

Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и технологий  
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

**Отчёт по лабораторной работе**

**Дисциплина:** Телекоммуникационные технологии

**Тема:** Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция сигналов.

Выполнил студент группы 33501/4

\_\_\_\_\_  
(подпись) Покатило П.А.

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(подпись) Богач Н.В.

Санкт-Петербург  
2017

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>2</b>
3.1	Синусно-косинусная форма . . . . .	2
3.2	Вещественная форма . . . . .	2
3.3	Комплексная форма . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Ход работы</b>	<b>3</b>
4.1	Прямоугольный импульс . . . . .	3
4.2	Треугольный импульс . . . . .	4
4.3	Импульс функции sinc . . . . .	5
4.4	Радиоимпульс с гауссовой огибающей . . . . .	6
4.5	Конечная последовательность импульсов . . . . .	7
4.6	Последовательность прямоугольных импульсов . . . . .	8
4.7	Гармонические колебания . . . . .	9
4.8	Пилообразный сигнал . . . . .	11
4.9	Функция Дирихле . . . . .	12
4.10	Работа с корреляцией сигналов . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>14</b>

# 1 Цель работы

Познакомиться со средствами генерации и визуализации простых сигналов и получить представление об их спектрах.

## 2 Постановка задачи

- Для сигналов, построенных в лабораторной работе №1, выполнить расчет преобразования Фурье, получить спектры;
- С помощью функции корреляции найти позицию синхросылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получить пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхросылки. Вычислить корреляцию прямым методом, пользуясь алгоритмом быстрой корреляции, сравнить время работы обоих алгоритмов;
- Быстрая корреляция.

## 3 Теоретические сведения

Преобразование Фурье является инструментом спектрального анализа непериодических сигналов. Его можно применять и к сигналам периодическим, но для этого требуется использование аппарата обобщенных функций. Для разложения в ряд Фурье периодических сигналов, их следует представить в виде суммы гармонических функций, либо в виде комплексных экспонент с частотами, образующими арифметическую прогрессию. Для существования такого сигнала, функция, описывающая его, должна отвечать условиям Дирихле:

- В пределах периода функция может иметь конечное количество точек разрыва первого рода;
- В пределах периода функция имеет конечное число экстремумов

Гармонические компоненты сигнала образуют спектр. Различают несколько форм записи ряда Фурье:

1. Синусно-косинусная форма;
2. Вещественная форма;
3. Комплексная форма.

### 3.1 Синусно-косинусная форма

Ряд Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad (1)$$

где коэффициенты Фурье  $a_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$  определяются формулами

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (2)$$

Если  $s(t)$  является четной функцией, то все  $b_k = 0$ , если нечетной, то все  $a_k = 0$ .

### 3.2 Вещественная форма

Гармонику можно описать ее начальной фазой  $\phi_k$  и ее амплитудой  $A_k$ . Коэффициенты ряда Фурье:

$$a_k = A_k \cos(\phi_k), \quad b_k = A_k \sin(\phi_k),$$

Где,

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg}(\phi_k) = b_k/a_k.$$

Отсюда мы получаем форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \phi_k), \quad (3)$$

Можно отметить, что в данной формуле не фигурирует два слагаемых: синус и косинус. Отсюда следует, что данная формула удобнее синусно-косинусной формы.

Если  $s(t)$  является четной функцией, фазы  $\phi_k$  могут принимать лишь нулевые значения и  $\pi$ , а если  $s(t)$  - функция нечетная, то возможны только значения  $\pm\pi/2$ .

### 3.3 Комплексная форма

Ряд Фурье в комплексной форме:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t}, \quad (4)$$

Суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} (e^{jk\omega t + j\phi} + e^{-jk\omega t - j\phi}).$$

## 4 Ход работы

Построим спектры сигналов, рассмотренных в прошлой работе.

### 4.1 Прямоугольный импульс

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau_1, \\ 0, & |t| > \tau_1. \end{cases}$$

$$S(\omega) = \int_0^{\tau} A \exp(-j\omega t) dt = \frac{A}{j\omega} (1 - \exp(-j\omega\tau)) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \exp(-j\frac{\omega\tau}{2})$$

```
fs=1e3;
t=-40e-3:1/fs:40e-3;
T=20e-3;
A=5;
s=-A*rectpuls(t+T/2,T)+A*rectpuls(t-T/2,T);
FN=2^nextpow2(length(t));
freqs=(0:FN-1)/FN*fs;
S=fft(s,FN);
S1=angle(S);
```

```
figure
grid on
```

```
subplot(3,1,1)
plot(t,s);
ylim([-5 5]);
title('Signal');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');
```

```
subplot(3,1,2)
plot(freqs,S);
ylim([-10 150]);
title('Amplitude spectrum');
xlabel('Frequency');
```

```

ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,3)
plot(freqs, S1);
title('Phase spectrum');
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');

```

Листинг 1: Код MATLAB для прямоугольного импульса

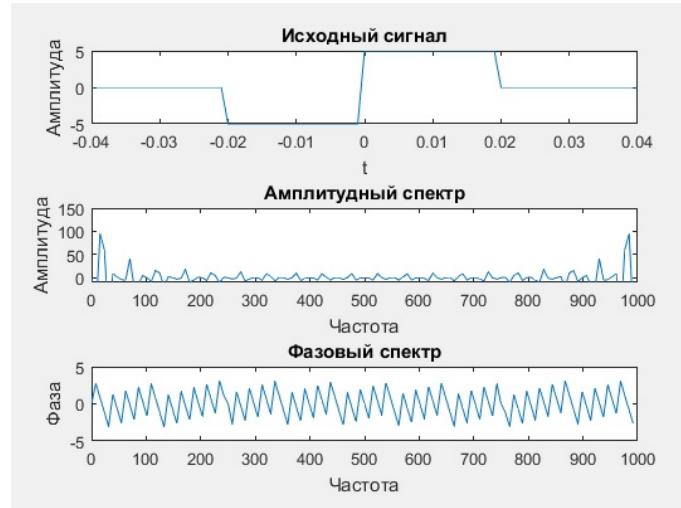


Рис. 1: Прямоугольный импульс, амплитудный и фазовый спектры

Дискретизация описывается как произведение исходного сигнала и бесконечной последовательности дельта-импульсов с частотой следования равной частоте дискретизации.

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp(-j\omega_m t) dt = \frac{1}{T}$$

В ряде получим умножение на сумму комплексных экспонент с показателями, кратными  $-j\omega_m t$ , то есть произойдёт сдвиг каждой копии на соответствующую частоту и копирование спектра.

## 4.2 Треугольный импульс

Разложение в ряд Фурье:

$$S(j\omega) = \frac{\tau}{2} \left( \sin c \left( \frac{\omega\tau}{4} \right) \right)^2$$

```

fs=1e3;
t=-50e-3:1/fs:50e-3;
A=10;
T1 = 20e-3;
T2 = 60e-3;
s=A*(T2*tripuls(t, T2) - T1*tripuls(t, T1))/(T2-T1);
FN=2^nextpow2(length(t));
freqs=(0:FN-1)/FN*fs;
S=fft(s, FN);
S1=angle(S);

S=abs(S);

figure

```

```

grid on

subplot(3,1,1)
plot (t, s);
title('Signal');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,2)
plot (freqs, S);
title('Amplitude spectrum');
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,3)
plot (freqs, S1);
title('Phase spectrum');
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

```

Листинг 2: Код MATLAB для построения треугольного импульса

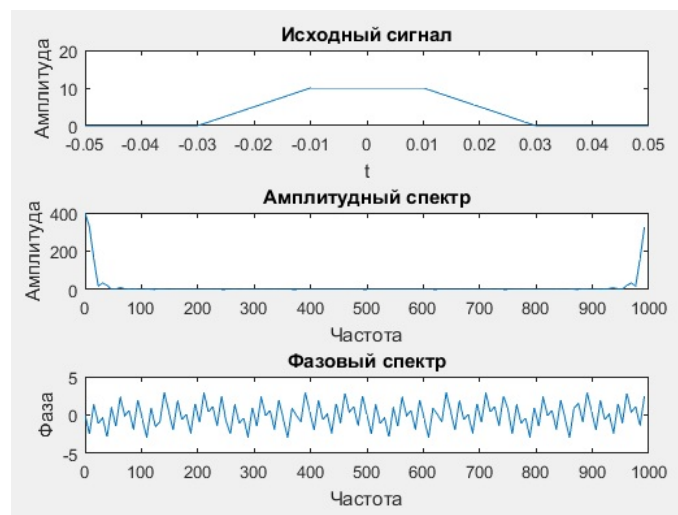


Рис. 2: Треугольный импульс и его спектры

### 4.3 Импульс функции sinc

```

fs=1e3;
t=-0.1:1/fs:0.1;
f0=10;
T=1/f0;
s=rectpuls(t, T).*cos(2*pi*f0*t);

FN=2^nextpow2(length(t));
freqs=(0:FN-1)/FN*fs;
S=fft(s, FN);
S1=angle(S);

S=abs(S);

figure

```

```

subplot(3,1,1)
plot (t, s);
title('Signal');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,2)
plot (freqs, S);
title('Amplitude spectrum');
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,3)
plot (freqs, S1);
title('Phase spectrum');
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

```

Листинг 3: Код MATLAB для построения функции `sinc`

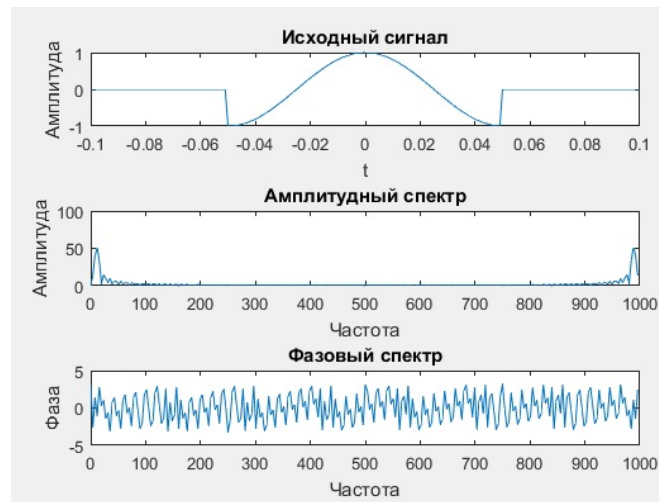


Рис. 3: Импульс функции `sinc` и его спектры

#### 4.4 Радиопульс с гауссовой огибающей

Спектр функции Гаусса:  $A\sqrt{\pi}/a \exp(-\frac{\omega^2}{4a^2})$

```

fs=16e3; t=-10e-3:1/fs:10e-3;
fc=4e3; bw=0.1; bwr=-20;
s=gauspuls(t, fc, bw, bwr);
FN=2^nextpow2 (length(t)) ;
freqs =(0:FN-1) /FN*fs ;
S=fft (s, FN); S1=angle (S); S=abs(S);

figure
subplot(3,1,1)
plot (t, s);
title('Signal');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,2)

```

```

plot (freqs , S);
title('Amplitude spectrum ');
xlabel('Frequency ');
ylabel('Amplitude ');

subplot(3,1,3)
plot (freqs , S1);
title('Phase spectrum ');
xlabel('Frequency ');
ylabel('Phase ');

```

Листинг 4: Код MATLAB для построения радиоимпульса с гауссовой огибающей

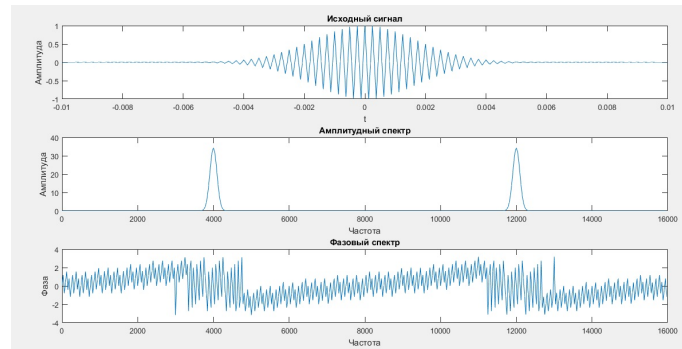


Рис. 4: Гауссов импульс и его спектры

## 4.5 Конечная последовательность импульсов

Разложение в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{U}{q^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2qU}{k^2\pi^2} \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{q}\right)\right) \cos(k\omega t)$$

```

fs=1e3;
t=0:1/fs:0.5;
tau=20e-3;
d=[20 80 160 260 380]*1e-3;
d(:,2)=0.8.^(0:4)';
s=pulstran(t, d, 'tripuls', tau);
FN=2^nextpow2 (length(t)) ;
freqs =(0:FN-1) /FN*fs ;
S=fft (s, FN);
S1=angle (S);

```

```
S=abs(S);
```

```
figure
```

```

subplot(3,1,1)
plot (t, s);
title('Signal');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude ');

```

```

subplot(3,1,2)
plot (freqs , S);
title('Amplitude spectrum ');
xlabel('Frequency ');
ylabel('Amplitude ');

```



```

subplot(3,1,3)
plot (freqs , S1);
title('Phase spectrum ');
xlabel('Frequency ');
ylabel('Phase ');

```

Листинг 5: Код MATLAB для построения конечной последовательности импульса

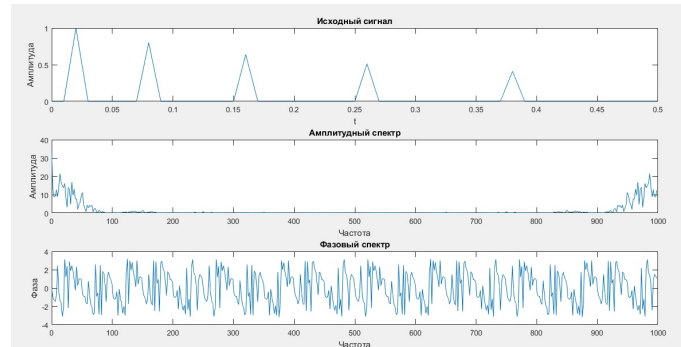


Рис. 5: Последовательность треугольных импульсов и её спектры

## 4.6 Последовательность прямоугольных импульсов

```

fs=1e3;
t=-10e-3:1/fs:50e-3;
A=3;
f0=50;
tau=5e-3;
s=(square(2*pi*t*f0, f0*tau*100)+ 1) *A/2;
FN=2^nextpow2 (length(t)) ;
freqs =(0:FN-1) /FN*fs ;
S=fft (s, FN);
S1=angle (S);

S=abs(S);

figure

subplot(3,1,1)
plot (t, s);
title('Signal ');
xlabel('Time ');
ylabel('Amplitude ');

subplot(3,1,2)
plot (freqs , S);
title('Amplitude spectrum ');
xlabel('Frequency ');
ylabel('Amplitude ');

subplot(3,1,3)
plot (freqs , S1);
title('Phase spectrum ');
xlabel('Frequency ');
ylabel('Phase ');

```

Листинг 6: Код MATLAB для построения последовательности прямоугольных импульсов

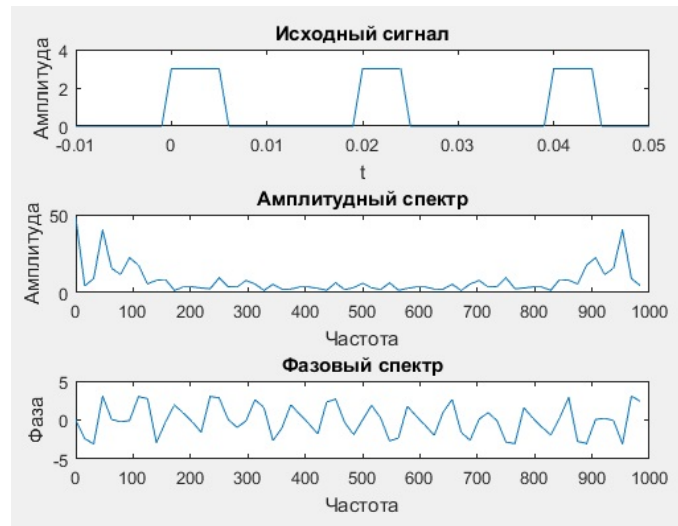


Рис. 6: Последовательность прямоугольных импульсов и ее спектр

## 4.7 Гармонические колебания

### Синусоидальный сигнал

```

Fs = 100;
Ph = pi/4;
A = 1.5;
f = 10;
nCyl = 5;
t = 0:1/Fs:nCyl*1/f;
x = A*sin(2*pi*f*t + Ph);
NFFT = 550;
X = fft(x,NFFT);
fVals = Fs*(-NFFT/2:NFFT/2-1)/NFFT;

figure

subplot(3,1,1)
plot(t, s);
title('Signal');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,2)
plot(fvals, S);
title('Amplitude spectrum');
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,3)
plot(fvals, S1);
title('Phase spectrum');
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

```

Листинг 7: Код MATLAB

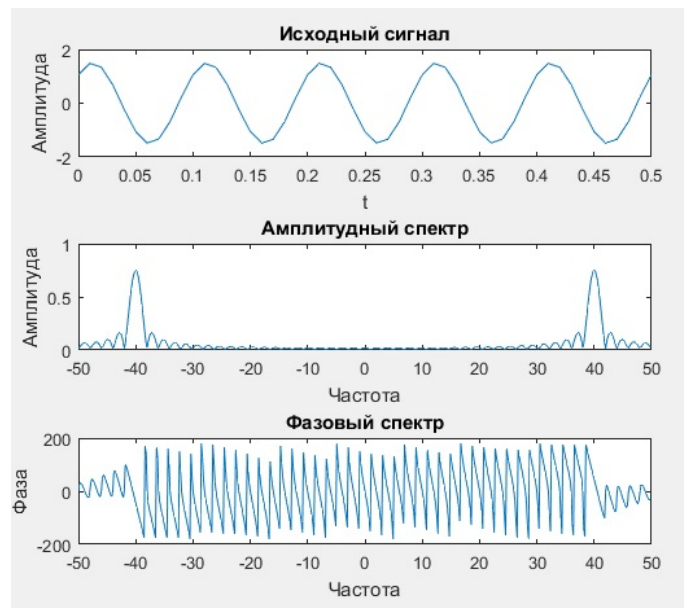


Рис. 7: Синусоидальный сигнал и его спектры

### Затухающий синусоидальный сигнал

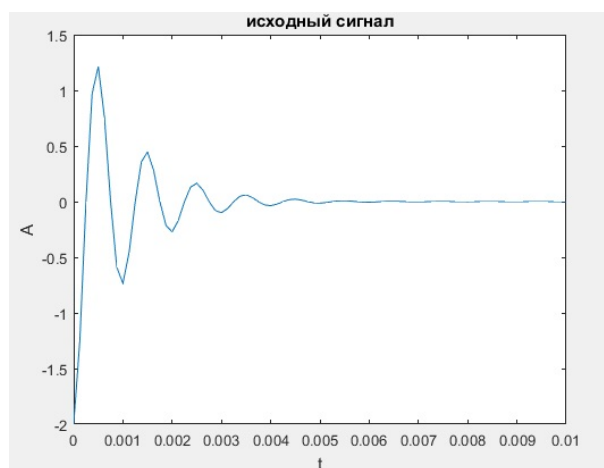


Рис. 8: Затухающий синусоидальный сигнал

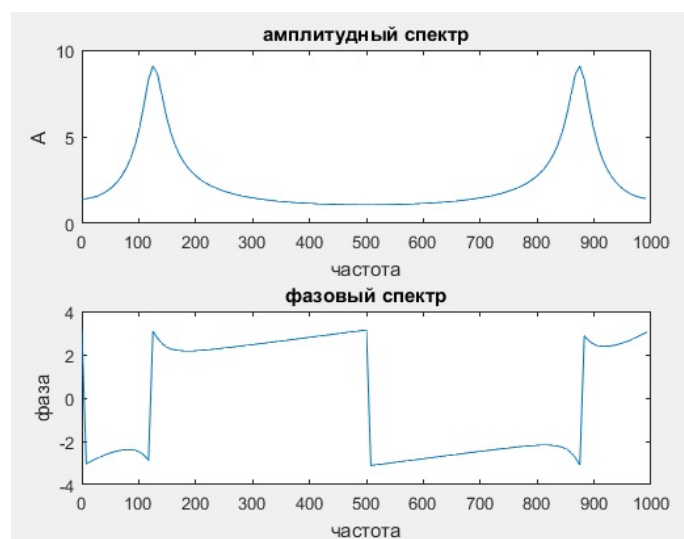


Рис. 9: Спектры

## 4.8 Пилообразный сигнал

Разложение в ряд Фурье:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{T}{k\pi} \sin(2k\pi/T)$$

При умножении на прямоугольное окно, добиться ровного пилообразного сигнала не получится. Это делается, так как на практике никогда не получится произвести расчет спектра путем численного интегрирования по всей оси времени. Для этого спектр рассчитывают на фиксированном интервале времени.

```
fs=1e3; t=-25e-3:1/fs:125e-3; A=5;
T=50e-3; t1=5e-3;
s= (sawtooth(2*pi*t/T, 1-t1/T)-1)*A/2;
FN=2^nextpow2 (length(t)) ;
freqs =(0:FN-1) /FN*fs ;
S=fft (s, FN);
S1=angle (S);
S=abs(S);

figure

subplot (3,1,1)
plot (t, s);
title ('Signal ');
xlabel ('Time ');
ylabel ('Amplitude ');

subplot (3,1,2)
plot (freqs, S);
title ('Amplitude spectrum ');
xlabel ('Frequency ');
ylabel ('Amplitude ');

subplot (3,1,3)
plot (freqs, S1);
title ('Phase spectrum ');
xlabel ('Frequency ');
ylabel ('Phase ');
```

Листинг 8: Код MATLAB для построения пилообразного сигнала

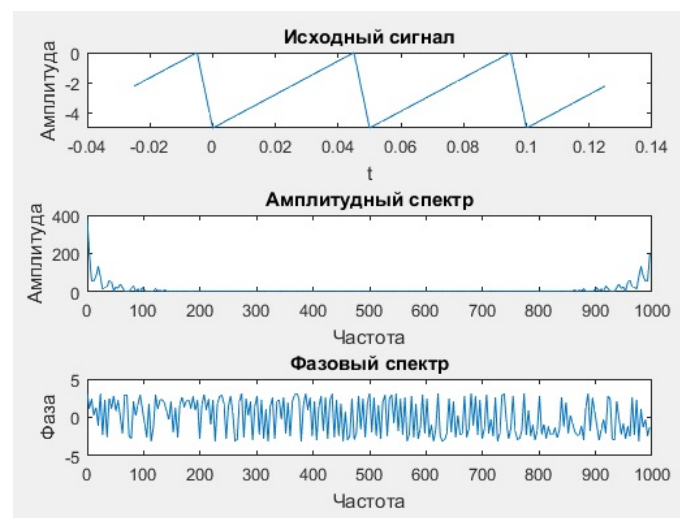


Рис. 10: Пилообразный сигнал и его спектры

## 4.9 Функция Дирихле

```
fs=1e3;  
t=0:0.01:15;  
s=diric(t, 7);  
FN=2^nextpow2 (length(t)) ;  
freqs =(0:FN-1 ) /FN*fs ;  
S=fft (s, FN);  
S1=angle (S);  
  
S=abs(S);  
  
figure  
grid on  
  
subplot(3,1,1)  
plot (t, s);  
title('Signal');  
xlabel('Time');  
ylabel('Amplitude');  
  
subplot(3,1,2)  
plot (freqs, S);  
title('Amplitude spectrum');  
xlabel('Frequency');  
ylabel('Amplitude');  
  
subplot(3,1,3)  
plot (freqs, S1);  
title('Phase spectrum');  
xlabel('Frequency');  
ylabel('Phase');
```

Листинг 9: Код MATLAB для построения функции Дирихле

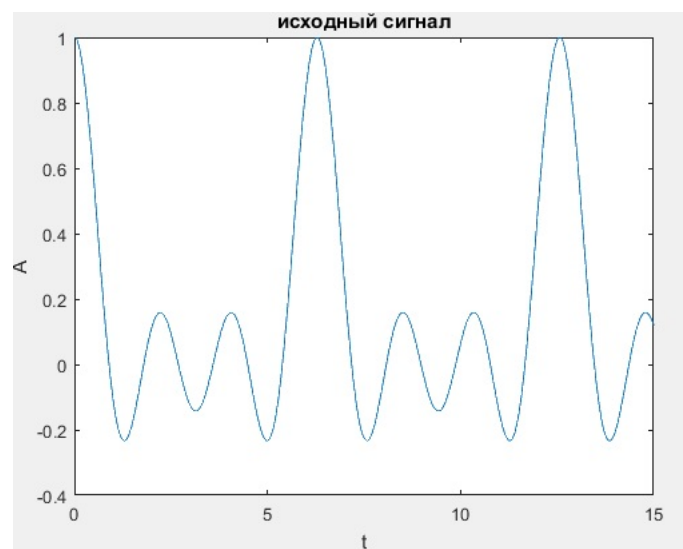


Рис. 11: Сигнал функции Дирихле

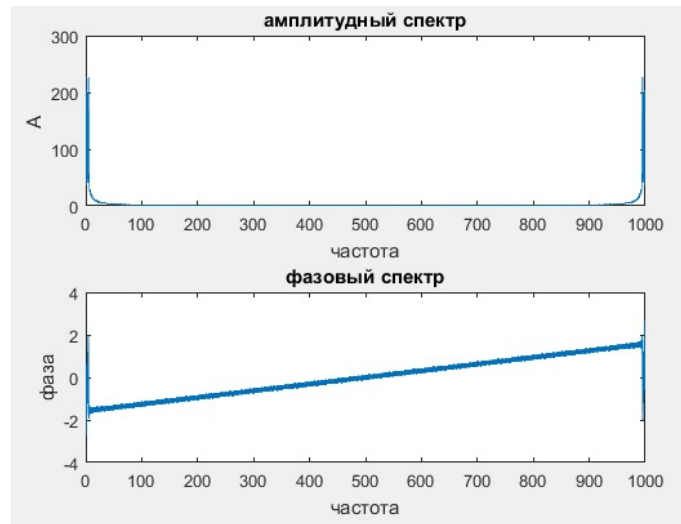


Рис. 12: Спектры сигнала функции Дирихле

#### 4.10 Работа с корреляцией сигналов

Найдем пакет в последовательности нулей и единиц с помощью корреляции сигналов. Используем встроенную функцию корреляции и собственную, использующую преобразование Фурье, сравним результаты и время вычислений.

Взаимная корреляция:

$$B(\tau) = s_1(t)s_2(t - \tau)dt \quad (5)$$

Для её расчёта воспользуемся встроенной функцией **xcorr**:

Алгоритм расчёта корреляции:

$$B(\tau) = F_D^{-1}[X_1 * (\tau)X_2(\tau)] \quad (6)$$

```
r = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
m = [1 0 1];
tic();
x1 = xcorr(r, m);
toc()
subplot(2,1,1);
plot(x1)
x = fast_correl(r,m);
subplot(2,1,2);
plot(x)

for i=1:length(r)
if (x(i)>1.5)
r(i+3 : i+10)
break;
end
end
```

Листинг 10: Код MATLAB корреляции сигнала

```

function [cr]=fast_correl(seq, sync)
tic();
fourier_sequence=fft(seq, 16);
fourier_syncro=fft(sync, 16);
conj_sync=conj(fourier_syncro);
fast_corr=ifft(fourier_sequence.*conj_sync);
cr=fast_corr;
toc();
plot(fast_corr);

```

Листинг 11: Код MATLAB для быстрой корреляции

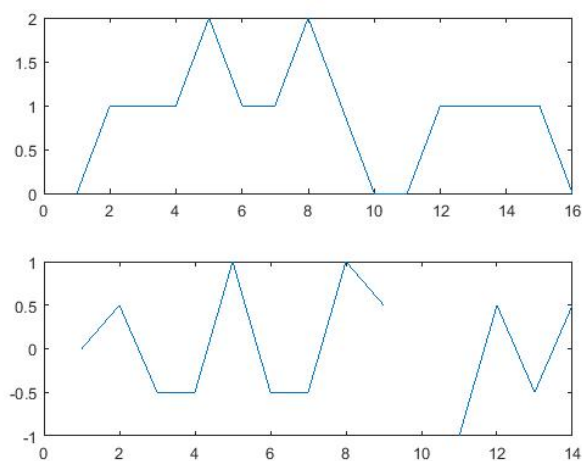


Рис. 13: Результат расчёта корреляции обычным и быстрым методами

Обычный расчет корреляции: 0.001167 секунд. Быстрый расчет корреляции: 0.000061 секунд. Результат работы программы подтверждает эффективность алгоритма быстрой корреляции.

## 5 Выводы

В ходе работы были получены базовые знания о преобразовании Фурье и его роли в телекоммуникационных системах. Преобразование Фурье используется для ускорения расчета корреляции сигналов и поиска гармоник, составляющих сигнал. Для извлечения нужных частот, нужно провести прямое преобразование Фурье, что позволит рассчитать воздействие системы на проходящий в ней сигнал, а затем выделить взаимосвязь этих сигналов.