7. Serie de Fourier. Interpretación. Deducción de sus coeficientes. Condiciones de convergencia.

Serie de Fourier

① Interpretación

La serie de Fourier nos sirve para representar una señal como una combinación lineal de exponenciales imaginarias puras armónicamente relacionadas con T y frecuencia fundamental w_0.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jkw_0 t}$$

② Coeficientes

Multiplicamos ambos miembros de la serie por $e^{-jnw_0 t}$

$$x(t) \cdot e^{-jnw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jkw_0 t} \cdot e^{-jnw_0 t}$$

Integramos en un periodo fundamental T_0

$$\int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jnw_0 t}\, dt = \int_{T_0} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k}_{\text{constante}}\, e^{jw_0 t(k-n)}\, dt$$

$$\int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jnw_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{T_0} e^{jw_0 t(k-n)}\, dt}_{\text{Dos posibles casos}}$$

CASO 1: $k \neq n$

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$e^{j2\pi(k-n)} = \cos[2\pi(k-n)] + j\,\mathrm{sen}[2\pi(k-n)] = 1$ (por el 2π)

$$\int_{T_0} e^{jw_0 t(k-n)}\, dt = \frac{\left(e^{jw_0 T_0(k-n)} - e^0\right)}{jw_0(k-n)} = \frac{\left(e^{j2\pi(k-n)} - 1\right)}{jw_0(k-n)} = \frac{(1-1)}{jw_0(k-n)} = 0$$

como se hace 0, no nos sirve para encontrar los coeficientes.

CASO 2: $k = n$

$$\int_{T_0} e^{jw_0 t(k-n)}\, dt = \int_{T_0} e^{jw_0 t(0)}\, dt = \int_{T_0} e^0\, dt = \int_{T_0} 1\, dt = T_0$$

$$\int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j\underset{n=k}{n}w_0 t}\, dt = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}_{\text{solo hay un posible valor porque } k=n} a_k \cdot T_0$$

$$\int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jkw_0 t}\, dt = a_k \cdot T_0$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jkw_0 t}\, dt \longrightarrow \text{coeficientes de la serie de Fourier}$$

③ Condiciones de Convergencia

En un intervalo T_0 cualquiera:

ⓐ $x(t)$ debe ser integrable: $\int_{T_0} |x(t)|\, dt < \infty$

ⓑ $x(t)$ es acotada. (Cantidad finita de máximos y mínimos)

ⓒ $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades.