概率论2

随机变量及其分布

例1. 抛硬币试验中$S=\{H,T\}$, 引入以下变量X,

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, \mathrm{e} = \mathrm{T}, \\ 1, \mathrm{e} = \mathrm{H}. \end{cases}$$

即X(e)是定义在样本空间S上的一个实函数,对于不同的试验结果e, X取不同的值, 由于试验前不能预料e的取值, 因而X取1还是取0也是随机的。

例2. 测试灯泡寿命试验, 其结果是用数量表示的. 记灯泡的寿命为X, 则X是定义在样本空间

回顾离散型随机变量分布

设离散型随机变量X所有可能取值为$\mathrm{x_k}\ (k=1,2,3,\ldots)$

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\ldots K \qquad (1)$$

$$p_k\text{满足}: p_k\geq 0, k=1,2,\ldots,\text{且}\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1,$$

称(1)式为离散型随机变量X的概率分布

回顾离散型随机变量分布

(1)式也可用表格形式表示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

2. 求概率分布的步骤:

(1) 明确X的一切可能取值;

(2) 利用概率的计算方法计算X取各个确定值的概率, 即可写出X的分布律.

例1. 设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯,每盏信号灯以概率p禁止汽车通过, 以X表示汽车首次停下时已通过信号灯的盏数, 求X的分布律.(设各信号灯的工作是相互独立的).

例2. 袋中装有4只红球和2只白球,从袋中不放回地逐一地摸球, 直到第一次摸出红球为止,设X表示到第一次摸出红球时所摸的次数, 求X的分布律.

0--1分布

X	0	1
p_k	$1-p$	p

其中$0<p<1$,

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, \quad k=0,1$$

伯努利分布（二项分布）

定义：设试验E只有两个可能结果A与$\overline{A}$，且

$$P(A) = \mathrm{p} \quad (0 < \mathrm{p} < 1),$$

将试验E独立重复地进行n次,这样的试验称为伯努利试验.

例1. 设X是n重贝努利试验中事件A发生的次数, 成功的概率为p,则X是一个随机变量, 我们来求它的分布律. 若n=4, 求:P{X=k}， k=0, 1, 2, 3, 4.

设 X 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 成功的概率为 p,则它的分布律为：

$$P\{X = \mathrm{k}\} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}, \mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n}.$$

称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记为$X \sim b(n, p)$.

当$n=1$时，$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0, 1$, 即为0-1分布.

例2.某种电子元件的使用寿命超过1500小时为一级品, 已知一大批该产品的一级品率为0.2, 从中随机抽查20只, 求这20只元件中一级品只数X的分布律.

例3. 某人进行射击, 每次命中率为0.02, 独立射击400次, 试求至少击中两次的概率.

泊松分布

若 X 的分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$

其中$\lambda>0$是常数, 则称X服从参数为λ的泊松分布. 记为$X\sim\pi(\lambda)$或$P(\lambda)$.

(1) $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{P}\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$

(2)二项分布与泊松分布之间的关系.

泊松(Poisson)定理:

设随机变量序列 $\{X_n\}$, $\mathrm{X_n} \sim b(n, p_n)$,则

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = k\} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

其中 $np_n = \lambda > 0$, k为任一固定的非负整数.

泊松(Poisson)定理的意义：

1. 在定理的条件下, 二项分布的极限分布是泊松分布.

2. 当n很大且 p又较小时,

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ 其中} \lambda = np,$$

这就是二项分布的概率近似计算公式

在例3中, $X \sim b(400, 0.02)$, $\lambda = \text{np} = 400 \times 0.02 = 8$,

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400 \times (0.02) \times (0.98)^{399}$$

$$\approx 1 - e^{-8} - 8e^{-8} \approx 0.997$$

例5. 设有同类型设备300台, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是0.01, 设一台设备的故障由一个人处理, 问至少需配备多少工人, 才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01?

几何分布

进行重复独立试验, 设每次试验成功的概率为p, 失败的概率为1-p=q $(0<p<1)$, 将试验进行到出现一次成功为止, 以X表示所需的试验次数, 则X的分布律为:

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, \quad k=1, 2, \ldots$$

称为X服从参数为p的几何分布.

例 设某种社会定期发行的奖券,每券1元,中奖率为p,某人每次购买1张奖券, 如果没有中奖下次继续再买1张, 直到中奖止, 求购买次数X的分布律.

例 设某种社会定期发行的奖券,每券1元,中奖率为p,某人每次购买1张奖券, 如果没有中奖下次继续再买1张, 直到中奖止, 求购买次数X的分布律.

若该人共准备购买10次共10元钱, 即如果中奖就停止, 否则下次再购买1张, 直到10元共花完为止, 求购买次数Y的分布律.