Serie y Transformada de Fourier en tiempo discreto

Periodicidad de las funciones exponenciales imaginarias en tiempo discreto y en la frecuencia

Partimos de una señal básica, la cual es una exponencial compleja imaginaria pura:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

Donde las variables que caracterizan esta señal son:

Variables:
- Tiempo discreto $[n]$
- Velocidad angular Ω_0
- Frecuencia f_0
- $f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ $\quad \Omega_0 = 2\pi . f_0$

Recordemos que en tiempo continuo la frecuencia fundamental w0 podía tener cualquier valor generando siempre señales periódicas diferentes

Una señal es periódica cuando produce el mismo valor de la señal cada instantes de tiempo, separados por UN: Periodo Fundamental (TD).

Periodicidad en el tiempo

Entonces partimos de la siguiente igualdad:

$$x[n] = x(n+N)$$

Ahora esta igualdad la vamos a aplicar para la señal básica que utilizamos para demostrar la periodicidad, entonces:

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)}$$

Podemos aplicar la propiedad debido a que tenemos potencias de igual base:

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n} . \boxed{e^{j\Omega_0 N}}$$

Una vez aplicada, reconocemos que para que se cumpla dicha periodicidad, la parte derecha (lo que está en rojo) debería ser 1, para poder cumplir la igualdad.
A ese lado podemos declararlo como 1 utilizando euler:

$$e^{j\Omega_0 N} = \cos(\Omega_0 N) + j \operatorname{sen}(\Omega_0 N)$$
$$1 \quad = \quad 1 \quad + j \quad 0$$

Recordando que el coseno vale 1 y el seno vale 0 para cuando vale 2π o múltiplo de 2π.
Recordando que:

$$\Omega_0 N = 2\pi . m$$

$$\boxed{\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}}$$

Donde obtenemos la siguiente relación de enteros →

En la cual si reemplazamos la velocidad angular por → $\Omega_0 = 2\pi . f_0$

Reemplazando → $\frac{\cancel{2\pi} . f_0}{\cancel{2\pi}} = \frac{m}{N}$

Donde se obtiene la condición de periodicidad, sólo se cumple si f0 es una relación de enteros → $f_0 = \frac{m}{N}$

Periodicidad en la frecuencia

Esta propiedad que demostramos, nos enseña que si sumas cualquier múltiplo de 2π a la frecuencia angular, la señal resultante no cambia.

Es importante destacar que las frecuencias en tiempo discreto, generan funciones exponenciales que se repiten si sus valores están separados por múltiplos de 2π.

Recordamos que partimos de la misma señal básica → $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$

Donde comenzamos partiendo de la siguiente igualdad, para demostrar que al sumarle múltiplos de 2π a la velocidad angular no cambia la señal

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} . \underbrace{\cancel{e^{j2\pi n}}}_{1} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} e^{j2\pi n} & = & \cos(2\pi.n) & + j \,\text{sen}\,(2\pi.n) \\ 1 & = & 1 & +j \quad 0 \end{array}$$

Donde la parte de la derecha que se simplifica vale 1 debido a euler

Entonces decimos que todas las funciones exponenciales cuyas frecuencias están separadas por múltiplos de 2π son idénticas:

$$x_k[n] = e^{j(\Omega_0 + k\,2\pi)\,n}$$

Donde k es un número entero, que genera la misma función exponencial. Entonces, todas las funciones exponenciales cuyas frecuencias están separadas por múltiplos de 2π son equivalentes.

Ahora si utilizamos la frecuencia en lugar de la velocidad angular:

$$\Omega_0 = 2\pi\, f_0$$

$$0 \leq \Omega_0 < 2\pi$$
$$-\pi < \Omega_0 \leq \pi$$

Al trabajar con señales discretas, las funciones exponenciales son diferentes sólo cuando las frecuencias están en el rango →

También esto lo podemos definir en base a la frecuencia:

$$\Omega_0 = 2\pi f_0$$
$$0 \leq 2\pi f_0 < 2\pi$$
$$\underbrace{0/\cancel{2\pi}}_{0} \leq f_0 < \underbrace{2\pi/\cancel{2\pi}}_{1}$$

La tasa de oscilando de la señal es baja para valores de Ω_0 cercanos a 0 y 2π para f0 cercanos a 0 y 1 y es alta en valores cercanos a π para Ω_0 y ½ para f0.

Funciones armónicas en tiempo discreto

Son todas aquellas , exponenciales complejas imaginarias puras cuyas frecuencias son todas múltiplos enteros de la frecuencia fundamental Ω_0 , son todas periódicas y comparten el mismo periodo N.

Es importante recordar que la frecuencia fundamental es:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Es importante destacar que en tiempo discreto solo hay N armónicas diferentes, donde a diferencia de tiempo continuo donde hay infinitas armónicas.

Entonces en base a lo visto anteriormente, tenemos esta señal exponencial compleja:

$$\varphi_k[n] = e^{j\,k\,(2\pi/N)\,n}$$

Donde k toma valores entre 0 y N-1 , donde cada valor de k representa una armónica diferente. Donde k a lo sumo puede adoptar el valor de N-1 ya que si k= n nos quedaría:

$$\cancel{N}\frac{2\pi}{\cancel{N}} < 2\pi$$

Entonces no es menor.

Donde las funciones exponenciales son diferentes para:

$0 \leq \Omega_0 < 2\pi$
$-\pi < \Omega_0 \leq \pi$ o valores donde la frecuencia $\rightarrow$ $0 \leq f_0 < 1$
$-1/2 < f_0 \leq 1/2$

Ahora para entender un poco más cómo es que se cumple esta periodicidad, podemos analizar el siguiente ejemplo, donde partimos de la siguiente señal :

$$\varphi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$$

Recordando que al aplicarle euler podemos obtener:

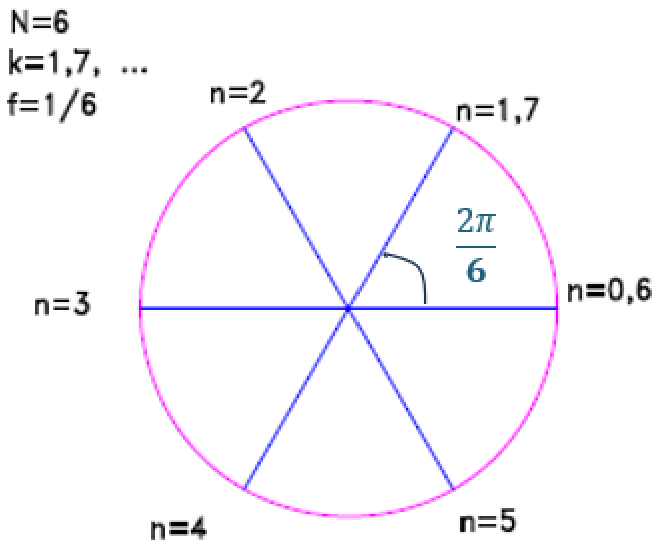
c. Forma de Euler

$$\boxed{e^{j\theta} = (\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

$$\underbrace{e^{jk(2\pi/N)n}}_{\text{armónicas}} = \underbrace{\cos(k\,2\pi\,n/N)}_{\text{parte real}} + \underbrace{j\,\mathrm{sen}(k\,2\pi\,n/N)}_{\text{parte imaginaria}}$$

Recordemos que en tiempo discreto, las señales tienen un comportamiento periodico.
Observemos que si nosotros definimos un valor N = 6, los valores de las armónicas comienzan a repetirse luego de completar ese periodo.

Es decir, que si definimos N = 6, donde f0 = $\frac{1}{6}$.
Recordemos que si N = 6 , estamos definiendo que la señal tiene un periodo de 6 muestras, es decir que el círculo está dividido en 6 partes iguales para 6 valores posibles de n.
Donde aca podemos ver que nuestra frecuencia

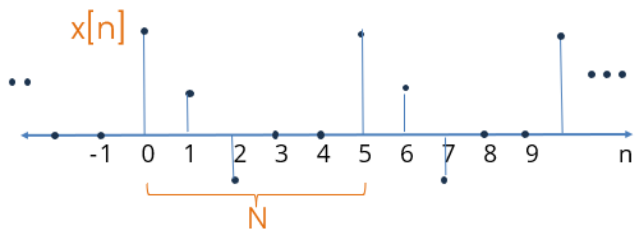


Entonces cómo tenemos que el círculo completo en radianes es 2π, cada paso alrededor de este círculo será de 2π/6.
Donde podemos observar que arrancando que hay N armónicas distintas, es decir las armónicas 0 1 2 3 4 y 5 , donde ya la armónica 6 es igual a la 0, la armónica 1 es igual a la 7 así sucesivamente.

Serie de Fourier en tiempo discreto

Es necesario recordar que la Serie de Fourier es una forma de representar señales que son periódicas en el tiempo discreto, como una combinación de coeficientes ak y las N armónicas diferentes en un periodo fundamental N.
En tiempo discreto solo hay N armónicas diferentes.

Entonces:



→ Dada esta señal con periodo N y recordando que utilizamos las siguientes señales (exponenciales complejas imaginarias puras) :

$$\varphi_k[n] = e^{j\,k\,(2\pi\,/\,N)\,n}$$

podemos definir la Serie de fourier en tiempo discreto:

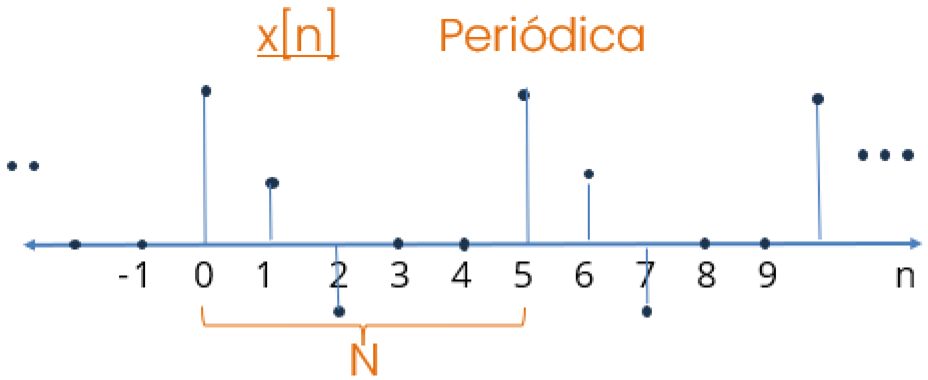
$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{a_k}_{\text{coeficientes}} \quad \overbrace{e^{j\,k\,(2\pi\,/\,N)\,n}}^{\text{armónicas}}$$

Donde los coeficientes ak , puede calcularse de la siguiente manera:

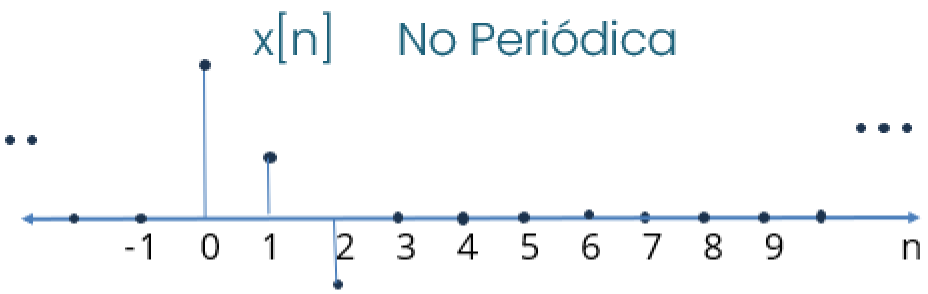
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n].\,e^{-j\,k\,(2\pi\,/\,N)\,n}$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto

Ahora, si comenzamos realizando un razonamiento similar al tiempo continuo, el análisis de una señal no periódica x[n] lo haremos partiendo de una periódica **x[n] :**



coincidente en un periodo con x[n]:



$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{\mathbf{N}} \;=>\; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \;=>\; f_0$$

Utilizando representación en serie para x[n] con →

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \; e^{jk\Omega_0 n}$$

Los coeficientes ak de la serie de fourier:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] . e^{-jk\Omega_0 n}$$

Entonces definimos la serie de fourier:

$$x[n] = \sum_{\langle N \rangle} a_k \; e^{jk\Omega_0 n}$$

calculando los correspondientes coeficientes ak:

$$a_k = \frac{1}{N} \boxed{\sum_{\langle N \rangle} x[n] . e^{-jk\Omega_0 n}}$$

Donde vamos a definir todo este pedazo grande en rojo como :

$$X(k\Omega_0) \rightarrow \quad X(k\Omega_0) = \sum_{\langle N \rangle} x[n] . e^{-jk\Omega_0 n}$$

Muy importante destacar que cuando N es decir el periodo tiende a infinito,

Ω_0 tiende a cero
(no es cero)
$\Omega_0 \rightarrow d\Omega$
$k\Omega_0 \rightarrow \Omega$
$x[n] \rightarrow x[n]$

Entonces:

$$X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] . e^{-j\Omega n}$$

Donde dicha señal:

$$X(\Omega_0 + k\,2\pi) = X(\Omega)$$

Periódica en Ω, con período 2π

Entonces a partir de ak la redefinimos como:

$$a_k = \frac{1}{N} \, . \, X(k\,\Omega_0)$$

Sabiendo que

$$\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \Rightarrow f_0$$

Entonces redefinimos la sumatoria:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) \cdot e^{j\,k\,\Omega_0 n} \, . \, \Omega_0$$

Donde reemplazamos el valor de ak por lo obtenido anteriormente.

Entonces obtenemos la expresión general de la transformada de fourier en tiempo discreto:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \, . \, d\,\Omega$$

Donde la integral se desarrolla en un ciclo de ancho de 2π.
En la serie la suma se realiza sobre sus N armónicas.

Transformada Discreta de Fourier

Es un muestreo en la frecuencia de la transformada de fourier.
De la expresión de la transformada de Fourier para la señal No Periódica x[n], si la misma se repite periódicamente como x[n] , los coeficientes de la serie de Fourier de x[n] son muestras de X (Ω) ,para las frecuencias correspondientes a las armónicas kΩ.

Entonces a partir de los coeficientes ak de la Serie de Fourier de una señal periódica:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n] \, . \, e^{-j\,k\,\Omega_0\,n}$$

Donde:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{\mathbf{N}}$$

Donde el periodo N pasa multiplicando hacia el otro lado y reemplazamos el valor de la frecuencia:

$$\mathrm{N}.\,a_k = \sum_{\langle N \rangle} x[n]\,.\,e^{-j\,k(2\pi\,/\,N)\,n}$$

Ahora reemplazamos por la señal no periódica N -> ∞

$$\mathrm{N}.\,a_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,.\,e^{-j\,k(2\pi\,/\,N)\,n}$$

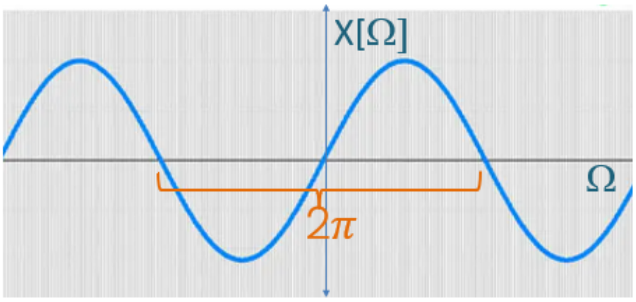
Entonces ahora tomamos la sumatoria de n desde menos infinito hasta más infinito.

$$\mathrm{N}.\,ak = x\left[k\frac{2\pi}{\mathbf{N}}\right] = x[k\,\Omega_0]$$

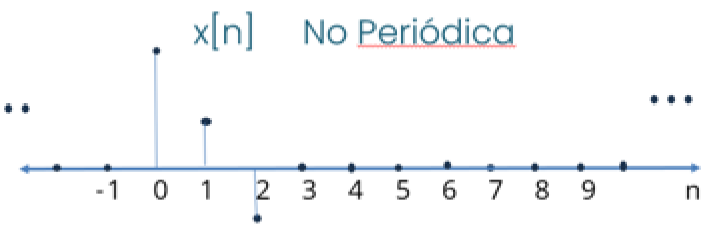
Esta expresión proviene de la interpretación de la Transformada Discreta de Fourier, donde la idea es que los coeficientes ak correspondan a las muestras de la Transfpormada de Fourier continua X(Ω) de la señal no periódica de x [n], valuada en frecuencias específicas, donde las frecuencias corresponden a los armónicos de la señal original, donde Ω = 2pi/N.

Lo que podemos decir es que al considerar que cuando la señal x[n] se hace periódica, sus coeficientes de fourier son equivalentes a las muestras de su transformadas de fourier en esas frecuencias discretas.

