概率论3

随机变量的分布函数

1. 定义：设随机变量 X, $x \in R^1$, 则 $F(x) = P\{ X \le x \}$称为X的分布函数.

(1) $P\{ x_1 < X \le x_2 \} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$

(2) 无论是离散型随机变量还是非离散型随机变量 ,分布函数都可以描述其统计规律性.

2. 性质:

(1) $F(x)$是单调不减函数.

$\forall x_2 > x_1$, $F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1 < X \le x_2\} \ge 0$.

(2) $0 \le F(x) \le 1$, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

(3) $F(x)$至多有可列个间断点, 而在其间断点上也是右连续的, $F(x+0)=F(x)$.

例1. 离散型随机变量, 已知分布律可求出分布函数.

X	-1	2	3
p_k	1/4	1/2	1/4

求： X的分布函数, 并求$P\{X \le 1/2\}$, $P\{3/2 < X \le 5/2\}$.

离散型随机变量X的分布函数是阶梯函数, 在X 的每个可能值x_k处有一个跃度

若分布律 $P\{X = x_k\} = p_k$，$k = 1, 2, \ldots$

则分布函数为$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{k: x_k \le x} p_k$

反之，若已知分布函数求分布律用如下公式求解：

$$p_k = P\{X = x_k\} = F(x_k) - F(x_k - 0)$$

例2 设X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{当} x<-1 \\ \frac{1}{4}, \text{当} -1 \leq x<0 \\ \frac{3}{4}, \text{当} 0 \leq x<1 \\ 1, \text{当} x \geq 1\end{cases}$$

求X的分布律.

连续型随机变量的概率密度

定义:对于随机变量X的分布函数F(x),存在非负函数f(x),使对于任意的实数 x, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称X为连续型随机变量 f(x)称为X概率密度函数, 简称概率密度.

概率密度f(x)的性质:

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$,

$(x_1 \leq x_2)$

概率密度$f(\mathrm{x})$的性质:

(4) 若$f(x)$在点x处连续,则有$F'(x)=f(x)$.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P\{x<X\le x+\Delta x\}}{\Delta x},$$

上式可知当Δx很小时,有$P\{x<X\le x+\Delta x\}\approx f(\mathrm{x})\Delta \mathrm{x}$.

例1. 一个靶子是半径为2米的圆盘,设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比, 并设射击都能击中靶, 以X表示弹着点与圆心的距离. 试求X的分布函数.

例2.　设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$

试确定常数k,并求$P\{X>0.1\}$

均匀分布

设随机变量X在区间$[a,b]$上取值,且概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称随机变量X在(a,b)上服从均匀分布,记作X~U(a,b).

若$X \sim U(a,b)$,则 $P\{c < X \le c+d\} = \int_c^{c+d} \frac{1}{b-a} dx = \frac{d}{b-a}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (x-a)/(b-a), & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

指数分布

若概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0, \\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$ $\theta>0$,则

称X服从参数为θ的指数分布.

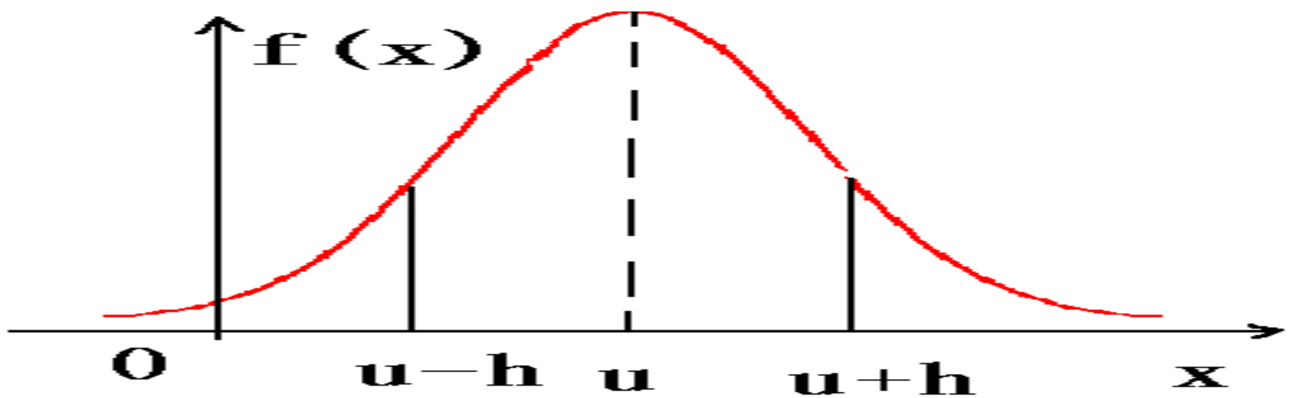
正态分布

(1)设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

其中$\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数,则称X服从参数为μ,σ的正态分布,记作$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

其图像为:



分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$

性质: 1 曲线关于$x=\mu$对称, 这表明对$\forall h>0$有

$$P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\}.$$

2 当$x=\mu$时取最大值. $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

(2)标准正态分布:

当$\mu = 0, \sigma = 1$时,$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

则称X服从标准正态分布,记$X \sim N(0,1)$.

其中$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(x)$即标准正态分布函数,

其表已列出供查用.

引理：若$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$,则$\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$.

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,它的分布函数$F(x)$可写成：

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\frac{X - \mu}{\sigma} \le \frac{x - \mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x - \mu}{\sigma}).$$

对于任意区间$(x_1, x_2]$,有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\}$$

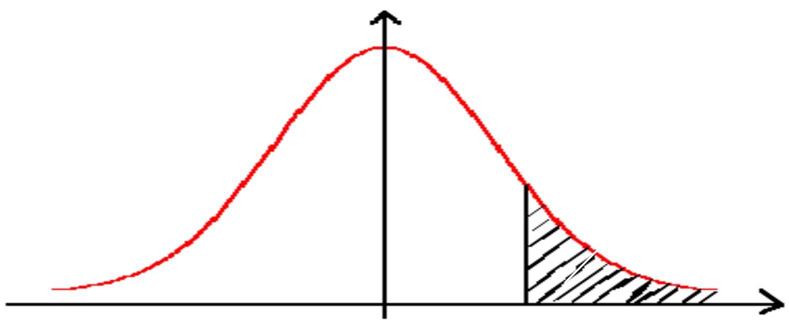
$$= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

例如,设$X \sim N(1,4)$,求 $P\{0 < X \le 1.6\}$

设$X \sim N(0,1)$,若z_α满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha,\ \ 0 < \alpha < 1,$$

则称点z_α为标准正态分布的上α分位点,



例 设某商店出售的白糖每包的标准全是500克,设每包重量X(以克计)是随机变量,X~N(500,25),求:

(1) 随机抽查一包, 其重量大于510克的概率;

(2) 随机抽查一包, 其重量与标准重量之差的绝对值在8克之内的概率;

(3 求常数c,使每包的重量小于c的概率为0.05.

负指数分布

1. 定义: 如果连续型随机变量X的概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

则称X服从参数为λ的负指数分布,记为X~ε(λ).

伽玛分布

定义:　　如果连续型随机变量X的概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, x>0,\\ 0, \qquad \mathrm{x}\le 0.\end{cases}$$

其中,$\alpha>0,\beta>0$为参数,伽玛函数为$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$,

则称X服从伽玛分布,简记$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$.

2. 特例: $\Gamma(1,\beta)$ **是参数为**β**的指数分布.**

3. 伽玛函数的性质:

(i) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$; **(ii) 对于正整数**$n$, $\Gamma(n+1)=n!$;

(iii) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.