# 1 Potencias

Si $x > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$ se define

$$x^n = x \cdot x \cdot \overset{(n)}{\ldots} \cdot x,$$
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$
$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n.$$

**Propiedades:**

· $x^p x^q = x^{p+q}$,

· $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$,

· $(xy)^p = x^p y^p$

· $(x^p)^q = x^{pq}$,

· $x^0 = 1$.

· (Binomio de Newton):

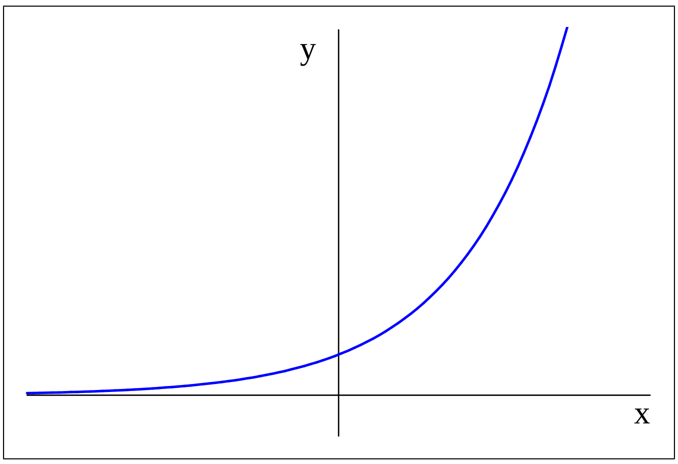
Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$, con $\dbinom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

· $(x^p)' = p x^{p-1}$

# 2 Función exponencial

Se llama función exponencial a la función $\exp(x) = e^x$, dónde $e = 2,7182...$ es el número de Euler. Este número se puede definir de varias formas, $e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, pero la propiedad fundamental que lo caracteriza es que

$$(e^x)' = e^x.$$




$y = e^x$

**Propiedades:**
· $e^x e^y = e^{x+y}$,

· $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$,

· $(e^x)^y = e^{xy}$,

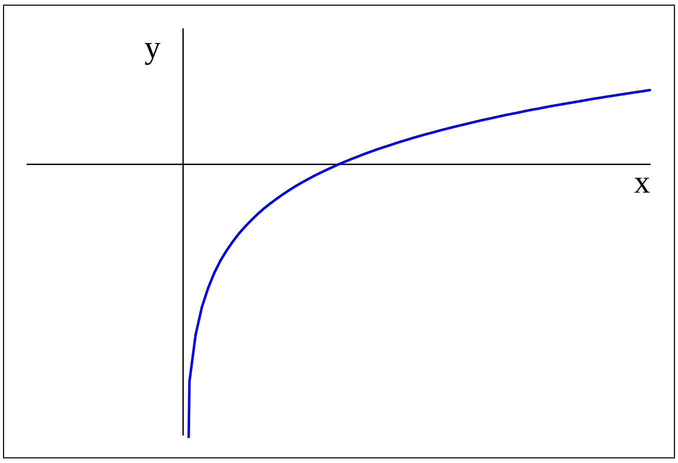
· $e^0 = 1$.

## 3 Logaritmo neperiano

La función logaritmo neperiano $\ln x$ es la inversa de la función exponencial, es decir,

$$e^{\ln x} = x,$$
$$\ln e^x = x.$$

El logaritmo sólo está definido para números positivos.




$y = \ln x$

Las propiedades del logaritmo se deducen de las de la función exponencial
**Propiedades:**
· $\ln(xy) = \ln x + \ln y$,

· $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$,

· $\ln(x^y) = y \ln x$,

· $\ln 1 = 0$,

· $\ln e = 1$,

· $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,

· $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Usando las propiedades del logaritmo tenemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln f(x)},$$

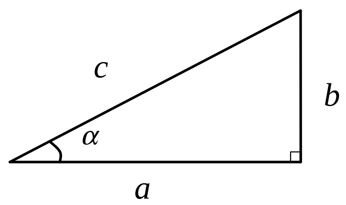
lo que permite expresar potencias arbitrarias como potencias con base el número $e$. Por ejemplo tenemos

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$
$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln(f(x))}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) =$$
$$f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x).$$

El logaritmo en otra base $b$ se puede obtener a partir del logaritmo neperiano por la fórmula $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$.

# 4 Funciones trigonométricas

En el triángulo rectángulo de la figura se definen las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ por




$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

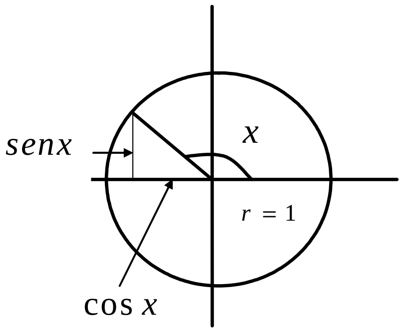
Se puede demostrar que las razones trigonométricas sólo dependen del ángulo, y no del triángulo que se tome.

Del teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$ deducimos que

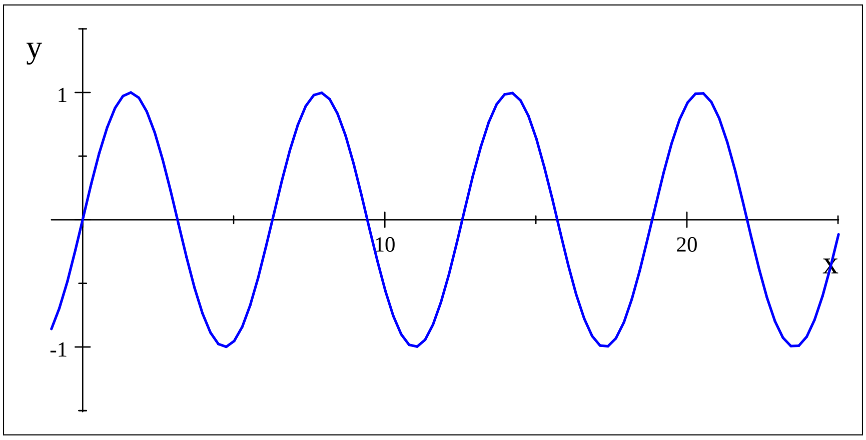
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

De esta fórmula deducimos que $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$.

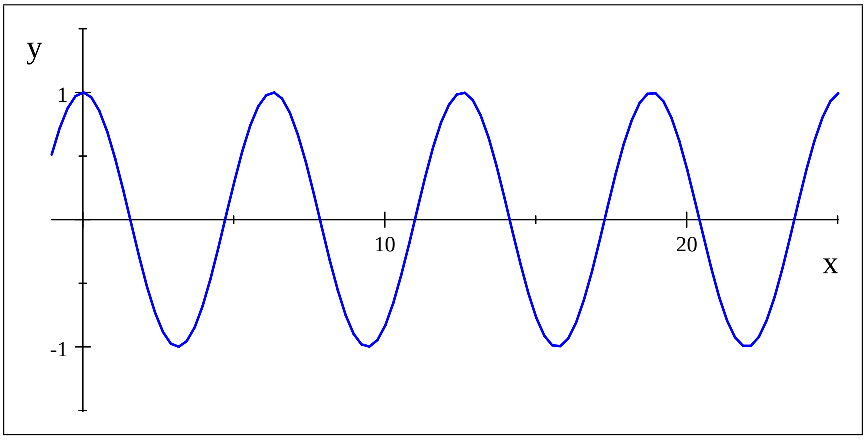
La definición de las razones trigonométricas se extienden a cualquier valor de $x$ considerando el punto de la circunferencia de centro el origen y radio 1 que forma un ángulo $x$ con el eje horizontal. Sus coordenadas horizontal y vertical son respectivamente el coseno y el seno del ángulo




Las gráficas de las funciones seno y coseno son las siguientes:




$y = \operatorname{sen} x$




$y = \cos x$

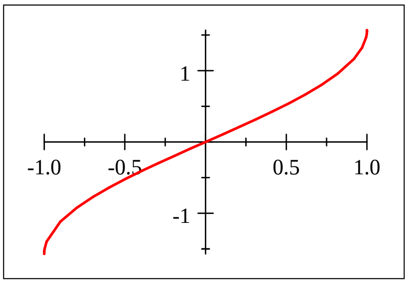
Las funciones trigonométricas son funciones periódicas de periodo $2\pi$, es decir, $\operatorname{sen}(x + 2\pi k) = \operatorname{sen}(x)$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Las derivadas de las funciones trigonométricas son

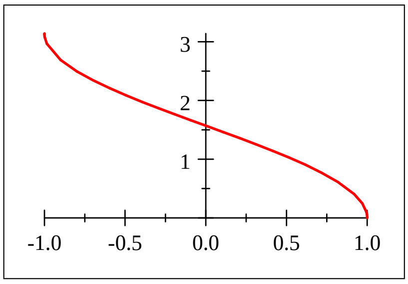
$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x,$$
$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

De ellas deducimos $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

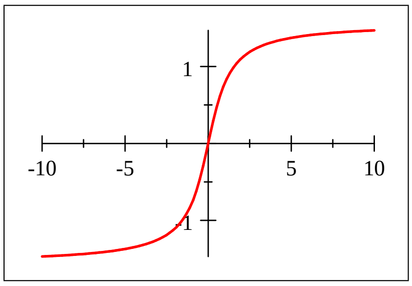
Las funciones inversas trigonométricas $\operatorname{arcsen}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, y $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ son funciones que cumplen $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, (pero en general $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) \neq x$, $\arccos(\cos x) \neq x$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \neq x$).



$\operatorname{arcsen} x$



$\arccos x$



$\operatorname{arctg} x$

Sus derivadas son

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Identidades trigonométricas**

Ángulo opuesto

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

Ángulo suma

$$\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

De estas propiedades se deducen otras que a veces son útiles

Ángulo complemetario

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

Ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

Transformación de productos en sumas

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$
$$\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)\right)$$