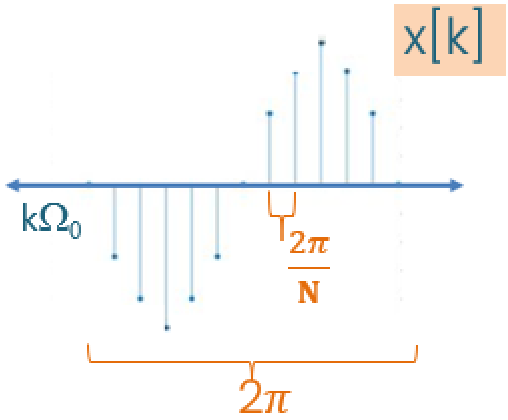
Recordando que X(Ω) es la Transformada de Fourier de x[n], la cual es periódica y continua.



Cuando la señal x[n] (no periódica):



se vuelve periódica con un periodo N, los coeficientes de la serie de Fourier de esta señal periódica se obtienen tomando muestras de la Transformada de Fourier continua de la señal original no periódica X(Ω)



Entonces a partir de esta expresión:

$$N.\,ak = x[k\frac{2\pi}{N}] = \underline{x}[k\,\Omega_0]$$

podemos decir que el término N por el coeficiente es equivalente a valuar X(Ω) en esas frecuencias discretas.

Esta transformada es la que se utiliza principalmente en el procesamiento digital de señales, debido a que por sus propiedades su implementación computacional es sumamente eficiente.

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \; e^{-j\,k\,(2\pi/N)\,n}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k].\,e^{j\,k\,(2\pi/N)\,n}$$

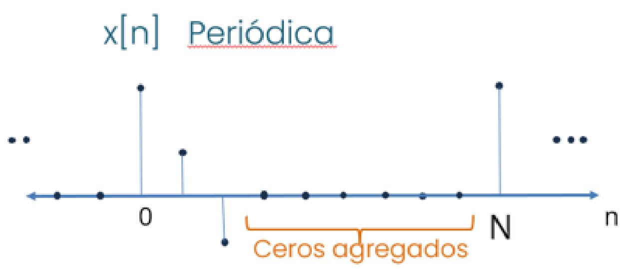
Este par de Transformada Discreta de Fourier coincide con las sentencias de OCTAVE: fft - ifft

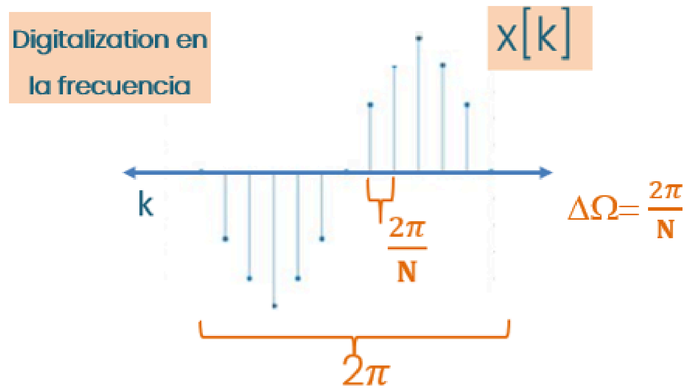
Transformada rapida de Fourier

Al momento de trabajar con señales no periódicas, se genera una señal con N elementos complementando con valores nulos. En Octave se genera un vector de dimensión N, igual al número de elementos de un ciclo en la señal periódica en el cual una parte tendrá valores de la señal y se complete hasta llegar a N con valores nulos.

Importante recordar como se definen vectores en octave:
n = 0 : 0.1 : 1,
donde estamos definiendo una variable en donde se genera un VECTOR que contiene valores que van desde 0 a 1 con un intervalo de 0.1.

Otra forma es declarar por ejemplo: x = 2 * cos(2 * pi * n) donde x es un vector con los valores de la función en cada valor de n definido en la variable de rango.





Podemos notar que el valor seleccionado para el periodo N afecta el nivel de muestreo en la frecuencia de la transformada
En la práctica no se calcula con las expresiones vistas sino con un algoritmo llamado FFT
(Fast Fourier Transform) o transformada rápida de fourier, con resultados idénticos y un esfuerzo de cálculo considerablemente menor → Es un algoritmo sumamente eficiente.

Convolución FFT

Dado que las señales en esta transformada son periódicas su convolución lineal NO CONVERGE =>
Deberíamos redefinir estas 2 señales periódicas, que posean un mismo período N:
x1 [n] y x2 [n].
Cuando la convolución lineal no converge, significa que al realizar la convolución de dos señales directamente no podemos aplicar la TDF sin hacer algunas modificaciones por que las señales son tratadas como si se repitieran infinitamente, por ello es que redefinimos las señales para que sean periódicas con un periodo común N.

Donde:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] . x_2[n-k]$$

Puede calcularse:

$$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{\text{T.D.F}} y[k] = x[k] . h[k]$$

- Entonces, podemos utilizar la propiedad de convolución de la transformada eligiendo convenientemente el valor de N para realizar estos cálculos y obtener los mismos resultados.
- Sean x1[n] y x2[n] señales no periódicas
- Longitud L1 y L2
- Adoptamos N >= L1 + L2 -1 → esto es realizado para definirlas de manera periódica y así poder usar la TDF.
- Definimos las 2 señales periódicas.
- Calculamos sus T.D.F. x1[k] y x2[k] :

$$\hat{x}_1[n] \begin{cases} x_1[n] & \text{para } 0 <= n <= L_1 - 1 \\ 0 & \text{para } L_1 < n <= N - 1 \end{cases}$$

$$\hat{x}_2[n] \begin{cases} x_2[n] & \text{para } 0 <= n <= L_2 - 1 \\ 0 & \text{para } L_2 < n <= N - 1 \end{cases}$$

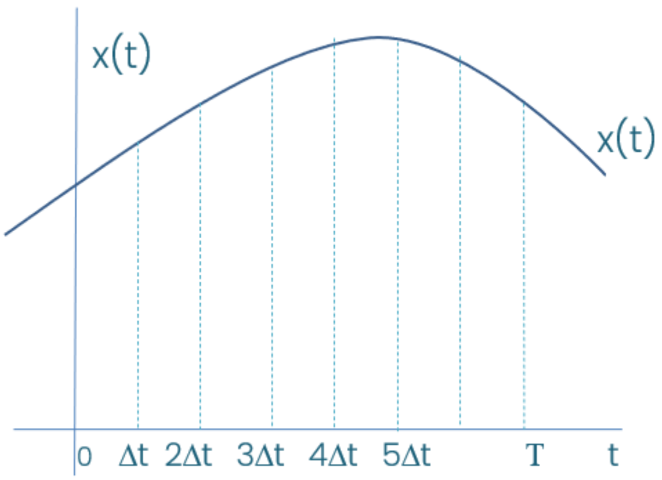
Simplemente rellenamos con ceros las señales originales hasta alcanzar una longitud de N. Entonces las señales parecen ser de longitud N lo que permite tratarlas como periódicas para poder usar la TDF. Entonces:

$$\boxed{\hat{y}[k] = \hat{x}_1[k].\hat{x}_2[k] \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{T.D.F}} y[n]}$$

Muestreo de Señales analógicas (tiempo continuo)

El muestreo consiste en la conversión de una señal continua en el tiempo en una señal discreta, obtenida mediante la toma de muestras de la señal continua en el tiempo en instantes discretos de tiempo. Estudiaremos MUESTREO UNIFORME O PERIÓDICO.

$x(t) \rightarrow \boxed{\text{MUESTREADOR}} \rightarrow x[n\Delta t] \equiv x[n]$ siendo Δt el intervalo de muestreo

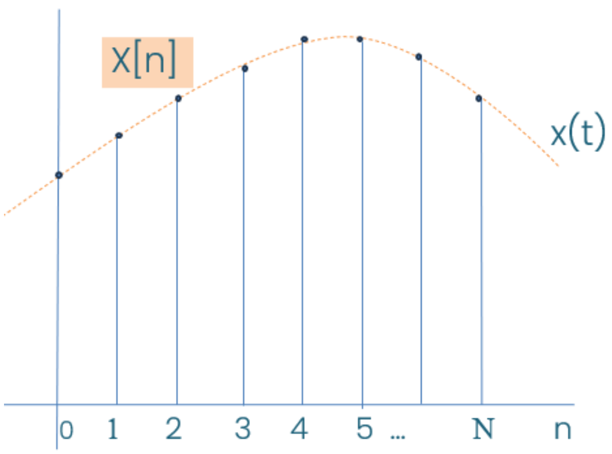


Es decir que en este proceso de muestreo vamos a partir de una señal analogica , como:

$$t = n\Delta t$$

Siendo t el tiempo total, donde se multiplica la cantidad de muestras por el periodo de tiempo por el cual separa cada muestra

Cuando esta señal ingresa al muestreador obtenemos:



x[n] es la señal discreta en el tiempo obtenida tomando EN muestras de la señal analógica.

Δt es el intervalo de tiempo entre las muestras, es decir el periodo de muestreo.

Por otro lado obtenemos Fm siendo la frecuencia de muestreo o tasas de muestreo, es decir la cantidad de muestras que voy a tomar por segundo, para poder representar esa señal analógica en una señal discreta.

$$Fm = \frac{1}{\Delta t} \qquad \Delta t = \frac{1}{Fm} \qquad t = \frac{n}{Fm}$$

Estas son las relaciones entre las variables t y n de las señales continuas (analogicas) y las señales discretas (digitales)

A partir de las relaciones que obtuvimos, ahora vamos a plantear una señal sinusoidal en tiempo discreto.

$$\boxed{\begin{array}{c} x[n]=\cos(\Omega_0 n) \\ x[n]=\cos(2\pi.f_0 n) \end{array}}$$

Donde en la segunda se nombra la señal en función de la frecuencia, aun así las variables que forman parte de estas ecuaciones son:

Variables:

- Tiempo discreto $[n]$
- Velocidad angular Ω_0
- Frecuencia f_0
- $f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ $\quad \Omega_0 = 2\pi.\,f_0$

Recordando que una de las condiciones que debe cumplirse para que esta señal sea periódica:

$$0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$$
$$-\pi \leq \Omega_0 \leq \pi$$

o expresado en función de la frecuencia

$$0 \leq f_0 \leq 1$$
$$-1/2 \leq f_0 \leq 1/2$$

Por otro lado tenemos una señal sinusoidal en tiempo continuo, a la cual la podemos definir de la siguiente manera:

$$\boxed{x(t) = \cos(2\pi.F_0 t)}$$

Siendo F0 única para la señal. Se mide en Hz , es decir radianes/segundo.

Las variables que conforman esta señal en tiempo continuo son:

Variables:

- Tiempo continuo (t)
- Velocidad angular ω
- Frecuencia F_0
- $F_0 = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad \omega = 2\pi.\,F_0$

Recordando que una de las condiciones que debe cumplirse para que esta señal sea periódica:

$$-\infty \leq \omega \leq \infty$$
$$-\infty \leq F_0 \leq \infty$$

Ahora recordando la igualdad de t = nΔt, podemos reescribir la señal sinusoidal en tiempo continuo:

$$x(t) = \cos(2\pi.F_0 n\Delta t)$$

→ Y recordando nuestra señal sinusoidal en tiempo discreto

$$x[n]=\cos(2\pi.f_0 n)$$

$$\boxed{f_0 = F_0\,\Delta t}$$

→ Podemos establecer que

Ahora a partir de esta igualdad que logramos podemos reescribir f0:

$$f_0 = \frac{F_0}{Fm}$$

→ Esto lo podemos mencionar de esta manera debido a $\Delta t = \frac{1}{Fm}$

entonces también podemos definir F0:

$$F_0 = f_0 \, Fm$$

Volviendo a aquellos parámetros que utilizaremos para definir que la señal sea periódica, podemos reescribirlos a partir de:

$$-1/2 \leq f_0 \leq 1/2$$
$$-1/2 \leq \frac{F_0}{Fm} \leq 1/2$$

Siendo F0 única para la señal y f0 es la frecuencia digital que depende del periodo de muestreo

$$-\frac{F_m}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_m}{2}$$

La relación entre f0 y F0 es uno a uno y por lo tanto es posible reconstruir la señal analógica.

Esta relación uno a uno entre la frecuencia en tiempo continuo y la frecuencia digital significa que a cada valor único de F0 le corresponde un único valor de f0 y viceversa.
Esta relación es la que nos permite reconstruir la señal ya que a traves de la frecuencia de muestreo y la frecuencia digital podemos obtener la frecuencia original F0 .

Entonces desde esta inecuacion que se plantea, podemos deducir lo que nos dice el teorema de muestreo:

$$F_{0\,\text{máx}} = \frac{F_m}{2}$$

Para no perder información y poder reconstruir la señal analógica original la frecuencia de muestreo debe ser:

$$Fm \geq 2\, F_{0\,\text{máx}}$$

Se está considerando que el contenido máximo de frecuencias en la señal sea F0Máx

Entonces , cualquier señal con frecuencias superiores será un ALIAS de alguna frecuencia menor a F0máx que tiene las mismas muestras x[n].

Ahora, sabiendo que a partir del muestreo de una señal continua a una determinado frecuencia de muestreo, género una señal discreta , donde f0 es la frecuencia relativa y existiendo una relación entre f0 y F0, esta señal periódica en el tiempo discreto repite sus valores(alias) si a la frecuencia digital le sumamos un valor entero k.

Es decir que:

$$\boxed{x[n]=\cos(2\pi.f_0 n)=\cos(2\pi.(f_0+k).n)}$$

A partir de esta ecuación y sabiendo que f0 = F0/Fm → Reemplazo obteniendo

$$x[n]=\cos(2\pi.(\frac{F_0}{Fm}+k).n)$$

Entonces al aplicar el denominador común dentro del paréntesis, obtenemos lo que se llama:

Alias señales digitales

$$\boxed{x[n]=\cos(2\pi.(\frac{F_0+k.Fm}{Fm}).n)}$$

Ahora si reemplazo el n por su igualdad, donde n = t.Fm, se obtiene:
Alias de señales analogicas

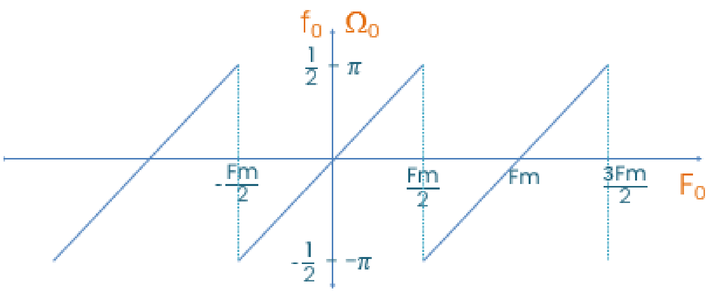
$$\boxed{x(t)=\cos(2\pi.(F_0+k.Fm).t)}$$

Esta señal muestra que para todas las frecuencias analógicas.

$$\boxed{F_k=F_0+k.Fm}$$

La señal x [n] es idéntica (alias) y representa los mismos valores muestreados para el Δt o Fm utilizados.

Ahora a traves de un grafico vamos a poder interpretar la relación entre las variables de frecuencia de as señales continuas (analogicas) y discretas (digitales) para una frecuencia de muestreo Fm determinada:



Para comenzar a interpretar el gráfico podemos ver que el eje horizontal es la frecuencia de tiempo continuo (F0), medida en Hz, mientras que el eje vertical representa la frecuencia digital (f0), medida en ciclos por muestra.
La línea punteada es la relación entre F0 y f0 (COMPLETAR INTERPRETACIÓN DE GRÁFICO)

Muestreo de señales analogicas y la Transformada Discreta de Fourier

Primero es importante recordar el Par de transformada discreta de fourier que relaciona 2 vectores de N elementos.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] . e^{j k (2\pi/N) n}$$

Este es un vector N muestras de una señal analogica x(t)

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad e^{-j k (2\pi/N) n}$$

Este es un vector de N muestras que obtuvimos con la transformada discreta de Fourier aplicada a x [n]

En cuanto a las frecuencias digitales:

$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{N}$$

es el paso entre las frecuencias discretas, siendo N la cantidad de muestras

$$\Delta F = F_0 = \frac{1}{T}$$

Esta es la frecuencia de muestreo en función del periodo de muestreo

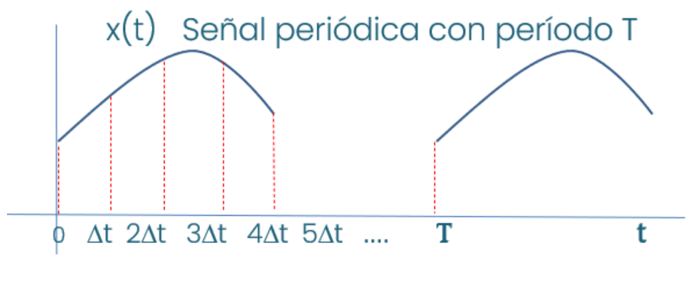
$$\Delta T = \frac{T}{N}$$

Este término indica el intervalo de tiempo de cada muestra, también llamado paso temporal entre las muestras

$$-1/2 \leq f_0 \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Octave} \Rightarrow 0 \leq f_0 \leq 1$$

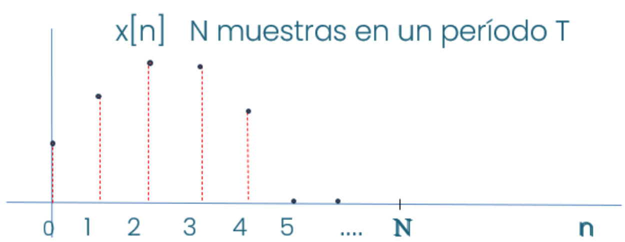
Por otro lado tenemos el valor de la frecuencia normalizada que debe estar entre -½ y ½.
Pero en octave el rango de la frecuencia normaliza se usa entre 0 y 1 para simplificar la representaciones, es decir que solo se utilizan frecuencias positivas para simplificar la cuestión



Ahora empezamos planteando una señal periódica con periodo T. Donde se toman muestras de la señal en intervalos de tiempo Δt dentro del periodo T.
Recordemos que el Δt puede definirse como:

$$\Delta T = \frac{T}{N}$$

Es decir el periodo dividido la cantidad de muestras

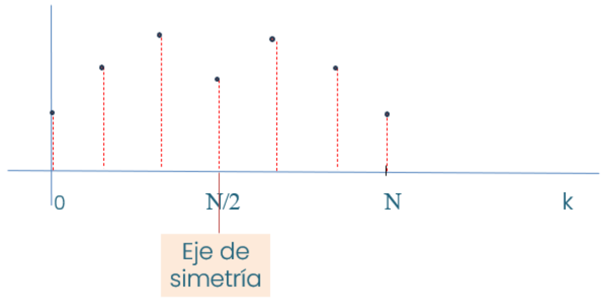


Por otro lado tenemos la representación discreta de la señal, donde solo se ven las muestras tomadas para el procesamiento digital.

$$\Delta T = \frac{T}{N} \qquad \Delta F = F_0 = \frac{1}{T} \qquad \Delta f = f_0 = \frac{1}{N}$$

$$T = N.\Delta T \qquad \Delta F = \frac{1}{N.\Delta T} \qquad Fm = \frac{1}{\Delta t} \qquad \Delta F = \frac{Fm}{N}$$

Utilizamos esta serie de fórmulas para explicar lo que hacemos, donde podemos ver ΔT el cual es el intervalo de tiempo entre cada muestra, ΔF o F0 la frecuencia fundamental de la señal y
Δf siendo la distancia entre las frecuencias discretas

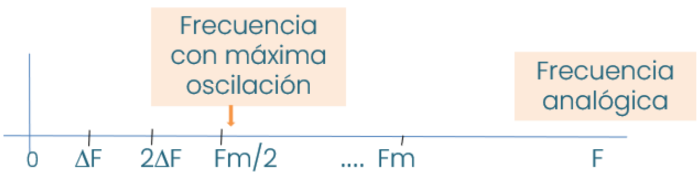


Cuando en OCTAVE hacemos la FFT obtenemos la TDF (parte real simétrica, parte imaginaria asimétrica)
Es decir, cuando aplicamos la TDF a las muestras x[n] obtenemos un conjunto de N puntos en el dominio de la frecuencia representados por x[k].

Donde los valores k son valores puntuales de la frecuencia.

Donde podemos ver cómo se relaciona la frecuencia discreta con la frecuencia digital , donde cada k corresponde a un valor de una frecuencia puntual.
Esta relación se establece a partir de la fórmula:

$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{N}$$



Por último podemos apreciar la frecuencia máxima a la que la señal puede oscilar la cual se calcula como el inverso del intervalo de muestreo, esta frecuencia máxima es clave para evitar el aliasing y asegurar que luego se pueda reconstruir la señal correctamente.

Entonces habiendo visto la señal x[n] en relación al tiempo y las muestras x[k] en relación a las frecuencias digitales y analógicas, podemos realizar un análisis sobre la relación entre las variables.

Podemos decir que:

$$\Delta F = \frac{1}{N.\Delta T}$$ debido a que $\Delta F = \frac{Fm}{N}$ y $Fm = \frac{1}{\Delta t}$

Entonces como conclusión podemos decir que a medida que reducimos Δt mejora la calidad del muestreo en el dominio del tiempo pero empeora el muestreo de las frecuencias analógicas en el espectro, si N se mantiene.
Explicado más en criollo cuando reduces el tiempo que se va a tomar entre las muestras, las muestras están más cercanas entonces tienes una mayor precisión de muestreo. Entonces cuando se reduce Δt pero si aumenta el número total de muestras, abarcan un intervalo de tiempo más pequeño entonces cubre un rango de frecuencias más amplio pero con menos precisión porque tiene la misma cantidad de muestras en un intervalo de frecuencias más grande.

Por otro lado si aumentamos Δt mejora la calidad del muestreo en frecuencias del espectro, si N se mantiene constante, a su vez empeora el muestreo en el dominio del tiempo.
Por otro lado, acá pasa lo contrario porque al aumentar Δt las muestras están más distanciadas por lo tanto es más impreciso, mientras que las frecuencias se muestran con más precisión porque van a estar más cercas unas de otras en la frecuencia.

Entonces si queremos mejorar la calidad de muestreo en un dominio debemos aumentar la cantidad de mostrar N para no afectar al otro.

Importante de recordar:

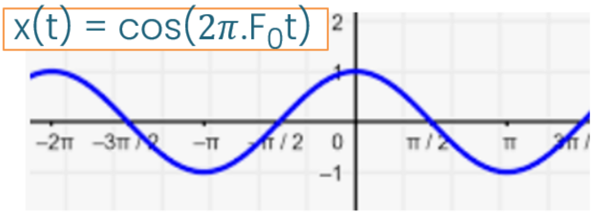
- La máxima cantidad de oscilaciones en el tiempo discreto se da con la frecuencia digital f0 = ½
- La maxima frecuencia analogica repreenanda en el muestreo es F0max= 1/2Δt

Conocida como frecuencia de corte - frecuencia de nyquist

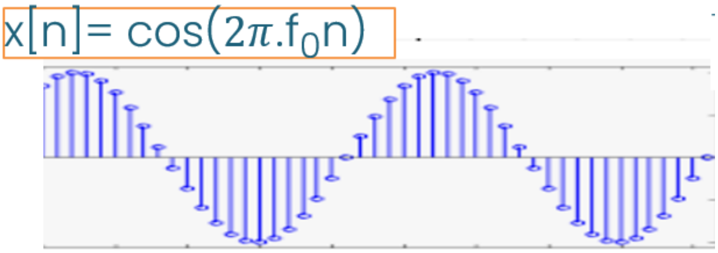
Efecto del enventanado

Debido a que el tratamiento de señales digitales NO es posible trabajar con señales infinitas en el tiempo, debemos acotar la señal a un intervalo, donde matemáticamente es un producto de la señal por una función ventana.
Esta ventana solo tendrá valores no nulos dentro del intervalo de análisis.
En la práctica la función de ventana tiende a 0 de manera gradual, evitando la discontinuidad que presenta la ventana rectangular.

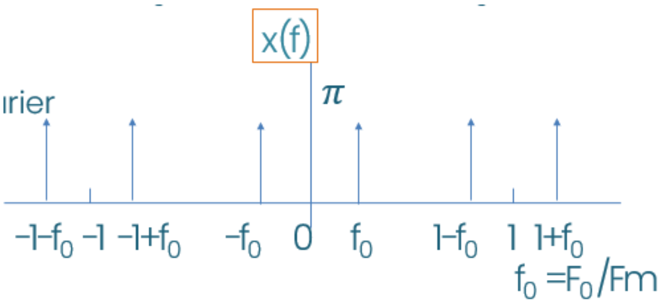
Un ejemplo donde aplicamos ventana es en tiempo continuo, al aplicar la propiedad de modulación.
Podemos extender la idea en tiempo discreto donde la sustitución de los impulsos en frecuencia en la señal infinita por seno en el siguiente gráfico:



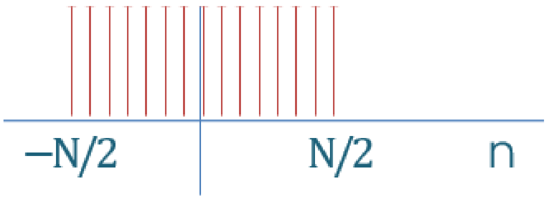
Donde su transformada de fourier en tiempo continuo es:



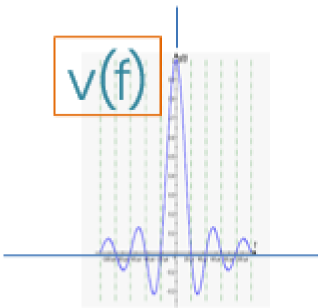
Por otro lado tenemos la señal muestreada en tiempo discreto, donde al aplicar la transformada de fourier en el tiempo discreto obtenemos:



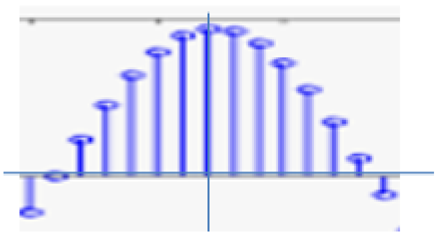
Entonces al aplicar la siguiente función ventana:



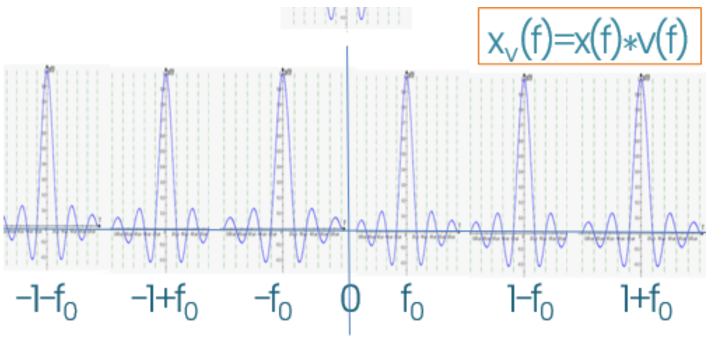
Donde su transformada de fourier en tiempo discreto es:

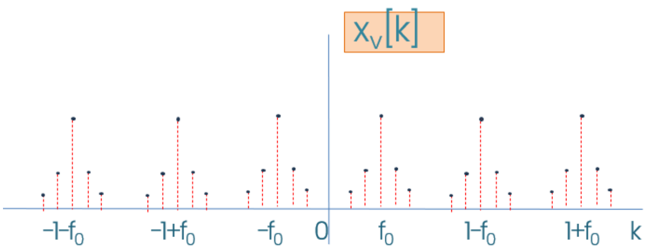


Y ahora al multiplicar la señal infinita por la función ventana obtengo:



La cual al aplicarle la transformada de fourier TD obtenemos:





Entonces la transformada discreta de Fourier nos va a dar un muestreo de Xv(f)

Filtros

Filtros F.I.R. (Finite Impulse Response)

- Filtro de media móvil
- Filtro paso bajo SENC de ventanas

Filtros I.I.R (Infinite Impulse Response)

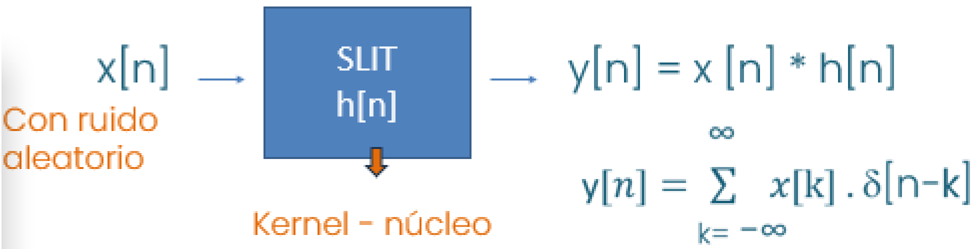
- Respuesta al impulso infinita
- No forman parte de este curso

Filtro de Media Móvil

Este filtro posee una implementación simple, es sumamente edición con el uso correcto

En cuanto al funcionamiento, realiza un suavizado de la señal, donde cada valor de y[n] es un promedio de los valores de la señal de entrada en algunos tiempos vecinos.
Este promedio puede ser centrado, lateral parcial o total , a derecha o izquierda.
Es importante saber que para un promedio centrado debe haber un número impar de elementos.

Expresión de la respuesta del filtro media móvil.
Ejemplo: promedio centrado con 5 valores de la señal de entrada x[n],
donde Y[n]= 1/5 {x[n-2]+x[n-1]+x[n]+x[n+1]+x[n+2]}



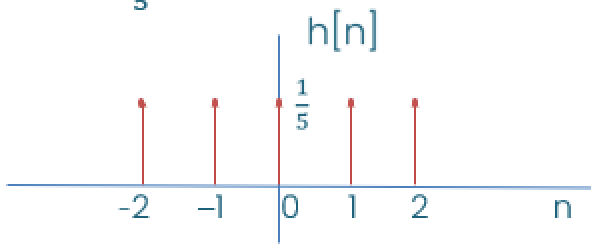
A partir de esta podemos explicar el filtrado que ocurre mediante la convolución, donde tenemos una señal x[n] que es la señal de entrada que puede tener ruido aleatorio. Luego tenemos el SLIT que va a representar el filtro que le aplicamos a dicha señal de entrada, el cual es llamado Kernel o núcleo y por último la salida que es la operación de convolución, que combina la señal de entrada con un filtro.

Luego en la última expresión para obtener el valor de salida de y[n]m se toma una sumatoria de los infinitos valores de x[k] multiplicados por el filtro desplazado, donde el proceso se repite para cada n en la señal de salida.

Como seria la respuesta al impulso, donde intentamos explicar cómo responde el filtro cuando la señal de entrada es un impulso.
Lo utilizamos para ver cómo actúa el filtro en general.

Partimos de un ejemplo donde tenemos un promedio centrado con 5 valores de la señal de entrada x[n].

$$h[n]= \frac{1}{5}\{\delta[n+2]+ \delta[n+1]+ \delta[n]+ \delta[n-1]+ \delta[n-2]\}$$



El filtro media móvil está tomando un conjunto de valores alrededor de cada punto en la señal y los promedio para poder suavizar.

En el gráfico del filtro podemos ver que cada línea roja es un impulso donde todas tienen el mismo valor de ⅕.
Ahora para generalizar para M valores alrededor de n (con M:impar):

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=n-\frac{M-1}{2}}^{n+\frac{M-1}{2}} \delta[n-k]}$$

Kernel – núcleo
Filtro de Media Móvil

Esta fórmula es la que define entonces el filtro de media móvil, donde tenemos el valor M que es el número total de valores que vamos a promediar, recordando que debe ser IMPAR, para poder centrarse en n.
El 1/M es el factor promedio, donde cada vez que sumamos los M valores los dividimos entre M para obtener el promedio.
En conclusión el kernel nos explica como el filtro selecciona y promedia los valores de la señal alrededor de un punto n.

Consecuencias de aplicar este filtro

- Produce un muy buen suavizado en el dominio del tiempo
- Su comportamiento es pobre en el dominio de la frecuencia (su rta en frecuencia es un senc)

Principal utilización

- Reducir el ruido blanco o ruido aleatorio que puede contaminar una señal y se la quiere restablecer

Particularidades del ruido blanco

Anteriormente habíamos nombrado que la señal de entrada tenía un ruido aleatorio. Este ruido blanco o aleatorio tiene diferentes particularidades como:

- Valores totalmente aleatorios
- No poseen ningún tipo de correlación entre ellos, lo cual hace que su promedio tienda a cero -> el ruido desaparece, si la cantidad de valores promediados aumenta
- Su espectro en la frecuencia es plano -> posee la misma amplitud en todas las frecuencias, con lo que un filtro selectivo en frecuencia no sería de utilidad

Filtro paso Bajo - SENC de Ventanas

Este filtro es muy eficiente como filtro selectivo en la frecuencia.
Su comportamiento es pobre en el dominio del tiempo.

Nos centramos en la implementación computacional de un filtro paso bajo, donde recordemos que la idea es que nuestro núcleo tiene que ser capaz de eliminar aquellas frecuencias superiores a la frecuencia de corte (fc) al momento de realizar la convolución con x[n].

Recordemos un ejemplo de un filtro paso bajo ideal donde tenemos una señal de entrada:

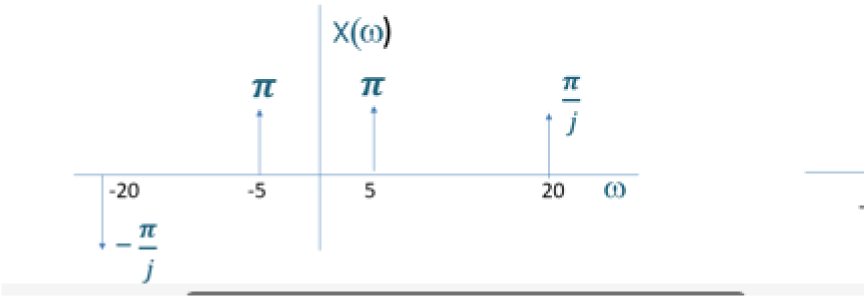
Señal de Entrada

$$x(t) = \cos(5.t) + \operatorname{sen}(20.t)$$

3	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$\mathcal{F}$
4	$\operatorname{sen} \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	

Nuestra señal de entrada está en el dominio del tiempo, la cual a traves de la transformada de fourier la pasamos al dominio de la frecuencia, obteniendo una sumatoria y resta de impulsos.

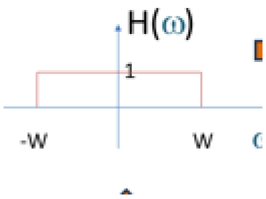
$$x(\omega) = \pi[\delta(\omega - 5) + \delta(\omega + 5)] + \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - 20) - \delta(\omega + 20)]$$



Por otro lado tenemos la señal que es la respuesta al impulso la cual llamamos h(t), donde en el dominio de la frecuencia se convertía en un pulso rectangular que actuará como filtro desde -W hasta W.

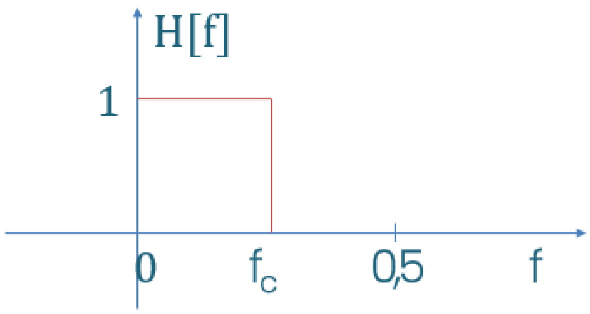
$$h(t) = \frac{sen(W.t)}{\pi t}$$

$\frac{W}{\pi}\operatorname{senc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$



→ Esta es la respuesta en el dominio de la frecuencia donde actúa como filtro , eligiendo la frecuencia de corte.

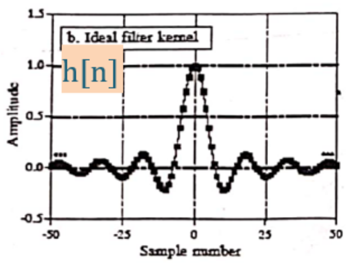
Un filtro pasa bajo ideal es una ventana en la frecuencia, en la cual definimos la frecuencia de corte, vamos a trabajar con la transformada de fourier en tiempo discreto.
Es importante recordar que la máxima cantidad de oscilaciones en el tiempo discreto se da con la frecuencia digital f0 = ½ .



La ventana análisis es un rectángulo de valor.
1 para 0<f<f0
0 para f0<f<0.5

Por otro lado el núcleo de este filtro ideal es la TD h(n):

$$h[n]=\frac{sen(2\pi.f_c n)}{\pi.n} \rightarrow$$



$$h[n]=2f_c\,\frac{sen(2\pi.f_c n)}{2f_c\pi.n}$$

$$h[n]=2f_c\,senc(2f_c\,n)$$

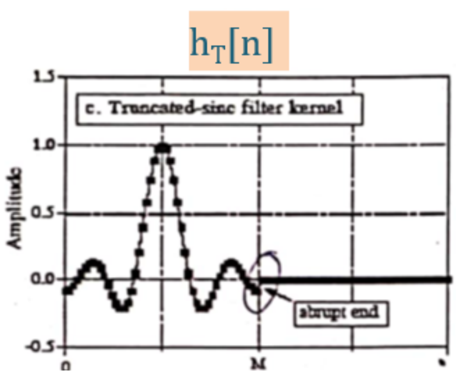
Para compensar el error se agrega el fc, y usamos directamente el senc

Para poder lograr la función de senc c voy a tener que multiplicar tanto por arriba como por abajo por 2fc

→ si n = 0 el resultado del senc es =1, la altura del senc en h[0] = 2fc

Cuando n , el cual es el índice de tiempo discreto va desde menos infinito a más infinito, es imposible su implementación computacional ya que posee infinitos valores, por ello se debe acotar a la duración de este núcleo a un valor de M + 1 elementos simétricos al lóbulo principal. Es para mantener la simetría con respecto al eje.

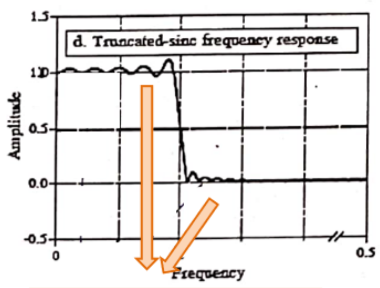
Esto equivale a aplicar una ventana rectangular produciendo el correspondiente truncamiento.



En el espectro de esta señal truncada podemos observar una ondulación excesiva en la banda de de paso fc y en la banda de parada f > fc con una atenuación deficiente.

El efecto Gibbs ocurre cuando tratas de representar una función con saltos bruscos (como una señal cuadrada) usando ondas. Cerca de esos saltos, aparecen pequeñas ondas que no desaparecen, incluso si usas más términos para mejorar la aproximación.

$H_T[f]$



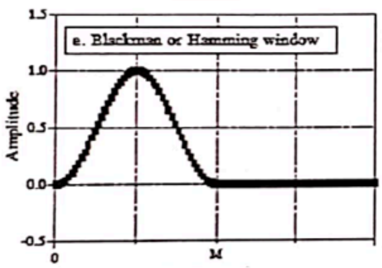
ondulación excesiva

Esto se debe al fenómeno de Gibbs, producido por los saltos abruptos, que se producen en los bordes de la ventana en el tiempo al truncarse la señal. Entonces esto se resuelve introduciendo un suavizado del Núcleo del filtro truncado hT[n] multiplicándose por una ventana que tienda de manera gradual a cero en los bordes, eliminando el salto y las ondulaciones. Brusca discontinuidad que aparece cuando uno corta h, ese salto brusco produce las oscilaciones excesivas. Usamos una ventana que no sea rectangular, sino con otra forma.

Ventana de Hamming

Tiende de manera gradual a cero en los bordes.
Esta ventana está disponible en OCTAVE donde solo hay que definir la longitud.

$v[n]$



$$v[n]=0{,}54-0{,}45\cos\left(\frac{2\pi.n}{M}\right)$$

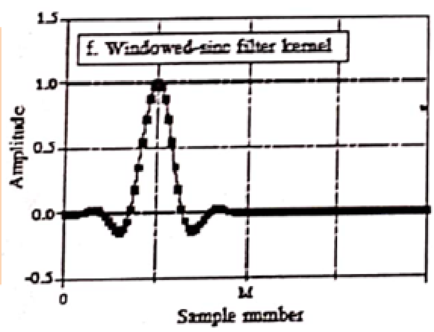
- M número par
- Cantidad de elementos en la ventana M+1
- n = 0 a M

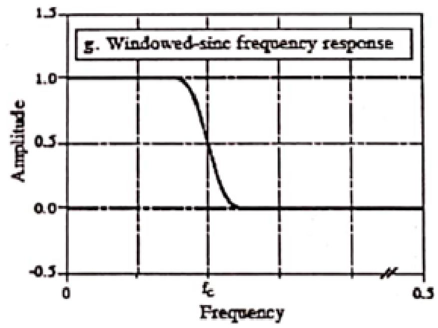
Es importante notar que las figuras se trabajan trasladando todas las señales a tiempos positivos para que sea más práctico en su implementación.
Utilizaremos para el Núcleo del filtro una expresión que desplace el origen (centro del Senc) de cero a M/2

$$h_d[n]=\frac{\mathrm{sen}\left(2\pi.f_c\left(n-\frac{M}{2}\right)\right)}{\pi.\left(n-\frac{M}{2}\right)}$$

Entonces el núcleo quedaría:

Núcleo definitivo
$h[n] = h_d[n].v[n]$



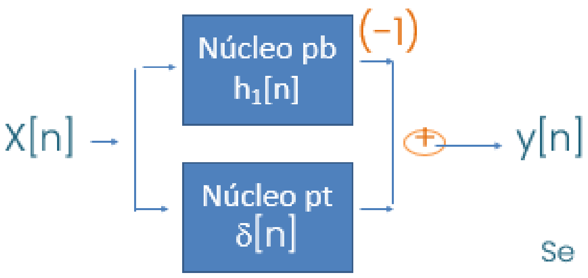


- Esta ventana nos permite mejorar notablemente el fenómeno de Gibbs.
- La banda de transmisión entre el 0 y el 1 no es una discontinuidad
- Mejora si aumentamos M.

Entonces nuestro núcleo definitivo posee amplitudes modificadas por v[n] respecto a las amplitudes del núcleo original hd[n].
Se modifican las amplitudes en su espectro y con ello la ganancia del filtro => El núcleo en frecuencia 0 debería ser 1 ; TDF de h[n] => H(0)=1. Por lo tanto hay que normalizar[n], para que la altura de la transformada sea 1.

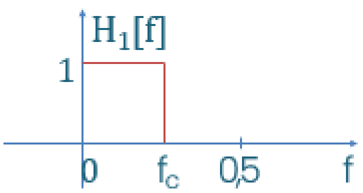
Filtro Pasa Alto : Inversión espectral

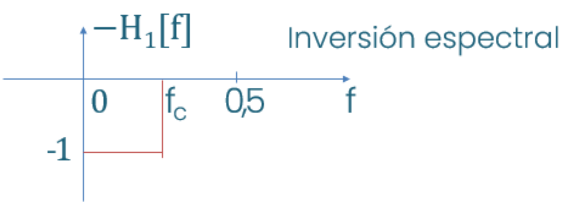
Este filtro , que se puede obtener a partir del filtro pasa bajo, lo podemos ver como una asociación en paralelo (suma) de dos sistemas con respuestas al impulso correspondientes a un Filtro paso bajo (inverso) + filtro pasa todo:



Recordemos que al tener un sistema en paralelo, cada parte actúa sobre la señal original, lo que luego se suma, a diferencia de trabajar en serie que cada sistema actúa sobre la salida del sistema anterior.

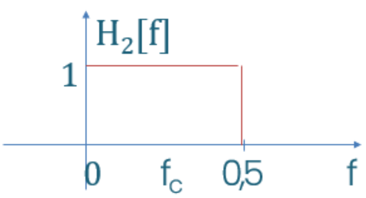
Comenzamos recordando el filtro pasa bajo, el cual deja pasar frecuencias hasta una determinada frecuencia de corte, la gráfica en respuesta en frecuencia para este filtro H1[f] tiene un valor 1 para frecuencias bajas y 0 para las demás frecuencias.



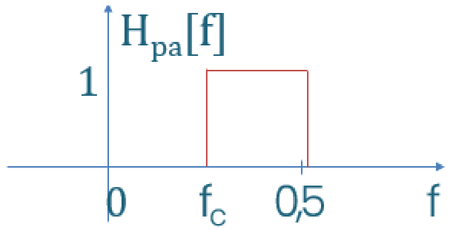


Ahora reflejamos o invertimos la forma de la respuesta de H1[f] que tiene la misma forma pero con valores negativos.

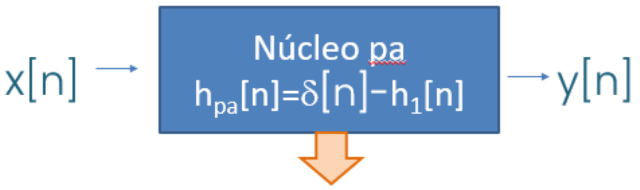
Por otro lado tenemos un filtro pasa todo, que deja pasar todas las frecuencias, en este caso representado con H2[f]:



Entonces para el filtro pasa alto vamos a usar el filtro paso bajo inverso y el filtro paso todo, y al sumarlo las frecuencias bajas se cancelan entre sí y las frecuencias más altas no se cancelan, por ello es que de la suma de estos sale un filtro pasa alto:



Entonces obtenemos el núcleo del filtro paso alto:



Este núcleo es la respuesta en el dominio del tiempo la cual se obtiene restando el núcleo del paso bajo y el impulso.

Entonces se suma solo 1 al lóbulo principal porque es un impulso , ya que impulsó hace que el valor en n = 0 (lóbulo principal) sea 1, ya que el impulso tiene valor 1 en ese punto.

Lo que podemos concluir que el Núcleo de un filtro paso alto por inversión espectral, es igual al de un filtro paso bajo con los signos opuestos en todos sus componentes, adicionando uno al valor central del lóbulo principal.

En cuanto a la implementación, es decir como construir el núcleo del filtro paso alto a partir del núcleo paso bajo:

$$h_{pa}[n]=h_{pb}[n].(-1)$$

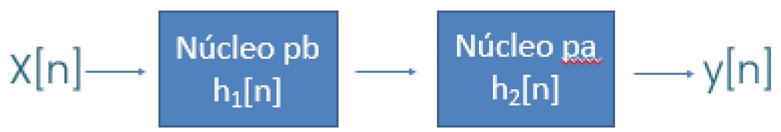
$$h_{pa}[M/2]=h_{pb}[M/2]+1 \Rightarrow \delta[n]$$

Podemos multiplicar el núcleo del filtro paso bajo por -1 para invertir los signos de todos los valores de este filtro,
Luego en el punto central es decir donde n= M/28 la mitad del núcleo) se suma 1 al valor, que corresponde al impulso.

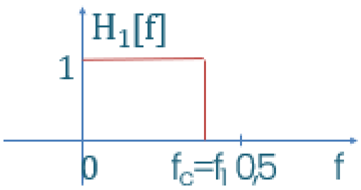
En conclusión, la implementación se basa en invertir los signos del filtro paso bajo y sumarle 1 en el centro para obtener el filtro paso alto.

Filtro Paso Banda

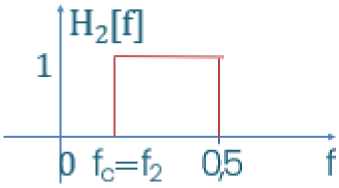
Este filtro puede verse como una sucesión en serie de dos sistemas, correspondientes a un filtro paso bajo con frecuencia de corte= f1 y uno paso alto con frecuencia de corte f2; con f2 < f1.



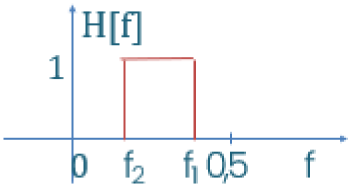
Entonces, para lograr el filtro paso banda, comenzamos con un filtro paso bajo:



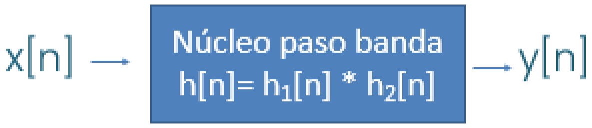
Luego con un filtro paso alto:



Y ahora para obtener el filtro paso banda, debemos realizar la convolución de ambos filtros, donde la respuesta en la frecuencia se vería de la siguiente manera:

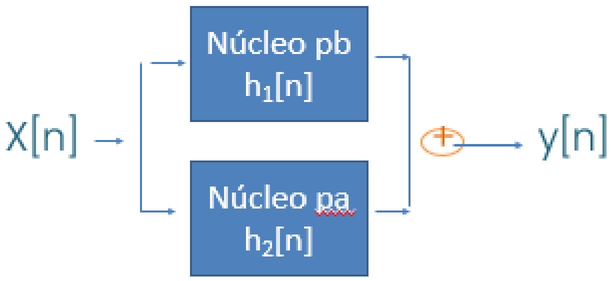


Siendo el núcleo de este filtro:

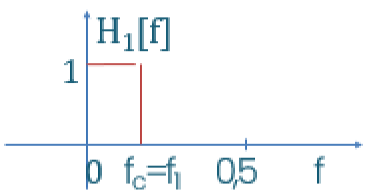


Filtro rechazo de banda

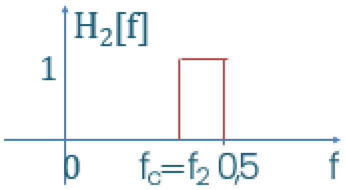
Si utilizamos una agrupación en paralelo (suma) de dos sistemas, un filtro paso bajo con fc = f1 y uno paso alto con frecuencia de corte f2; con f2 > f1.



Entonces partiendo de un filtro paso bajo:

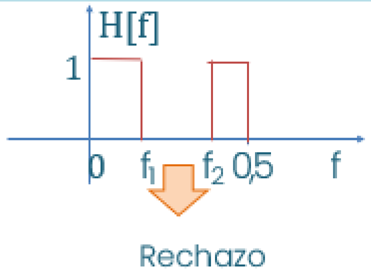


Este filtro tiene una frecuencia de corte, fc = f1.



Y ahora un filtro pasa alto el cual tiene una fc = f2, siendo la frecuencia de corte de este filtro f2 > f1.

Y ahora para obtener el filtro rechazo de banda, debemos sumar ambos filtros, dándonos una respuesta en la frecuencia:



Para obtener el núcleo de este filtro, debemos sumar los núcleos del filtro paso bajo y el filtro paso alto: