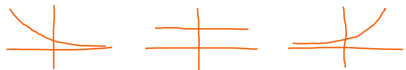
6. Funciones exponenciales de tiempo continuo: exponentes reales, imaginarios puros y complejos. Periodicidad. Definición y características de las funciones exponenciales complejas armónicas.

Funciones exponenciales $c \cdot e^{at}$

① Casos particulares

ⓐ Exponencial real. $c \to$ real, $a \to$ real

$x(t) = c \cdot e^{at}$



cuando $a<0$ — cuando $a=0$ — cuando $a>0$

ⓑ Forma general

$c \to$ forma polar $\longrightarrow c = |c| \cdot e^{j\theta}$

$a \to$ forma cartesiana $\longrightarrow a = r + jw_0$

Desarrollo:

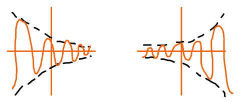
$x(t) = |k| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{(r+jw_0)t}$

$x(t) = |c| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{rt} \cdot e^{jw_0 t}$

$x(t) = |c| \cdot e^{rt} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{jw_0 t}$

$x(t) = |c| \cdot e^{rt} \cdot e^{j(\theta + w_0 t)}$ $\longrightarrow$ $e^{j(\theta + w_0 t)} = \cos(\theta + w_0 t) + j\,\mathrm{sen}(\theta + w_0 t)$

$x(t) = |c| \cdot e^{rt} \cdot \cos(\theta + w_0 t) + j|c| \cdot e^{rt} \cdot \mathrm{sen}(\theta + w_0 t)$



cuando $r<0$ — cuando $r<0$

ⓒ Imaginaria Pura $c \to$ real, $a \to$ forma cartesiana pero sin parte real $\to$ $a = 0 + jw_0$

$x(t) = c \cdot e^{jw_0 t}$

Esta es una señal periódica. Las señales periódicas son aquellas que se repiten cada determinado intervalo de tiempo.

$x(t) = x(t+T)$

¿Cuánto vale T?

Desarrollo: $c \cdot e^{jw_0 t} = c \cdot e^{jw_0(t+T)}$

$c \cdot e^{jw_0 t} = c \cdot e^{jw_0 t} \cdot e^{jw_0 T}$

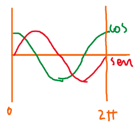
$e^{jw_0 T}$ $\to$ esto tiene que dar 1

entonces $T = \frac{k2\pi}{w_0}$

$e^{jw_0 T} = \cos(w_0 T) + j\,\mathrm{sen}(w_0 T)$

$1 = 1 + j \cdot 0$

¿En que casos se da esto?



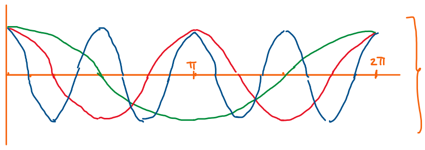
En los múltiplos de 2π

$w_0 T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w_0}$

Esta señal está armónicamente relacionada con T.

$x(t) = c \cdot e^{jkw_0 t}$

podemos definir infinitas armónicas



$k=1$ $T = 2\pi$

$k=2$ $T = \pi$

$k=4$ $T = \frac{\pi}{2}$