

Análisis Numérico - Resumen

Unidad 5: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales y Mínimos Cuadrados

Sistemas de ecuaciones lineales - Introducción

Se denomina **ecuación lineal** aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas aparecen cada una en distintos términos, elevadas a la potencia uno y multiplicadas por una constante

Un **sistema de ecuaciones lineales** (SEL de ahora en mas) es un conjunto finito de ecuaciones lineales de la forma:

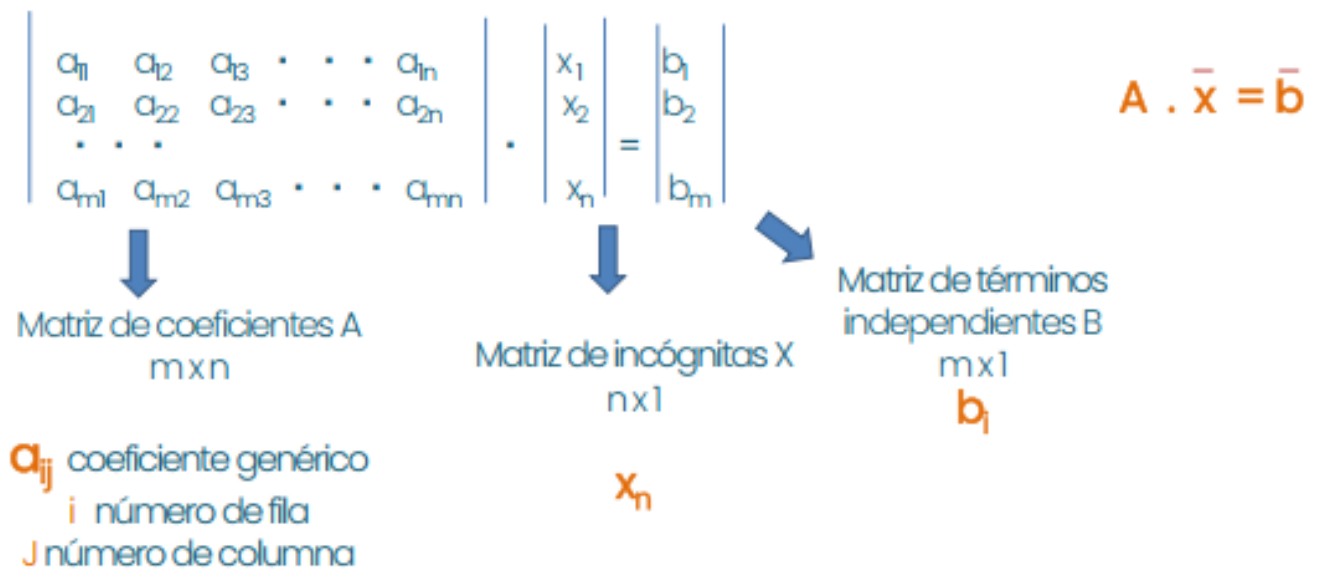
$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

- Teniendo **m** ecuaciones y **n** incógnitas
- Los números reales **a_i** se denominan coeficientes
- los **x_i** se denominan incógnitas (número que queremos calcular)
- Los **b_j** se denominan términos independientes

Resolver el sistema básicamente consiste en calcular las incógnitas para que se cumplan **TODAS** las ecuaciones del sistema simultáneamente.

Diremos que 2 sistema son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones

Esta es la **expresión matricial** de un SEL:



Tipos de sistemas:

En general, buscaremos las soluciones de los sistemas en los números reales R.

Dependiendo del posible número de tales soluciones reales que tenga un sistema, estos se pueden clasificar en:

- **Incompatibles** → No tienen solución
- **Compatibles** → Si tienen solución
 - **Determinados** → Solución única $n \times n$ (Estos son los que nosotros trabajamos)
 - **Indeterminados** → Infinitas soluciones

Pueden existir sistemas **mal condicionados**: Pequeñas variaciones en los datos producen grandes variaciones en la solución

Metodos de resolucion

Métodos directos:

Son aquellos métodos que nos permiten obtener una **solución exacta** (si no existieran los errores de redondeo) en un número finito de operaciones.

Con aplicación del método una sola vez:

- **Metodo de eliminacion de Gauss** → Este es el que usamos
- Metodo de eliminacion de Gauss - Jordan
- Método de factorización de Cholesky
- Método de factorización de Crout

Métodos indirectos:

Parten de una **aproximación inicial** por medio de un algoritmo conducen a aproximaciones sucesivamente mejores a cada paso

Es aconsejable su uso en sistemas de muchas incógnitas y en sistemas mal condicionados. Como son métodos infinitos se suma un error de truncamiento

- Método de Gauss Seidel

Metodo de eliminacion de Gauss

- **1 Etapa Triangulación:** Mediante operaciones elementales de filas y columnas se transforma la matriz de coeficientes A en triangular superior
- **2 Etapa Sustitución Inversa:** Obtenemos los valores de las incógnitas despejadas desde la última ecuación hacia la primera ; sustituyendo los valores que vamos encontrando

Lo que nosotros vamos a hacer es trabajar con un **SEL generico 3 x 3**, matriz de coeficientes ampliada. El **superíndice** nos va a indicar la cantidad de veces que se modificó ese coeficiente

Cada elemento que está **sobre** la diagonal principal lo vamos a llamar **elemento pivot**.

$$\begin{array}{ccc|c}
 a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & b_1^0 \\
 a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 & b_2^0 \\
 a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 & b_3^0
 \end{array}$$

Triangulación: Consiste en hacer cero todos los coeficientes que se encuentran debajo de la diagonal principal

Nota: Una cosa ahora que hay que tener en cuenta es recordar las operaciones elementales que vimos de Álgebra.

Por ejemplo $e_{21}(m)$ significa que a la fila 2 le voy a sumar la 1 previamente multiplicada por m

Como **ejemplo inicial** trataremos de determinar justamente este valor que multiplicado por la fila uno y sumado a la fila 2 me de cero. Entonces supongamos que nosotros queremos hacer cero el elemento $a_{21}^1 m$, lo cual sería:

$$m_2^1 = -\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0}$$

- **Subíndice:** El número de fila que modificamos (en este caso estamos modificando la fila 2)
- **Superíndice:** La cantidad de operaciones elementales de fila aplicadas a esa misma fila (Como es la primera vez que yo voy a modificar la fila 2 le voy a poner 1 como valor)

Entonces dada esta introducción, nos adentramos ahora en las etapas propiamente dichas:

