姓名：<u>　舒奥　</u> 学号:<u>23013082011</u>

1. 写出信息光学中卷积与相关的定义（数学表达式），说明两者各种的物理意义，并简述两者联系与区别？

解：(1)卷积的数学表达式：设两个复值函数 *f(x,y)*和 *h(x,y)*，则两者的卷积定义为 $g(x,y)=f(x,y)*h(x,y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta$.

卷积的物理意义：像强度分布是物强度分布与单位强度点光源对应的像强度分布的卷积。

(2)相关的数学表达式：设两个复值函数 *f(x,y)*和 *h(x,y)*，则两者的相关定义为

$$g(x,y)=f(x,y)\otimes h(x,y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha,\beta)h^{*}(\alpha-x,y-\beta-y)d\alpha d\beta$$

相关的物理意义：相关是两个信号之间相似性的度量。

2. 已知函数 $f(x)=rect(x+2)+rect(x-2)$，求下列函数，并画出函数图形。

(1) *f(x-1)*
(2) *f(x)sgn(x)*
(3) *f(x)*f(x)*
(4) *f(x)*$\otimes$*f(x)*
解：
(1) 由 *f(x)*可得 *f(x-1)*的公式为

$$f(x-1)=rect(x+1)+rect(x-3)$$

*f(x)*的函数图形如图 1(a)所示，将 f(x)向右移动 1 个单位可得 f(x-1), 如图 1(b)所示。

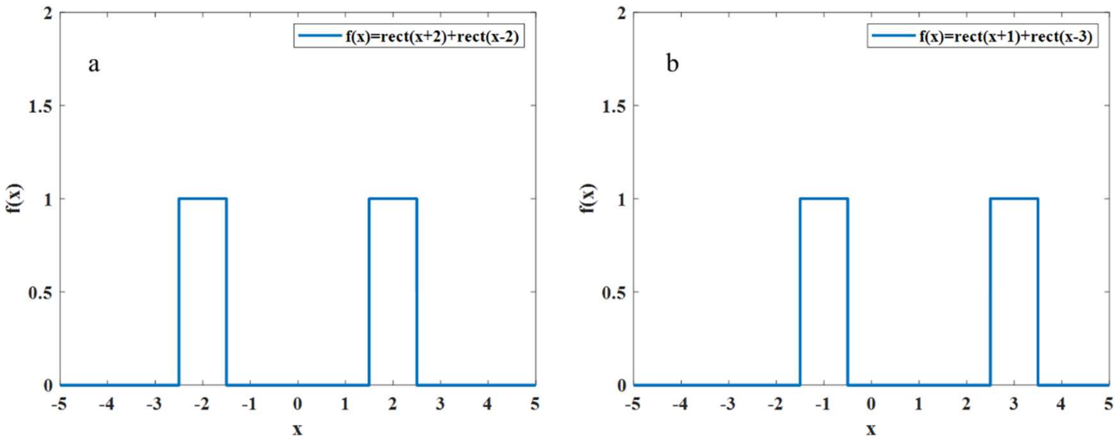

图 1

(2) *sgn(x)*定义如下：

$$sgn(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

对于 $x>0$ 的部分，$f(x)$的值保持不变，对于 $x<0$ 的部分，$f(x)$变为负值。因此，

$$f(x)sgn(x)=-rect(x+2)+rect(x-2)$$

$f(x)sgn(x)$如图 2 所示。

(3) 设 $g(x)=f(x)*f(x)$。由图 1 可知，$f(x)$的左边界横坐标和右边界横坐标分别为 $x_l=-2.5$ 和 $x_r=2.5$。根据卷积运算的展宽效应，$g(x)$的左右边界横坐标为 $x_l=-5$, $x_r=5$。在 x 从$-\infty$到$+\infty$, $g(x)$除了几个极值点或者零点外都是线性变化。因此只需要计算出 $g(x)$极值点或者零点以及变化规律便可以得到 $g(x)$的图形。如图 3 所示。

1) 当$-5<x<-4$ 时，$g(x)=\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}+x}1d\alpha=x+5$

2) 当$-4<x<-3$ 时，$g(x)=\int_{x+\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}}1d\alpha=-x-3$

3) 当$-1<x<0$ 时，$g(x)=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}+x}1d\alpha+\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}+x}1d\alpha=2x+2$

4) 当 $0<x<1$ 时，$g(x)=\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}}1d\alpha+\int_{\frac{3}{2}+x}^{\frac{5}{2}}1d\alpha=-2x+2$

5) 当 $3<x<4$ 时，$g(x)=\int_{\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}+x}1d\alpha=-3+x$

6) 当 $4<x<5$ 时，$g(x)=\int_{-\frac{5}{2}+x}^{\frac{5}{2}}1d\alpha=5-x$

综上，

$$g(x)=2tri(x)+tri(x-4)+tri(x+4)$$

(4) 设

$$g(x)=f(x)\otimes f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)f^*(\alpha-x)d\alpha$$

由于$f(x)$是实偶函数，则有

$$f^*(\alpha-x)=f(x-\alpha)$$

因此，$f(x)$的自相关和$f(x)$与$f(x)$的卷积图形及数学表达式一样，如图 3 所示。

$$g(x)=f(x)\otimes f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)f^*(\alpha-x)d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)f(x-\alpha)d\alpha$$

3. 已知函数 $f(x) = rect(x+2) + rect(x-2)$，求函数的自相关，并画出图形。
解：答案和题 2.(4)一样。如图 3 所示。

$$r_{ff}(x) = f(x) \otimes f(x) = 2tri(x) + tri(x-4) + tri(x+4)$$

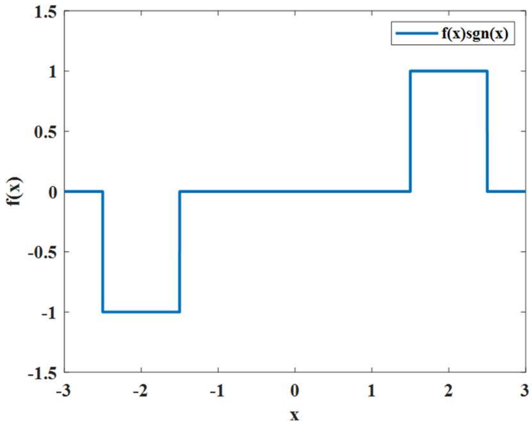

图 2

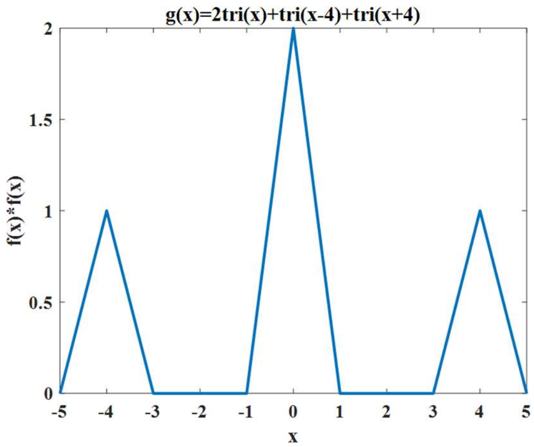

图 3

4. 把下列函数表示成指数傅里叶级数，并画出频谱。

(1) $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect(x-2n)$

(2) $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} tri(x-2n)$

解：

(1) $f(x)$如图 4(a)所示，$f(x)$的周期为 2，所以 $f_x=1/T=1/2$, 则有

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_x x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\pi x}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_T f(x) e^{-j2\pi n f_x x} dx = \frac{1}{2} sinc(\frac{n}{2})$$

因此，

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} sinc(\frac{n}{2}) e^{jn\pi x}$$

$f(x)$的频谱图如图 4(b)所示。

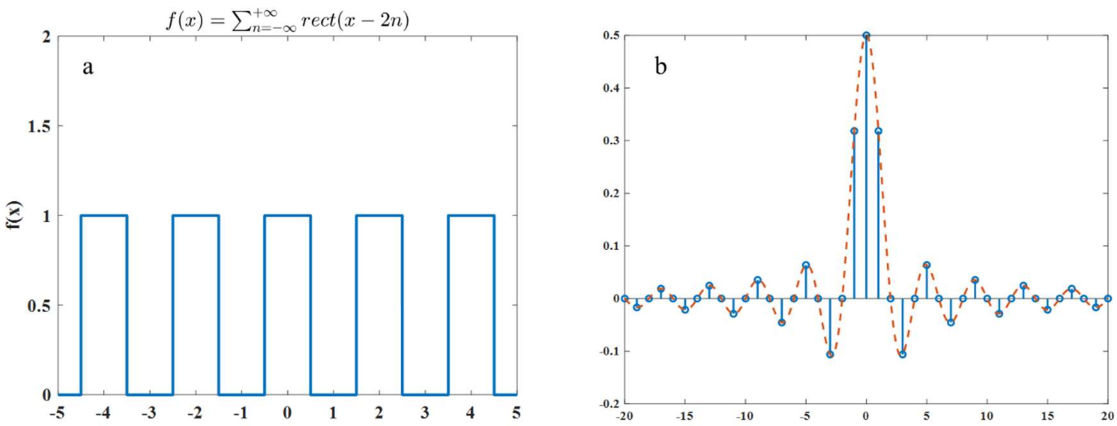

图 4

(2) g(x)如图 5(a)所示，*g(x)*的周期为 *T=2*, $f_x=\frac{1}{T}=\frac{1}{2}$。设 $g_1(x)=g(x),-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$。

$$g_1(x)\Leftrightarrow G(f)=sinc^2(f)$$

根据傅里叶级数与傅里叶变换的关系可得，

$$Cn=\frac{1}{T}G(jnfx)=\frac{1}{2}sinc^2(\frac{n}{2})$$

*f(x)*的频谱图如图 5(b)所示。

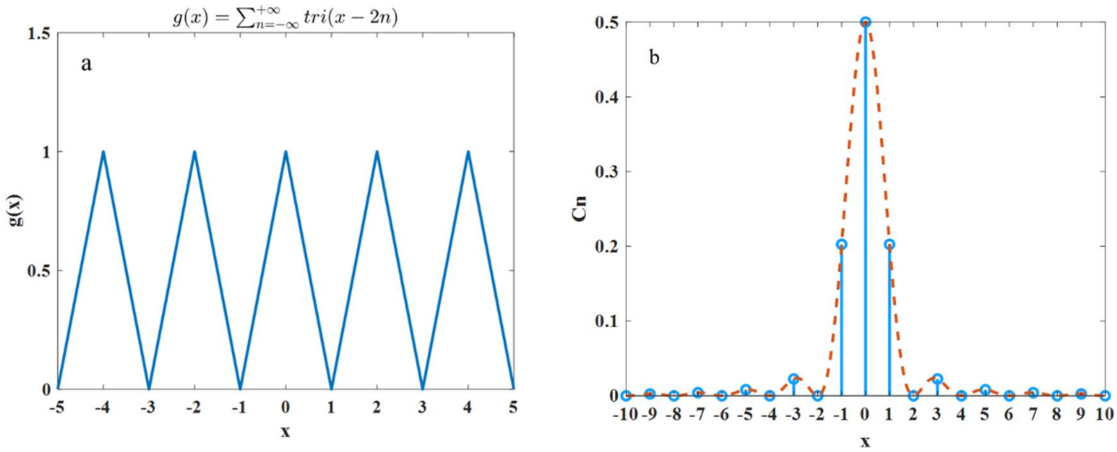

图 5

5. 利用梳函数与矩形函数的卷积表示线光栅的透过率。假定缝宽为 *a*，光栅常数为 *d*，缝数为 *N*。

解：线光栅如图 6 所示，线光栅的透过率为

$$t(x)=[\frac{1}{d}comb(\frac{x}{d})*rect(\frac{x}{a})]rect(\frac{x}{Nd})$$

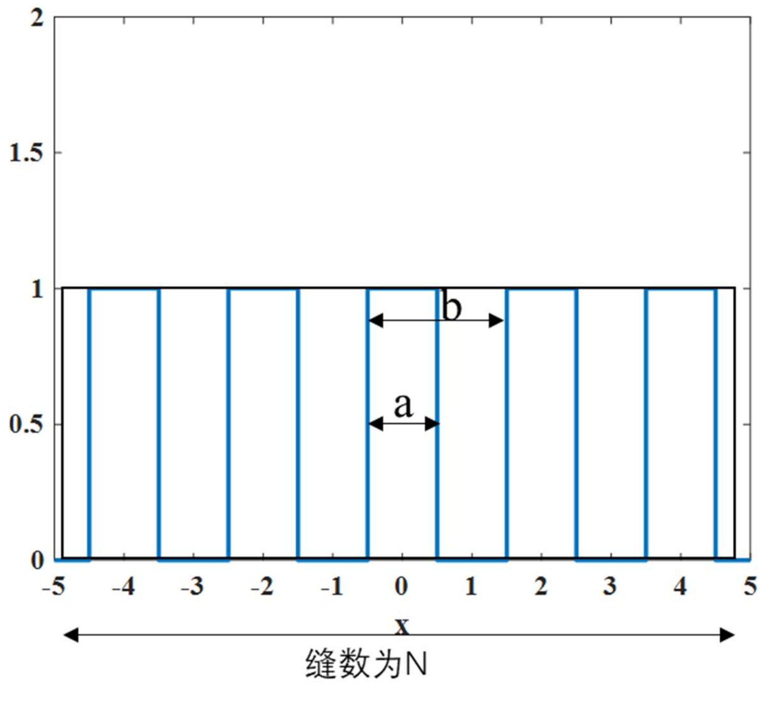

图 6