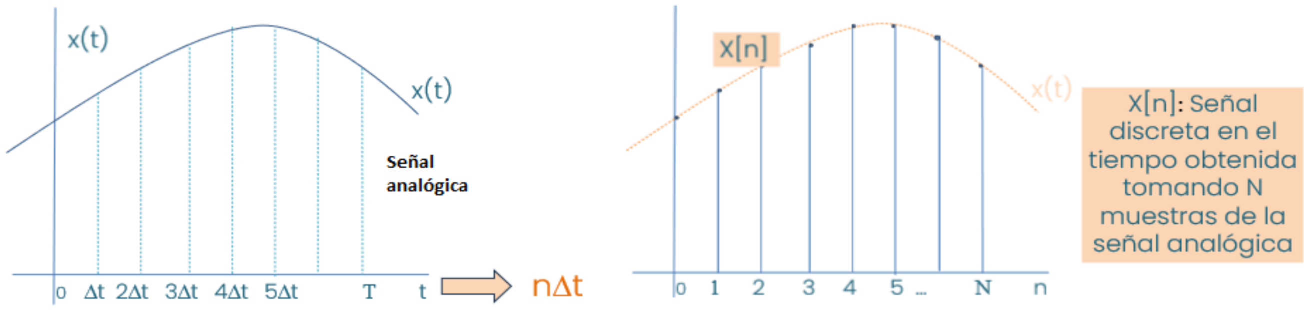


Respuestas en frecuencia de los filtros

Es decir, el núcleo del filtro de rechazo de banda se obtiene con la suma de los núcleos de un filtro pasa bajo con uno pasa alto, de forma que en el dominio de la frecuencia, la banda rechazada de frecuencias es la comprendida entre la frecuencia de corte del filtro paso bajo (a partir de la cual trunca las frecuencias) y la frecuencia de corte del filtro paso alto, hasta el valor de frecuencia = 1/2.

Muestreo de Señales

Muestreo: es un proceso que consiste en convertir una señal continua en el tiempo en una señal discreta, mediante la toma de "muestras" de los valores de la señal continua en instantes discretos de tiempo. El **muestreo uniforme** es aquel que se realiza a intervalos de tiempo enteros iguales **Δt**.



Frecuencia de muestreo o tasa de muestreo (Fm): es la inversa del intervalo de tiempo entre las muestras (período de muestreo) y se define como <u>la cantidad de muestras que se toman en un segundo</u> en x[n].

$$Fm = \frac{1}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{1}{Fm}$$

La variable analógica 't' puede verse como el producto de los intervalos de muestreo por los valores discretos de tiempo, la señal obtenida depende de la cantidad de muestras tomadas ('n').

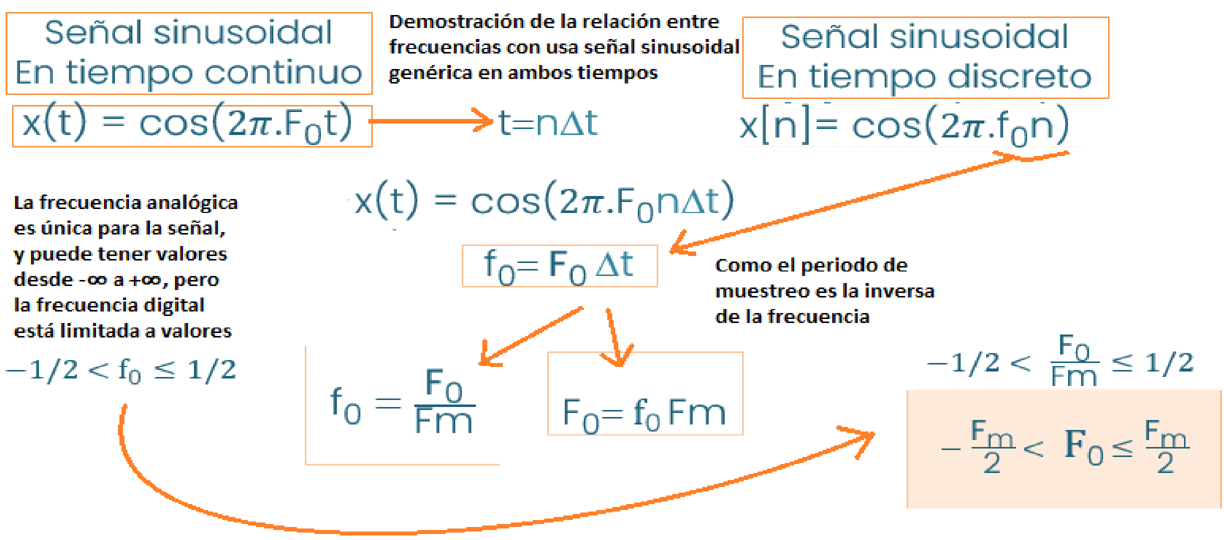
$$t = n\,.\Delta t \quad \therefore \quad t = \frac{n}{Fm}$$

'F0' es la frecuencia analógica de la señal, mientras que 'f0' es la frecuencia digital que depende de **Δt.**

$$F0 = \frac{\omega(velocidad\ angular)}{2\pi} \rightarrow f_0 = F0.\Delta t \quad con -\infty \leq \omega \leq \infty \ \wedge \ -\infty \leq F0 \leq \infty$$

F0 se mide en Hz = Radianes/Segundo	Recordar: Ω_0 = Velocidad Angular en Tiempo Discreto

La relación entre ambas frecuencias (F0 y f0) es 1 a 1, es decir, al ser la frecuencia analógica única para la señal, la frecuencia digital depende de qué período de muestreo usemos, lo que permite seleccionarla para después reconstruir de nuevo la señal analógica, usando el mismo período con la señal digital. La frecuencia digital 'f0'es **relativa** al valor de Fm que se use.



Esto hace que, como la frecuencia digital se deba encontrar entre -1/2 y 1/2 (frecuencias de máxima tasa de oscilación), solo va a ser posible reconstruir señales analógicas de frecuencias como máximo de:

$$\boxed{-\frac{F_m}{2} < F_0 \leq \frac{F_m}{2}} \Rightarrow \boxed{F_{0\,\text{máx}} = \frac{F_m}{2}}$$

De aquí se deduce el Teorema de Muestreo.

Teorema de Muestreo

Este surge de la relación entre las frecuencias analógicas y la de muestreo, y dice que: "<u>Para no perder información y poder reconstruir una señal analógica desde una señal digitalizada, la frecuencia de muestreo debe ser, como mínimo, del doble de la frecuencia máxima **F0máx** de la señal analógica.</u>" Considerando que la frecuencia de la señal analógica debe estar dentro de los valores de F0máx.

$$\boxed{Fm \geq 2\, F_{0\,\text{máx}}}$$

Cualquier señal de frecuencias superiores es un **alias** de alguna frecuencia menor a la frecuencia analógica máxima, que tiene las mismas muestras en x[n], pero no permite recuperar la información correctamente de la señal.

Entonces, el muestreo de una señal continua $\boxed{x(t) = \cos(2\pi . F_0 t)}$ a una $f_m = \frac{1}{\Delta t}$ genera una señal discreta: $\boxed{x[n] = \cos(2\pi . f_0 n)}$

Las señales discretas x[n] periódicas, repiten sus valores (**alias**) si se suma un valor entero k a la frecuencia digital, es decir:

$$\boxed{x[n] = \cos(2\pi . f_0 n) = \cos(2\pi .(f_0 + k).n)}$$

Si a dicha ecuación le introducimos la frecuencia analógica (reemplazo f0 por F0 y luego reemplazo F0 por 'F0 + k . fm'), queda:

$$x[n] = \cos\left(2\pi .\left(\frac{F_0}{Fm} + k\right).n\right) \longrightarrow x[n] = \cos\left(2\pi .\left(\frac{F_0 + k.Fm}{Fm}\right).n\right)$$

Alias señales analógicas	$x(t) = \cos(2\pi .\,(F_0 + k.Fm).t)$
Alias señales digitales	$x[n] = \cos\left(2\pi .\left(\frac{F_0 + k.Fm}{Fm}\right).n\right)$

$$t = \frac{n}{Fm}$$

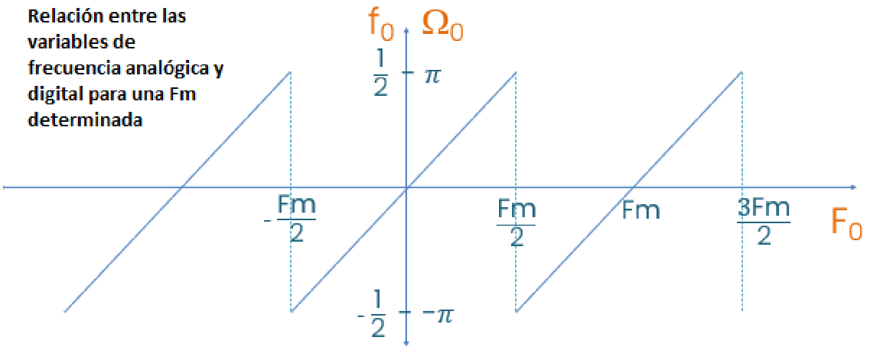
$$\boxed{f_0 = F_0\, \Delta t}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{F_0}{Fm}}$$

$$\boxed{F_0 = f_0\, Fm}$$

Esto nos dice que para todas las frecuencias analógicas ***Fk = Fo + k . Fm*** , la señal es idéntica, y por lo tanto va a tener los mismos valores para el Δt o Fm utilizados.

Relación entre las variables de frecuencia analógica y digital para una Fm determinada



Muestreo de señales analógicas y relación con la Transformada Discreta de Fourier (TDF)

La TDF relaciona dos vectores de N elementos entre sí:

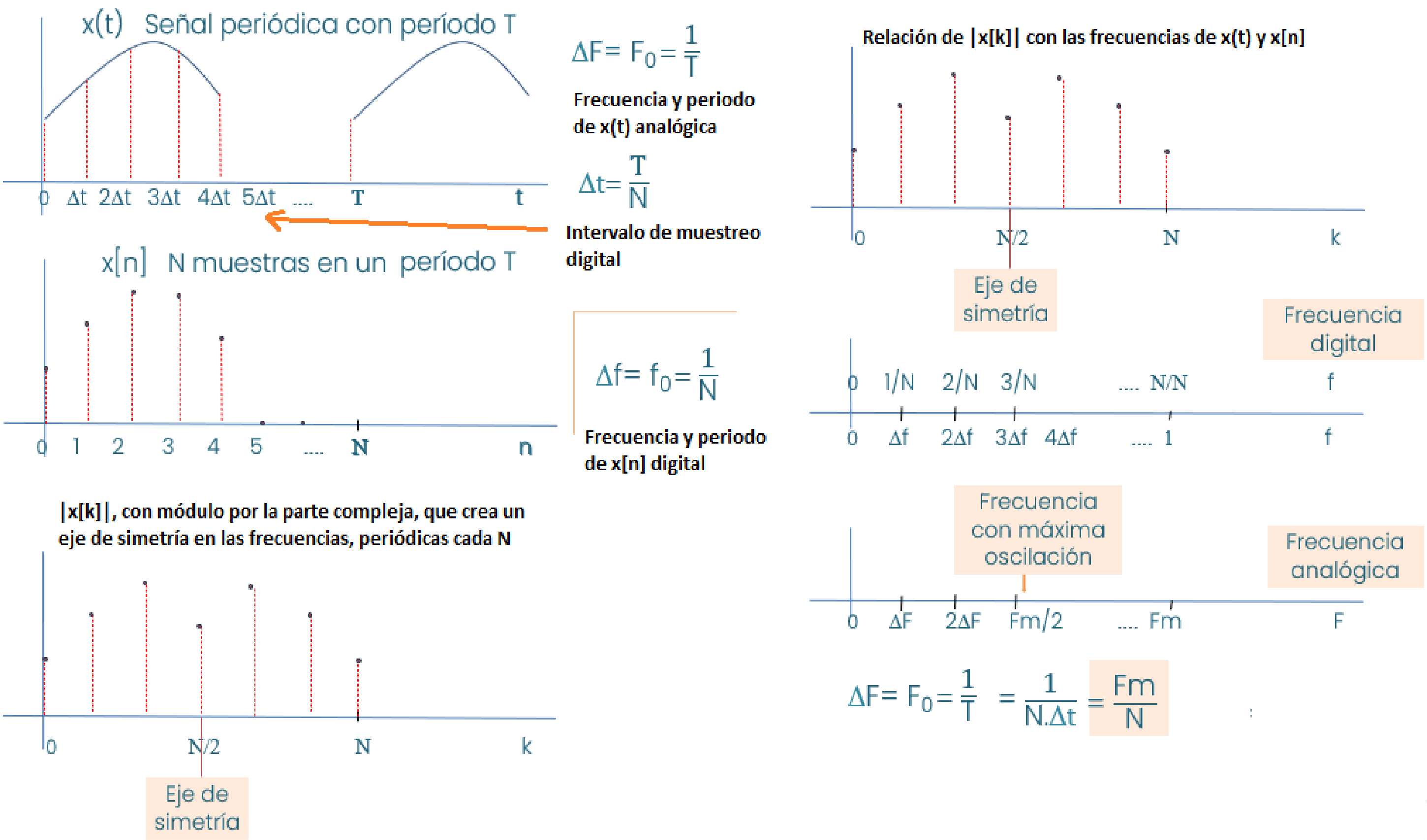
- x[n]: es un vector de N muestras discretas para una señal analógica x(t).
- x[k]: es un vector de N muestras correspondientes a frecuencias digitales, obtenido al aplicar la Antitransformada Discreta a x[n].

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] . e^{j\,k\,(2\pi/N)\,n}$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \; e^{-j\,k\,(2\pi/N)\,n}$$

A x[n] le aplico la transformada discreta de Fourier (TDF) para obtener a x[k] y poderla analizar en términos de frecuencia. Sin embargo es importante que cuando usas TDF, en realidad se obtienen 2 gráficos de frecuencias, uno para la parte real y otro para la parte imaginaria.

Al tomar el módulo de x[k], obtenemos directamente la magnitud de cada componente de frecuencia.



Si ahora analizamos la relación $\Delta F = \frac{1}{N\,.\,\Delta T}$ notamos:

- Si reducimos Δt, vamos a mejorar la calidad de muestreo en el dominio del tiempo, ya que estamos aumentando la frecuencia de muestreo (por lo que la señal es más fácil de reconstruir), sin embargo, esto produce que se empeore el muestreo de las frecuencias en el espectro si N se mantiene constante (aumenta la frecuencia, al ser inversamente proporcionales, y en consecuencia se alejan los valores de las frecuencias de máxima oscilación, causando Aliasing).
- Si aumenta Δt pasa lo contrario: la calidad del muestreo en frecuencias mejora (con N = cte.), pero la calidad del muestreo de x(t) a x[n] en el tiempo desmejora (las muestras están más separadas).

Conclusión: **para aumentar la calidad del muestreo en un dominio, hay que aumentar la cantidad de muestras N, para no afectar la calidad en el otro.**

Recordando que:

- Máxima cantidad de oscilaciones en el tiempo discreto se da con la frecuencia digital $f_0 = \frac{1}{2}$
- La Máxima frecuencia analógica representada en el muestreo es $F_0 máx = \frac{1}{2\Delta t}$

Esta última expresión se la conoce como **Frecuencia de corte** - **Frecuencia de Nyquist**

Frecuencia de Nyquist

La máxima cantidad de oscilaciones para el tiempo discreto se da con f0 = 1/2, esto limita la máxima frecuencia analógica que se puede representar con el muestreo a $F_{max} = \frac{Fm}{2} = \frac{1}{2\,.\Delta t}$. Esta frecuencia es la llamada **frecuencia de Nyquist** o **frecuencia de corte (Fny)**, y a partir de dicha frecuencia las oscilaciones no permiten reconstruir correctamente la señal.

En la TDF se puede observar que la parte real es simétrica respecto a la frecuencia de Nyquist, y la parte imaginaria anti simétrica, por lo que el módulo de x[k] es simétrico respecto Fny.

Efecto del enventanado en el muestreo – Funciones de ventana

En el tratamiento digital de señales, no se puede trabajar con señales infinitas en el tiempo, por lo que el análisis se tiene que acotar a un intervalo. Matemáticamente, se puede lograr multiplicando la señal por una **función de Ventana**, de valores no nulos que se encuentren dentro del intervalo de análisis, y que sea nula para los demás valores.

Utilizando tanto la **transformada de Fourier en tiempo continuo** como en **tiempo discreto**, se puede lograr esto mediante la propiedad de modulación (multiplicación en el tiempo = convolución en la frecuencia).

En la práctica la función de Ventana tiende a 0 de forma gradual, lo que significa que el “corte” de los valores no se hace de forma abrupta, sino que gradualmente hasta que llega a 0 en el valor a partir del cual se desea restringir la señal. Una ventana rectangular presenta una discontinuidad en el valor de corte (cambia el valor a 0 de forma abrupta).