Triangulación:

a_{11}^0	a_{12}^0	a_{13}^0	b_1^0
a_{21}^0	a_{22}^0	a_{23}^0	b_2^0
a_{31}^0	a_{32}^0	a_{33}^0	b_3^0
a_{11}^1	a_{12}^1	a_{13}^1	b_1^1
0	a_{22}^1	a_{23}^1	b_2^1
0	a_{32}^1	a_{33}^1	b_3^1
a_{11}^0	a_{12}^0	a_{13}^0	b_1^0
0	a_{22}^1	a_{23}^1	b_2^1
0	0	a_{33}^2	b_3^2

$$m_2^1 = -\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0}$$

$$m_3^1 = -\frac{a_{31}^0}{a_{11}^0}$$

$$m_3^2 = -\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1}$$

$$a_{21}^1 = a_{21}^0 + a_{11}^0 \left(-\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0}\right) \Rightarrow = 0$$

$$a_{22}^1 = a_{22}^0 + a_{12}^0 m_2^1$$

$$a_{23}^1 = a_{23}^0 + a_{13}^0 m_2^1$$

$$b_2^1 = b_2^0 + b_1^0 m_2^1$$

$$a_{31}^1 = a_{31}^0 + a_{11}^0 \left(-\frac{a_{31}^0}{a_{11}^0}\right) \Rightarrow = 0$$

$$a_{32}^1 = a_{32}^0 + a_{12}^0 m_3^1$$

$$a_{33}^1 = a_{33}^0 + a_{13}^0 m_3^1$$

$$b_3^1 = b_3^0 + b_1^0 m_3^1$$

Generalizamos:

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} + a_{1j}^{k-1} m_i^k$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} + b_1^{k-1} m_i^k$$

$$m_i^k = -\frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}$$

- **i:** Es el número de la fila
- **k:** Hace referencia a la iteración, es decir el número de veces que has modificado dicha fila

Sustitución Inversa:

Nuestra Matriz de coeficientes A ya es TRIANGULAR

a_{11}^0	a_{12}^0	a_{13}^0	b_1^0
0	a_{22}^1	a_{23}^1	b_2^1
0	0	a_{33}^2	b_3^2

Vamos a trabajar sin los supraíndices

a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
0	a_{22}	a_{23}	b_2
0	0	a_{33}	b_3

Obtenemos los valores de las incógnitas despejándolas desde la última ecuación hacia la primera; sustituyendo los valores que vamos encontrando.

$$a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

$$a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23} \cdot x_3}{a_{22}}$$

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3)}{a_{11}}$$

Generalizamos:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} \cdot x_j}{a_{kk}}$$

Técnicas de pivoteo:

Las técnicas de pivoteo sirven para minimizar los errores a la hora de que nosotros trabajamos con Gauss

a_{ii} se llama **elemento pivot** al coeficiente que se encuentra sobre la diagonal principal

Entonces si a_{ij} es cero o un número muy pequeño esto produce un error de redondeo muy grande y el mismo se amplifica en el desarrollo del método. Para subsanar estos errores surgen las técnicas de pivoteo

¿Pero por qué pasa esto?

$$m_2^1 = -\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0}$$

Fijate que en todas las fórmulas para calcular los multiplicadores, los términos pivot siempre se encuentran en el denominador, por ende si los mismos son un número muy pequeño o más bien cero, esto generara que tengamos un error muy grande

Con las técnicas de pivoteo, buscamos que el mayor número posible dentro de la matriz de coeficientes A y según ciertas condiciones, se ubique en posición de elemento PÍVOT

Existen 2 técnicas de pivoteo (bebote 🤪) :

- Pivoteo parcial
- Pivoteo total

Pivoteo parcial:

- Buscamos el mayor número en valor absoluto en la columna o sub columna
- Importante notar que el término independiente se va a mover cuando vos cambiar la fila pero **no** la incógnita

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots a_{1n}$	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots a_{2n}$	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots a_{3n}$	b_3
\dots				
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\dots a_{nn}$	b_n

Nota: Fila que fue pivot, no puede volver a ser pivot

Pivoteo total:

- Buscamos el mayor número en valor absoluto en la matriz o sub matriz
- Realizamos intercambio de filas o columnas para ubicarlo en el lugar del elemento pivot
- Especial cuidado en el intercambio de columnas que cambió el orden de las incógnitas

Fijate que en este método le pones **nombres a las columnas** los cuales se corresponden con los nombres de las incógnitas

x_1	x_2	x_3	...	x_n	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}	b_3
.....					
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{nn}	b_n

Aproximación o ajuste a una curva por metodo de Minimos cuadrados:

Mínimos cuadrados es una **técnica** de cálculo numérico en la que dados un conjunto de pares ordenados (x, y) y una familia de funciones, se intenta encontrar la función continua dentro de dicha familia que mejor se aproxime a los puntos datos (“un mejor ajuste”) de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático

x_k	y_k
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.....	
x_n	y_n

Entonces como **datos** lo que nosotros tenemos es un conjunto de pares ordenados:

A continuación se muestra la **función de aproximación** → la cual es una combinación lineal de funciones $\Theta(x)$ (polinómicas, trascendentales, etc) y coeficientes **c**, con **m** términos

$$f(x) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot \Theta_j(x)$$

m ← Cantidad de términos
 COEFICIENTES FUNCIONES Θ QUE DEPENDEN DE LA VARIABLE X

Entonces un **ejemplo** podría ser una función de aproximación de una parábola

$$f(x) = \underbrace{c_1}_{\text{COEF}} \cdot x^2 + \underbrace{c_2}_{\text{COEF}} \cdot x + \underbrace{c_3}_{\text{COEF}}$$

$$\begin{aligned} \Theta_1(x) &= x^2 \\ \Theta_2(x) &= x \\ \Theta_3(x) &= x^0 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$m=3$ 3 términos

Desviación: Es la sumatoria de las diferencias entre los valores datos y calculados con la curva de ajuste

$$\sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))$$

Procedimiento: Lo que hago es lo siguiente, primero voy a calcular la función $f(x)$ (por ejemplo imagínate que es una parábola), ahora lo que vas a hacer es valorar en esa función por cada valor x_k , osea que yo voy a ir obteniendo $f(x)_1$, $f(x)_2$, y así sucesivamente

Importante notar que, se van a cancelar los errores positivos con los negativos cuando introducimos el **valor absoluto**

$$\sum_{k=1}^n |y_k - f(x_k)|$$

Bueno lo que vamos a hacer ahora es tratar de lograr que justamente esta sumatoria de errores sea la mínima (de ahí el nombre del método). Teniendo esto en cuenta acordate ¿Cuándo era que existía un mínimo? → Cuando la derivada primera es igual a cero

Entonces el **problema** acá es que la derivada no está definida para el valor absoluto, entonces se nos tiene que ocurrir otra forma de compensar los errores → Sumatoria de cuadrado

$$S = \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))^2$$

Funcional de
Desviación

Lo que voy a realizar ahora es reemplaza fx_k por la función de aproximación, con lo que me queda lo siguiente

$$S = \sum_{k=1}^n (y_k - \sum_{j=1}^m c_j \cdot \Theta_j(x_k))^2$$

- Esta **S** nos da a dar una magnitud del error de esa función de aproximación y esos puntos datos.
- Permite elegir entre varias $f(x)$ distintas, cuál es la que mejor aproxima a los puntos datos → **S: menor**

Minimización del funcional de desviación:

Los **coeficientes "c"** son los que me van a minimizar el valor de S. Para poder obtenerlos se debe igualar las derivadas parciales de S respecto de cada una de las variables c_j a cero

Entonces partimos de la siguiente fórmula:

$$S = \sum_{k=1}^n (y_k - \sum_{j=1}^m c_j \cdot \Theta_j(x_k))^2$$

Nota 1:

Función de Aproximación:

$$f(x) = c_1 \Theta_1(x) + c_2 \Theta_2(x) + \dots + c_m \Theta_m(x)$$

Nota₂: Acordate que si vos tenes

$$y = u^2$$

$$y' = 2 u u'$$

Desarrollemos la derivada primera para c_1 e igualemos a cero

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 2 \sum_{k=1}^n (y_k - \sum_{j=1}^m c_j \cdot \Theta_j(x_k)) \cdot \Theta_1(x_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n y_k \Theta_1(x_k) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m c_j \cdot \Theta_j(x_k) \Theta_1(x_k) = 0$$

Ahora si pasamos al otro miembro y reacomodamos los términos de las 2 sumatorias nos quedaría lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^m c_j \sum_{k=1}^n \Theta_j(x_k) \Theta_1(x_k) = \sum_{k=1}^n y_k \Theta_1(x_k)$$

Generalizamos: $c_1 \rightarrow c_i$ $\Theta_1(x_k) \rightarrow \Theta_i(x_k)$

$$\sum_{j=1}^m c_j \sum_{k=1}^n \Theta_i(x_k) \Theta_j(x_k) = \sum_{k=1}^n y_k \Theta_i(x_k)$$

Esta última expresión es justamente la **minimización del funcional de desviación**

Si derivamos respecto de todos los coeficientes “c” formaremos un SEL, la matriz de coeficientes A va a ser simétrica y de tamaño mxm. Resolviendo el sistema encontraremos los valores de nuestras incógnitas c y obtendremos la función de aproximación

Entonces, vamos a armar ahora nuestro SEL, si nuestra función de aproximación tiene 3 términos m = 3 y recordando entonces que nuestras incógnitas van a ser c₁, c₂ y c₃

Primera ecuación para i=1, todas las sumatorias k=1 hasta n

$$c_1 \sum \Theta_1(x_k) \Theta_1(x_k) + c_2 \sum \Theta_1(x_k) \Theta_2(x_k) + c_3 \sum \Theta_1(x_k) \Theta_3(x_k) = \sum y_k \Theta_1(x_k)$$

Segunda ecuación para i=2, todas las sumatorias k=1 hasta n

$$c_1 \sum \Theta_2(x_k) \Theta_1(x_k) + c_2 \sum \Theta_2(x_k) \Theta_2(x_k) + c_3 \sum \Theta_2(x_k) \Theta_3(x_k) = \sum y_k \Theta_2(x_k)$$

Tercera ecuación para i=3, todas las sumatorias k=1 hasta n

$$c_1 \sum \Theta_3(x_k) \Theta_1(x_k) + c_2 \sum \Theta_3(x_k) \Theta_2(x_k) + c_3 \sum \Theta_3(x_k) \Theta_3(x_k) = \sum y_k \Theta_3(x_k)$$

Cuando armemos el sistema de ecuaciones nos va a quedar algo como esto:

$$\begin{bmatrix} \sum \cdot \Theta_1(x_k) \Theta_1(x_k) & \sum \cdot \Theta_1(x_k) \Theta_2(x_k) & \sum \cdot \Theta_1(x_k) \Theta_3(x_k) \\ \sum \cdot \Theta_2(x_k) \Theta_1(x_k) & \sum \cdot \Theta_2(x_k) \Theta_2(x_k) & \sum \cdot \Theta_2(x_k) \Theta_3(x_k) \\ \sum \cdot \Theta_3(x_k) \Theta_1(x_k) & \sum \cdot \Theta_3(x_k) \Theta_2(x_k) & \sum \cdot \Theta_3(x_k) \Theta_3(x_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_k \Theta_1(x_k) \\ \sum y_k \Theta_2(x_k) \\ \sum y_k \Theta_3(x_k) \end{bmatrix}$$

Entonces este sistema lo voy a resolver con **Gauss**, encontraremos los valores de nuestras incógnitas **c** y obtendremos la **función de aproximación**. Luego podremos calcular el error si calculamos S

Unidad 6: Resolución de Ecuaciones no Lineales

Ecuaciones no lineales

Concepto:

Una ecuación **no lineal** en donde la incógnita o variable está elevada a una potencia distinta de 1, o que incluye funciones trascendente como por ejemplo trigonométricas o algebraicas polinomios de grado mayor a 1

Podríamos pensar en el contexto de las ecuaciones, **que todo lo que no es una recta es básicamente una ecuación no lineal**

El **objetivo del modelo** es encontrar las raíces de la ecuación no lineal ya que dicha raíz nos da información significativa para el modelo.

Los **métodos** que vamos a ver nosotros tendrán por objetivo aproximar a las raíces de ecuaciones no lineales para poder resolver el modelo

Se dice que existe una raíz cuando para un valor **x** determinado de su función este haga que la misma nos de como resultado cero.

¿Pero por qué decimos que vamos a obtener **aproximaciones** a estas raíces?

Dependiendo de la función $f(x)$, es posible que sea difícil poder obtener los valores de las raíces exactas. Por medio de herramientas de cálculo numérico y técnicas computacionales, **podemos obtener sucesivas aproximaciones a nuestra raíz**.

Aceptaremos la aproximación que cumpla con el error propuesto y la adoptamos como nuestra solución aproximada

Raíces de la función:

$F(x)$ está definida y es continua en un intervalo $[a,b]$, las raíces de la función representa cada valor ε para el cual la función se anula, osea que:

$$f(\varepsilon) = 0$$

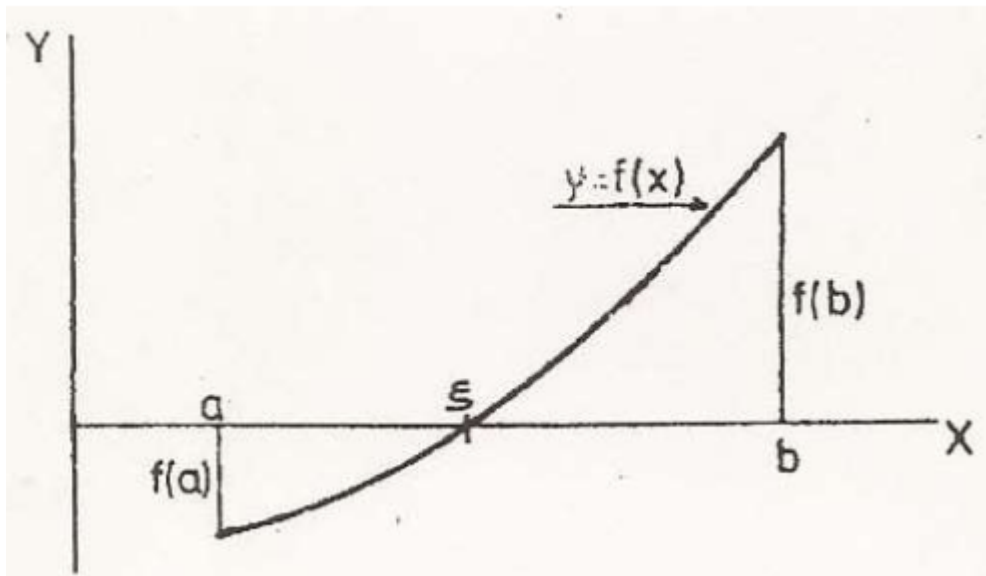
Nosotros vamos a trabajar entonces en **2 etapas**:

1. Aislamiento de las raíces
2. Aplicación del método para encontrar las raíces

Aislamiento de las raíces:

Aislar las raíces consiste en establecer un intervalo $[a,b]$ lo más pequeño posible, tal que en su interior se encuentre **una única raíz**

Teorema 1: Si una función continua $f(x)$ asume valores de signos opuestos en los extremos de un intervalo $[a,b]$ o lo que es lo mismo que $f(a) \cdot f(b) < 0$, luego el intervalo $[a,b]$ contendrá al menos un punto ε tal que $f(\varepsilon) = 0$

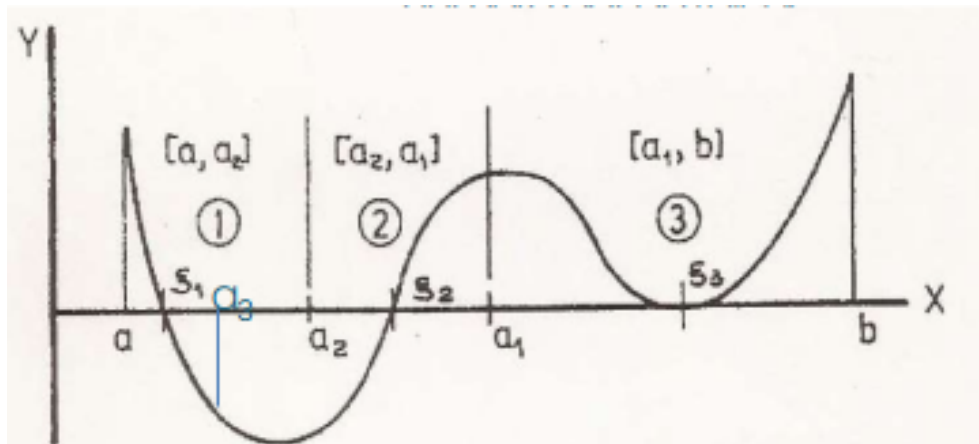


El punto es que la condición antes mencionada **no nos asegura que en ese intervalo exista una única sola raíz**

Observar que sucede con el Teorema 1 en un intervalo $[a,b]$:

- Si se cumple puede que existan **una** o un número **impar** de raíces.

- Si no se cumple puede que **no existan** raíces o existan un **par** de raíces



Por lo tanto diremos que:

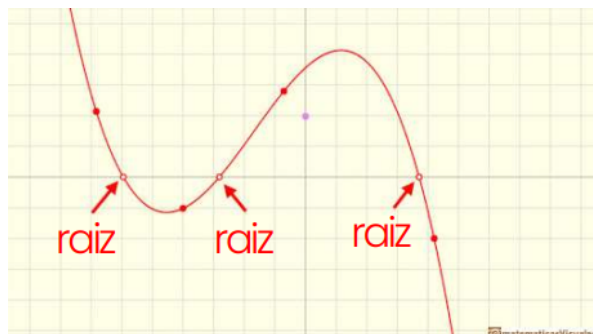
- **Condición Suficiente** → Teorema 1
- **Condición necesaria** → La raíz ε será definitivamente única dentro del intervalo $[a,b]$, si la derivada de $f(x)$ existe y conserva su signo en todo el intervalo

Por ejemplo, fíjate que desde a hasta a_2 el signo de la derivada es negativa pero se mantiene constante. Sin embargo desde a_3 hasta a_1 si bien se cumple el Teorema 1, el signo de la derivada varía

¿Cómo trabajamos en el práctico?

Para encontrar el intervalo $[a,b]$ que contenga una única raíz, podemos construir una tabla de pares ordenados x, y , de manera que podamos buscar el cambio de signo en y_k

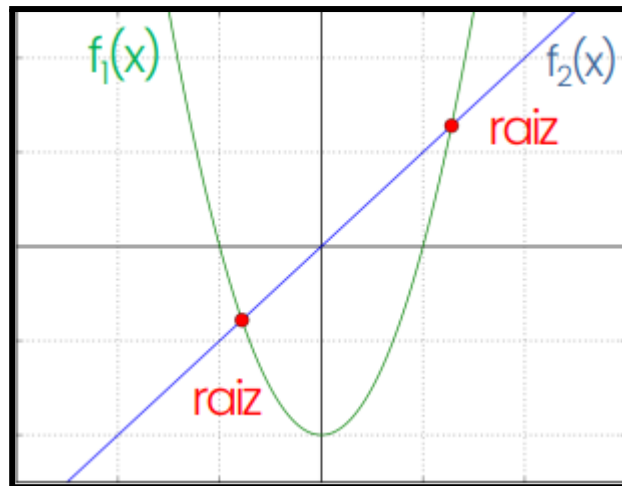
x	$f(x)$
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
...	...
x_n	y_n



El **problema** de este método es que básicamente te vas a terminar comiendo raíces, porque por ejemplo vos podría saltarse un intervalo que va desde positivo a positivo pero tranquilamente allí podrían haber raíces

Entonces en la práctica si la función es muy compleja de graficar se la suele dividir en 2 partes que sean más simples de representar $f(x) = 0$, luego $f_1(x) = f_2(x)$.

Buscamos los puntos donde f_1 y f_2 se cortan siendo estas las raíces de $f(x)$



Métodos para el cálculo de raíces: Métodos iterativos o indirectos

Método de punto Fijo o de Aproximaciones sucesivas:

Nota: Este método no se ve a nivel práctico

Parte de una **aproximación inicial** (la cual es por cierto, uno de los 2 extremos del intervalo que hemos identificado) y por medio de un algoritmo conduce a aproximaciones sucesivamente mejores a cada paso.

Lo que hacemos primero es agarrar la función y **despejar la x** de manera que nos quede $x = G(x)$ tal que cualquier solución de esta también lo sea para la primera

Ejemplo $f(x) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$		
$x = x^2 - 2$	$x = \sqrt{2 + x}$	$x = 1 + \frac{2}{x}$

Ahora bien, fijate que hay **distintas manera** de despejar la x para $G(x)$, pero no todas van a ser satisfactorias

$$X_{k+1} = G(x_k)$$

Fórmula iterativa

En criollo lo que te dice la fórmula iterativa es que la x de la iteración siguiente la vamos a calcular valuando en $G(x)$ con la x de la iteración actual. Ahora bien, esta $G(x)$ tiene que cumplir con la **condición de convergencia** sinó la fórmula iterativa no te sirve para nada

Para que este algoritmo sea de utilidad deberemos probar que dado un x_0 aproximación inicial de la raíz ε :

1. Para calcular el punto de partida de x_0 podemos calcular con el algoritmo $x_1, x_2, x_3 \dots$
2. La sucesión x_1, x_2, x_3 convergen a la raíz ε
3. El límite ε constituye un punto fijo en si mismo de $G(x) \rightarrow \varepsilon = G(\varepsilon)$

Convergencia:

- x_0 Aproximación inicial a la raíz
- $x = \varepsilon$ Raíz
- I Intervalo que contiene la raíz

Entonces sean $G(x)$ y $G'(x)$ continuas en I :

$$|G'(x)| < 1 \rightarrow \text{Condición de convergencia}$$

Dicho en palabras, la condición de convergencia dice que la derivada primera de la función $g(x)$, debe tener un valor absoluto menor que 1 en el intervalo que contiene la raíz buscada.

Esta condición asegura que el proceso iterativo converge hacia la raíz deseada.

Error en la iteración k Error en la iteración k+1 Para que converja
 $|X_k - \varepsilon| = |e_k|$ $|X_{k+1} - \varepsilon| = |e_{k+1}|$ $|e_{k+1}| < |e_k|$

Restamos miembro a miembro

$$\begin{aligned}
 & X_{k+1} = G(X_k) \\
 & \varepsilon = G(\varepsilon) \\
 \hline
 & X_{k+1} - \varepsilon = G(X_k) - G(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

Se desprecia

Taylor

$$G(X_k) = G(\varepsilon) + (X_k - \varepsilon) G'(\varepsilon) + \cancel{(X_k - \varepsilon)^2 G''(\varepsilon) \frac{1}{2} + \dots}$$

Reemplazamos

$$X_{k+1} - \varepsilon = \cancel{G(\varepsilon)} + (X_k - \varepsilon) G'(\varepsilon) - \cancel{G(\varepsilon)}$$

Error en la iteración k+1 Error en la iteración k

Para que converja y la igualdad se respete

$|G'(x_k)| < 1$
 Condición de

Nota: Fijate que cuando desarrollamos a $G(x_k)$ con la fórmula de Taylor, x_k es el punto en concreto de la función y ε vendría a ser como el **entorno**

Método de Newton Raphson:

Parte de una aproximación inicial y por medio de un algoritmo conduce a aproximaciones sucesivamente mejores a cada paso.

Es uno de los métodos más conocidos para la determinación de una raíz de $f(x)$, una de las razones es por la velocidad de convergencia

Puede ser visto de 2 manera:

- Se deriva de la serie de Taylor
- Como un caso particular del método de punto fijo

Entonces para nuestro **análisis** vamos a partir de la serie de Taylor, teniendo en cuenta que si nuestra función es $f(x)$, yo voy a tener una raíz cuando $f(x) = 0$

Taylor Se desprecia

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + \dots$$

$f(x)=0$ Despejamos x

Buscamos x= la raíz; $f(x) = 0$

$$(x-a) = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Cambiamos nombres de variables
 $x = x_{k+1}$ $a = x_k$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Fórmula iterativa N-R

$$x_{k+1} = G(x_k)$$

F. Iterativa de Punto Fijo

Convergencia

$|G'(x_k)| < 1$

Condición de Convergencia

Punto Fijo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Fórmula iterativa N-R

$G(x_k)$

$$G(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Derivamos $G(x_k)$

$$G'(x_k) = 1 - \frac{f'(x_k)f'(x_k) - f''(x_k)f(x_k)}{[f'(x_k)]^2}$$

$$G'(x_k) = 1 - \frac{f'(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2} + \frac{f''(x_k)f(x_k)}{[f'(x_k)]^2}$$

1

$$\left| \frac{f''(x_k)f(x_k)}{[f'(x_k)]^2} \right| < 1$$

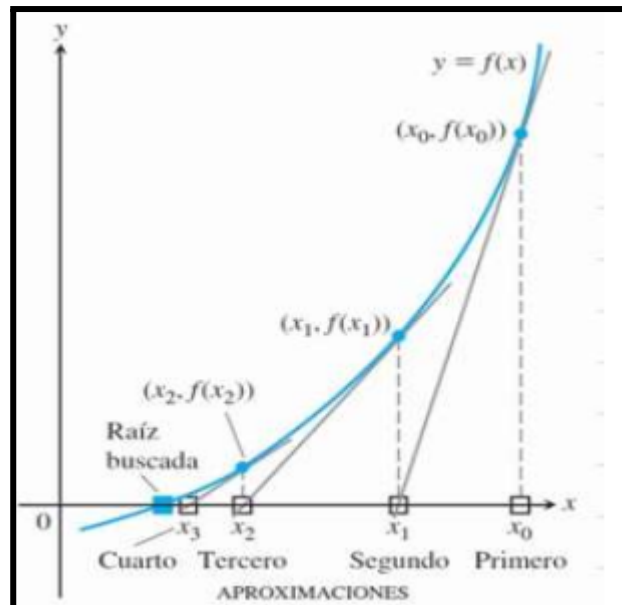
Condición de Convergencia de N-R

Nota: Acordate que:

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Interpretación gráfica del método:



Partiremos de una función $f(x)$ (función turquesa) a la cual la vamos a evaluar en un valor inicial x_0 entonces nos queda $f(x_0)$, a este punto le vamos a trazar una **tangente**, osea la derivada primera, en donde esta tangente corta al eje de las x o de las abscisas ese será nuestro x_1 y así sucesivamente

Convergencia cuadrática del método:

La principal **ventaja** de este método como sabemos es su velocidad de convergencia cuadrática hacia la raíz, lo que implica que el error del paso $k + 1$ está en función del cuadrado del error en el paso k

Unidad 7: Ecuaciones diferenciales

Concepto:

Se llama **ecuación diferencial** a una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.

Se puede clasificar de la siguiente manera:

- **Ordinarias:** Contiene derivadas ordinarias o totales de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independientes
- **A derivadas parciales:** Contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a más de una variable independiente
- **Con condiciones iniciales:** Cuando las CI están relacionadas a un solo valor de x
- **Con condiciones de contorno:** Cuando las CI están relacionadas a más de un valor de x

En este curso trabajaremos con *ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales*

El **orden** de la ecuación diferencial estándar o por el orden de la derivada de mayor orden. En la primera parte trabajamos con ecuaciones diferenciales de **primer orden**, es decir:

$$y' = f(x,y) ; y(x_0) = y_0$$

Fijate que por un lado yo lo que tengo es la derivada de la función **y'** despejada la cual está igualada a una función que depende de una sola variable independiente y una variable dependiente.

Por otro lado tengo las **condiciones iniciales** que serían x_0 e y_0 .

La **solución** de una ecuación diferencial de una variable dependiente y , con una variable independiente x , es la función $y = f(x)$, tal que satisface a la misma con las condiciones iniciales

La **solución analítica** de la ecuación diferencial conduce a obtener la función $y(x)$ en forma **explícita**.

Los **métodos numéricos** permiten obtener valores aproximados de la solución de la **ecuación diferencial**, es decir, conducen a los valores aproximados que forman la función $y(x)$, para valores determinados de la variable independiente x , que selecciona el usuario. Obtenemos la función de manera **discretizada**.

Modelos matemáticos:

Las ecuaciones diferenciales se han originado al intentar resolver numerosos problemas en varias ramas de la ciencia y de la ingeniería:


- Determinar el movimiento de un satélite, plante
- El estudio de crecimiento de poblaciones
- El problema de determinar la corriente de un circuito eléctrico

Las derivadas nos permiten expresar la variación de una variable respecto de otra variable, por lo tanto la formulación matemática de estos problemas da lugar a ecuaciones diferenciales


Resolución de EDO primer orden con CI:

Ejemplo: Dada la siguiente ecuación diferencial y sus condiciones iniciales, calcular $y(3)$ en 4 pasos


$$y' = \frac{3 \cdot \text{sen}(x \cdot y)}{2x + y} = f(x, y) \quad y(1) = 5 \quad y(3) = ?$$



Ecuación Diferencial



Cond. iniciales
 $X_{\text{inicial}} = 1 \quad Y_{\text{inicial}} = 5$



Solución Final
 $X_{\text{final}} = 3$

$$h_{\text{TRABAJO}} = \frac{X_{\text{FINAL}} - X_{\text{INICIAL}}}{\text{pasos}}$$

Nosotros vamos a trabajar con los **métodos numéricos de Runge Kutta (Directos)**. Las expresiones utilizadas pueden compararse con la serie de Taylor, truncada en algún término, lo que define el orden del método y la precisión de la solución entre ellos

Método	Hasta el término de Taylor	Cantidad de términos
a. Euler	Derivada primera	2
b. Euler mejorado	Derivada segunda	3
c. Runge Kutta de 4to orden	Derivada cuarta	5

Son **métodos directos** que nos permiten obtener en cada aplicación del método un par ordenado; partiendo de las condiciones iniciales (x_0, y_0) .

Obtendremos: $(x_1, y_1); (x_2, y_2); \dots (x_m, y_m) \dots (x_{m+1}, y_{m+1})$

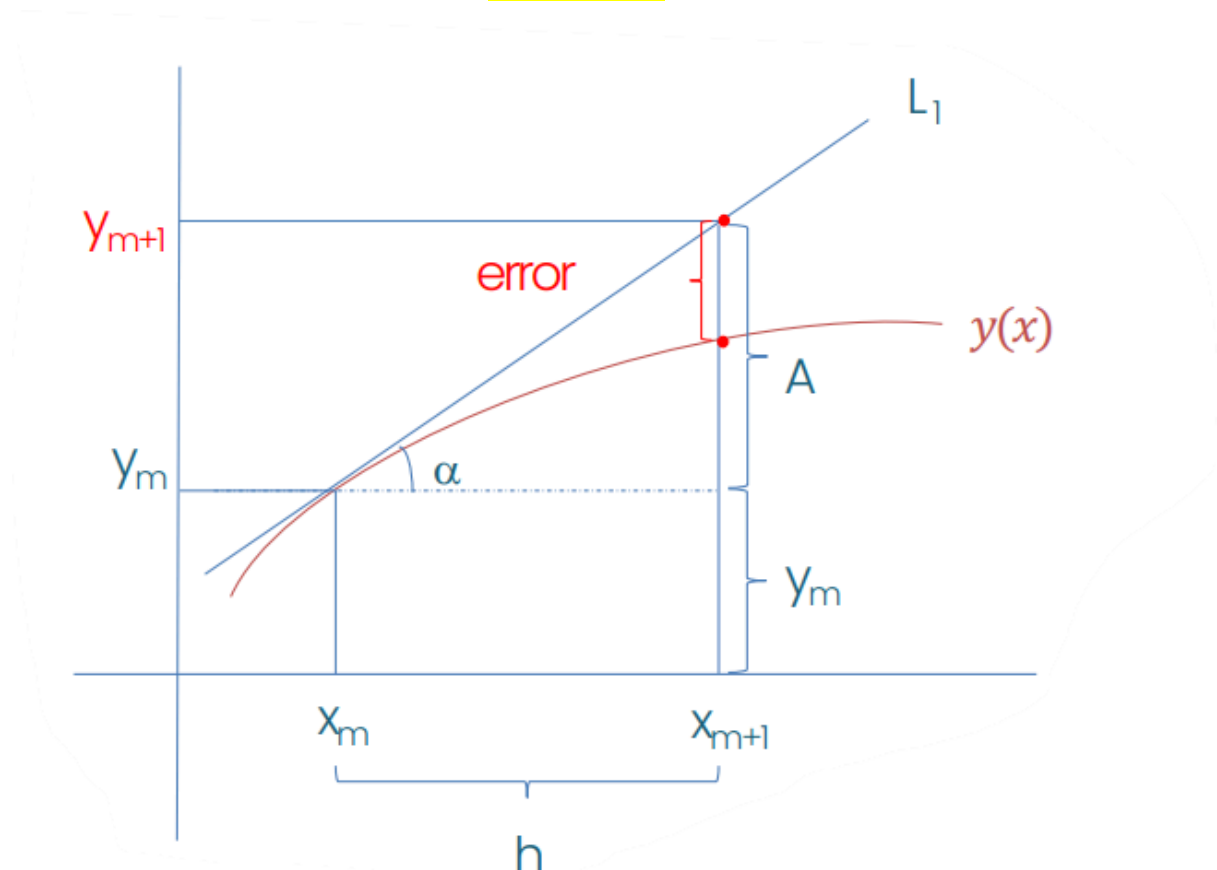
Método de Euler:

Naturalmente vamos a partir de la siguiente expresión:

$$y' = f(x, y) ; y(x_0) = y_0$$

y también sabemos que:

$$x_{m+1} = x_m + h$$



Lo que vamos a hacer es **generalizar** y llamar a la condición inicial, un par ordenado genérico (x_m, y_m) . Por lo que podríamos decir que $y' = f(x_m, y_m)$

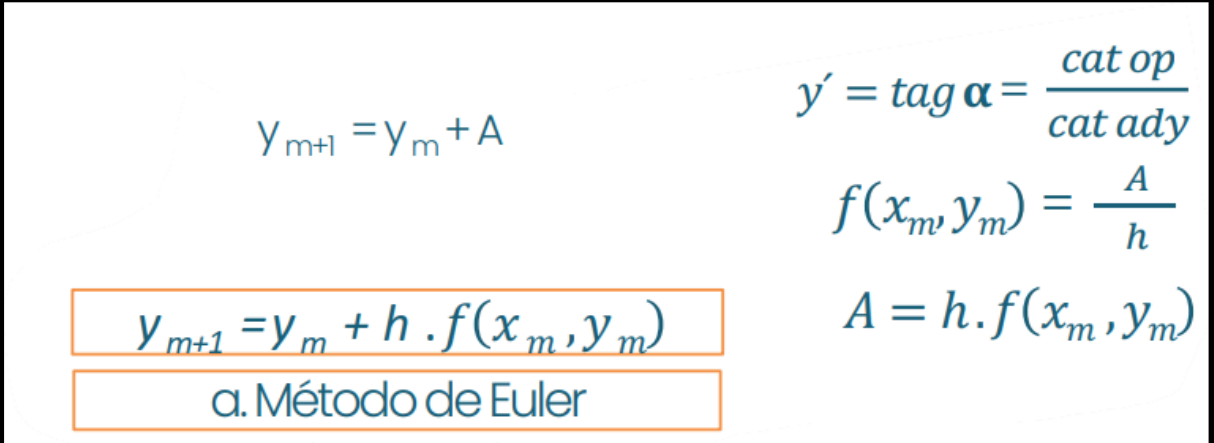
Mi **objetivo** será encontrar el valor de y_{m+1} para un paso siguiente de x , al que nosotros llamaremos x_{m+1} .

Entonces $x_{m+1} = x_m + h$ siendo $h = \text{paso}$ el cual debe ser mejor a 1.

L_1 es la recta tangente que nosotros vamos a dibujar en el punto que nos dan inicialmente o sea (x_m, y_m) , el cual se entiende como $y' = f(x_m, y_m)$

Fijate que nosotros en el punto x_{m+1} vamos a trazar una recta vertical hasta tocar con la tangente L_1 . Esto nos va a dar un valor y_{m+1} aproximado (es decir con un cierto error)

Ahora es solo cuestión de trabajar con relaciones trigonométricas, con lo que nos quedaría el siguiente **análisis gráfico**:

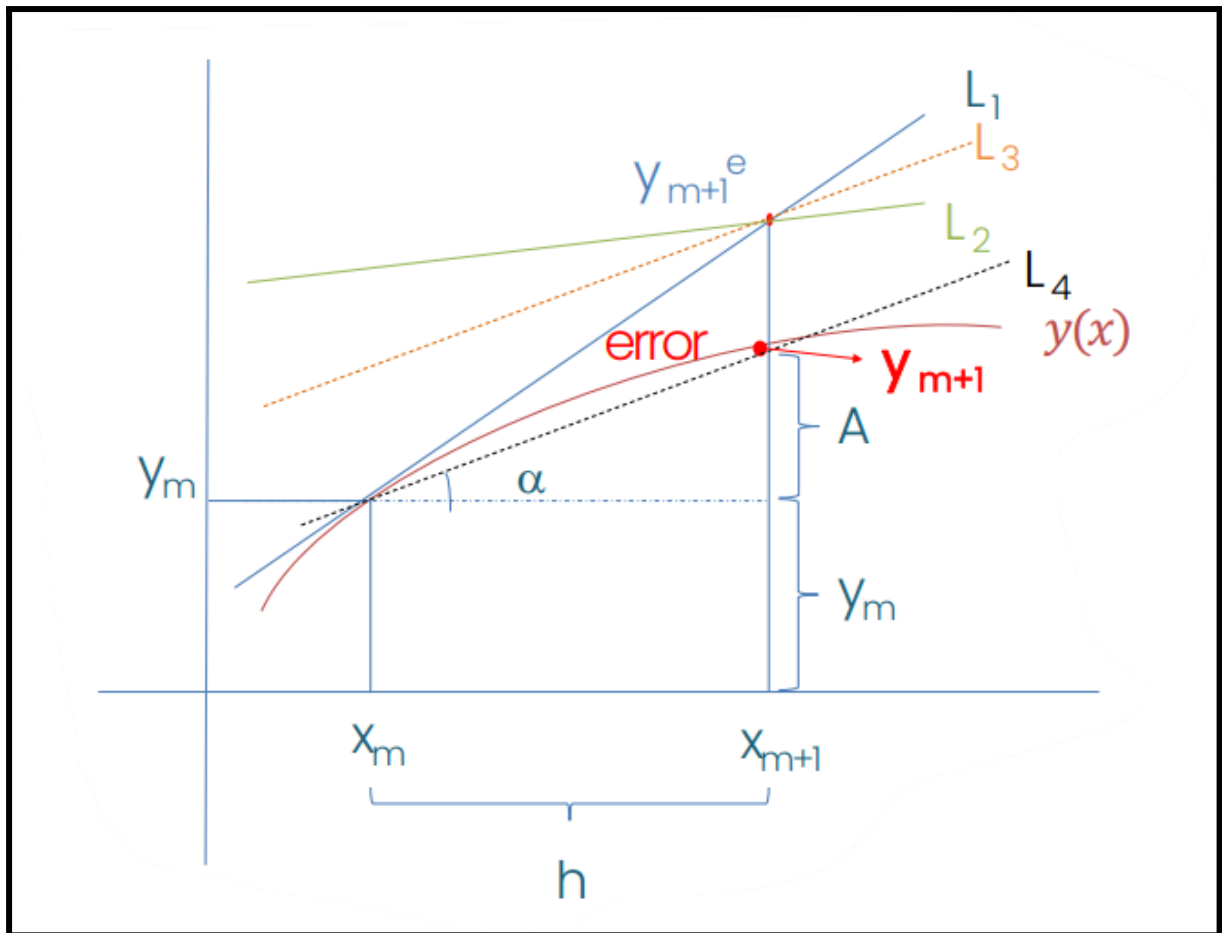

$$y_{m+1} = y_m + A$$
$$y' = \tan \alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}}$$
$$f(x_m, y_m) = \frac{A}{h}$$
$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m)$$
$$A = h \cdot f(x_m, y_m)$$

α. Método de Euler

Importante: Naturalmente es obvio pensar que a medida que h se vuelve más pequeño nuestro error también lo hace, y esto es porque estamos trazando una tangente que se aleja mucho menos de nuestra curva inicial.

Es decir todo este análisis para que vos lo entiendas lo hicimos con un grafiquito muy grande pero en la realidad el h debería ser super pequeño

Método de Euler mejorado:



Nuevamente partimos de que:

$$y' = f(x, y) ; y(x_0) = y_0$$

y también sabemos que:

$$x_{m+1} = x_m + h$$

Entonces lo primero que hacemos es trazar a L_1 recta tangente a la curva en el punto (x_m, y_m) , cuya pendiente es:

$$y' = f(x_m, y_m)$$

Lo que vamos a hacer ahora es trazar a L_2 recta tangente a la curva en el punto (x_{m+1}, y_{m+1}^e) lo que pasa es que en realidad esta recta L_2 la voy a **subir verticalmente** y la voy a trazar cuando corte con la recta L_1 . Naturalmente la pendiente se define como:

$$y' = f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)$$

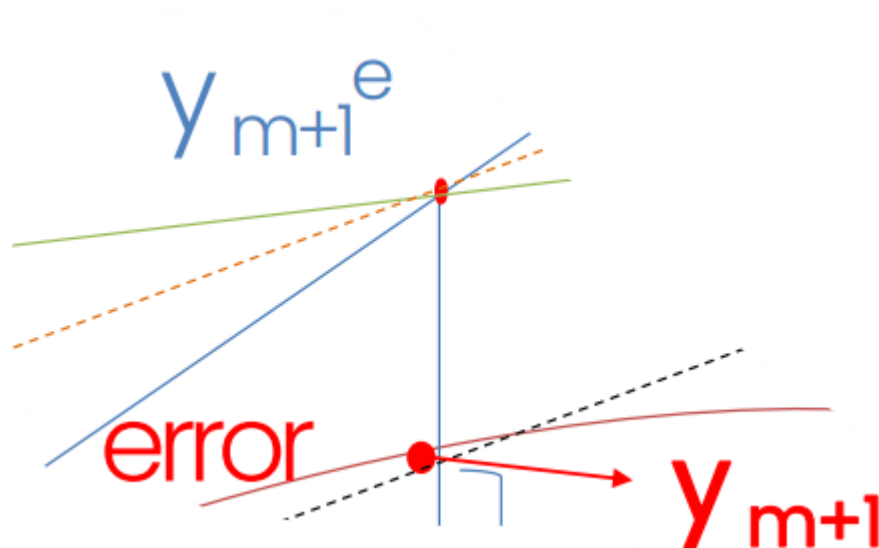
Lo que quiero hacer ahora es obtener de alguna manera el **promedio** entre las rectas L_1 y L_2 , por lo que fijate que ambas forman un ángulo, lo que voy a hacer es trazar una recta L_3 que pase por la mitad de ese ángulo, es decir la **bisectriz**. Por lo que su **pendiente** será:

$$\frac{1}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)]$$

Ahora voy a trazar una **paralela** a la recta L_3 que pase por el punto (x_m, y_m) por lo que naturalmente va a tener la misma pendiente:

$$\frac{1}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)]$$

Okey, lo importante entonces es que esta recta L_4 me va a proporcionar un valor y_{m+1} el cual es **sustancialmente mejor** que nuestro anterior y_{m+1}^e



Lo único que falta es hacer el mismo **análisis gráfico** pero ahora para el nuevo punto.

$$y_{m+1} = y_m + A$$

$$y' = \tan \alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)] = \frac{A}{h}$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)]$$

b. Método de Euler Mejorado

Método Runge Kutta:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_{m+h}; y_m + h \cdot k_3)$$

Fijate que el Runge Kutta lo que estaría haciendo es como ultra mejorar el método anterior, porque ahora estaríamos haciendo sería obtener el **promedio** entre 6 pendientes

Resolución de sistemas de EDO primer orden con CI:

Bueno vamos a partir de lo siguiente:

Sistema de 2 Ecuaciones
diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

Condiciones Iniciales

$$x_0; y(x_0) = y_0; z(x_0) = z_0$$

$$x_{m+1} = x_m + h$$

$$h_{\text{TRABAJO}} = \frac{x_{\text{FINAL}} - x_{\text{INICIAL}}}{\text{pasos}}$$

Fíjate que las **condiciones iniciales** siempre se corresponden con las variables que están dentro del paréntesis, por lo que las mismas se corresponden con x_0, y_0, z_0 .

Fíjate que la fórmula de **h** se calcula de la misma manera que antes

Por último, las fórmulas las vamos a obtener por extensión de las anteriores

Método de Euler	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m)$ $z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m)$
Euler mejorado	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot [f(x_m, y_m, z_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e, z_{m+1}^e)]$ $z_{m+1} = z_m + \frac{h}{2} \cdot [g(x_m, y_m, z_m) + g(x_{m+1}, y_{m+1}^e, z_{m+1}^e)]$
Runge Kutta	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_1 = f(x_m, y_m, z_m)$ $k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1, z_m + \frac{h}{2}L_1\right)$ $k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2, z_m + \frac{h}{2}L_2\right)$ $k_4 = f(x_{m+h}, y_m + h \cdot k_3, z_m + h \cdot L_3)$ $z_{m+1} = z_m + \frac{h}{6} \cdot (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$ $L_1 = g(x_m, y_m, z_m)$ $L_2 = g\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1, z_m + \frac{h}{2}L_1\right)$ $L_3 = g\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2, z_m + \frac{h}{2}L_2\right)$ $L_4 = g(x_{m+h}, y_m + h \cdot k_3, z_m + h \cdot L_3)$

Resolución de EDO de orden superior con CI:

Las **EDO de orden mayor a 1** pueden transformarse en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y de esta manera resolverlo con los métodos ya estudiados.

Si la ecuación diferencial es de **segundo orden** se transformara en un sistema de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden. En general si la ecuación es de orden **n** obtendremos un sistema de **n** ecuaciones diferenciales de primer orden

Una ecuación diferencial de **orden n** puede incluir en sus elementos la variable independiente, la variable dependiente, derivada primer, segunda, enésima menos una

Ecuación diferencial de orden n	$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$
Condiciones Iniciales	$x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{n-1}$

Nota: Fijate que está despejada siempre la derivada y^n de mayor orden

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones de primer orden, se definen **funciones auxiliares**. Para comprender vamos a trabajar con una ecuación diferencial de segundo orden, una de tercer orden y luego vamos a generalizar para una de orden n

EDO de orden 2:

Entonces partimos de lo siguiente:

- Una EDO de orden 2 $\rightarrow y'' = f(x, y, y')$
- Condiciones iniciales $\rightarrow x_0, y_0, y_0'$

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se definen funciones auxiliares de la siguiente manera:

Armado del sistema	Método Euler por ej.	Asignación C.I.
$y' \rightarrow y' = z \Rightarrow$ Sería $f(x, y, z)$	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m)$	$y_0 = y_0$
$y'' \rightarrow z' = \text{la Ec. Dif dada} \Rightarrow$ Sería $g(x, y, z)$	$z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m)$	$y_0' = z_0$
	$x_{m+1} = x_m + h$	$x_0 = x_0$

EDO de orden 3:

Entonces partimos de lo siguiente:

- Una EDO de orden 3 $\rightarrow y''' = f(x, y, y', y'')$
- Condiciones iniciales $\rightarrow x_0, y_0, y_0', y_0''$

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se definen funciones auxiliares de la siguiente manera:

Armado del sistema	Método Euler por ej.	Asignación C.I.
$y' \rightarrow y' = z \Rightarrow \text{Sería } f(x, y, z, w)$	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m, w_m)$	$y_0 = y_0$
$y'' \rightarrow z' = w \Rightarrow \text{Sería } g(x, y, z, w)$	$z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m, w_m)$	$y_0' = z_0$
$y''' \rightarrow w' = \text{la Ec. Dif dada} \Rightarrow \text{Sería } q(x, y, z, w)$	$w_{m+1} = w_m + h \cdot q(x_m, y_m, z_m, w_m)$	$y_0'' = w_0$
	$x_{m+1} = x_m + h$	$x_0 = x_0$

EDO de orden n:

Entonces partimos de lo siguiente:

- Una EDO de orden n $\rightarrow y^n = f(x, y, y' \dots y^{n-1})$
- Condiciones iniciales $\rightarrow x_0, y_0, y_0' \dots y_0^{n-1}$

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se definen funciones auxiliares de la siguiente manera:

Armado del sistema	Método Euler por ej.	Asignación C.I.
$y' \rightarrow y' = z \Rightarrow \text{Sería } f(x, y, z, r)$	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m \dots r_m)$	$y_0 = y_0$
$y'' \rightarrow z' = w \Rightarrow \text{Sería } g(x, y, z, \dots r)$	$z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m \dots r_m)$	$y_0' = z_0$
\vdots		
$y^n \rightarrow r' = \text{la Ec. Dif dada} \Rightarrow \text{Sería } q(x, y, z, \dots r)$	$r_{m+1} = r_m + h \cdot q(x_m, y_m, z_m \dots r_m)$	$y_0^{n-1} = r_0$
	$x_{m+1} = x_m + h$	$x_0 = x_0$