Análisis Numérico - Resumen

Introducción a las señales y a los sistemas

Sistema:

Proceso por el cual la señal de entrada x(t) se transforma en una señal de salida y(t)

Señales:

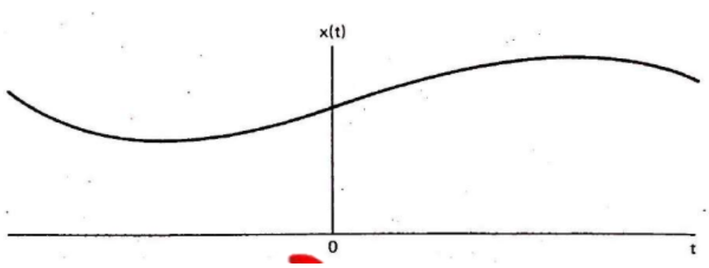
- Se representa matemáticamente como **funciones** de una o más variables dependientes en función de una o más variables independientes

- Las señales pueden describir una variedad muy amplia de fenómenos físicos

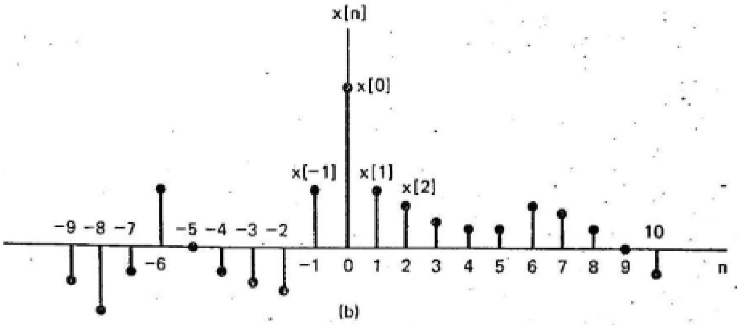
- Nosotros nos enfocamos en señales que involucran **una sola** variable independiente y por conveniencia nos referiremos a la variable independiente como el tiempo, y la llamaremos:

    - **“t” en tiempo continuo**
    - **“n” en tiempo discreto**

Señal en tiempo continuo: Estas señales están definidas para una sucesión continua de valores de la variable independiente

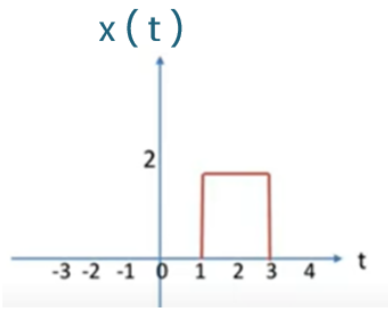


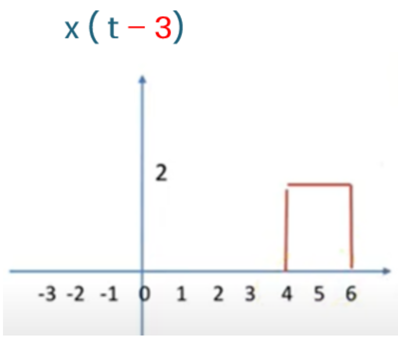
Señal en tiempo discreto: La variable independiente adopta solo valores enteros (tiempos discretos)



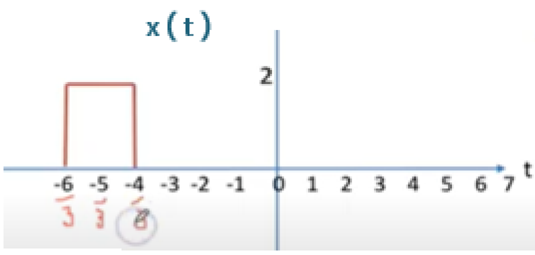
Operaciones de las señales en tiempo continuo:

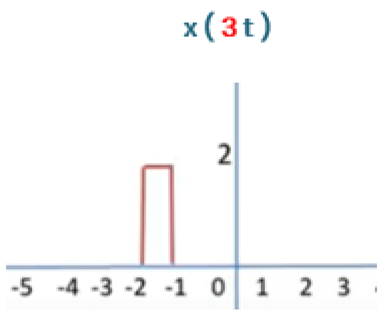
1) Desplazamiento en el tiempo



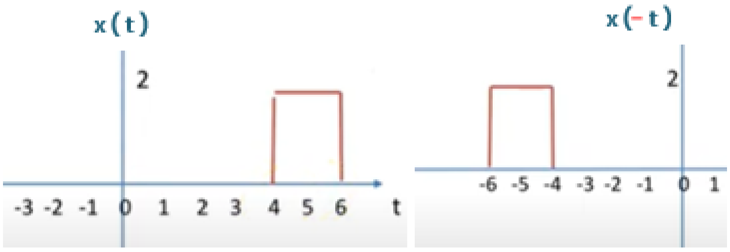


2) Escalamiento x(αt) siendo α una constante:





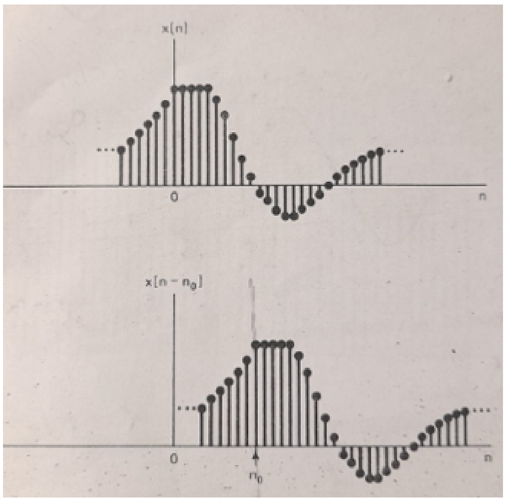
3) Reflexión x(-t):



<u>Es importante notar</u> que todas estas operaciones son transformaciones de la variable independiente, es decir que la variable t solamente se ve afectada y no la x.

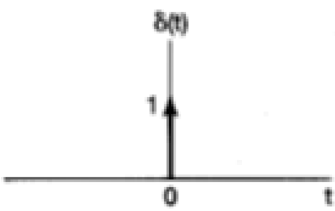
Osea en otras palabras la altura no se ve modificada

Las mismas operaciones pueden ser adaptadas para señales en tiempo discreto, por ejemplo el caso del **desplazamiento** se vería de la siguiente manera



<u>Definición de señales básicas:</u>

<u>Impulso Unitario</u> δ(t)



<u>Impulso Unitario Continuo:</u>

∞ para cuando t = 0

0 para cualquier otro valor de t

¿Qué sucede cuando multiplicamos un impulso unitario con cualquier señal? → El resultado es el impulso unitario por el valor de la señal que tiene en cero

$$x(t).\,\delta(t) = x(0).\,\delta(t)$$

Ahora si nosotros integramos el producto

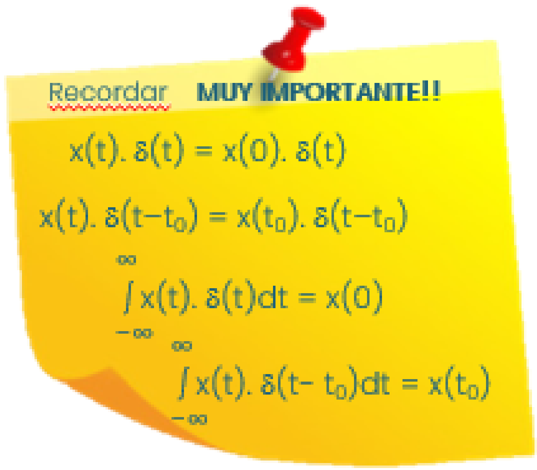
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\,\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(0)}_{CTE}.\,\delta(t)dt$$

$$= x(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt}_{=1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\,\delta(t)dt = x(0)}$$

Notar que si el impulso está desplazado en el tiempo y lo multiplicamos por una señal, el resultado es simplemente la señal valuada en el corrimiento, es decir que $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t_0) * \delta(t-t_0)$ → Al integrar entre menos infinito y más infinito el resultado nos queda como $x(t_0)$

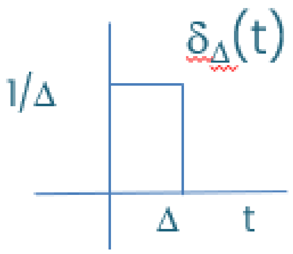
Lo que sí es importante es recordar las siguientes relaciones



Es importante notar que en el impulso unitario se debe cumplir la **condición fundamental de area:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad \text{Condición fundamental Área= 1}$$

A continuación se muestra la **representación incremental del impulso:** $\delta_{\Delta}(t)$ pulso rectangular de duración finita Δ y una altura finita 1/Δ, conserva la condición de área



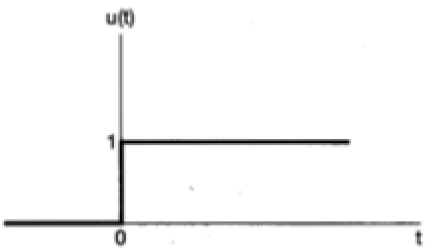
1/Δ para 0 <= t <= Δ

0 para cualquier otro t

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t)$$

Es importante notar que el impulso incremental sigue conservando la condición fundamental del área

Escalón unitario u(t)

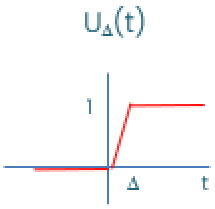


Escalón unitario en tiempo continuo:

1 para t >= 0
0 para t < 0

- Es discontinua en t = 0
- Es muy importante en nuestro análisis de las propiedades de los sistemas

A continuación se muestra la **representación incremental del escalón unitario:** $U_{\Delta}(t)$. Aproximación continua al escalón unitario



$$U(t) = \lim_{\Delta \to 0} U_\Delta(t)$$

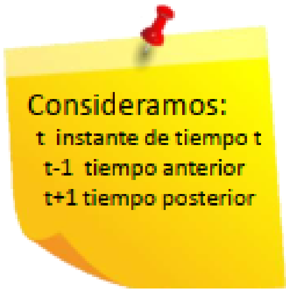
Notar que tanto el impulso unitario como el escalón unitario pueden ser representados en el tiempo discreto de la señal (no lo voy a poner en el resumen es medio obvio)

Convolución de señales en tiempo continuo

Propiedades de los sistemas

Sistemas con / sin memoria

Un sistema es **sin memoria**, si la salida en un instante de tiempo t, depende de la entrada en el mismo instante de tiempo t



y(t) = x(t) + 3 → Sistema sin memoria

y(t) = x(t-2) +3 → Sistema con memoria

Invertibilidad

Para que un sistema sea invertible, a cada entrada diferente, la respuesta es diferente, por eso a partir de la salida se puede identificar la entrada si se cumple que → a la señal de salida y(t) le aplicamos otro sistema (Sistema Inverso); este arroja por salida a nuestra entrada original x(t)

$x(t) \rightarrow$ **SISTEMA** $y(t) = 2\,x(t)$ $\rightarrow y(t) \rightarrow$ **Sistema Inverso** $z(t) = 1/2\, y(t)$ $\rightarrow z(t) = x(t)$

Causalidad

Un sistema es causal, si los valores de la salida en un instante de tiempo t, dependen de los valores de entrada en el mismo instante de tiempo t y/o tiempo anteriores

Causal $y(t) = x(t) - x(t-1)$

No causal $y(t) = x(t) - x(t+1)$

No todos los sistemas causales tienen memoria

Estabilidad

Un sistema es estable, si la entrada es acotada para cualquier instante de tiempo t, la salida también lo es para todo t

El siguiente ejemplo no es estable

si la entrada es $x(n) = u(n)$ escalón unitario en tiempo discreto

el valor máximo es 1 (entrada acotada y limitada)

si la salida es

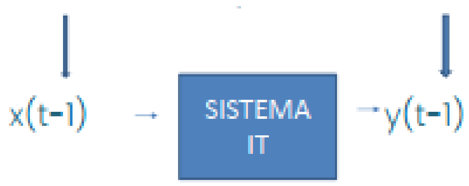
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

$y(0)=1$ $y(1)= 1+1$ $y(2) = 1+1+1$ $y(3) = 4$ ... $y(1000)=1001$

La entrada es acotada en cambio la salida crece indefinidamente.

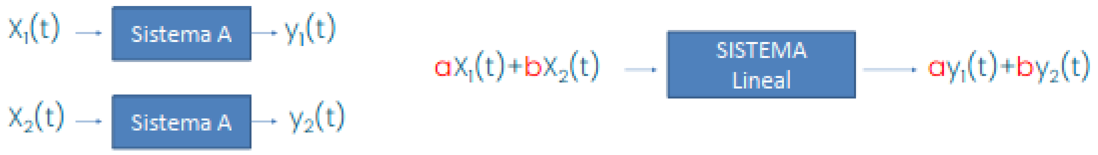
Invarianza en el tiempo:

Un sistema es invariante en el tiempo, cuando un desplazamiento en el tiempo en la entrada, produce el "mismo" desplazamiento en la salida



Linealidad:

Si conocemos 2 entradas de un sistema y sus respectivas salidas, un sistema va a ser lineal si se cumple con el **principio de superposición** → "La respuesta a una combinación lineal de las entradas será la misma combinación lineal aplicada a las salidas"

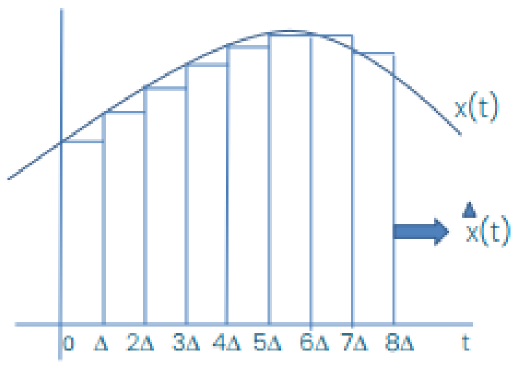


Nota: En esta parte de la materia el enfoque principal está dado en las 2 ultimas propiedades → "Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT) "

Descomposición de una señal cualquiera en combinación lineal de señales básicas

Una señal cualquiera en tiempo continuo x(t) puede ser representada como una combinación lineal de impulsos (en representación incremental) desplazados en el tiempo y cuyas alturas de cada impulso son valores de $x(k\Delta)\Delta$

Osea basicamente lo que hacemos es aproximar una señal cualquiera x(t) →"x"(t) representando en términos de impulsos en representación incremental



Lo que vamos a hacer ahora es tratar de ir pensando la fórmula de cada uno de los impulsos uno a la vez para poder entender

$$x(0)\,.\,\delta_{\Delta}(t)\,.\,\Delta$$

$$x(\Delta)\,.\,\delta_{\Delta}(t-\Delta)\,.\,\Delta$$

$$x(2\Delta)\,.\,\delta_{\Delta}(t-2\Delta)\,.\,\Delta$$

Por ende esto nos lleva a pensar que la fórmula general para poder conseguir toda la figura es una sumatoria

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta).\,\delta_{\Delta}(t-k\Delta).\,\Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = x(t)$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,.\,\delta(t-\tau)\,d\tau}$$

Como podemos apreciar la el **límite de la sumatoria se transforme en una integral** y es importante notar que:

$k\Delta \to \tau$
$\Delta \to d\tau$

Llamaremos a la expresión que hemos obtenido **“Escudriñamiento del impulso unitario de la señal de entrada en tiempo continuo”**

Convolución

Definimos a la convolución como una nueva **operación** que se realiza entre 2 señales y utilizamos el símbolo * para identificarla → y(t) = x(t) * h(t)

Si en un sistema SLIT la entrada es el impulso unitario la salida la llamaremos la respuesta al impulso

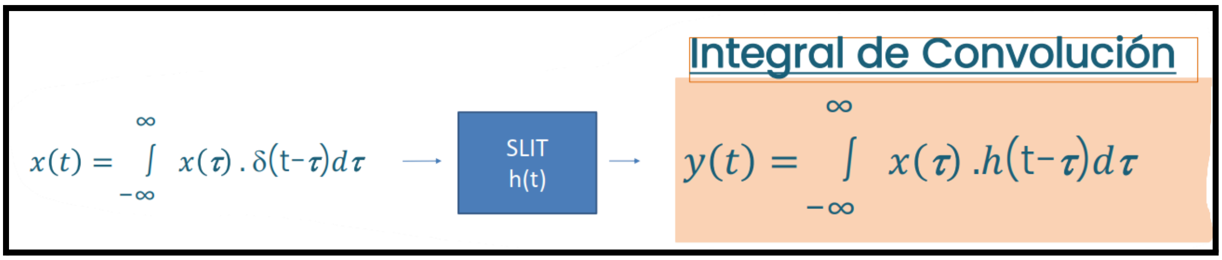
Un sistema SLIT está completamente caracterizado por la respuesta al impulso h(t)

Integral de convolución

Definiremos la fórmula de cálculo de la convolución uniendo todos los conceptos vistos hasta este momento y(t) = x(t) * h(t)

Si la entrada x(t) que obtuvimos cuando delta tiende a cero, ingresa a un sistema lineal invariante en el tiempo ¿Cómo será la salida y(t)?

La salida va a ser la misma combinación lineal de las entradas con las mismas salidas conocidas (respuesta al impulso) y con los mismos desplazamientos en el tiempo



Es importante observar lo siguiente en la fórmula de la convolución:

- x(τ) es la señal de entrada en donde cambia su variable t→ τ
- h(t-τ) es la señal h en donde cambia la variable t → t-τ
- h(t-τ) es una señal que va a estar reflejada y desplazada en el tiempo en t
- Notar que el diferencial de la fórmula se determina cual es la variable con la que estamos trabajando → En este caso es tau y todo lo demás será tratado como una constante

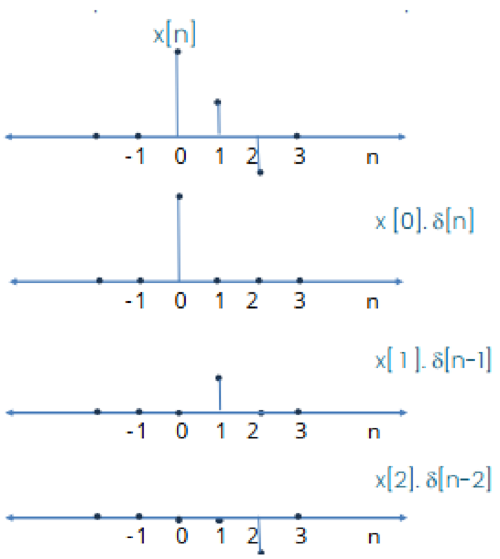
- Notar que en la fórmula tenemos una multiplicación de x . h. Las mismas como sabemos pueden ser intercambiadas de lugar por la propiedad conmutativa, pero lo importante a recalcar acá es que **una de ellas** va a tener que estar **desplazada** y **reflejada**

Descomposición de una señal cualquiera en combinación lineal de impulsos unitarios

Básicamente vamos a hacer el mismo razonamiento anterior pero ahora para **tiempo discreto.**

Una señal cualquiera en tiempo discreto x[n] se puede ver como una combinación lineal o suma ponderada de impulsos desplazados en el tiempo δ [n-k] cuyos pesos o alturas de cada impulso son valores de x[k]

Nuevamente partimos de una señal cualquiera y procedemos a descomponerla:



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \,.\, \delta[n-\mathbf{k}]$$

Llamamos a la expresión que obtuvimos: Escudriñamiento del Impulso Unitario de la señal de entrada en tiempo discreto

Suma de convolucion - tiempo discreto

Definiremos la fórmula de cálculo de la convolución uniendo todos los conceptos vistos hasta este momento y[n] = x[n] * h[n]

Si la entrada x[n] que obtuvimos ingresa a un SLIT ¿Cómo será la salida y[n]?

La salida va a ser la misma combinación lineal de las entradas (principio de superposición) con las mismas salidas conocidas (respuesta al impulso) y con los mismos desplazamientos en el tiempo

Suma de Convolución

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,.\,\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h[n]\end{matrix}} \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,.\,h[n-k]$$

Propiedades de la convolución

Las propiedades a continuación serán desarrolladas en tiempo continuo → Notar que es aplicable para tiempo discreto

Propiedad conmutativa

$y(t) = x(t) * h(t)$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,.h(t-\tau)\,d\tau}$$

$y(t) = h(t) * x(t)$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,.x(t-\tau)\,d\tau}$$

Propiedad asociativa

$y(t)=x(t) * h1(t) * h2(t)$

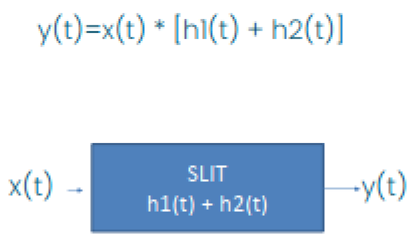
$y(t)=[x(t) * h1(t)] * h2(t)$

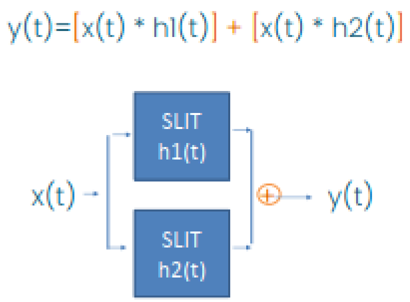
$y(t)= x(t) * [h1(t) * h2(t)]$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h1(t)\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h2(t)\end{matrix}} \rightarrow y(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h1(t) * h2(t)\end{matrix}} \rightarrow y(t)$$

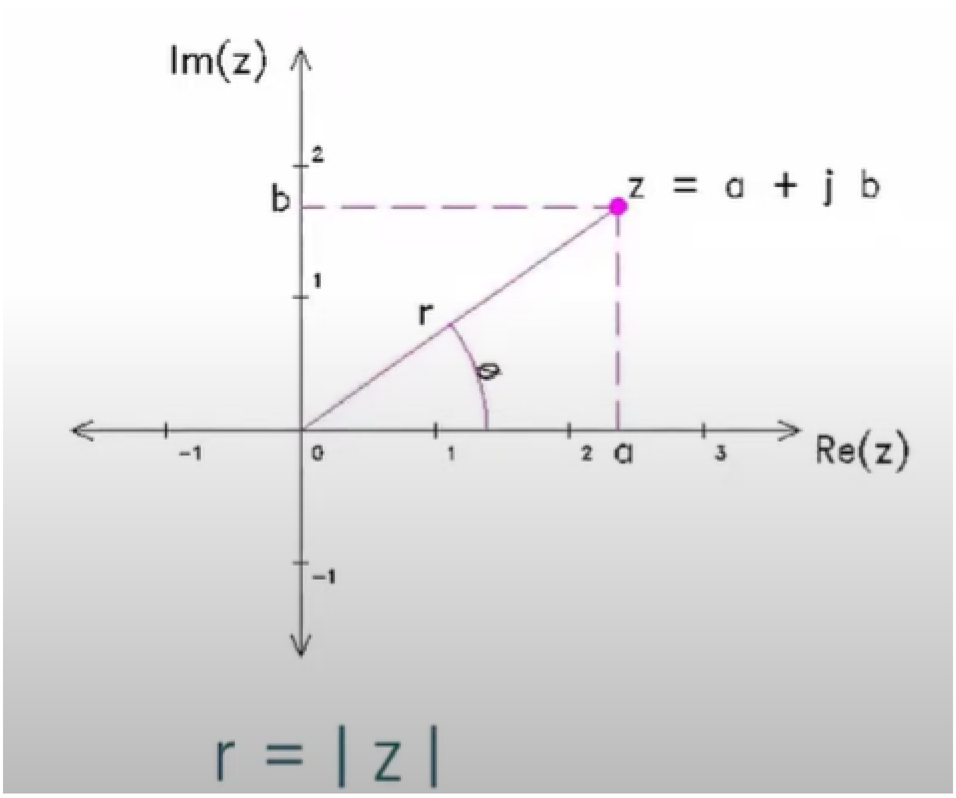
Propiedad distributiva respecto de la suma o resta





Análisis de Fourier - Introducción

Repaso de los números complejos:



Forma cartesiana o rectangular:

$$Z = a + jb$$

$$Z^* = a - jb$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{b}{a}$$

Importante notar acá que z * quiere decir el conjugado del número imaginario

También es importante notar que en la primera fórmula podemos hacer uso de un **cambio de variable,** de manera que:

- z = a
- a = r
- b = w_0

Con lo cual nos queda:

$$\boxed{a = r + j\omega_0}$$

Esta fórmula nos será de utilidad más adelante cuando demostremos la fórmula de la exponencial compleja → La dejamos en *stand by* por el momento

La voy a necesitar recién en la demostración de la forma general de la x (t)

Forma polar - Demostración:

Demostración de la forma polar:

Despejar "a" y "b" de las primeras ecuaciones

$$\begin{cases} a = \cos\phi \cdot |z| \\ b = \operatorname{sen}\phi \, |z| \end{cases}$$

$$z = a + jb \longrightarrow \cos\phi \, |z| + j\,|z| \operatorname{sen}\phi$$

$$|z| \underbrace{(\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta)}_{e^{j\theta}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} z = |z| \cdot e^{j\theta} \\ z^{*} = |z| \cdot e^{-j\theta} \end{matrix}}$$

Entonces la forma de euler me queda como:

$$\begin{cases} e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta \\ e^{-j\theta} = \cos\theta - j \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

3 señal básica: Exponencial compleja

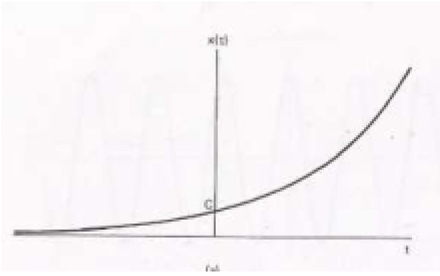
Permiten representar fenómenos que ocurren con frecuencia en la naturaleza.
Sirven como bloques básicos a partir de los cuales podemos construir otras señales, examinarlas y entenderlas mejor.

$$x(t) = c\, e^{at}$$

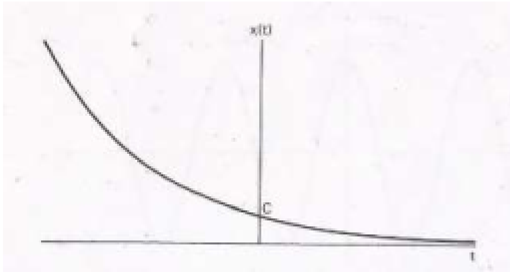
Existen una serie de **casos particulares** con respecto a esta fórmula:

- **Forma real:** c y a son reales
- **Forma general:** c en forma **polar** y a en forma **cartesiana**
- **Imaginaria pura:** c **real** y a en forma **cartesiana** pero sin parte real

Caso exponencial real



$a > 0$



$a < 0$

Aca notar que con a = 0, sería una constante c

Fijate que esta es la que nosotros trabajamos en el práctico de la materia

Forma general - Demostración

Para poder demostrar esto nos vamos a valer de las siguiente igualdades:

c: forma polar	$c = \|c\| \, e^{j\theta}$
a: forma cartesiana	$a = r + j\omega_0$

Ahora simplemente remplazo en $\boxed{x(t) = c \, . \, e^{at}}$

$$x(t) = |c| \, . \, e^{j\theta} \, . \, e^{(r+j\omega_0)t}$$

$$x(t) = |c| \, e^{j\theta} \, . \, e^{rt} \, . \, e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = |c| \, e^{rt} \, . \, \underbrace{e^{j(\theta+\omega_0 t)}}$$

$\hookrightarrow$ euler $e^{j\theta}$

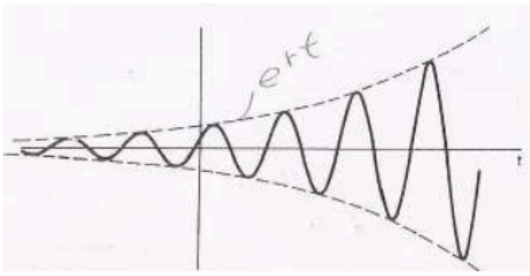
$$x(t) = |c| \, . \, e^{rt} \, . \, [\cos(\theta+\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(\theta+\omega_0 t)]$$

$$x(t) = \underbrace{|c| \, . \, e^{rt} \, . \, \cos(\theta+\omega_0 t)}_{\text{parte real}} + \underbrace{j \, |c| \, e^{rt} \operatorname{sen}(\theta+\omega_0 t)}_{\text{parte imaginaria}}$$

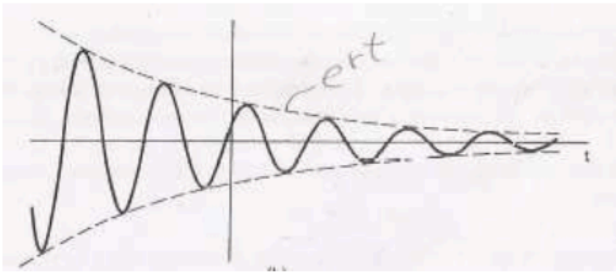
Importante aclaración sobre esta imagen es que debemos notar que en la **tercera línea** hemos usado la fórmula de euler para realizar un cambio de variable:

$$\boxed{e^{j\theta} = (\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

Gráficamente nos queda algo como esto:



r > 0



r < 0

Fíjate que las fórmulas reales e imaginarias de e^{rt} actúan como **envolventes de las señales senoidales.**

Forma imaginaria pura

- c → Real
- a → Forma cartesiana pero sin parte real → a = 0 + jw0

$$\boxed{X(t) = c\, e^{j\omega_0 t}}$$

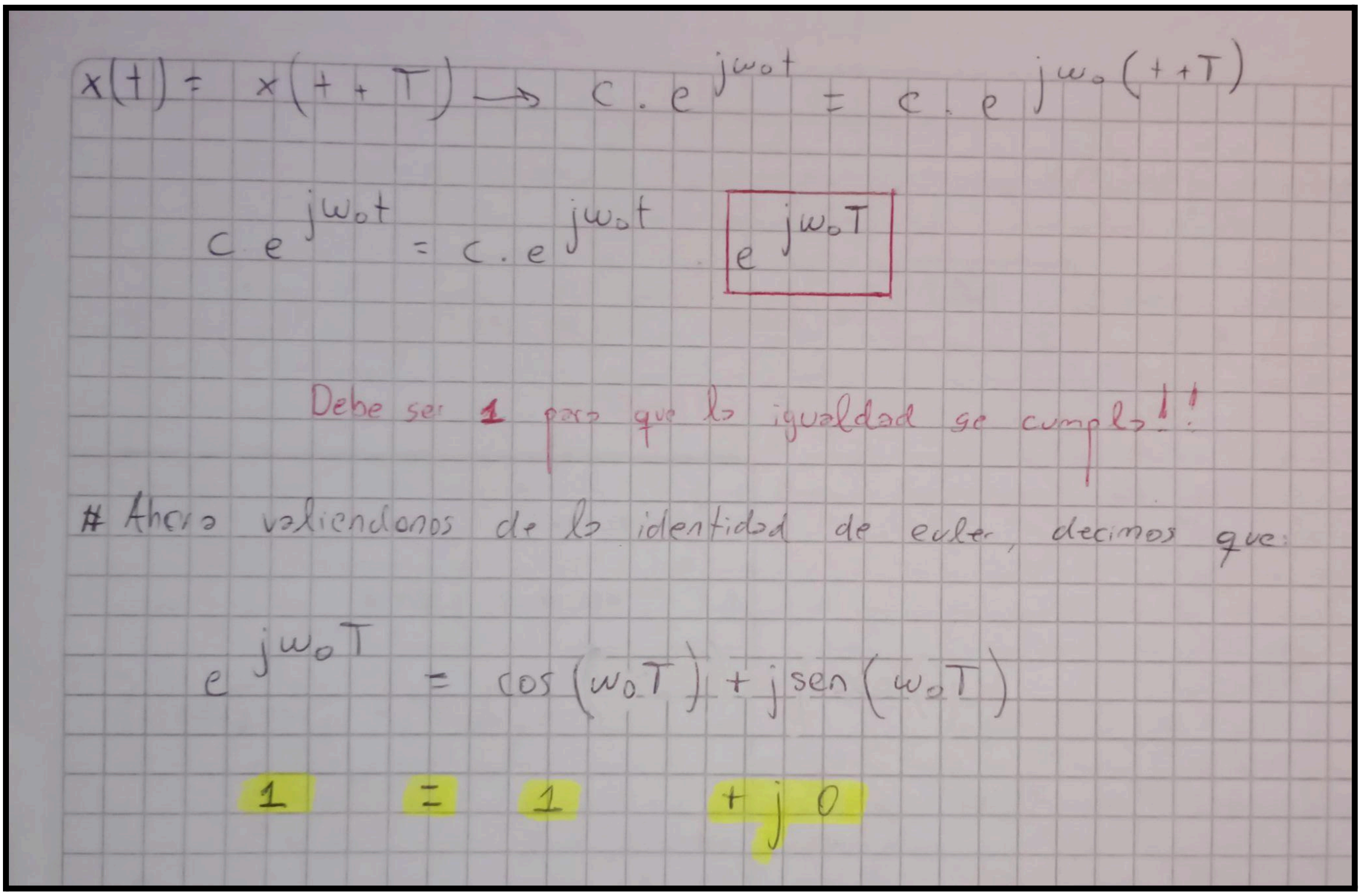
Importante notar que la exponencial compleja imaginaria pura es **periódica por excelencia**

Definición y demostración del periodo fundamental:

Una señal es “periódica” cuando produce el mismo valor de la señal cada instantes de tiempos separados por un T de la función o múltiplos de T.

x(t) = x(t + T) = x(t + 2T) = x(t + 3T) …

Entonces lo que vamos a hacer es tomar nuestra ecuación exponencial en forma imaginaria pura y demostrar que es periódica:



$$x(t) = x(t+T) \longrightarrow c \cdot e^{j w_0 t} = c \cdot e^{j w_0 (t+T)}$$

$$c\, e^{j w_0 t} = c \cdot e^{j w_0 t} \quad \boxed{e^{j w_0 T}}$$

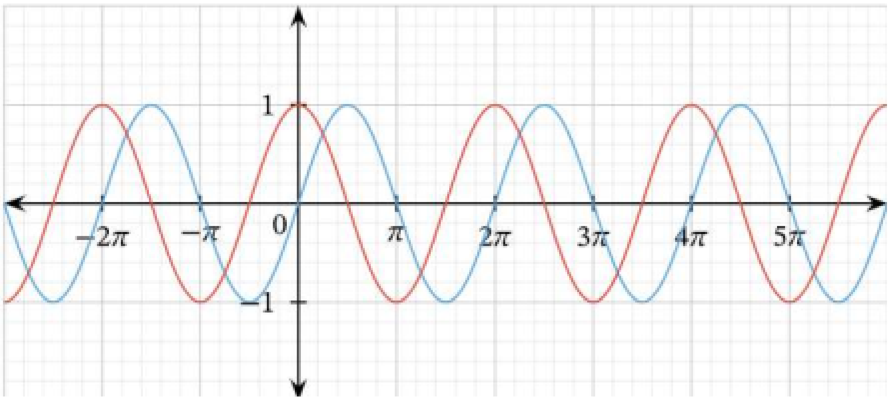
Debe ser 1 para que la igualdad se cumpla!!

Ahora valiendonos de la identidad de euler, decimos que:

$$e^{j w_0 T} = \cos(w_0 T) + j\,\mathrm{sen}(w_0 T)$$

$$1 = 1 + j\,0$$

Para poder proseguir con el análisis, veamos las funciones seno (azul) y coseno (rojo):



Debemos pensar en los casos en los que:

- Coseno = 1
- Seno = 0

al **mismo tiempo.**

Esto ocurre en -4**π**, -2**π**, 2**π**, 4**π**, etc.

Dicho de otra manera esto ocurre en 2**π** o cualquier múltiplo de 2 **π** → 2**π**k.

Entonces volviendo con lo anterior, lo encerrado en un círculo rojo para que valga cero se tiene que cumplir que:

$$\omega_0 T = 2\Pi.k$$

y despejando el periodo fundamental y la frecuencia fundamental respectivamente observamos que son **inversamente proporcionales**

$$\boxed{T_0 = \frac{2\Pi}{\omega_0}} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{2\Pi}{T_0}}$$

Importante decir que el periodo fundamental T_0 de x(t) es el mínimo valor positivo de T, diferente de 0, lo cual sería el primer periodo con k = 1

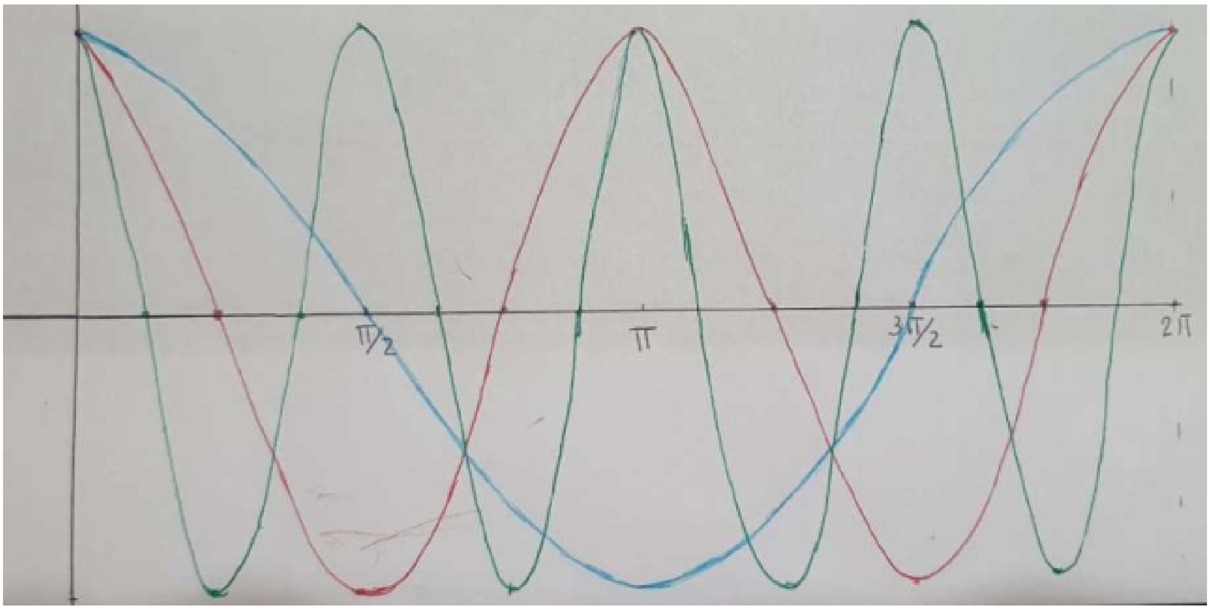
Exponenciales complejas imaginarias armónicamente relacionadas en T:

Son todas aquellas cuyas frecuencias son todas múltiplas de una frecuencia positiva w_0 y comparten el mismo periodo T.

A estas señales exponenciales complejas imaginarias puras que son múltiplos de la frecuencia fundamental se las llama **armónicas**

$$x(t) = e^{j\omega_0 k t}$$

Gráficamente se corresponde con lo siguiente:



$k=1 \quad T_0=2\Pi$

$k=2 \quad T_0=\Pi$

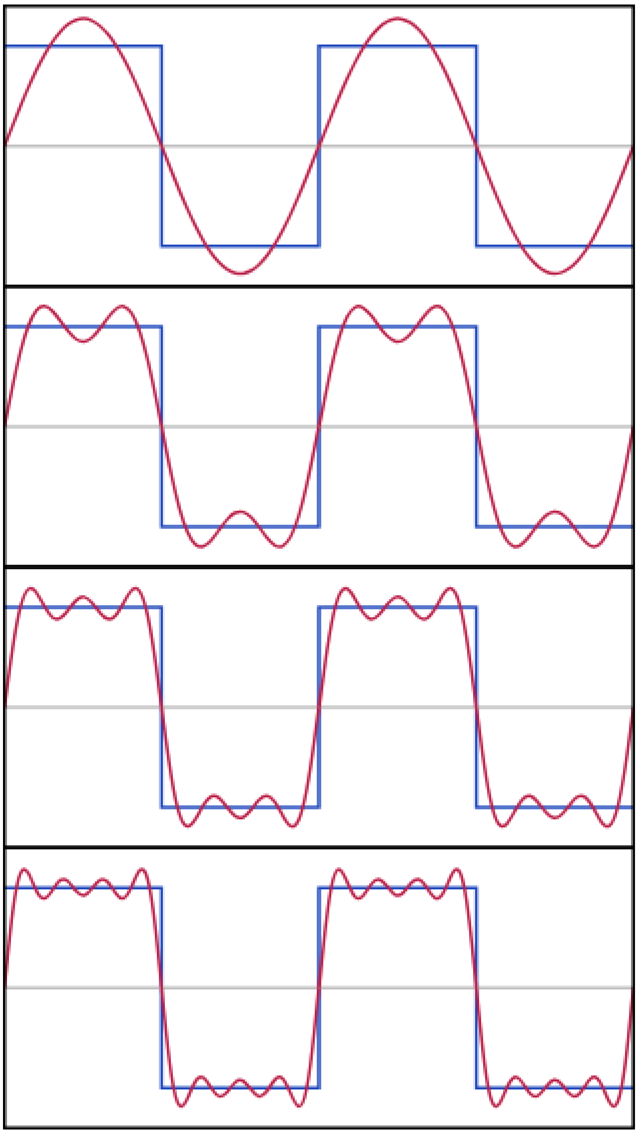
$k=4 \quad T_0=\Pi/2$

Analisis de Fourier

La serie de Fourier es una forma de representar señales que son **periódicas** en el tiempo utilizando como funciones básicas las señales senoidales en su forma exponencial que acabamos de aprender

Armamos una combinación lineal de las infinitas señales complejas imaginarias puras armónicamente relacionadas con periodo fundamental T0 y frecuencia fundamental w0

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\text{coeficientes}} \; \overbrace{e^{j\omega_0 kt}}^{\text{armónicas}}$$



Nota: En palabras del profe, *los* a_k *básicamente son la manera matemática que me permite otorgarle cierto peso a cada una de las armónicas, es decir, poder determinar cual es más importante que otra*

Esta serie de Fourier la vamos a utilizar como **entrada** en un sistema SLIT para poder obtener a y(t)

Lo que vamos a hacer ahora es trabajar con la fórmula de la integral de la convolución **conmutada** la cual es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Partiendo de x(t) → Demostración de y(t) / salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j\omega_0 k (t-\tau)} \, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j\omega_0 k t} \cdot e^{-j\omega_0 k \tau} \, d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j\omega_0 k t}}_{\text{entrada}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \, e^{-j\omega_0 k \tau} \, d\tau}_{H(k\omega_0)}$$

Entonces la serie de fourier de salida nos queda:

$$\boxed{y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \, H(k\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 k t}}$$

Naturalmente la entrada sería:

$$\boxed{x(t) = \sum a_k \cdot e^{j\omega_0 k t}}$$

A modo de **machete** conviene aprenderse lo siguiente:

Serie de Fourier de la Entrada	Serie de Fourier de la Salida
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overset{\text{COEF.}}{a_k} \cdot \overset{\text{ARMONICAS}}{e^{jk\omega_0 t}}$	$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot H(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$
$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt$	$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-jk\omega_0 \tau}\,d\tau$

Fórmulas de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$$

Componentes principales de la serie:

- x(t): es la señal periódica, conocida y dada como dato
- a_k ¿lo conocemos?
  - Si la C.L es **finita** → **a_k:** los obtenemos por deducción → señal senoidal, uso las relaciones de Euler
  - Si la C.L es **infinita**→ **a_k:** fórmula de cálculo → señal no periódica usó la fórmula

Demostración de los coeficientes a_k de la serie:

Lo primero que hacemos es partir de la fórmula de la entrada del sistema SLIT x(t) y multiplicar a ambos lados por la armónica n-ésima conjugada

$$x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

Ahora lo que hacemos es **integrar en el periodo fundamental** a ambos miembros y saco factor común al segundo miembro

$$\int_0^{T_0} x(t).\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j\omega_0 t(k-n)}\, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t).\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 t(k-n)}\, dt}_{\text{Resolvemos aparte esta integral}}$$

Lo que voy a hacer ahora es plantear las diferentes situaciones que se pueden presentar al resolver esta integral de manera aparte

Primera situación k = n

$$\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 t\,\overset{0}{\cancel{(k-k)}}}\, dt$$

$$\int_0^{T_0} dt = T_0 - 0 = \boxed{T_0}$$

Segunda situación k ≠ n

$\omega_0 = \frac{2\Pi}{T_0}$

$$\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 t(k-n)}dt = \frac{1}{j\omega_0(k-n)}[e^{j\omega_0 T_0(k-n)} - 1]$$

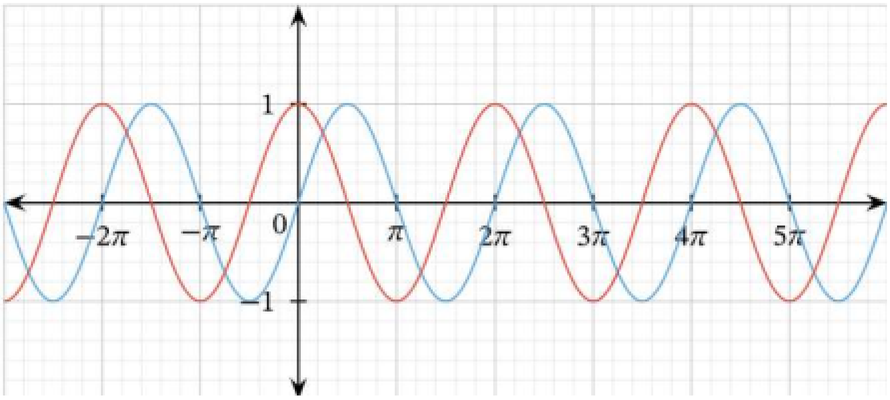
$$\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 t(k-n)}dt = \frac{1}{j\omega_0(k-n)}[\underbrace{e^{j\frac{2\Pi}{\cancel{T_0}}\cancel{T_0}(k-n)}}_{\text{Resolvemos por Euler}} - 1]$$

$$\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 t(k-n)}dt = \frac{1}{j\omega_0(k-n)}\{\underbrace{\cos[2\pi(k-n)]}_{1} + \underbrace{j\,\mathrm{sen}[2\pi(k-n)]}_{0} - \underbrace{1}_{1}\}$$

$$\boxed{\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 t(k-n)}dt = 0}$$

- SEGUNDA SITUACION $k \neq n$

Nota: Acordate que siempre el coseno de 2kπ te va a dar uno y el seno de 2kπ te va a dar cero por este dibujito:



Ahora lo que voy a hacer es continuar con la fórmula que habíamos dejado en stand by

$$\int_0^{T_0} x(t).e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 t(k-n)}\,dt}_{\text{Resolvemos aparte esta integral}}$$

La vamos a trabajar particularmente para la primera situación cuando k = n porque la otra no nos interesa ya que nos da 0. Por lo que:

$$\int_0^{T_0} x(t).e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=n}^{n} a_k\, T_0$$

Observar que k=n por lo tanto la sumatoria tiene un único término, porque es posible un único valor no nulo

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t).e^{-jk\omega_0 t}\,dt}$$

- Fijate que en el segundo miembro pusiste la sumatoria desde "n" hasta "n" de a_k multiplicado por el resultado que me había dado la integral en un inicio cuando k = n (osea T_0)

Tipos de ejercicios prácticos que se nos pueden presentar

1. La señal x(t) ya viene expresada como serie. Se resuelve por reducción, encontrar las armónicas, determinar w_0 (maximo comun divisor de las frecuencias de cada término), T_0, los k y los a_k

2. La señal x(t) son senos y cosenos. Se transforma con la fórmula de Euler. La pasamos a tipo 1

3. La señal x(t) representada con un gráfico. Debemos determinar T_0, tiene infinitos a_k se debe calcular con la fórmula y luego armar x(t)

4. La señal x(t) es una funcion analitica, se resuelve de manera similar al tipo 3

Básicamente para cerrar las ecuaciones que te tenes que saber para el práctico son:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \, e^{jkw_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \, H(kw_0) \, e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{To} \int_{To} x(t) e^{-jkw_0 t} dt$$

$$H(kw_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jkw_0 t} dt$$

Convergencia de la Serie de Fourier - Condiciones de Dirichlet

En el contexto de la serie de Fourier, la "convergencia" se refiere a la propiedad por la cual la suma parcial de la serie de Fourier de una función se aproxima cada vez más a la función original a medida que se consideran más términos de la serie.

Es decir que para que la serie de Fourier pueda **converger,** por ejemplo al impulso cuadrado necesitamos infinitos términos a_k

La convergencia se asegura el cumplimiento de las condiciones de Dirichelt

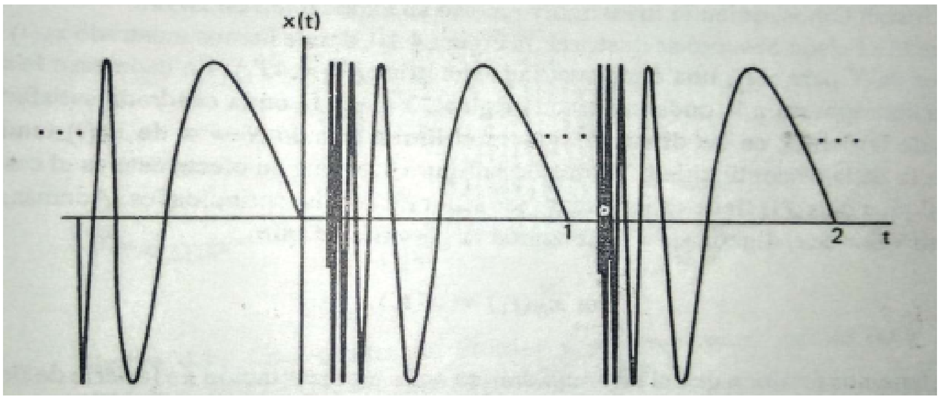
Condición 1: x(t) debe ser absolutamente integrable en cualquier periodo.

Osea que básicamente dentro del periodo que vos selecciones la función o señal no puede tener un área infinita

$$\int_{T_0} |x(t)| \, dt < \infty$$

Condición 2: La variación de x(t) en cualquier intervalo finito de tiempo está acotada, es decir que debe hacer un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier periodo de la señal

Por ejemplo, la serie de Fourier no podría representar la siguiente función:

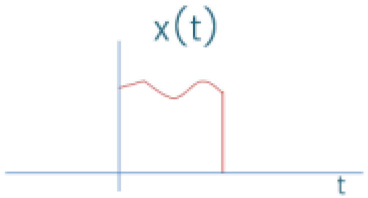


Condición 3: En cualquier intervalo finito de tiempo hay solo un número finito de discontinuidades

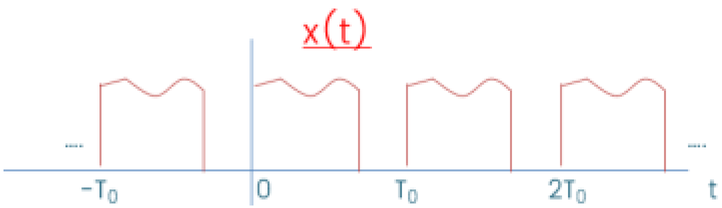
Transformada de Fourier - Continuo

Lo primero que vamos a entender es que con la transformada de fourier nosotros podemos pasar al dominio del tiempo al dominio de la frecuencia

Lo que nosotros vamos a hacer es hacer un estudio de señales **no periódicas**



Lo primero que vamos a hacer es partir de una señal finita en el tiempo que es **no periódica**



Lo que vamos a hacer es construir una señal **periódica** que coincida con la señal de origen x(t) en un periodo y la vamos a llamar x(t)

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \, dt}_{X(k\omega_0)}$$

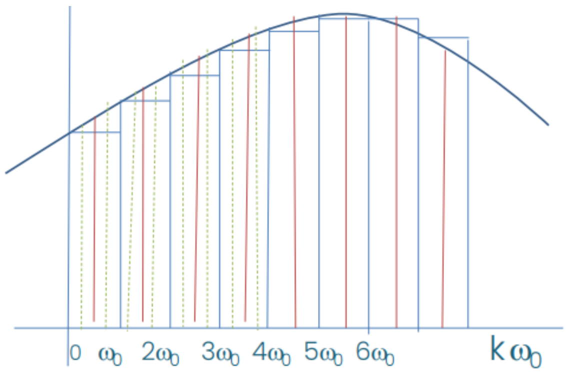
$$\underline{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{1}{T_0} \cdot X(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot X(k\omega_0)$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(k\omega_0) \, e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

$$T_0 = 2\pi / \omega_0$$

Importante: Cuando T → ∞, x(t) se aproxima a x(t) y en consecuencia la última línea esa que puse en el papel se transforma en x(t)



$k\omega_0 \rightarrow \omega$
discreto → Continuo
$\Sigma \rightarrow \int$ (integral)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega \quad \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \quad x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

Particularmente En el teórico nos vamos a centrar en demostrar 3 propiedades de la transformada de Fourier:

- Desplazamiento en el Tiempo
- Convolución
- Diferenciación

Propiedad de desplazamiento en el tiempo:

Propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \xrightarrow{F} x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega_0 t}\, dt$$

CA.

$t - t_0 = \Delta$ → variable en el tiempo

$t = \Delta + t_0$

$dt = d\Delta + \cancel{dt_0}^{\,0}$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j\omega_0 t}\, dt$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{F} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega_0(\Delta+t_0)}\, d\Delta$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega_0 \Delta} \cdot e^{-j\omega_0 t_0}\, d\Delta$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\Delta) \cdot e^{-j\omega_0 \Delta}\right] e^{-j\omega_0 t_0}$$

→ $x(\omega)$

→ $\boxed{x(t-t_0) = x(\omega) \cdot e^{-j\omega_0 t}}$

Propiedad de convolución

Demuestre la propiedad de convolución para la transformada de Fourier de tiempo continuo. Utilice los elementos necesarios (fórmulas, gráficos, texto, etc.) que justifiquen y argumenten su desarrollo. Dé ejemplos de aplicación de esta propiedad, utilizados en los trabajos de laboratorio, aplicada en el tiempo discreto.

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt\right] d\tau$$

$$x(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, H(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$\boxed{x(t)*h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(\omega) \cdot H(\omega)}$$

Notar que en el 3 renglón separamos de manera que primero derivamos con respecto a t y luego con respecto a tau

Recordar que:

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

t_0 desplazamiento en el tiempo

$$\boxed{x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(\omega).e^{-j\omega t_0}}$$

Es necesario mencionar que existen las siguiente propiedad (las cuales no se pide su respectiva demostración):

- Linealidad
- Simetría en w
- Dualidad
- Diferenciación

Transformada de Fourier - Discreto

Periodicidad de las funciones exponenciales imaginarias

Para empezar con este análisis vamos a partir de la señal básica exponencial compleja imaginaria pura:

$$\boxed{x[n] = e^{j\Omega_0 n}}$$

Acá las **variables** son:

- Tiempo discreto [n]
- Velocidad angular $\mathbf{\Omega}_0$
- Frecuencia f_0

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} \qquad \Omega_0 = 2\pi . f_0$$

Entonces una señal es “periódica” cuando produce el mismo valor de la señal cada instantes de tiempo, separados por un N: periodo fundamental → x [n] = x [n +N]

Periodicidad en el tiempo

De paso acá vas a demostrar el periodo

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)}$$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n}\,\boxed{e^{j\Omega_0 N}} \rightarrow$$ debería ser 0 para que la igualdad se respete

$$\Omega_0 N = 2\pi \cdot m$$

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{n}$$

\# Y sabiendo que $\Omega_0 = 2\pi \cdot f_0$

$$\frac{\cancel{2\pi}\cdot f_0}{\cancel{2\pi}} = \frac{m}{n} \rightarrow \boxed{f_0 = \frac{m}{n}}$$

Recordemos:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$$

$$e^{j\Omega_0 N} = \cos(\Omega_0 N) + j\,\text{sen}(\Omega_0 N)$$

$$1 = 1 + 0$$

↓

Esto ocurre en 2π o múltiplos de 2π

Conclusión → Condición de periodicidad se cumple si f_0 es una relación de enteros

Periodicidad en la frecuencia

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \cdot \underbrace{\cancel{e^{j2\pi n}}}_{1}$$

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}$$

Los funciones exponenciales cuyas frecuencias están separadas por múltiplos de 2π son idénticas

$$\boxed{x_k[n] = e^{j(\Omega_0 + k2\pi)n}}$$

$$e^{j2\pi n} = \cos(2\pi n) + j\,\text{sen}(2\pi n)$$

$$1 = 1 + j0$$

Conclusión → Todas las funciones exponenciales cuyas frecuencias están separadas por múltiplos de 2π son idénticas

Ahora bien, utilizando la frecuencia en lugar de la velocidad angular podemos decir que:

$$\Omega_0 = 2\pi f_0$$
$$0 \leq 2\pi f_0 < 2\pi$$
$$\underbrace{0/\cancel{2\pi}}_{0} \leq f_0 < \underbrace{2\pi/\cancel{2\pi}}_{1}$$

Ahora bien es importante mencionar lo siguiente, la tasa de oscilación de la señal es **baja** para valores de Ω_0 cercanos a 0 y 2π, y también para valores de f_0 cercanos a 0 y a 1

Por otro lado la tasa de oscilación será **alta** para valores cercanos a π para el caso de Ω_0 y ½ para f_0

Las funciones exponenciales son diferentes para
$$0 \leq \Omega_0 < 2\pi$$
$$-\pi < \Omega_0 \leq \pi$$

Las funciones exponenciales son diferentes para
$$0 \leq f_0 < 1$$
$$-1/2 < f_0 \leq 1/2$$

Funciones armónicas en tiempo discreto

Son todas aquellas exponenciales complejas imaginarias puras cuyas frecuencias son todas múltiplos enteros de la frecuencia fundamental Ω_0, son todas periódicas y comparten el mismo periodo N

Por otro lado, en el tiempo discreto nosotros vamos a tener solamente **N armónicas diferentes** (a diferencia de tiempo continuo que teníamos infinitas armónicas)

Nota: Aca en fourier discreto T_0 = N = periodo

Dicho esto la nuestra expresión de la señal nos queda representada de la siguiente manera:

$$\boxed{\varphi_k[n] = e^{jk(2\pi / N)n}}$$

Esto también puede ser expresado así:

$$e^{jK\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \cos(2K\pi n/N) + j\,\mathrm{sen}(2K\pi n/N)$$

$$0 \leq \Omega_0 < 2\pi$$

$$0 \leq k\frac{2\pi}{N} < 2\pi$$

Esto nos lleva a intuir que k puede asumir valores que a lo sumo sean N -1, porque sino la N se cancelaría y me quedaría 0 < 2π < 2π lo cual estaría mal

Un par de **aclaraciones** acerca de $\varphi_k[n]$:

- **N:** Representa la longitud de la señal, es decir el número total de muestras de la señal.

- **f_0:** Representa la frecuencia fundamental, es decir la inversa del periodo.

- **n:** Indica en qué momento específico dentro de la secuencia discreta se está evaluando la función exponencial compleja

Nota: Naturalmente el periodo siempre tiene que ser menor o igual a la cantidad de muestras. Osea no podes tomar por ejemplo 5 muestras y decir que la señal va a ser periódica a partir de la séptima porque eso no tendría sentido

Ejemplo ilustrativo para poder entender esto 🙂:

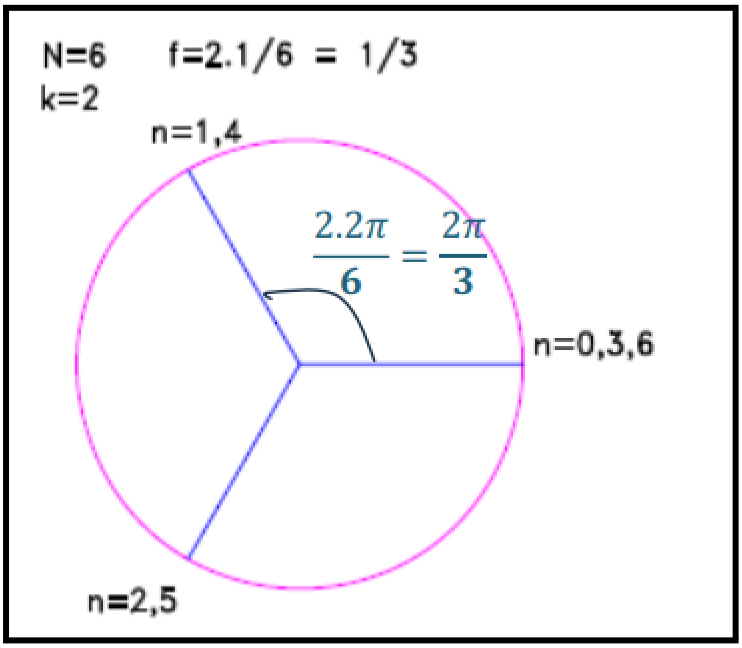
Supongamos que N = 6 y que f_0 = ⅙.

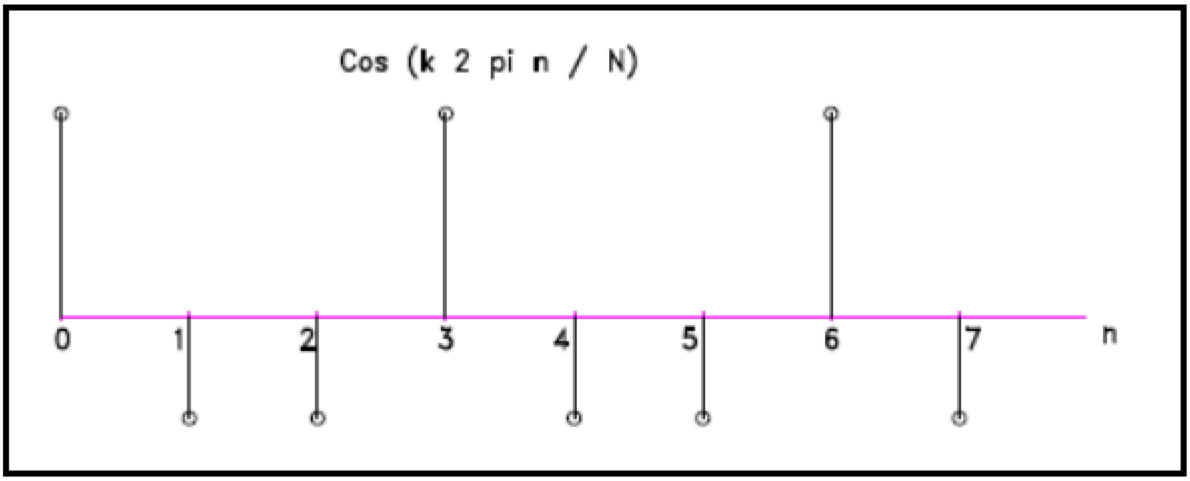
Lo que esto quiere decir es que nosotros vamos a tomar 6 muestras con una periódicas cada 6 de ellas (si f_0 = ⅕ entonces tendríamos una periodicidad cada 5 de ellas y así)

Lo que nosotros vamos a hacer es analizar en este momento los valores de **k** y de **n.** En donde **k** va a asumir valores hasta N -1, osea desde 0 hasta 5.

Entonces lo único que haces de ahora en más es ir reemplazando en la fórmula de Ω_0, según los distintos valores de k y eso me va a dar como resultado los distintos valores de la velocidad angular

Entonce si por ejemplo **k = 2**





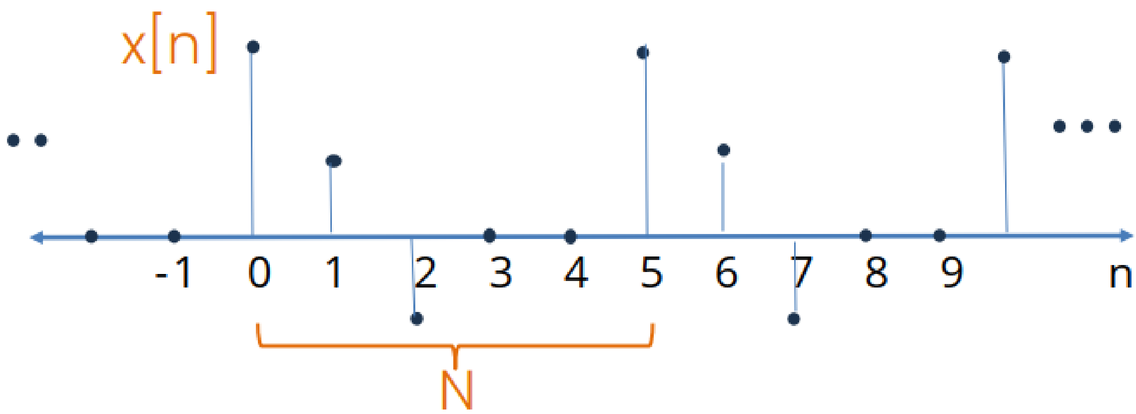
Entonces podemos **concluir** que por cada valor de **k** nosotros tenemos una representación discreta **real** e **imaginaria** (coseno y seno) según cómo varían los valores de **n**

Cuando aplicamos la DFT a una señal discreta en el dominio del tiempo, estamos esencialmente descomponiendo esa señal en una combinación de diferentes componentes de frecuencia. Cada componente de frecuencia tiene una **amplitud** (representada por la parte real del coeficiente en la DFT) y una **fase** (representada por la parte imaginaria del coeficiente en la DFT).

Serie de Fourier en tiempo Discreto:

La serie de Fourier es una forma de representar señales que son periódicas en el tiempo discreto, como una combinación lineal de coeficientes a_k y las N armónicas diferentes en un periodo fundamental N

Entonces dada una señal periódica de periodo n llamada x[n]:

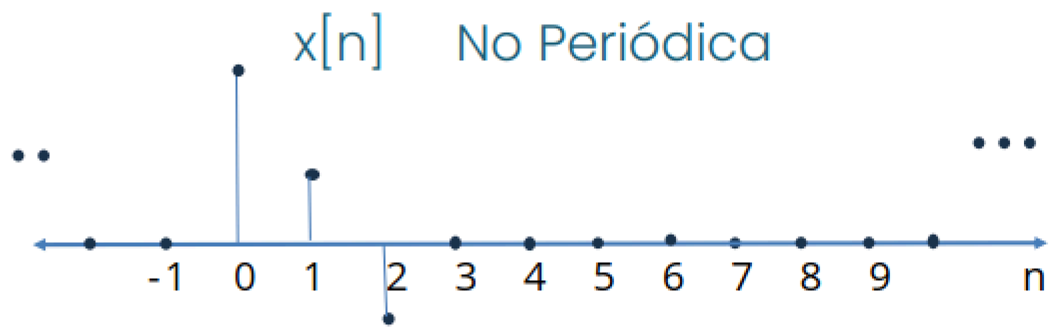


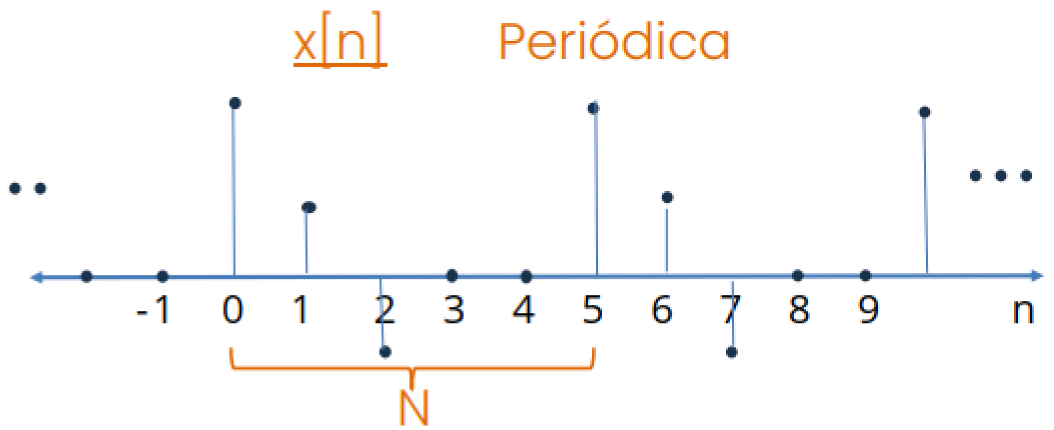
$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{a_k}_{\text{coeficientes}} \; \overbrace{e^{jk(2\pi/N)n}}^{\text{armónicas}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \, . \, e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto:

Haciendo un razonamiento similar al tiempo continuo, el análisis de una señal no periódica x[n] lo haremos partiendo de una señal periódica <u>x[n]</u> coincidente en un periodo con x[n]





Con lo cual, podemos representar a <u>x[n]</u> utilizando la serie de Fourier:

$$\underline{x[n]} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \; e^{jk\Omega_0 n} \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{x[n]} \, . \, e^{-jk\Omega_0 n}$$

Bueno llegados a este punto lo que hay que hacer es realmente una boludez, es lo mismo que hicimos en el tiempo continuo.

$$\underline{x[n]} = \sum_{K=0}^{N-1} a_K \cdot e^{jK\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$\underline{x[n]} = \sum_{K=0}^{N-1} \frac{1}{N} \cdot X(K\Omega_0)\, e^{jK\Omega_0 n}$$

$$\underline{x[n]} = \frac{1}{2\pi} \sum_{K=0}^{N-1} X(K\Omega_0) \cdot e^{jK\Omega_0 n} \cdot \Omega_0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sum \rightarrow \int \\ K\Omega_0 \rightarrow \Omega \end{array}}$$

$$a_K = \frac{1}{N} \cdot \underbrace{\sum \cdot x[n] \cdot e^{-jK\Omega n}}_{X(K\Omega_0)}$$

$$a_K = \frac{1}{N} \cdot X(K\Omega_0)$$

$$\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \rightarrow f_0$$

Entonces si hacemos que **N → ∞, Ω_0** va a tender a cero, con lo que al final nos quedaría lo siguiente:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} . d\Omega}$$

$$\boxed{X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] . e^{-j\Omega n}}$$

Propiedad interesante de la transformada de Fourier 😍

Nota: Esta pija me costó horrores entenderla pero creo que la tengo. Fíjate también que esta propiedad **solo aplica a la transformada discreta y no a la continua.**

Básicamente partimos de la fórmula de $\mathbf{a_k}$ y llegamos a lo siguiente:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n] \, . \, e^{-jk\Omega_0 n}}$$

Coeficientes a_k de la Serie de Fourier de una señal periódica

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

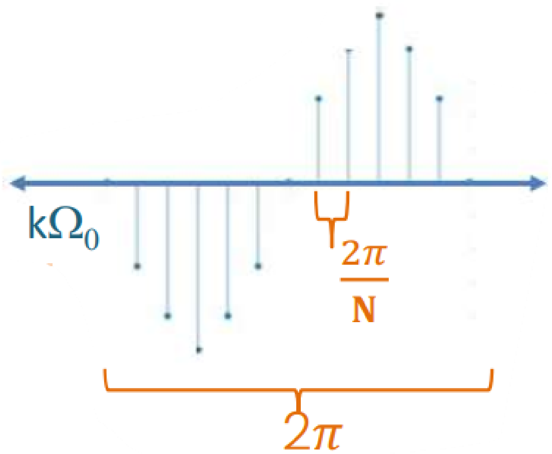
$$N . a_k = \sum_{\langle N \rangle} x[n] \, . \, e^{-jk(2\pi / N) n}$$

Reemplazamos por la señal no periódica N-> ∞

$$N . a_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \, . \, e^{-jk(2\pi / N) n}$$

$$N . ak = x[k\frac{2\pi}{N}] = x[k\,\Omega_0]$$

Gráficamente lo podemos ver así:



Si tomas una señal no periódica y la haces periódica, los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica serán precisamente **muestras** de la Transformada de Fourier de la señal no periódica en las frecuencias correspondientes a las armónicas. Es decir, los coeficientes de la serie de Fourier nos dan información sobre las frecuencias presentes en la señal periódica y cómo contribuyen a su forma.

Fijate que el espectro de frecuencia, cada frecuencia está separada por $\mathbf{w_o}$.

Transformada rápida de Fourier:

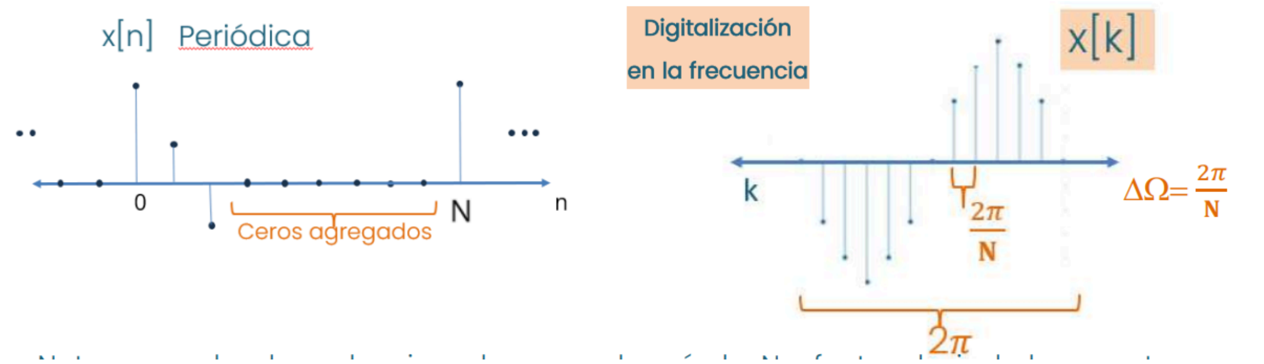
La Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) es un algoritmo eficiente para calcular la Transformada de Fourier Discreta (DFT) de una secuencia de datos.

La FFT implemente una versión **rápida** y **eficiente** de la DFT, utilizando una técnica llamada "divide y vencerás" para **reducir** la complejidad computacional de $O(N^2)$ a $O(N \log N)$, donde N es el número de puntos en la señal de entrada

El punto es que cuando vos en un programa como por ejemplo Octave utilizar la FFT no podes agarrar una secuencia infinita de datos, porque es computacionalmente imposible.

Por esta razón, lo que hacemos es generar una señal con N elementos completando con valores nulos. Se genera un vector de dimensión N, igual al número de elementos de un ciclo en la señal periódica, en el cual una parte tendrá valores de señal y se complete hasta llegar a N con valores nulos

Al completar con valores nulos, creamos una señal que es periódica dentro de la **ventana de análisis**, lo que permite una representación precisa de las frecuencias en la señal original cuando aplicamos la DFT o FFT.



Convolución FFT:

Okey acá el texto menciona un **problema** el cual es el siguiente. Básicamente Cuando trabajamos con señales periódicas y aplicamos la definición estándar de convolución lineal, extendemos estas señales infinitamente. Esto puede llevar a **problemas de convergencia,** ya que la convolución entre dos señales periódicas puede producir un resultado que no está bien definido o que tiende al infinito.

Por lo tanto, para poder resolver este problema, se sugiere **redefinir** las dos señales periódicas para que tengan el mismo periodo N. Esto significa que ambas señales deben repetirse exactamente cada N muestras. Al tener el mismo periodo, se puede realizar la convolución lineal de manera adecuada y bien definida

Las señales redefinidas quedan así:

Convolución periódica:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[n-k]$$

Aclarado este problema, podemos decir que lo que propone la **convolución FFT,** es básicamente lo que ya venimos viendo, que es resolver la convolución utilizando la siguiente propiedad de la conclusión de la transformada de la siguiente manera:

Procedimiento:

Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ 2 señales **no periódicas** de longitud L_1 y L_2 respectivamente, vamos a adoptar el periodo $N >= L_1 + L_2 - 1$, y así definiremos las nuevas señales ahora de forma **periódica** y le calculamos la TDF a cada una de ellas

$$\hat{x}_1[n] \begin{cases} x_1[n] & \text{para } 0 <= n <= L_1 - 1 \\ 0 & \text{para } L_1 < n <= N - 1 \end{cases}$$

$$\hat{x}_2[n] \begin{cases} x_2[n] & \text{para } 0 <= n <= L_2 - 1 \\ 0 & \text{para } L_2 < n <= N - 1 \end{cases}$$

Lo único que falta es calcular la **TDF** de ambas x sombrero, con lo cual:

Nota: Acordate que multiplicar las transformadas de fourier es exactamente lo mismo que hacer una convolución

$$\hat{y}[k] = \hat{x}_1[k] . \hat{x}_2[k] \xrightarrow{\text{T.D.F inversa}} y[n]$$

Filtros

Introducción a los filtros

Nota: Los profes no te dan esta introduccion, pero como mierda queres entender el filtros media movil si no sabes que es un puto filtro.

DSP: Son las siglas en inglés de procesamiento digital de las señales

Los **filtros digitales** son una parte clave en el DSP, y es por esto que son muy populares.

Los filtros básicamente tienen **2 usos:**

- **Separación:** Esto es necesario cuando una señal ha sido contaminada con interferencia, ruido u otras señales.

  Por ejemplo, imagina un dispositivo que te mide la actividad eléctrica del corazón del bebe mientras está todavía en la panza. Normalmente la *raw signal* va a estar contaminada por otras señales como la respiración y el propio latido de la madre, por ende el filtro lo usas para separar estas señales y poder analizar la que avos te importa

- **Restauración:** Esto es usado cuando una señal ha sido distorsionada de alguna manera.

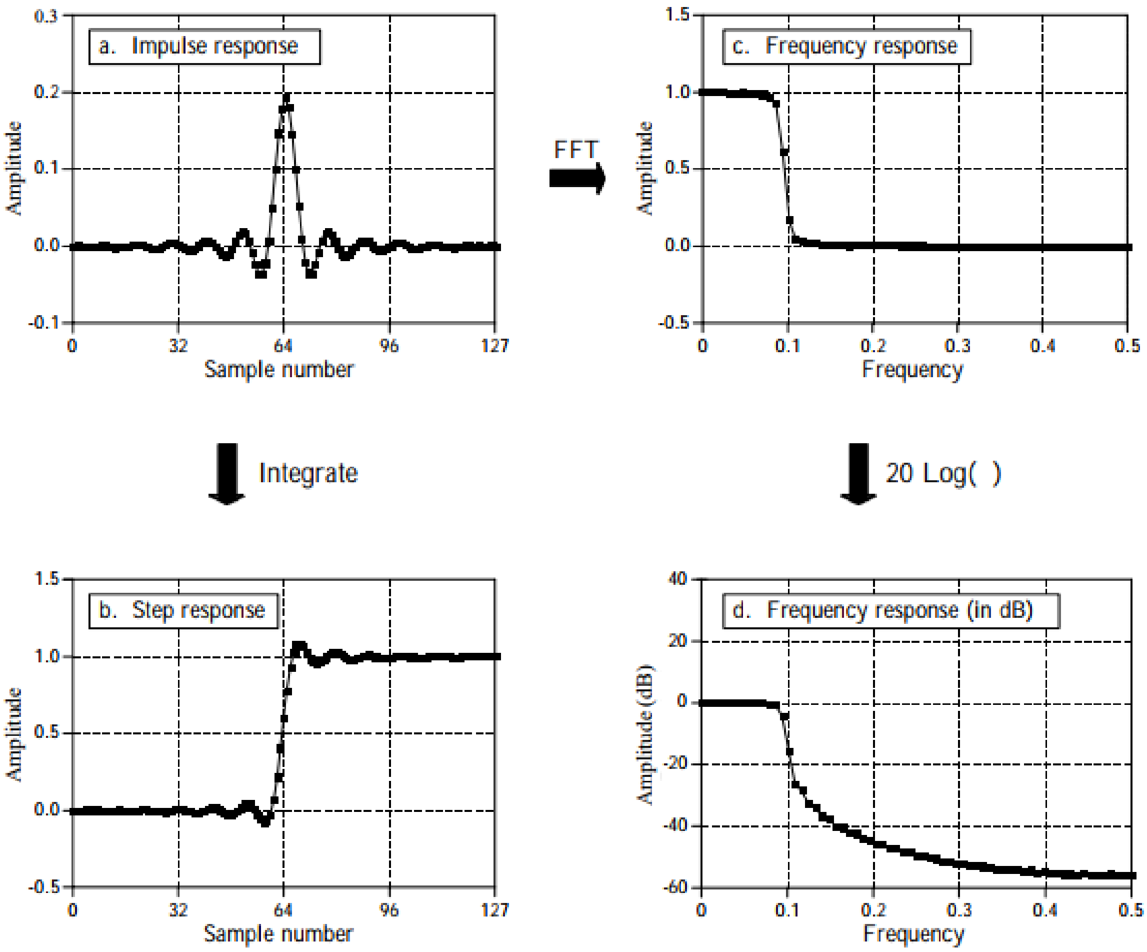
  Por ejemplo una grabación de audio realizada con equipamiento pobre podría ser filtrada para lograr una mejor representación del sonido

Dentro de DSP, es común decir que las señales de entrada y salida de un filtro esta en el dominio del tiempo, esto sucede porque la señal generalmente se construye tomando muestras a intervalos resultantes de tiempo

Okey, todos los filtro lineares se componen en sí de 3 partes:

- La respuesta al impulso
- La respuestas al escalón
- La respuesta a la frecuencia

Cada una de estas partes tiene básicamente información del filtro pero de distinta manera.



Bueno lo importante acá es que la manera más *straigthforward* que tenemos para poder crear un filtro digital es básicamente realizando la convolución de una señal de entrada con el filtro digital de la respuesta al impulso.
Cuando la respuesta al impulso es utilizada de esta manera, los diseñadores de filtros le otorgan un nombre especial → **kernel del filtro**

Hay otra forma de crear filtros y es a través de la **recursión,** pero la misma no nos importa. Lo importante es que los filtros recursivos son llamados *respuestas a impulsos infinitos o IIR filters* mientras que los filtros que se originan por convolución (que son los que a nosotros nos interesan) son llamando *Respuesta al Impulso Finito o FIR filters*

FIjate entender esta relación

- El **impulse responde** es básicamente la salida de un sistema que vos le metes como entrada un impulso
- El **step response** es básicamente la salida de un sistema que vos le metes como entrada un escalón

¿De qué manera la información es representada en las señales?

Básicamente en el mundo de las señales, la información se representa de **2 maneras:**

- Información representada en el dominio del tiempo

- Información representada en el dominio de la frecuencia

Lo importante es que la **respuesta al escalón** describe como la información representada en el dominio del tiempo está siendo modificada por el propio sistema, mientras que la **respuesta a la frecuencia** muestra cómo la información representada en el dominio de la frecuencia está siendo modificada

¿Y esto qué tiene de importante? → Bueno esto es una distinción crítica en el **diseño de filtros** porque no es posible optimizar un filtro para ambas aplicaciones. Es decir una buena performance en el dominio del tiempo resulta en una mala performance en el dominio de la frecuencia y viceversa

Entonces si vos vas a diseñar un filtro que te remueve el ruido de un electrocardiograma o EKG (información la cual se ve representada en el dominio del tiempo), la respuesta al escalón va a ser un parámetro importante y la respuesta a la frecuencia te va a importar muy poco

Filtros media móvil

Este filtro es el más utilizado dentro de la DSP principalmente porque es el más **fácil** de entender y de usar.

A pesar de su simplicidad, el filtro de media móvil es **óptimo** para una tarea simple: reducir el **ruido aleatorio o blanco** mientras mantiene una respuesta al escalón nitida

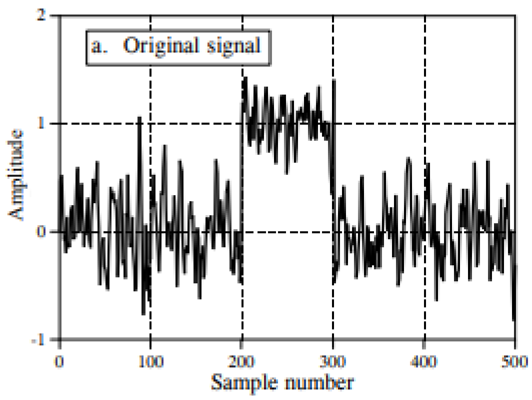
Algunas particularidades del ruido blanco o aleatorio:

- Valores totalmente aleatorios

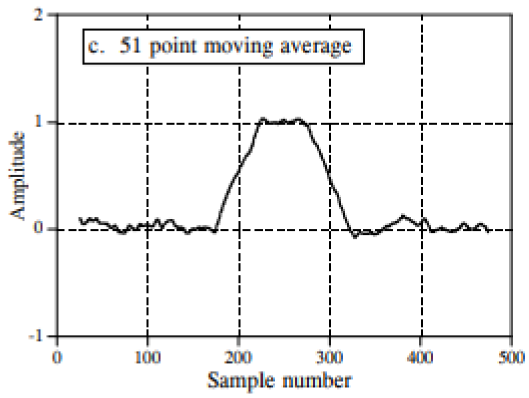
- No poseen ningún tipo de correlación entre ellos, lo cual hace que su promedio tienda a cero → El ruido desaparece si la cantidad de valores promediados aumenta

- Su espectro en la frecuencia es plano → Posee la misma amplitud en todas las frecuencias con lo que un filtro selectivo en frecuencia no sería de utilidad

Mira en la siguiente figura tenes un pulso rectangular sumido en un montón de ruido



Nosotros lo que hacemos ahora es pensar ¿Cuantos puntos ME quiero tomar como promedio para filtrar la señal? En este caso digamos que trabajamos con 51



Esto lo convierte en el filtro por excelencia del **dominio del tiempo**, lo cual equivale a decir que es el peor filtro para el dominio de la frecuencia de las señales

Funcionamiento:

Como el nombre lo implica, el filtro de media móvil opera tomando el promedio de un conjunto de puntos de muestra de la señal de entrada para producir cada punto en la señal de salida

Lo que hacemos es primero seleccionar un **tamaño de ventana (M)** que me indica la cantidad de puntos a los que yo les voy a calcular el promedio, y voy a deslizar esta ventana sobre la señal.

Entonces **x[ ]** es la señal de entrada e **y[ ]** es la señal de salida y **M** es el número de punto que vos vas a tomar para calcular el promedio

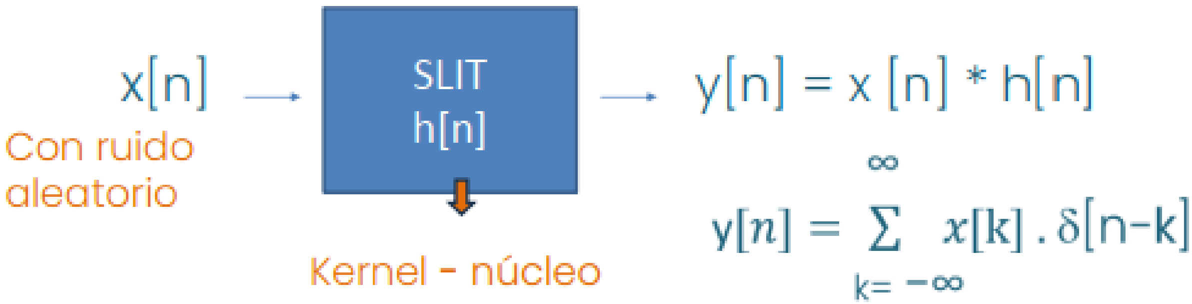
El promedio puede ser:

- Centrado
- Lateral parcial o total
- A derecha o a izquierda

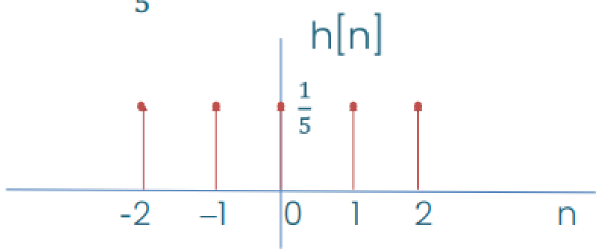
Ejemplo: promedio centrado con M = 5 de x[n] ¿como será y[n]

$$Y[n] = \frac{1}{5}\{x[n-2]+x[n-1]+x[n]+x[n+1]+x[n+2]\}$$

Por convolución



$$h[n] = \frac{1}{5}\{\delta[n+2]+\delta[n+1]+\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]\}$$



$$h[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=n-\frac{M-1}{2}}^{n+\frac{M-1}{2}} \delta[n-\mathbf{k}]$$

Kernel – núcleo
Filtro de Media Móvil

Nota: Esta fórmula se ha generalizado para valores de M **impares.**

Filtros pasa bajo

5) Defina y justifique la expresión utilizada para el filtro FIR paso bajo en el laboratorio. Expliqué por qué es necesario utilizar una ventana como la de Hamming y la normalización de dicho núcleo, al momento de realizar su implementación computacional.

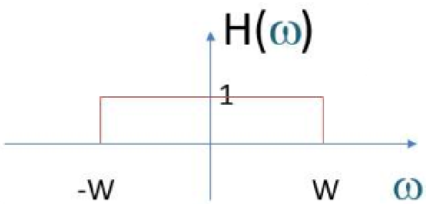
En este tipo de filtros vamos a tomar con **respuesta al impulso** la siguiente:

$$\boxed{h(t) = \frac{sen(W.t)}{\pi t}}$$

Si a esta señal nosotros le aplicamos la transformada de fourier nos da lo siguiente:

$$\frac{W}{\pi}\operatorname{senc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t} \qquad X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Es decir la respuesta en frecuencia es un **pulso rectangular** de valor unitario que va desde -W hasta +W.



Entonces todas las frecuencia que se encuentra debajo de fc son pasadas en una amplitud unitaria mientras que las frecuencias más altas son bloqueadas

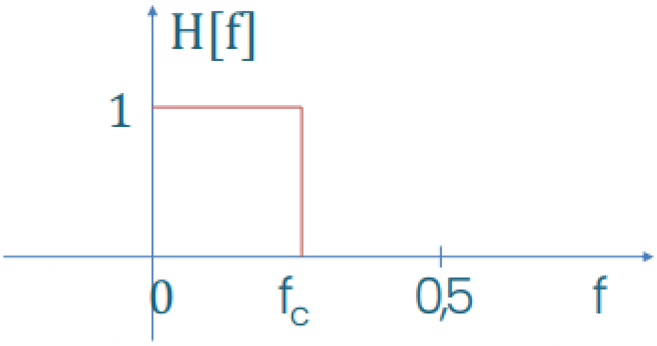
Nuestro núcleo tiene que ser tal que al realizar la convolución con x[n] me anule las frecuencias superiores a fc → Metete esta frase en la cabeza

Y justamente la transformada de fourier de h[n] se comporta como filtro pasa bajo ideal

Trabajaremos en la implementación computacional de filtro pasa bajo:

Entonces un filtro pasa bajo ideal es básicamente una venta (rectángulo) que tiene valores:

- 1, $0 < f < f_c$
- 0 $f_c < f < 0{,}5$



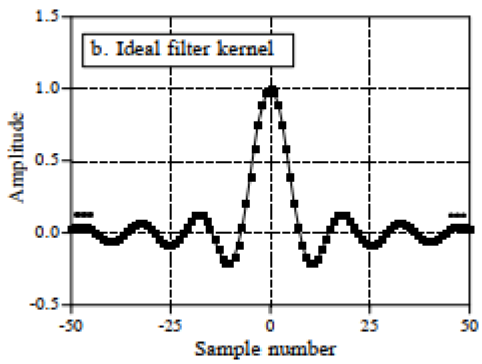
$$h[n] = \frac{\operatorname{sen}(2\pi . f_c n)}{\pi . n}$$

$$h[n] = 2f_c \frac{\operatorname{sen}(2\pi . f_c n)}{2f_c \pi . n}$$

$$h[n] = 2f_c \operatorname{senc}(2f_c n)$$

Ahora bien, cuando nosotros diseñamos un filtro en el dominio del tiempo discreto, especialmente uno basado en la función sinc, es necesario acotar el núcleo del filtro a un número finito de muestras para que sea computacionalmente manejable.

Bueno todo lindo hasta ahora, pero tenemos un **problema,** si observamos en el **dominio del tiempo** nuestro filtro ideal se extiende desde menos a más infinito lo que en términos de computación representa un problema

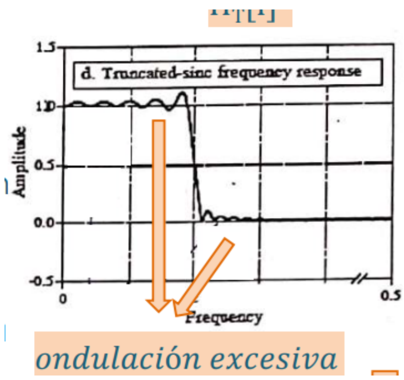


Aver, si yo hubiera utilizado ese **filtro ideal,** en el dominio de la frecuencia en teoría tendría representado perfectamente un escalón, pero esto no se puede hacer por limitaciones computacionales.

Lo que vamos a hacer es **truncar** la gráfica a **M + 1** puntos, simétricamente elegidos alrededor del primer lóbulo, en donde M es un número par.

Por otro lado la gráfica se desplaza hacia al derecha para que vaya desde 0 hasta M → La de esto es que me permite representar el kernel del filtro solo con números positivos

Problemas → Se producen una serie de ondulaciones excesivas en la señal que se deben al **fenómeno de Gibbs.** Una señal que tiene discontinuidades bruscas, como un escalón, utilizando una aproximación mediante series de Fourier o aplicando un filtro pasa bajo ideal, notaremos que la reconstrucción no es perfecta y se producirán oscilaciones alrededor de las discontinuidades



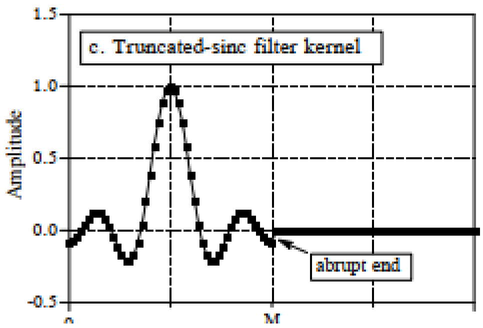
Para resolver esto,voy a multiplicar mi filtro truncado $h_T[n]$ por un **núcleo suavizado,** que es básicamente una ventana que tiende de manera gradual a cero en los bordes, eliminando el **salto** y las **ondulaciones**

Una forma de mitigar este efecto es aplicar una **ventana de Hamming** a la función sin truncada antes de realizar la transformada de Fourier. La ventana de Hamming suaviza las transiciones abruptas alrededor de los bordes de la función sin truncada, lo que reduce la intensidad de las oscilaciones adicionales causadas por el fenómeno de Gibbs.

$$\boxed{v[n]=0{,}54-0{,}45\cos\left(\frac{2\pi . n}{M}\right)}$$

Por otra parte, vamos a utilizar para el núcleo del filtro una expresión que **desplace** el origen (el centro del Senc) de cero a M/2. La cual se ve así:

$$\boxed{h_d[n]=\frac{\operatorname{sen}\left(2\pi . f_c\left(n-\frac{M}{2}\right)\right)}{\pi .\left(n-\frac{M}{2}\right)}}$$



Nuestro **núcleo definitivo** $h[n] = h_d[n] * v[n]$, el cual posee amplitudes modificadas por $v[n]$ respecto a las amplitudes del núcleo original $h_d[n]$

Lo único que nos falta ahora sería **normalizar el núcleo:**

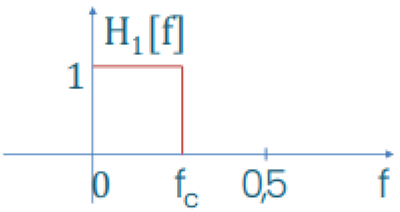
$$\boxed{h_n[n] = \frac{h[n]}{\sum_{n=0}^{M} h[n]}}$$

Normalizar este núcleo significa escalar de tal manera que su amplitud total sea igual a 1. Esta normalización se realiza para garantizar que el filtro no **amplifica** o **atenúa** la señal de entrada en general.

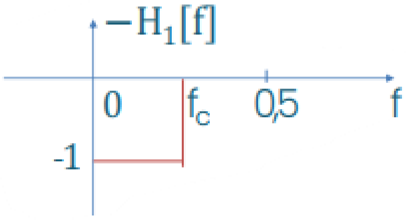
Filtros pasa alto: Inversión espectral

Osea el filtro pasa alto lo podemos ver como una **suma** de 2 sistemas con respuestas al impulso, del filtro pasa bajo (invertido) + el filtro pasa todo

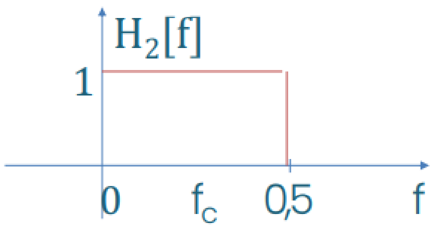
1) Filtro pasa bajo



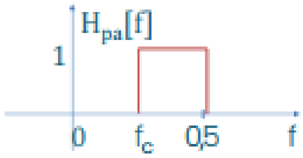
A este filtro le vamos a aplicar una **inversión espectral,** con lo que vamos a obtener como resultado



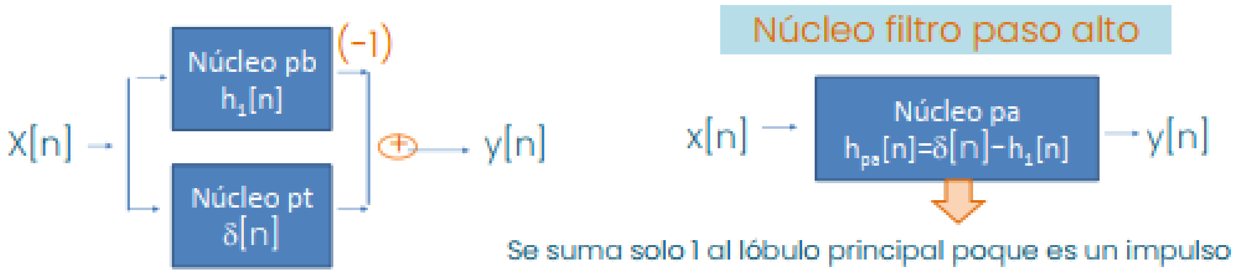
2) Filtro pasa todo



3) Como respuesta obtenemos lo siguiente

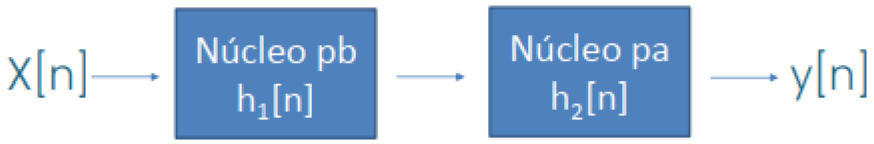


Vemos entonces que el núcleo de un filtro pasa alto por inversión espectral, es igual a la de un filtro pasabajo con los signos opuestos en todos sus componentes, adicionando un uno al valor central el lóbulo principal

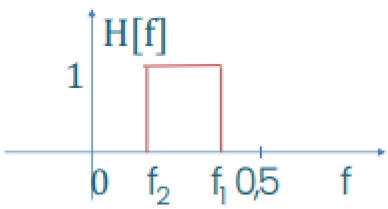


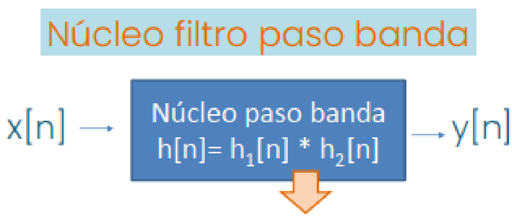
Filtros pasa banda

Puede verse como una **convolución** de 2 sistemas, correspondientes a un filtro pasabajo con una frecuencia de corte = f1 y un filtro pasa alto con una frecuencia de corte = f2, de manera que f2 < f1



Entonces nos queda lo siguiente

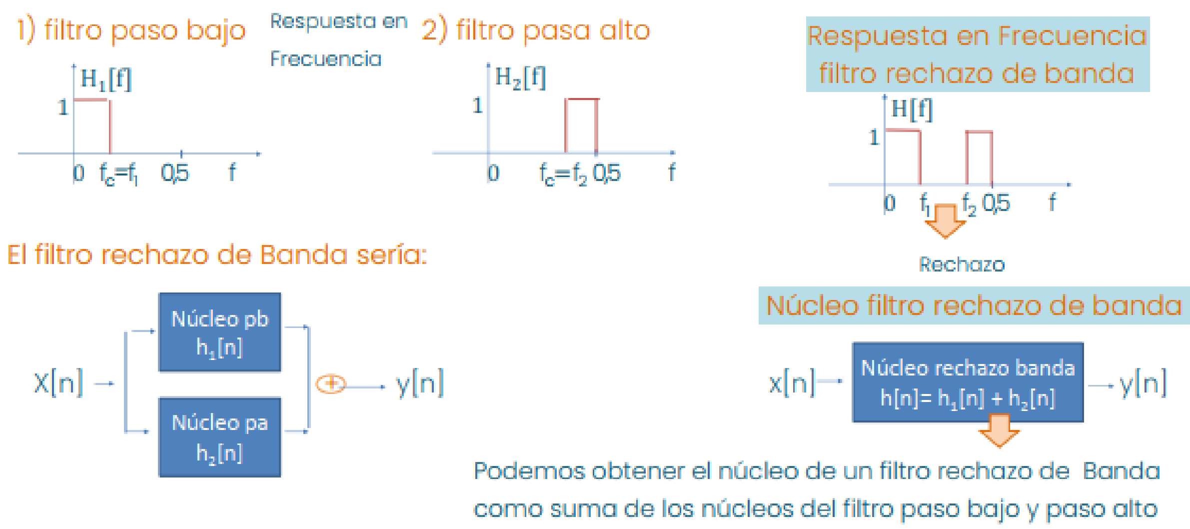




Si te fijas la manera de obtener un filtro pasa banda es simplemente haciendo la **convolución** de un filtro pasa bajo con un filtro pasa alto

Filtros rechazo de banda

Si utilizamos una agrupación en paralelo (suma) de 2 sistemas, un filtro pasabajo con frecuencia de corte = f1 y un pasa alto con frecuencia de corte = f2, de manera que f2 > f1 entonces

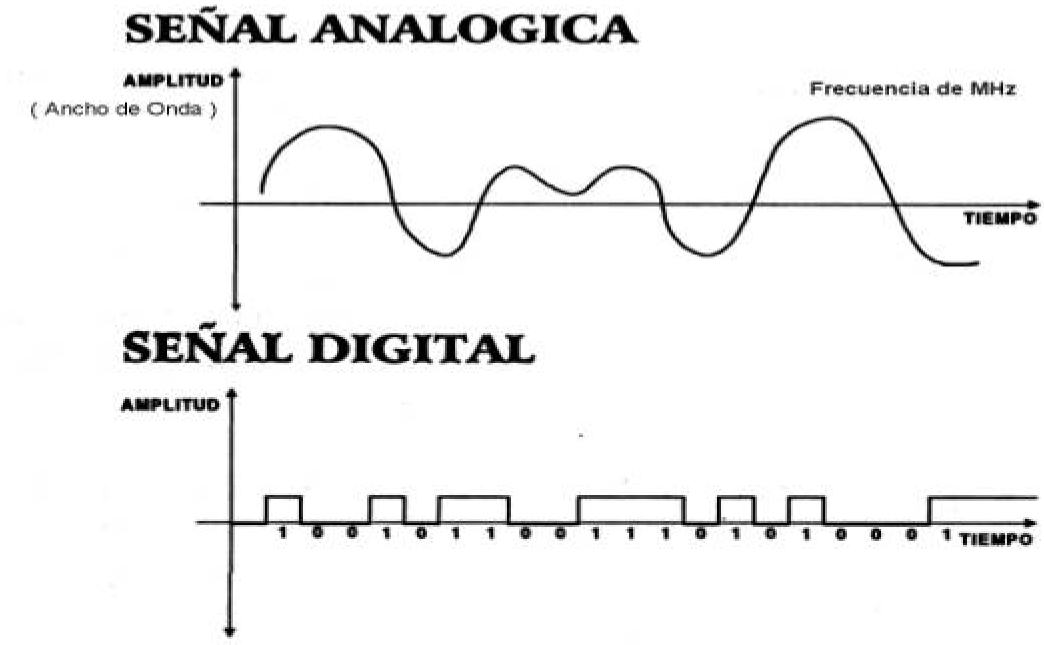


Muestreo de Señales

Muestreo de señales

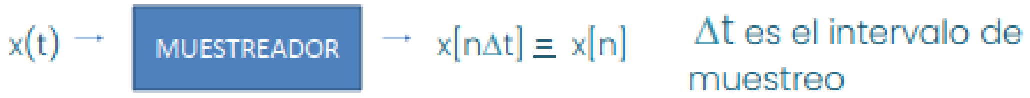
La mayoría de las señales son señales analogicas (tiempo continuo) como por ejemplo:

- Voz, audio y video
- Señales sísmicas
- Radas, etc

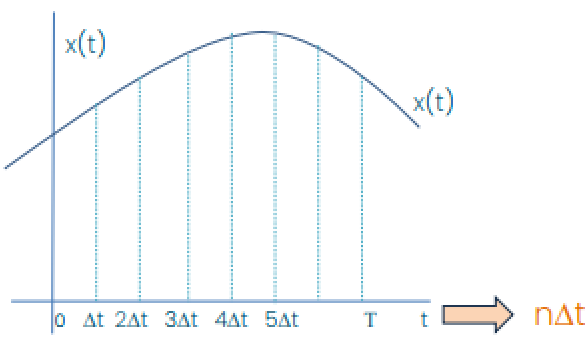


Para poder procesarlas a través de medio digitales primero debemos convertirlas a formato digital → Es decir convertirlas en una secuencia de números con una precisión finita

Muestreo → Este paso consiste en la conversión de una señal continua en el tiempo en una señal discreta obtenida mediante la toma de muestras de la señal continua en el tiempo en instantes de tiempo discretos. Nosotros vamos a estudiar el muestreo uniforme o periodico

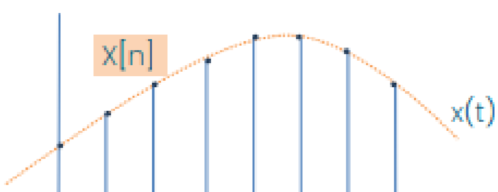


Acá es importante notar que **x[n]** es la señal discreta en el tiempo obtenida tomando En muestras de la señal analógica



∆t: Es el intervalo de tiempo entre las muestras

Fm: Frecuencia de muestreo o tasa de muestro → Es las cantidad de muestras que vamos a tomar en un segundo



$$\boxed{Fm = \frac{1}{\Delta t}} \quad \boxed{t = n\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{Fm}} \quad \boxed{t = \frac{n}{Fm}}$$

Para hacer nuestro análisis vamos a partir de una señal sinusoidal en **tiempo continuo**

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 t)$$

La cual puede ser expresada en **tiempo discreto** de la siguiente manera:

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n)$$

$$x[n] = \cos(2\pi f_{0,} n)$$

El análisis es muy sencillo, lo que tratamos de hacer es establecer una **relación entre f_0 y F_0** para así poder convertir la señal de analogica a digital

- **F_0 =** Frecuencia analogica
- **f_0 =** Frecuencia digital

$$\boxed{f_0 = F_0 \, \Delta t}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{F_0}{Fm}}$$

$$\boxed{F_0 = f_0 \, Fm}$$

$$-1/2 \leq f_0 \leq 1/2$$

$$-1/2 \leq \frac{F_0}{Fm} \leq 1/2$$

$$\boxed{-\frac{F_m}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_m}{2}}$$

$$\boxed{-\frac{F_m}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_m}{2}} \Rightarrow \boxed{F_{0\,máx} = \frac{F_m}{2}}$$

Y justamente de esto se deduce el **“Teorema del Muestreo”** → para no perder información y poder reconstruir la señal analogica original la frecuencia de muestreo tiene que ser:

$$\boxed{Fm \geq 2 \, F_{0\,máx}}$$

Entonces para poder reconstruir una señal continua correctamente a partir de sus muestras, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia más alta presente en la señal original.

Entonces sabemos que esta señal **periódica** en el tiempo discreto repite sus valores (alias) si a la frecuencia digital le sumamos un valor entero k, con lo que nos queda:

$$\boxed{x[n]= \cos(2\pi.f_0 n) = \cos(2\pi.(f_0+k).n)}$$

$$x[n]= \cos(2\pi.f_0 n) = \cos(2\pi.(f_0+k).n)$$

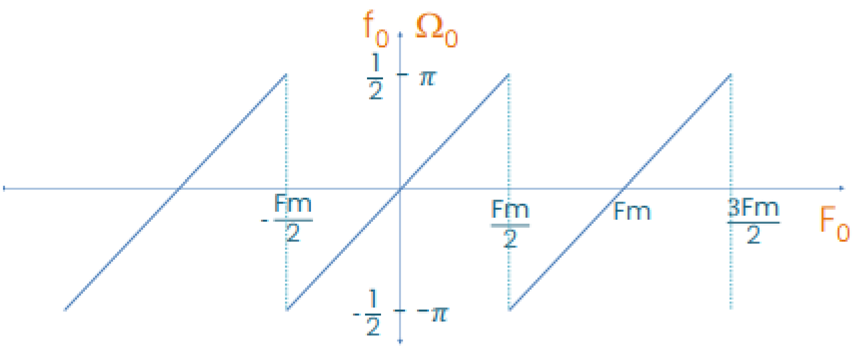
$$x[n]= \cos\left(2\pi.\left(\frac{F_0}{Fm}+k\right).n\right)$$

$$\boxed{x[n]= \cos\left(2\pi.\left(\frac{F_0+k.Fm}{Fm}\right).n\right)} \quad \boxed{\text{Alias señales digitales}}$$

$$\boxed{x(t)= \cos(2\pi.(F_0 + k.Fm).t)} \quad \boxed{\text{Alias señales analógicas}}$$

Esta señal muestra que para todas las frecuencias analógicas $\mathbf{F_k = F_0 + kFm}$ la señal x[n] es idéntica (alias) y representa los mismos valores muestreados para el delta t o Fm utilizados

En el siguiente gráfico se muestra la relación entre las variables de frecuenci a de las señales continuas (analogicas) y discretas (digitales) para una frecuencia de muestreo Fm determinada



¿Que es el aliasing?:

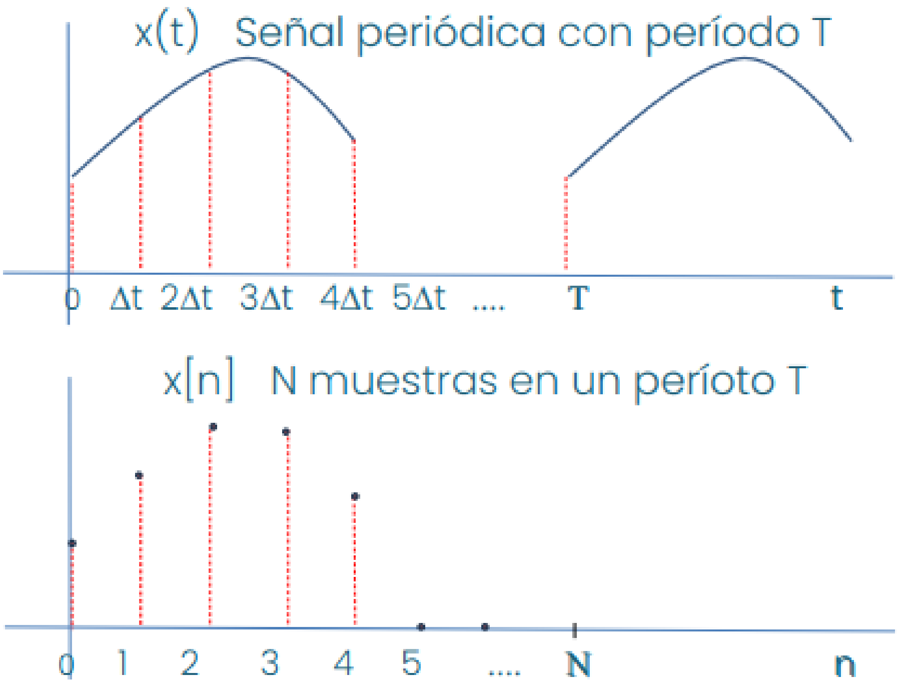
El aliasing es un fenómeno que ocurre en el proceso de muestreo de señales cuando la frecuencia de muestreo es insuficiente para capturar adecuadamente las frecuencias presentes en la señal original.

Entonces lo que sucede es que la señal se empieza a distorsionar, doblar y perdemos información

Aliasing = Distorsiones + Pérdida de información

Muestreo de señales analogica y la TDF

Para este análisis vamos a partir del siguiente gráfico:

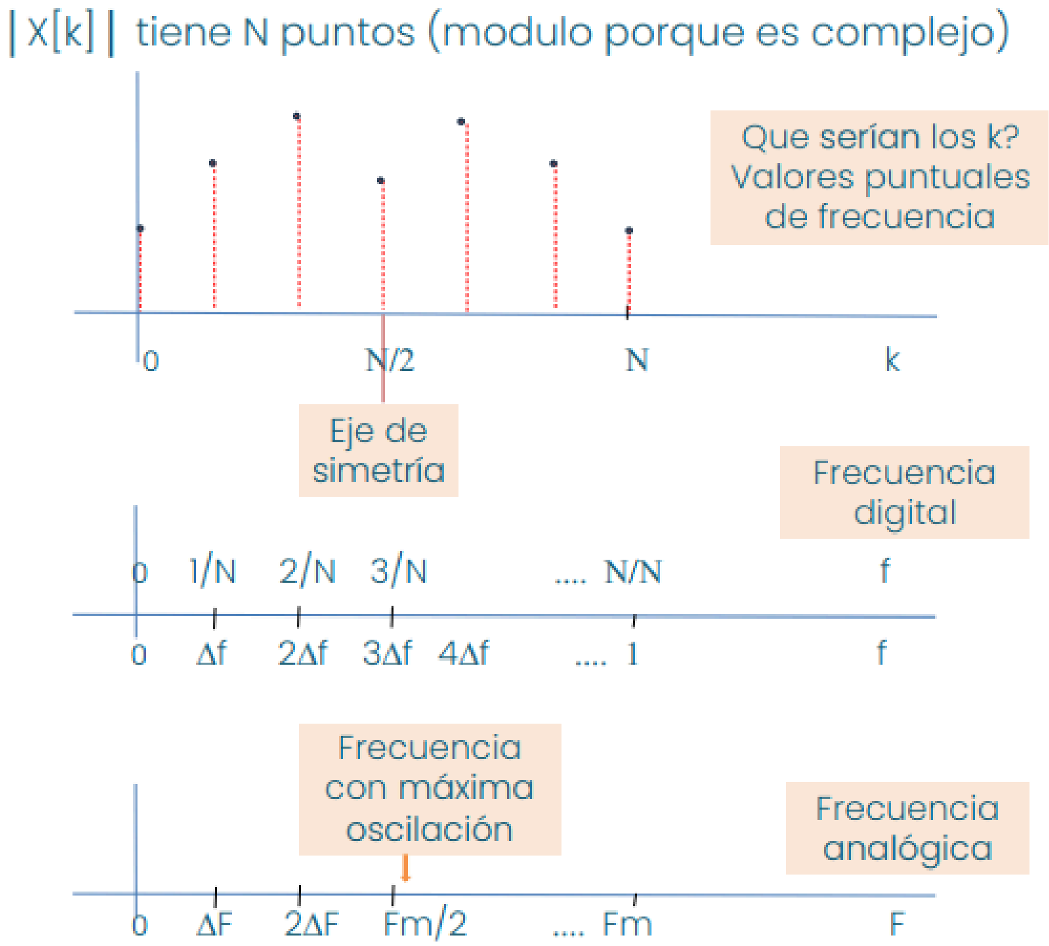


$$\Delta F = F_0 = \frac{1}{T}$$

$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{N}$$

Bueno, a esta señal x[n] yo le voy a aplicar la **transformada discreta de Fourier (TDF)** para así obtener a x[k] y poderla analizar en términos de frecuencia. Sin embargo es importante notar algo, y es que acordate que cuando usas TDF lo en realidad vas a obtener **2 gráficos** de frecuencias, uno para la parte real y otro para la parte imaginaria.

Cuestión que vamos a tomar el **módulo** de x[k], para poder obtener directamente la **magnitud** de cada componente de frecuencia.



Entonces, sabiendo que:

$$\boxed{\Delta f = f_0 = \frac{1}{N}}$$

$$\boxed{\Delta F = F_0 = \frac{1}{T}}$$

vamos a analizar la siguiente fórmula

$$\boxed{\Delta F = \frac{1}{N.\Delta T}}$$

- Si nosotros **reducimos** a Δt, vamos a mejorar la calidad de muestreo en el dominio del tiempo, osea estamos básicamente aumentando la frecuencia de muestreo.

  El problema es que si nosotros mantenemos **constante** a N (cantidad de muestras) aún aumentando la frecuencia de muestreo vamos a **empeorar** el muestro de las frecuencias analógicas en el espectro.

- Por otro lado si vos **aumentas** a Δt vas a mejorar la calidad de muestreo en el dominio de la frecuencia si mantenes a N constante, pero a costa de empeorar el muestreo en el dominio del tiempo

La conclusión es muy simple y es que si queremos mejorar la calidad de muestreo en un dominio debemos **aumentar la cantidad de muestras N** para no afectar el otro

Recordando que:
- Máxima cantidad de oscilaciones en el tiempo discreto se da con la frecuencia digital $f_0 = \frac{1}{2}$
- La Máxima frecuencia analógica representada en el muestreo es $F_0 máx = \frac{1}{2\Delta t}$

Esta última expresión se la conoce como **Frecuencia de corte - Frecuencia de Nyquist**

Efecto del enventanado

El tratamiento de señales digitales NO es posible trabajar con señales infinitas en el tiempo

Debemos acotar la señal a un intervalo

Matemáticamente:
Producto de la señal por una función de ventana

Ventana, solo tendrá valores no nulos dentro del intervalo de análisis

Ejemplo: en tiempo continuo, utilizamos una ventana rectangular al aplicar la propiedad de modulación.

Podemos extender esta idea al tiempo discreto observando nuevamente la sustitución de los impulsos en frecuencia en la señal infinita por seno en el siguiente gráfico...

En la práctica, la función de Ventana, tiende a cero de manera gradual, evitando la discontinuidad que presenta la Ventana rectangular

Evita el fenómeno de Gibbs: es la aparición de oscilaciones de alta frecuencia en el espectro

Octave: Ventana de Hamming