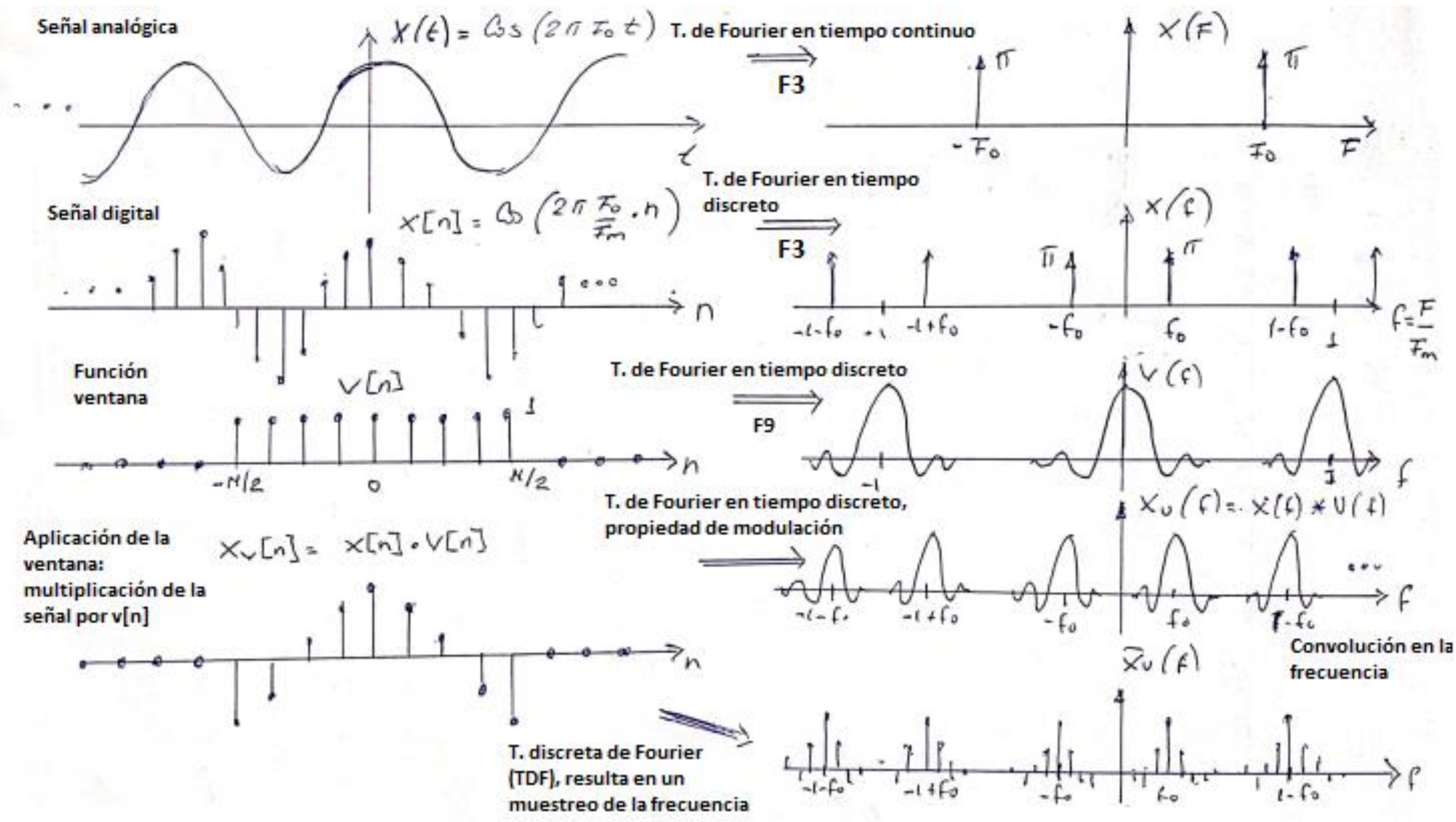
El efecto de que tienda gradualmente a 0 es evitar el **fenómeno de Gibbs**.

Fenómeno de Gibbs: consiste en la aparición de oscilaciones de alta frecuencia en el espectro de una señal, que se produce cuando hay cambios bruscos en los valores de la señal, y que se puede observar como oscilaciones en los bordes de la señal en el dominio de la frecuencia. Este fenómeno se contrarresta en el tiempo continuo y discreto agregando armónicas (muestras) a la representación de la señal, la diferencia es que en el tiempo continuo siempre está presente (porque al tener infinitas frecuencias, necesita infinitas muestras), y en el tiempo discreto se elimina al sumar la última muestra.

Ventana de Hamming: es una función utilizada para el proceso de enventanado de muestras, mediante las transformadas de Fourier, se define como:

$$\boldsymbol{Ventana\ de\ Hamming} = w[n] = 0{,}54 - 0{,}46\,.\cos(\frac{2\,\pi\,n}{M})$$

Con n = 0, 1, 2… M. Siendo M la cantidad de valores que va a mantener la ventana (cantidad de muestras a filtrar). Por lo tanto, el número total de puntos de la ventana tiene que ser M + 1.



Contenidos a continuación:

- Unidad 6: **Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)**
- Unidad 7: **Ecuaciones No Lineales**
- Unidad 8: **Ecuaciones Diferenciales (Métodos Numéricos, Sistemas y Orden Superior)**

Unidad 6: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)

Sistemas de ecuaciones lineales:

Ecuación lineal: tienen forma de polinomio de 1er grado, en donde c/ incógnita aparece en ≠ términos, elevadas a la 1, y multiplicadas por una constante.

Un SEL es un **conjunto finito de ecuaciones lineales**, de forma:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \cdot \cdot \cdot + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \cdot \cdot \cdot + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \cdot \cdot \cdot \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \cdot \cdot \cdot + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

<u>m ecuaciones</u> y <u>n incógnitas</u>

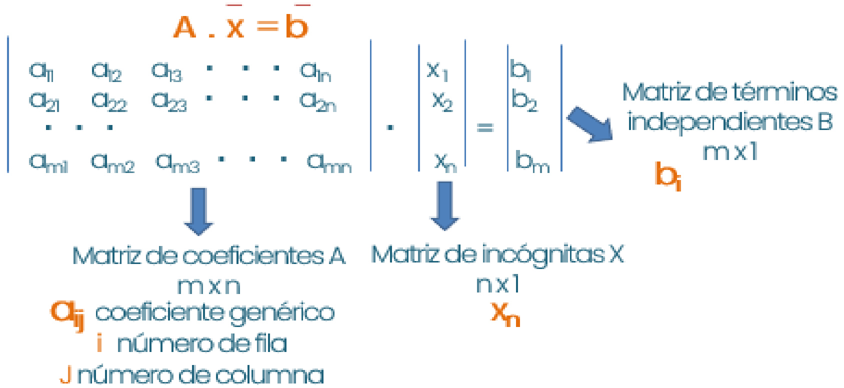
aij = coeficientes

xi = incógnitas

bj = términos independientes

Resolver un SEL: calcular las incógnitas para que se cumplan todas las ecuaciones simultáneamente, dos SEL son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Expresión matricial:



Tipos de Sistemas: se clasifican según el número de soluciones reales que tengan:

- **<u>Incompatibles</u>**: no tienen solución.
- **<u>Compatibles</u>**: tienen solución, pueden ser:
  - <u>Determinados</u>: única solución nxn. (Estos vamos a usar en la materia)
  - <u>Indeterminados</u>: infinitas soluciones.

Métodos de resolución de SEL:

- **Directos:** permiten obtener una solución exacta, en un número finito de operaciones, aplicando el método 1 sola vez
- **Métodos Indirectos:** parten de una aprox. inicial, y con un algoritmo llevan a aproximaciones sucesivamente mejores en cada iteración. Convienen en sistemas de muchas incógnitas y mal condicionados y se les suma un error de truncamiento.

Aproximación o Ajuste de una Curva por el Método de Mínimos Cuadrados

Suele llamarse también "Método de Regresión Lineal". A veces es necesario representar con una función, un conjunto de datos en un sist. de coordenadas (x, y), en casos donde:

- En una serie de valores experimentales, hay errores de mediciones, y se busca un alisado de las funciones.
- Se desea conocer desde valores discretos (x,y), obtenidos experimentalmente, un valor de y para un x cualquiera.
- Extrapolar resultados cuando no es conveniente realizar ensayos para determinar valores de x.

Debemos encontrar la función, que puede ser de ≠ formas según la naturaleza de los datos. El problema a resolver es medir la diferencia entre los datos y la función que los aproxima.

Método de Mínimos Cuadrados

Técnica de cálculo numérico donde dado un conjunto de pares ordenados (x, y) y una familia de funciones, busca encontrar la función continua de entre ellas <u>que se aproxime mejor</u> a los puntos datos, según el *criterio de error mínimo cuadrado*.

Conjunto de pares ordenados

x_k	y_k
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
...	
x_n	y_n

Función de Aproximación:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} cj \,.\, \Theta_j(x)$$

m ← Cantidad de términos

COEFICIENTES FUNCIONES Θ QUE DEPENDEN DE LA VARIABLE X

<u>Según la profe</u>: Si quiero encontrar una parábola que ajuste estos puntos datos, el método me dará la mejor parábola de todas, en función de dichos puntos.

Desviación: es la sumatoria de las diferencias entre los valores datos y los aproximados con la función de aproximación.

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - f(x_k)) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |y_k - f(x_k)| \Rightarrow \boxed{S = \sum_{k=1}^{n}(y_k - f(x_k))^2}$$

Como se cancelan los valores positivos y negativos, se usa el valor absoluto.

Se debe usar el cálculo diferencial, y el valor absoluto no tiene derivada, por lo que se usa el criterio del mínimo cuadrado

Relación funcional de desviación

¿Cuándo existe un Mínimo? *Cuando la derivada primera es = 0.*

"S" nos indica la magnitud del error de una f(x) de aproximación, para un conjunto de puntos dato, y permite determinar la f(x) que mejor aproxime al conjunto (f(x) que tenga **S** mínimo).

<u>Minimización del funcional de desviación → Obtención de los coeficientes</u>

La obtención de los coeficientes ''c'', se logra igualando las derivadas parciales de S respecto a cada coeficiente *ci* a 0 (porque la derivada se anula para un mínimo), entonces si la f(x) es una C.L. de funciones, se obtiene un SEL (de otra forma se obtendría un SENL). Reemplazo f(xk) por la función de aproximación:

n: Cant puntos datos m: Cant de términos de la función de aproximación

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{n}(y_k - \sum_{j=1}^{m} c_j \,.\, \Theta_j(x_k))^2}$$

INCOÓGNITA Funciones Θ que dependen de la var x

DATO FUNCIÓN DE APROXIMACIÓN

Función de Aproximación:

(Esto es lo mismo escrito de otra forma)

$$f(x) = c_1\Theta_1(x) + c_2\Theta_2(x) + \cdots + c_m\Theta_m(x)$$

Si se desarrolla la derivada primera para c1, y se iguala a 0 (el => es una flecha):

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n}\left(y_k - \sum_{j=1}^{m} c_j\cdot\Theta_j(x_k)\right)\cdot\Theta_1(x_k) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} y_k\Theta_1(x_k) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_j\cdot\Theta_j(x_k)\Theta_1(x_k) = 0$$

El 2 pasa dividiendo al otro miembro, sin efecto, y se distribuye la sumatoria de 1-n y Ø1(x) a la resta del paréntesis.

Reacomodando los términos y después generalizando para todo coeficiente ci

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{k=1}^{n}\cdot\Theta_j(xk)\Theta_1(xk) = \sum_{k=1}^{n} y_k\Theta_1(x_k) \Rightarrow$$

Minimización del funcional de desviación

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{k=1}^{n}\cdot\Theta_i(xk)\,\Theta_j(xk) = \sum_{k=1}^{n} y_k\Theta_i(x_k)}$$

c1 → ci
Ø1(xk) → Øi(xk)

Al derivar la ecuación de minimización del funcional de desviación respecto cada coeficiente ''c'' se forma un SEL (***matriz de coeficientes simétrica (mxm)).*** Cuando hago la derivada parcial en función de cada "c", los demás "c" se convierten en constantes, y por ello se anulan, dándome así los diferentes tperminos

Resolviendo el SEL, se encuentran valores de cada incógnita (c1, c2, c3 por ejemplo) y luego obtener la función de aproximación S, para compararla con otras y determinar la que mejor representa los datos. Para cada i se arma una ecuación sumando k=1 hasta n:

Ejemplo para m = 3

$$c_1\sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_1(x_k) + c_2\sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_2(x_k) + c_3\sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_3(x_k) = \sum y_k\Theta_1(x_k)$$

$$c_1\sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_1(x_k) + c_2\sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_2(x_k) + c_3\sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_3(x_k) = \sum y_k\Theta_2(x_k)$$

$$c_1\sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_1(x_k) + c_2\sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_2(x_k) + c_3\sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_3(x_k) = \sum y_k\Theta_3(x_k)$$

Se arma el SEL

$$\begin{cases} c_1\sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_1(x_k) + c_2\sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_2(x_k) + c_3\sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_3(x_k) = \sum y_k\Theta_1(x_k) \\ c_1\sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_1(x_k) + c_2\sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_2(x_k) + c_3\sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_3(x_k) = \sum y_k\Theta_2(x_k) \\ c_1\sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_1(x_k) + c_2\sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_2(x_k) + c_3\sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_3(x_k) = \sum y_k\Theta_3(x_k) \end{cases}$$

Se arma la matriz → Cada aij → Øfila. Øcol

$$\begin{vmatrix} \sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_1(x_k) & \sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_2(x_k) & \sum\cdot\Theta_1(x_k)\Theta_3(x_k) \\ \sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_1(x_k) & \sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_2(x_k) & \sum\cdot\Theta_2(x_k)\Theta_3(x_k) \\ \sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_1(x_k) & \sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_2(x_k) & \sum\cdot\Theta_3(x_k)\Theta_3(x_k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum y_k\Theta_1(x_k) \\ \sum y_k\Theta_2(x_k) \\ \sum y_k\Theta_3(x_k) \end{vmatrix}$$

A de Coeficientes mxm simétrica **Matriz de incógnitas** **Térm. indep.**

Resolviendo la matriz (SEL) se encuentran los valores de las incógnitas para encontrar la función de aproximación y calcular el valor de S, que determina la mejor función de entre todas las del tipo elegido.

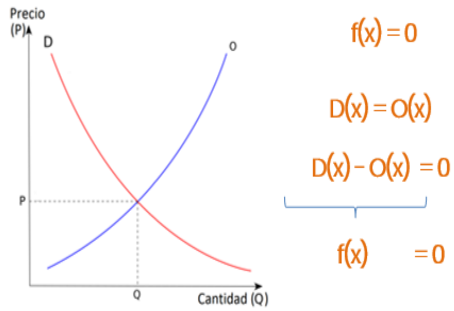
Si la función de aproximación no se puede expresar como C.L. de funciones, como:

$f(x) = c_1.e^{c_2x}$ o $f(x) = c_1.sen\,(c_2x)$, $etc.$, la determinación de coeficientes conduce a un SENL.

Unidad 7 - Ecuaciones No Lineales

Una ecuación NO Lineal en una variable, es la que tiene dicha variable elevada a una potencia ≠ de 1 (trigonométricas, polinomios con exponentes mayores a 1, etc). En estos casos, el objetivo de un modelo expresado con ENL es encontrar las raíces de la ENL, ya que dicha raíz da información.

Ej: Curva de Oferta-Demanda



Los métodos que se usan tienen por objetivo aproximar las raíces de las ENL, para dar solución al modelo. Se obtienen *aproximaciones* porque dependiendo de la f(x), puede ser muy difícil encontrar las raíces exactas, así que mediante herramientas de cálculo numérico y técnicas computacionales, se pueden obtener sucesivas aproximaciones a la raíz/raíces, para luego aceptar la aproximación que cumpla con un error propuesto, para aceptarla como **solución aproximada.**

Raíces de la función

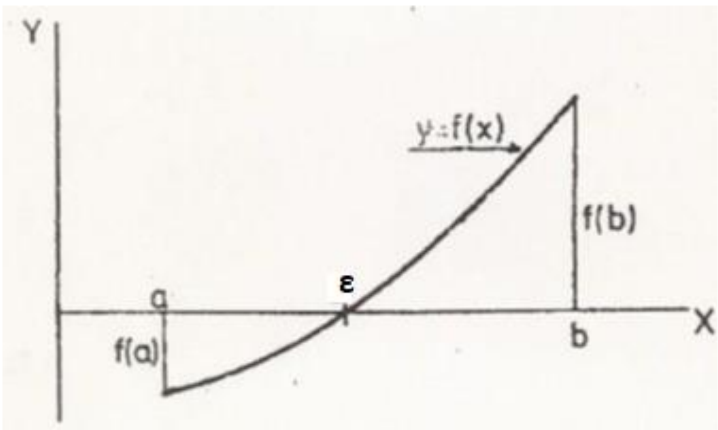
f(x) está definida y es continua para un intervalo [a,b], las raíces de la f(x) representan cada valor 'ε' para el cual la función se anula (se iguala a 0). -> **f(ε)=0**

Encontrar las raíces consiste en 2 etapas:

- **a) Aislamiento de las raíces**
- **b) Aplicación del método para hallar las raíces**

a) Aislamiento de las raíces

Consiste en establecer un intervalo [a,b] lo más pequeño posible, de forma que en su interior se encuentre una única raíz (un corte en 0).



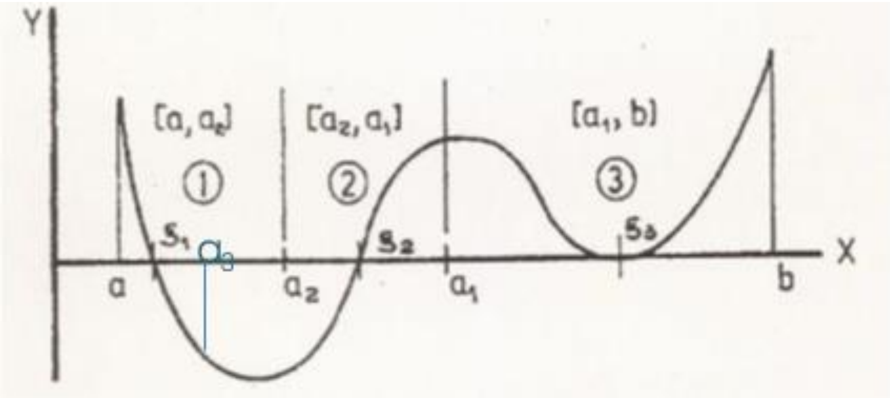
Teorema 1:

"Si una función continua f(x) asume valores de signos opuestos en los extremos de un intervalo [a,b], o lo que es lo mismo **f(a) . f(b) < 0** entonces el intervalo [a,b] contiene al menos un punto ε tal que: **f(ε) = 0**".

Planteamos varios intervalos según la gráfica de f(x), para encontrar el 1ro donde haya un ***cambio de signo,*** en ese intervalo estará la raíz.

- Si se cumple Teorema 1 → puede que ∃ 1 o un n° impar de raíces.
- Si no se cumple Teorema 1 → puede que ∄ raíces o ∃ un n° par de raíces.

(En el gráfico, recordar que una parábola (Punto '3') tiene dos raíces en su vértice)



Cumplen el teorema:
[a;a2] y [a2;a1]

No cumplen el teorema:
[a3;a2] ∄ raíces
[a;a1] 2 raíces
[a2;b] 2 raíces R iguales

Condición suficiente y necesaria: "<u>la **raíz ε** será definitivamente única en el intervalo [a,b] si la derivada f'(x) existe y mantiene el signo en todo el intervalo</u>.". Esto se debe a que por ejemplo de 'a3' a 'a1', la derivada comienza siendo decreciente, y se convierte en creciente (su signo cambia).

<u>Importante</u>: Para el ejemplo que voy a dar a continuación, el signo de f(a) es '-' y el signo de f(b) es '+' (cambia). Lo que dice la condición necesaria y suficiente, es que **el signo de la derivada no debe cambiar**, ya que en mi caso, $\boldsymbol{f(x) = \sin(x) - e^{x} \rightarrow f'(x) = \cos(x) + e^{-x}}$ donde f'(a) es positivo y f'(b) también.

<u>En el PRÁCTICO</u>: Aislamiento por Tabla + Aislamiento Gráfico

Vamos a trabajar con una única raíz. Cuando me piden encontrar las raíces de una función rara, la cual llamamos *<u>'función de trabajo'</u>*, lo que hacemos es descomponerla, por ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = \sin(x) - e^{-x}} \rightarrow igualo\ a\ 0\ y\ despejo \rightarrow \boldsymbol{\sin(x) = e^{-x}}$

Con esto, voy a obtener el punto donde 'f1(x)' y 'f2(x)' se cortan, siendo esta la raíz de 'f(x)'.

Ese punto que voy a obtener, es un punto correspondiente al 'Aislamiento Gráfico', que usaré para definir un intervalo. Con ese intervalo, tomo 'a' y 'b' (de [a,b]) y hago el 'Aislamiento por Tabla' usando esos 'a' y 'b' como entradas a f(x) que me darán un 'y' (salida). Si usando 'a' obtengo un valor con un signo (- para este caso), y usando 'b' obtengo el signo opuesto (+ para el ejemplo), entonces mi intervalo es correcto (cumple el Teorema 1). De esos dos 'y' obtenidos, el más cercano a 0 será mi 'x inicial'. Para este ejemplo, con 'a=0,5' y 'b=1', obtengo f(a)=-0,127 y f(b)=0,4736 donde mi x inicial = 0,5.

Con esto, si me preguntan '¿Cuál es la raíz de tu f(x)?', puedo decir que es 0,5, aunque este valor es horrible ya que está lleno de error, pero es algo que ya puedo ir respondiendo.

<u>b) Aplicación del método para hallar las raíces</u>

$X_{k+1} = G(x_k)$
Fórmula iterativa

1. *<u>Método Iterativo de Punto Fijo o Aproximaciones Sucesivas</u>*
(Sólo vemos lo teórico de este método)

Este método **parte de una aproximación inicial** y mediante un algoritmo lleva a aproximaciones <u>sucesivamente mejores</u> en c/ paso (iterativo refiere a que mejora en cada iteración, no significa simplemente iterar varias veces como en un bucle). Consiste en reemplazar la función original **f(x) = 0,** en otra expresión equivalente de forma **x = G(x)** tal que cualquier solución de ésta, también lo sea de la 1ra. Pueden existir muchas alternativas de G(x), las que nos dan muchas fórmulas iterativas, pero no todas van a ser útiles. (Básicamente despejo x, a lo que lo igualo, eso es 'G(x)').

Ejemplo f(x) => $x^2 - x - 2 = 0$

$x = x^2 - 2$ $\quad x = \sqrt{2 + x}$ $\quad x = 1 + \frac{2}{x}$

Para que el algoritmo sea de utilidad, se tiene que probar, dado X_0 aproximación inicial de la raíz ε:

- Para el punto de partida X_0, se puede calcular con el algoritmo X_1, X_2, X_3... con k=0,1,2,3,...
- La sucesión X_1, X_2, X_3 convergen a la raíz ε. Cuando x= ε, esa x es nuestra raíz.
- El límite ε constituye un punto fijo de G(x) si se cumple → ε = G(ε). ("El Método de Punto Fijo, constituye un Punto Fijo en sí mismo".)

<u>Demostración de la **Convergencia de ε:**</u>

Partiendo de la aproximación inicial (X_0), la raíz x = ε y el intervalo "I" que contiene la única raíz, entonces:

Sean G(x) y G'(x) continuas en el I → **| G'(x) | < 1** → **Condición de Convergencia <u>para todos los puntos en I.</u>**

Si $\boldsymbol{X_0}$ ∈ **I →** $\boldsymbol{X_{k+1} = G(X_k)}$ **converge a la raíz ε**

Es decir, si el valor absoluto de la derivada es < 1 y el punto de aprox. inicial está dentro del Intervalo de análisis, donde identificamos la raíz, entonces ese punto converge (se aproxima) a la raíz.

Teniendo en cuenta que en cada iteración se tienen que ir disminuyendo los márgenes de error para aproximarnos al valor de la raíz, entonces se tiene que cumplir que:

- Error en la iteración "k" → $|X_k - \varepsilon| = |e_k|\ (error)$
- Error en la iteración "k+1" → $|X_{k+1} - \varepsilon| = |e_{k+1}|$
- Para que converja → $|\boldsymbol{e_{k+1}}| < |\boldsymbol{e_k}|$

Si se resta miembro a miembro el valor de la raíz con la aproximación "k+1": (Recordemos que los 2 primeros términos de la Serie de Taylor representan la gran mayoría de la serie).

$$
\begin{array}{r}
X_{k+1} = G(X_k) \\
- \quad \varepsilon = G(\varepsilon) \\
\hline
X_{k+1} - \varepsilon = G(X_k) - G(\varepsilon)
\end{array}
$$

$$G(X_k) = G(\varepsilon) + (X_k - \varepsilon)\,G'(\varepsilon) + \cancel{(X_k - \varepsilon)^2\, G''(\varepsilon)\tfrac{1}{2}} + \cdots$$

Aplicamos el Polinomio de Taylor en G(Xk)

Se desprecia la derivada 2da porque no nos interesa para este análisis

Reemplazamos G(Xk) en la resta miembro a miembro

$$\underbrace{X_{k+1} - \varepsilon}_{\text{Error en la iteración k+1}} = \cancel{G(\varepsilon)} + \underbrace{(X_k - \varepsilon)}_{\text{Error en la iteración k}}G'(\varepsilon) - \cancel{G(\varepsilon)}$$

$$\underbrace{X_{k+1} - \varepsilon}_{\text{Error en la iteración k+1}} = \underbrace{(X_k - \varepsilon)}_{\text{Error en la iteración k}}G'(\varepsilon) \quad \rightarrow \quad \boxed{|G'(X_k)| < 1}$$

Condición de Convergencia

Para que haya convergencia se tenía que cumplir que el error en la iteración k+1 tenía que ser menor al de la iteración k, por lo tanto para que se cumpla también la igualdad, la derivada G'(ε) tiene que ser < 1 (si es = 1 entonces el error es el mismo, y si es > 1 entonces el error aumentó entre iteraciones)

(Claramente en base a esto, decimos que **no** todas las G(x) convergen)

2. <u>*Método Indirecto de Newton-Raphson*</u>

(Esta demostración de Newton-Raphson es sólo teórica, no va al práctico)

Los <u>métodos indirectos</u> parten de una aproximación inicial y por medio de un algoritmo conduce a aproximaciones sucesivamente mejores a cada paso.

Determina las raíces de f(x) con velocidad de convergencia 'cuadrática'. Se puede ver de 2 maneras:

- Se deriva de la serie de Taylor.
- Caso particular del método de Punto Fijo.

Por Serie de Taylor demostramos los dos puntos mencionados previamente:

(Se desprecia, no interesa la f''(x))

$$f(x)=0 \qquad f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\cancel{(x-a)^2 f''(a)\tfrac{1}{2}+\cdots}$$

Igualamos la f(x) a 0 y la expresamos por serie de Taylor

$$f(a)+(x-a)f'(a)=0 \Rightarrow (x-a)=-\frac{f(a)}{f'(a)} \Rightarrow x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

Como la raíz es el valor de X, se despeja

Para determinar la fórmula iterativa, se hace un cambio de variables:

$$X=X_{k+1} \qquad a=X_k$$

Xk se calcula con la fórmula de aprox. de Punto Fijo

$$\boxed{X_{k+1}=X_k-\frac{f(X_k)}{f'(X_k)}}$$

Fórmula iterativa N-R

$$\boxed{X_{k+1}=G(X_k)}$$

F. Iterativa de Punto Fijo

Ahora para determinar la Condición de Convergencia de Newton-Raphson, tomamos el X_{k+1} como $G(X_k)$ y lo derivamos:

$$|G'(X_k)|<1$$

Condición de Convergencia

Fórmula iterativa N-R

$$X_{k+1}=\underbrace{X_k-\frac{f(X_k)}{f'(X_k)}}_{G(X_k)} \Rightarrow G(X_k)=X_k-\frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$$

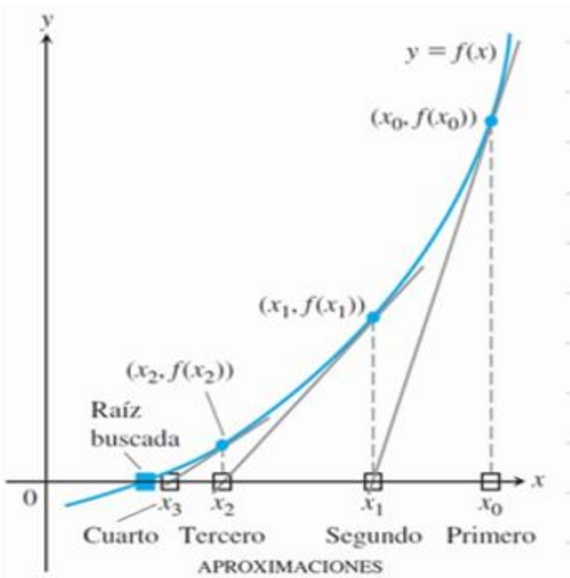
$$G'(X_k)=1-\frac{f'(X_k)f'(X_k)-f''(X_k)f(X_k)}{[f'(X_k)]^2} \Rightarrow G'(X_k)=\underbrace{1-\cancel{\frac{f'(X_k)f'(X_k)}{[f'(X_k)]^2}}}_{=1}+\frac{f''(X_k)f(X_k)}{[f'(X_k)]^2}$$

$$\left|\frac{f''(X_k)f(X_k)}{[f'(X_k)]^2}\right|<1$$

Condición de Convergencia de N-R

Interpretación gráfica del método:

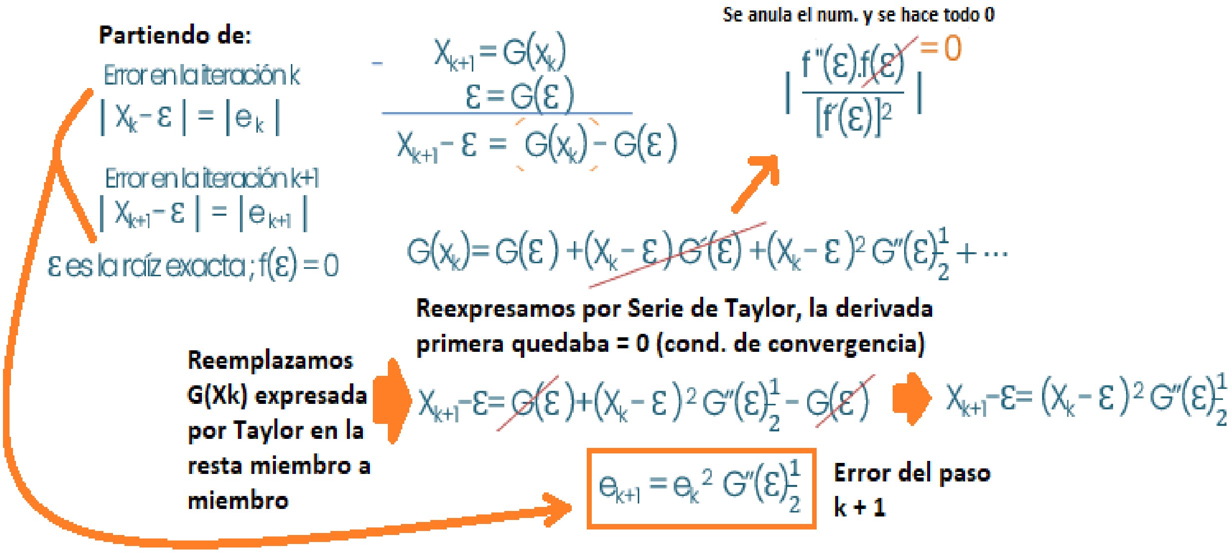
La primera aproximación ('x0') me da un valor de la función adonde voy tomarle su derivada (que me da una recta tangente), donde dicha tangente va a cortar al eje de las abscisas en un punto. Ese punto va a ser mi segunda aproximación. Haré esto iterativamente hasta llegar a mi raíz (cuadrado azul en el gráfico).



Extra del teórico: Si mi intervalo inicial es muy grande, cuando haga la derivada, y se genere la recta tangente, esta recta puede irse hacia otra raíz fuera de mi intervalo de interés. Para esto, la única solución es achicar mi intervalo, asegurando que las derivadas que tome, se aproximen a la raíz dentro de mi intervalo de interés.

Convergencia Cuadrática de Newton-Raphson

La principal ventaja de este método es la velocidad de convergencia, que es cuadrática hacia la raíz, o sea, "el error del paso k+1 está en función del cuadrado del error del paso k". Para la demostración se restan miembro a miembro los errores de las iteraciones k y k+1, de manera similar al método anterior:



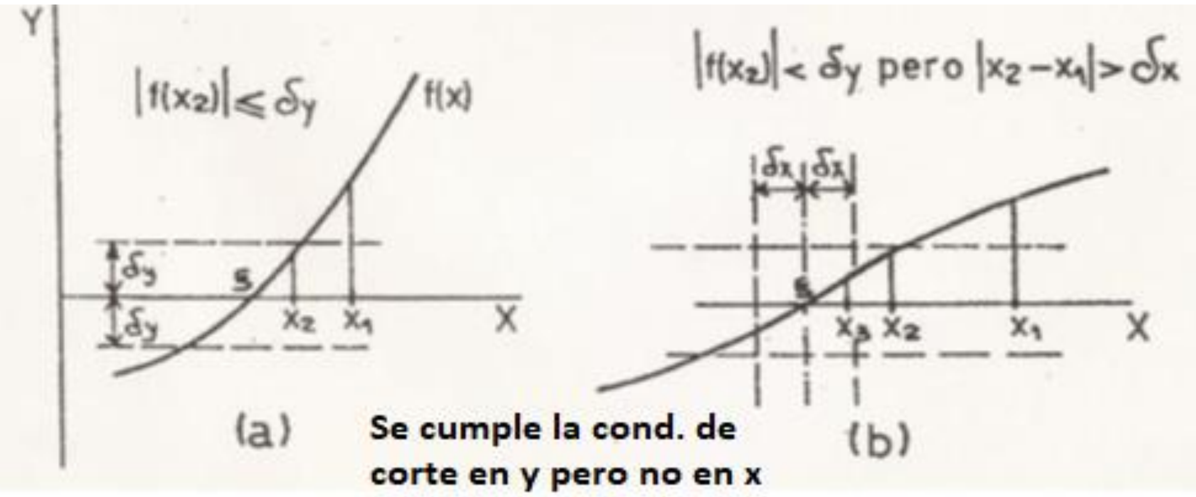
El error del paso k+1 está en función del cuadrado del error del paso k, haciendo que el error disminuya más rápido, porque son valores menores a 1.

¿Hasta cuándo se ejecuta Newton-Raphson?

El proceso iterativo continúa hasta satisfacer las **condiciones de corte** (o de 'errores aceptables'), que establecen una desigualdad, de un margen mínimo que debe cumplirse para que el valor encontrado sea aceptado.

- **Precisión sobre el eje x**: δx → $|X_{k+1} - X_k| \leq \delta x$
- **Precisión sobre el eje y**: δy → $|f(x)| \leq \delta y$

De está forma, **la raíz va a ser la última iteración de Xk+1 que calculamos.**



Unidad 8: Ecuaciones Diferenciales

¿Qué es? Es una ecuación que contiene derivadas de 1 o + variables dependientes respecto 1 o + variables independientes. Tiene la forma:

$$y' = f(x, y)$$

Orden de una E.D.: Está dado por la derivada de mayor orden de la ecuación.

Se clasifican en:

- **Ordinarias:** contienen derivadas ordinarias/totales de 1 o + variables dependientes respecto a 1 sola variable independiente.
    - **i)** **En las de 1er Orden:** Sólo intervienen la derivada primera, variable ind. y variable dep.
- **A derivadas parciales:** tienen derivadas parciales de 1 o + variables dependientes respecto a + de 1 variables independientes.

Y a su vez se clasifican en:

- **Con condiciones iniciales:** cuando las C.I. están relacionadas a 1 valor de x.
- **Con condiciones de contorno:** las C.I. se relacionan a + de 1 valores de x.

Las condiciones iniciales tienen la forma:

$$Condiciones\ iniciales\ \rightarrow\ y(x_0) = y_0$$

Soluciones de una Ecuación Diferencial

Solución de una E.D. de UNA variable dependiente con UNA variable independiente:

Es la función **y = f(x)** que satisface la E.D. con las condiciones iniciales dadas. La *solución analítica* de la E.D. conduce a obtener la función y(x) en su forma explícita.

Los métodos numéricos nos permiten obtener valores aproximados de la solución de la E.D. en forma de pares ordenados, conduciendo a valores aproximados que forman la función y(x), según valores determinados de la variable independiente seleccionados arbitrariamente, aumentando según un valor de paso **"h"** así se obtienen puntos de la y(x), de forma discretizada.

E.D. y Modelos Matemáticos: Las E.D. se originaron para resolver problemas científicos. Las derivadas permiten expresar la variación de una variable respecto de otra ∴ la formulación de problemas da lugar a las E.D. (*Nota: Derivada primera es velocidad, derivada segunda es aceleración (variación de la variación)*)

Ejemplo de planteamiento de ejercicio de una EDO de 1er Orden con CI

$$y' = \frac{3\ .\ \sin(x.y)}{2x + y} = f(x, y) \quad con\ y(1) = 5 \quad cantidad\ de\ pasos = 4 \quad ¿Cuánto\ valdrá\ y(3)?$$

$$de\ esto\ sé\ que\ mis\ CI\ serán\ x_0(inicial) = 1\ e\ y_0(inicial) = 5 \quad con\ x_{final} = 3$$

$$además\ sé\ que\ mi\ ED\ será\ \frac{3\ .\ \sin(x.y)}{2x + y}$$

¿Qué necesito saber? Cómo calcular mi 'h' en función de las CI con $\boldsymbol{h_{trabajo} = \frac{x_f - x_0}{cant.pasos}}$

Métodos Numéricos de Runge-Kutta (Directos)

"Directos" implica que al aplicarlos una vez, voy obteniendo los resultados finales. "Parece iterativo, pero es Directo, ya que cada vez que lo aplico obtengo un 'y' para un 'x' determinado, y lo aplico tantas veces, como pasos tenga en las CI". Permiten obtener en cada aplicación un par ordenado, partiendo de las C.I. (x_0, y_0), donde se obtendrán: (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); ... (x_m, y_m); (x_{m+1}, y_{m+1})

Las expresiones usadas se pueden comparar a la Serie de Taylor, truncando en algún término según el orden del método y la precisión de la solución:

Método	Hasta el Término de Taylor	Cantidad de Términos
Euler	Derivada Primera	2
Euler Mejorado	Derivada Segunda	3
RK4	Derivada Cuarta	5

(Orden de la E.D. ≠ Orden del Método Numérico)

Los **Métodos Directos no tienen error** (los iterativos son los que tienen), pero nosotros introducimos un cierto error al truncar la Serie de Taylor. Si el 'h' es muy pequeño, el error es prácticamente nulo.

Método de Euler

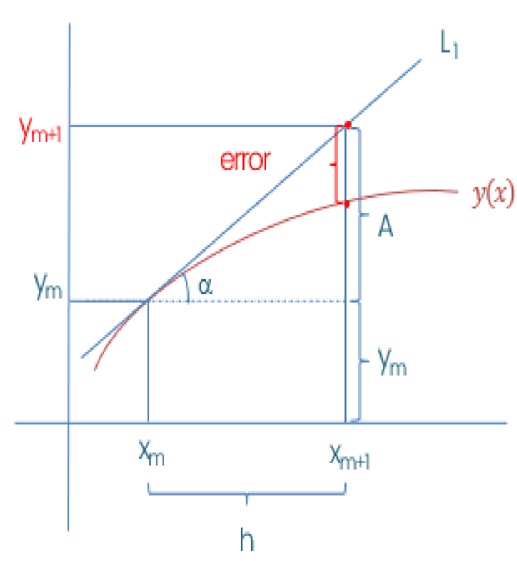
EN TODOS LOS METODOS 'h' DEBE SER <1

'h' debe ser <1 porque al deducirse esta fórmula de Taylor, para poder eliminar términos debo asegurarme que el 'h' no sea significativo, y me aseguro de eso haciendo que sea <1.

Considerando el par de C.I. como un par genérico (x_m, y_m), el objetivo del método es encontrar el valor de y_{m+1} para un paso siguiente de x (x_{m+1}), que será:

$$x_{m+1} = x_m + h$$

Gráficamente:



Nota: $y(x)$ es mi solución analítica, la cual desconozco.

Dado el valor de la derivada y' queremos encontrar y(x).

L1 es la recta tangente a y(x) en el punto (x_m, y_m), que tiene pendiente: $y' = f\ (x_m, y_m)$ (la tangente surge de la derivada)

$y_{m+1} = y_m + A$ → A es la diferencia entre el valor exacto, y el valor aproximado por método numérico.

Por definición de derivada: $y' = tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

Sustituimos teniendo en cuenta Pitágoras, donde 'A' es el cateto opuesto, h es el adyacente e $y' = f\ (x_m, y_m)$:

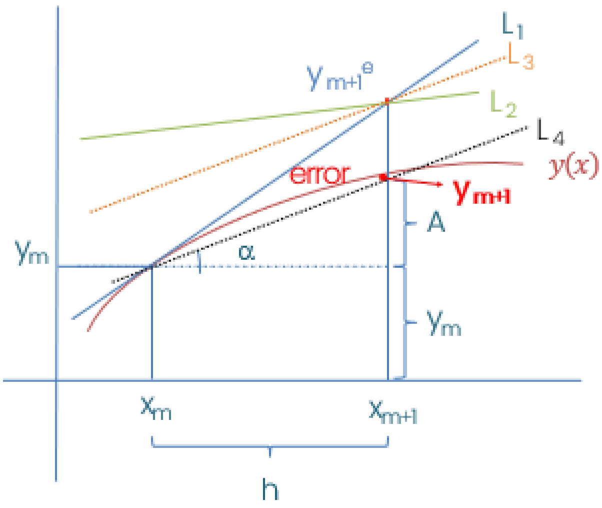
$$f\ (x_m, y_m) = \frac{A}{h} \rightarrow despejando\ A \rightarrow A = h\,.f\ (x_m, y_m)$$

Recordamos que $f\ (x_m, y_m)$ sale de valuar la ecuación diferencial y' en x_m, y_m.

Reemplazamos A en la fórmula de y_{m+1} : $y_{m+1} = y_m + h\,.f\ (x_m, y_m)$ **Método de Euler**

Método de Euler Mejorado:

Introduce una segunda recta tangente (y'') para aproximar el valor de y(x) usando un valor medio entre ambas derivadas, haciendo que se aproxime más rápido que por el Método de Euler al valor de la función.



L1 → recta tangente a la curva en (x_m, y_m) con pendiente:

$$y' = f(x_m, y_m).$$

L2 → recta tangente a la curva en el punto $(x_{m+1}, y_{m+1}e)$ con pendiente:

$$y' = f(x_{m+1}, y_{m+1}e)$$

Siendo $\boldsymbol{y_{m+1}e = y_m + h \cdot f(x_m, y_m)}$ el punto aproximado por el método de Euler.

(Nota: La pendiente de L2 se obtiene en los puntos: x_{m+1} en 'eje x' y y(x)(solución analítica) en 'eje y', donde luego la desplazo paralelamente hasta que corte a L1 en el punto $y_{m+1}e$ en 'eje y').

Determinamos una recta **L3** bisectriz entre L1 y L2 cuya pendiente → $= \frac{1}{2}\,[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}e)$ donde el $\frac{1}{2}$ surge de que estamos tomando el promedio de 2 pendientes (L1 y L2).

***Bisectriz de un ángulo**: semirrecta que, partiendo del respectivo vértice, divide un ángulo en dos partes iguales. *$\boldsymbol{y_{m+1}e}$: y_{m+1} calculado con Método de Euler común.*

Si planteamos una recta **L4** paralela a L3, que intersecte a la función y(x), mejoramos la aproximación:

L4 → <u>misma pendiente de L3 (porque es paralela xd)</u> → $= \frac{1}{2}\,[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}e)$.

Para que L4 intersecte a y(x) es como si desplazara paralelamente a L3, hasta el punto x_m, y_m que también cortará a x_{m+1} y marcará el error entre Euler Mejorado y la verdadera y(x), el cual es mucho menor que Euler común.

Según la interpretación gráfica:

$$\boxed{y' = pendiente\ de\ L4}$$

$$y_{m+1} = y_m + A\,; \qquad y' = tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$\frac{1}{2}\,[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}e)] = \frac{A}{h}$ → h pasa al otro miembro multiplicando.

$\frac{h}{2}\,[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}e)] = A$ → En $y_{m+1} = y_m + A$ despejamos A y reemplazamos

$\frac{h}{2}\,[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}e)] = y_{m+1} - y_m$ → despejamos y_{m+1} que es el valor aproximado en el siguiente paso

$$\boldsymbol{y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\,[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}e)]}$$ **Método de Euler Mejorado**

<u>**Preguntas Posibles:**</u> <u>¿El punto que está sobre y(x) es el valor exacto?</u> **Verdadero**. <u>¿El valor de ym+1 lo obtenemos con Euler?</u> **Falso**, con Euler Mejorado<u>. ¿La pendiente de L1 surge de xm+1 con ym+1e?</u> **Falso**, surge de xm con ym. <u>¿La pendiente de L3 surge de xm+1 con ym+1e?</u> **Falso**, surge del promedio de las pendientes de L1 y L2. <u>¿La pendiente de L2 surge de xm+1 con ym+1e?</u> **Verdadero**, ver fórmula. <u>¿'y(x)' es igual a la ecuación diferencial?</u> **Falso**, y(x) es la Solución (analítica) de la E.D., siendo mi E.D. " y' = f(x,y) con y(x0) = y0 " la cual me dan al principio del ejercicio. <u>¿Es (xm+1,ym+1) una solución Numérica que contiene error?</u> **Verdadero**.

Método de Runge-Kutta de 4to Orden

Se basa en los mismos principios, tomando rectas tangentes cada vez más próximas a y(x), introduciendo así más cantidad de términos de la Serie de Taylor.

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}.(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_{m+h}; y_m + h.k_3)$$

Resolución de ejemplo de planteamiento de ejercicio de una EDO de 1er Orden con CI

$$y' = \frac{3.\ \sin(x.y)}{2x+y} = f(x,y) \quad con\ y(1) = 5 \quad cantidad\ de\ pasos = 4 \quad ¿Cuánto\ valdrá\ y(3)?$$

Primero calculo el 'h':

$$h = \frac{x_f - x_0}{pasos} = \frac{3-1}{4} = \mathbf{0,5}$$

Resuelvo con Euler Común:

Seno en radianes!

Xm	Ym	f(Xm,Ym)	Xm+1	Ym+1
1	**5**	$\frac{3.\ \sin(1.5)}{2.1+5} = \mathbf{-0,4901}$	Xm + h = **1,5**	$5 + 0{,}5.\left(\frac{3.\ \sin(1.5)}{2.1+5}\right) = \mathbf{4,7945}$
1,5	**4,7945**	$\frac{3.\ \sin(1{,}5.4{,}7945)}{2.1{,}5+4{,}7945} = \mathbf{0,3035}$	**2**	$4{,}7945 + 0{,}5.\left(\frac{3.\ \sin(1{,}5.4{,}7945)}{2.1{,}5+4{,}7945}\right) = \mathbf{4,9462}$
2	**4,9462**	$\frac{3.\ \sin(2.4{,}9462)}{2.2+4{,}9462} = \mathbf{-0,1512}$	**2,5**	$4{,}9462 + 0{,}5.\left(\frac{3.\ \sin(2.4{,}9462)}{2.2+4{,}9462}\right) = \mathbf{4,8706}$
2,5	**4,8706**	$\frac{3.\sin(2{,}5.4{,}8706)}{2.2{,}5+4{,}8706} = \mathbf{-0,1154}$	**3**	$4{,}8706 + 0{,}5.\left(\frac{3.\sin(2{,}5.4{,}8706)}{2.2{,}5+4{,}8706}\right) = \mathbf{4,8129}$

Como me piden el 'y' para un x=3, cuando Xm+1=3, implica que su correspondiente Ym+1 será mi respuesta.

Resuelvo con Euler Mejorado:

Xm	Ym	f(Xm,Ym)	Xm+1	Ym+1 e	f(Xm+1,Ym+1 e)	Ym+1
1	**5**	$\mathbf{-0,4901}$	Xm+h = **1,5**	$5 + 0{,}5.\left(\frac{3.\sin(1.5)}{2.1+5}\right) = \mathbf{4,7945}$	$\left(\frac{3.\ \sin(1{,}5.4{,}7945)}{2.1{,}5+4.7945}\right) = \mathbf{0,3035}$	$5 + \frac{0{,}5}{2}.(-0{,}4901 + 0{,}3035) = \mathbf{4,9731}$
1,5	**4,9731**	$\mathbf{0,3473}$	**2**	$4{,}9731 + 0{,}5.\left(\frac{3.\ \sin(1{,}5.4{,}9731)}{2.1{,}5+4{,}9731}\right) = \mathbf{5,1468}$	$\left(\frac{3.\ \sin(2.5{,}1468)}{2.2+5{,}1468}\right) = \mathbf{-0,2504}$	$4{,}9731 + \frac{0{,}5}{2}.(0{,}3473 + (-0{,}2504)) = \mathbf{4,9973}$
2	**4,9973**	$\mathbf{-0,1799}$	**2,5**	$4{,}9973 + 0{,}5.\left(\frac{3.\ \sin(2.4{,}9973)}{2.2+4{,}9973}\right) = \mathbf{4,9074}$	$\left(\frac{3.\ \sin(2{,}5.4{,}9074)}{2.2{,}5+4{,}9074}\right) = \mathbf{-0,0888}$	$4{,}9973 + \frac{0{,}5}{2}.(-0{,}1799 + (-0{,}0888)) = \mathbf{4,9301}$
2,5	**4,9301**	$\mathbf{-0,0720}$	**3**	$4{,}9301 + 0{,}5.\left(\frac{3.\sin(2{,}5.4{,}9301)}{2.2{,}5+4{,}9301}\right) = \mathbf{4,8941}$	$\left(\frac{3.\ \sin(3.4{,}8941)}{2.3+4{,}8941}\right) = \mathbf{0,2354}$	$4{,}9301 + \frac{0{,}5}{2}.(-0{,}0720 + (0{,}2354)) = \mathbf{4,9709}$

Claramente este resultado es más cercano al valor real de 'y' (tiene un error menor).

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Si se tiene un Sistema de 2 E.D. de 1er orden

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$ Con C.I. → x_0 ; $y(x_0) = y_0$; $z(x_0) = z_0$

Al añadir una variable independiente más ''z'' entonces extendemos las fórmulas de los métodos de cálculo anteriores:

a. Método de Euler

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m)$$

$$z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m)$$

$$x_{m+1} = x_m + h$$

$$h_{TRABAJO} = \frac{X_{FINAL} - X_{INICIAL}}{pasos}$$

b. Euler Mejorado

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot [f(x_m, y_m, z_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}{}^e, z_{m+1}{}^e)]$$

$$z_{m+1} = z_m + \frac{h}{2} \cdot [g(x_m, y_m, z_m) + g(x_{m+1}, y_{m+1}{}^e, z_{m+1}{}^e)]$$

c. Runge Kutta de 4to orden

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(x_m, y_m, z_m)$$
$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} k_1; z_m + \frac{h}{2} L_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} k_2; z_m + \frac{h}{2} L_2\right)$$
$$k_4 = f(x_{m+h}; y_m + h.k_3; z_m + h.L_3)$$

$$z_{m+1} = z_m + \frac{h}{6} \cdot (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$
$$L_1 = g(x_m, y_m, z_m)$$
$$L_2 = g\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} k_1; z_m + \frac{h}{2} L_1\right)$$
$$L_3 = g\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} k_2; z_m + \frac{h}{2} L_2\right)$$
$$L_4 = g(x_{m+h}; y_m + h.k_3; z_m + h.L_3)$$

Importante: ¿Qué es esto de 'Sistemas de EDO'? Es literalmente hacer lo mismo, pero 2 veces, NADA MÁS.

Ejemplo de Ejercicio:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando los métodos de Euler y Euler Mejorado en 3 pasos.

$$\begin{cases} dy/dx = -3xz + 2y \\ dz/dx = -0{,}5xy + 2z - 1 \end{cases}$$

Sabiendo que y(1) = 2; z(1) = 5

Se pide calcular el valor de z para x = 3,6.

Esto se resuelve IGUAL, pero agregando nuevas columnas para: z_m, z_{m+1}, $z_{m+1}e$, $g(x_m, y_m, z_m)$ y $g(x_{m+1}, y_{m+1}e, z_{m+1}e)$. Cuando $x_{m+1} = 3{,}6$ entonces z_{m+1} será el resultado final.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior con C.I.

Las E.D. de orden > 1 (Orden Superior) se pueden transformar en un sistema de E.D. de 1er orden y resolverlo con los métodos anteriores.

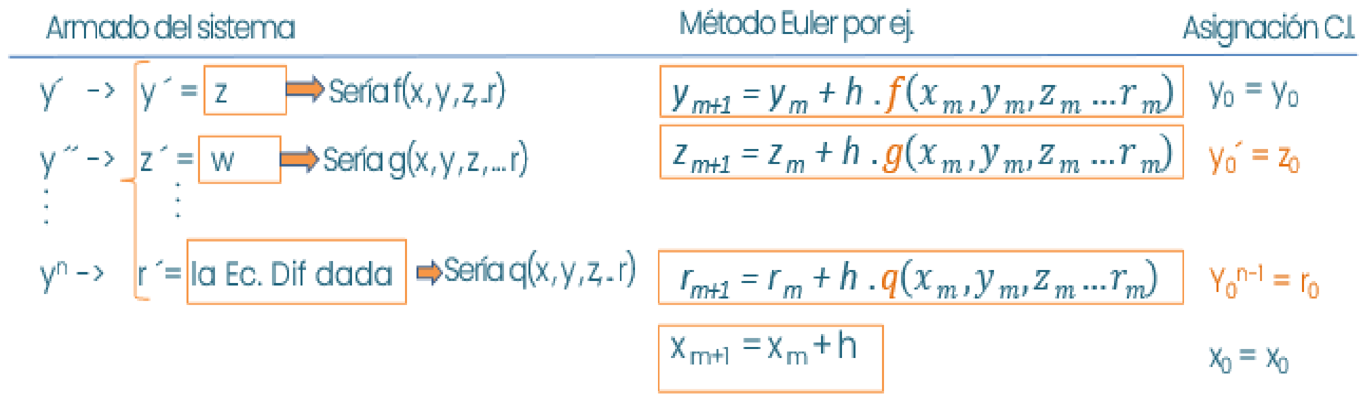
Si la E.D. es de 2do orden, entonces se transforma en un sistema de 2 E.D. de 1er orden, es decir, generalizando: *"Si la ecuación es de orden n obtenemos un sistema de n E.D de 1er orden".*

Una E.D. de orden n, puede incluir entre sus elementos la variable independiente, la variable dependiente, y las derivadas 1ra, 2da, …, n-ésima-1, en donde siempre va a estar despejada la derivada de > orden.

$$E.D. de\ Orden\ n \ \rightarrow \ \ y^n \ = \ f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}) \ \ con\ C.I.\ \ x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0{}^{n-1}$$

Para lograr transformar la expresión en un sistema de 1er orden, se definen funciones auxiliares:

Columna de "f" siempre será un copy paste de columna 'Zm'.



En un ejercicios de Orden 2 (llega a derivada segunda), el $z' = ED\ dada$ ("g").

<u>Cuidado:</u> Si me dan una EDO y no tengo una y', no importa, SIEMPRE, en las tablas es $y' = \ z$.

<u>Importante</u>: ¿Qué es esto de 'Orden Superior'? Es literalmente hacer lo mismo que en 'Sistemas', pero n veces, siendo n el número de derivadas que calcularemos para la EDO.

Preguntas de Finales Previos:

Práctico:

- Julio 2024: “Propiedad de convolución de la Transformada y Euler para una ecuación de segundo orden”

Teórico:

- Marzo 2024: “Serie de Fourier Discreta y relación con la continua. Y método de Euler”.
- Marzo 2024: “Muestreo completo y método de Newton-Raphson”.
- Marzo 2024: “Obtención de todos los filtros a partir del filtro pasa bajo, y Euler Mejorado”.
- Marzo 2024: “Filtro de Media Móvil y Mínimos Cuadrados”.
- Marzo 2024: “Aplicación de la propiedad de modulación de la Transformada Discreta de Fourier para el enventanado de filtros. Método de Euler de 1er Orden”.
- Julio 2024: “Euler (todo), pide full explicación de la gráfica, para que sirve y eso. Transformada a partir de la Serie de Fourier, condiciones de convergencia y gráfico”.
- Julio 2024: “Fórmulas de muestreo explicando las relaciones entre ellas y condición de convergencia de punto fijo”.

Tema que ya **no** toman:

- “Coeficientes ak para la salida y(t) del sistema”.
- “Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes”.

Hojas en Blanco para anotaciones: