Tema 3: Espacios Vectoriales

3.1. Espacio Vectorial:

Un espacio vectorial es un conjunto V (cuyos elementos se llaman vectores) en el que hay definidas dos operaciones:

- una suma de vectores, es decir, una operación que a cada par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V$ les asigna una suma $\vec{u} + \vec{v} \in V$, y
- un producto vector por un escalar, que a cada $\lambda \in \boldsymbol{R}$ y cada vector $\vec{u} \in V$ les asigna un vector $\lambda \cdot \vec{u} \in V$.

Además, estas operaciones han de cumplir las propiedades siguientes (donde las letras griegas representan números reales y las latinas vectores):

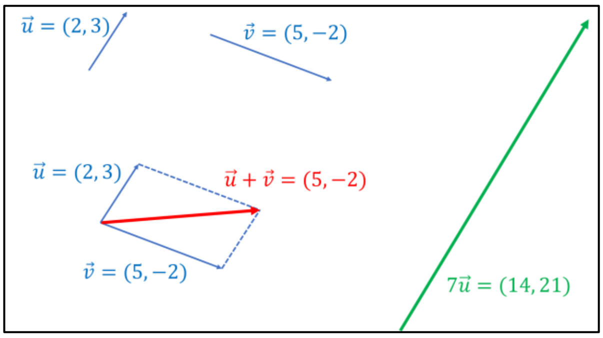
1. Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. Asociativa (suma): $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,
3. Existe un elemento neutro de la suma: el vector $\vec{0} \in V$, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, para todo vector $\vec{u} \in V$.
4. Existe un elemento opuesto para cada vector $\vec{u} \in V$, existe otro vector $-\vec{u}$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
5. Distributiva (producto-suma): $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
6. Distributiva (suma-producto): $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
7. Asociativa (producto matriz-escalar): $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
8. Existe un elemento neutro del producto de un escalar por una matriz: el 1 (escalar), tal que $1.\vec{u} = \vec{u}$, para todo vector $\vec{u} \in V$.

Ejemplo numérico:

Sea el espacio vectorial el conjunto formado por los vectores en el plano, es decir, vectores en $\mathbf{R}^2$, con las siguientes operaciones:

- SUMA de vectores: $\vec{u} + \vec{v} \in V$
  Sea dos vectores cualesquiera de $\mathbf{R}^2$:
  $\vec{u} = (2,3) \in \mathbf{R}^2$
  $\vec{v} = (5,-2) \in \mathbf{R}^2$
  Entonces: $\vec{u} + \vec{v} = (2,3) + (5,-2) = (7,1) \in \mathbf{R}^2$

- Producto de vector por un escalar:
  Sea un escalar cualquiera:
  λ=7
  Entonces: $\lambda\,\vec{u} = 7(2,3) = (14,21) \in \mathbf{R}^2$



Además, este conjunto tiene, entre otras propiedades:

- Elemento neutro: $\vec{0} = (0,0)$
- Elemento opuesto: $-\vec{u} = (-2,-3)$

3.2. Subespacio Vectorial:

Un subespacio vectorial W de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que tiene estructura de Espacio Vectorial, con las mismas operaciones de suma y producto que V. En la práctica, para que esto suceda basta con que W cumpla las propiedades siguientes:

1. $\vec{0} \in W$. Es decir, que exista elemento neutro en W.
2. Si $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2} \in W$, entonces $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \in W$. Es decir, que la suma de dos elementos de W sea otro elemento de W.
3. Si $\lambda \in \boldsymbol{R}$ y $\overrightarrow{u_1} \in W$, entonces $\lambda\overrightarrow{u_1} \in W$.

Ejercicio:

Consideremos el espacio vectorial el conjunto formado por los vectores en el espacio (3D), es decir, vectores en **R³**. Comprueba si los siguientes subconjuntos de **R³** son subespacios vectoriales:

1) Vectores que están en el plano XY cuya coordenada z=0, es decir, los vectores de la forma: (x, y, 0).

2) Vectores que están en el plano paralelo a XY cuya coordenada en z es 3, es decir, los vectores de la forma: (x, y, 3)

3.3. Combinación lineal:

Un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$, si es el resultado de sumar los productos de dichos vectores por escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\vec{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}$$

Ejercicio:

Sea el vector $\vec{v} = (1, 3, 0)$ del espacio vectorial **R³**, comprueba si es o no combinación lineal de los vectores $\{\overrightarrow{v_1} = (1, 2, -1), \overrightarrow{v_2} = (0, 1, 5), \overrightarrow{v_3} = (3, -1, -2)\}$.

3.4. Dependencia e independencia lineal:

Los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ son linealmente independientes (l.i.) si ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ son linealmente dependientes (l.d.) si existe alguna combinación lineal de ellos igual al vector nulo, con algún escalar distinto de cero:

$$\exists \ \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

con algún $\lambda_i \neq 0$, donde $i = 1, 2, \dots, n$.

En otras palabras, si la única solución es la solución trivial: $\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_1 = 0$, entonces los vectores son linealmente independientes.

Ejercicio:

Identifica si los siguientes vectores de **R³** son linealmente independientes:

$\overrightarrow{u_1} = (1, 2, -1), \overrightarrow{u_2} = (0, 1, 5), \overrightarrow{v_3} = (3, -1, -2).$

3.5. Sistema generador de un Espacio Vectorial:

Un sistema generador de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_s}\}$ tal que

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \vec{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{v_s}$$

Es decir, cualquier vector de V se puede expresar como combinación lineal de dichos vectores.

Ejercicio:

Comprueba si el siguiente conjunto de vectores es un sistema generador de **R²** :

$\{\overrightarrow{u_1} = (1, 2), \overrightarrow{u_2} = (0, 3), \overrightarrow{u_3} = (-2, -4)\}.$

3.6. Base de un Espacio Vectorial:

Un conjunto de vectores $B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ constituyen una base de un espacio vectorial V si cumplen estas dos condiciones:

- $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ es un sistema generador de V
- Los vectores $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}$ son linealmente independientes.

Un caso particular es la denominada Base canónica de $\boldsymbol{R^n}$**:**

Todo vector de $\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \boldsymbol{R^n}$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\vec{v} = a_1(1,0,0,..,0) + a_2(0,1,0,..,0) + \dots + a_n(0,0,0,\dots,1)$$

A este conjunto de vectores $\{(1,0,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,0,\dots,1)\}$ se les denomina base canónica de $\boldsymbol{R^n}$, y habitualmente se les identifica como: $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$

Observaciones:

- Si un espacio vectorial V tiene un base con n vectores, entonces:
  - Todo conjunto de n vectores l.i. es base de V.
  - No pueden existir más de n vectores l.i. en V.
  - Toda base de V tiene n vectores.

Ejercicio:

Comprueba si el siguiente conjunto de vectores es una base de $\mathbf{R}^3$:

$\{\overrightarrow{u_1} = (1,1,1), \overrightarrow{u_2} = (-1,\ 0,2), \overrightarrow{u_3} = (-2,\ 1,0)\}$.

3.7. Dimensión de un Espacio Vectorial:

Si en un espacio vectorial V el mayor conjunto de vectores linealmente independientes tiene n vectores, entonces la dimensión de V es n.

Es decir, la dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores que forman una base de dicho espacio vectorial.

Ejercicio:

Identifique la dimensión del espacio vectorial representado por la siguiente base:

$B = \{(1,0,0,0), (0,2,0,0), (0,0,-1,0),\ (0,0,0,3)\}$

3.8. Dimensión de un Subespacio Vectorial:

Un subespacio vectorial S puede estar definido de las siguientes formas:

- Dando una base de ese subespacio vectorial: $B_S = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_k}\}$

  Entonces, la dimensión del subespacio vectorial S es el número de vectores de la base, en este caso, $Dim(S) = k$.

- Dando un conjunto de vectores generadores (sistema generador de W). Por ejemplo,
$$S = Lin\ (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_s})$$

  Entonces la dimensión del subespacio vectorial S es número de vectores linealmente independientes de S, es decir, en este caso, $Dim(S) = rg(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_s})$.

- Dando un conjunto de ecuaciones que han de cumplir los vectores que pertenecen al subespacio:
$$S = \{\vec{v} \in V / \boldsymbol{Av} = \mathbf{0}\}$$

  donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden $m \times n$, con $m < n$, $\boldsymbol{Av} = \mathbf{0}$ representa las ecuaciones que deben cumplir los vectores de S.

  Entonces la dimensión del subespacio vectorial S viene dada por:
$$Dim(S) = Dim(V) - rg(A)$$
  Es decir,
$$Dim(S) = Dim(V) - \textit{número de ecuaciones independientes}.$$

Ejercicio:

Identifique la dimensión del subespacio vectorial (W) de **R**^{3} representado por el siguiente sistema generador:

$W = Lin((1,0,0),(0,-1,0),(2,0,0))$

O lo que es lo mismo, por los vectores de la forma:

$W = \{\vec{v} = (x,y,0) \in \boldsymbol{R}^3\}$

O lo que es lo mismo:

$W = \{\vec{v} = (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 / z = 0\}$

O lo que es lo mismo, representado por su base: $W = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

3.9. Coordenadas de un vector respecto a una base:

Dada una base B de un espacio vectorial V, formada por los siguientes vectores:

$$B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$$

Entonces, cualquier vector $\vec{v} \in V$ se expresa de forma única como combinación lineal:

$$\vec{v} = \lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{w_n}$$

Los coeficientes $\lambda_1, \lambda_{2,} \dots, \lambda_n$ se llaman coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$.

Es decir, las coordenadas de un vector $\vec{v} \in V$ respecto a dicha base son los coeficientes que multiplican a los vectores de la base.

Ejercicio:

Hallar las coordenadas de los siguientes vectores de **R**^{3}: $(1,2,4)$ y $(2,3,-1)$

Respecto de la base: $B = \{(1,0,0),(0,2,1),(0,0,-1)\}$

3.10. Cambio de Base en un Espacio Vectorial:

Consideraciones previas:

- Las componentes de un vector dependen de la base que consideremos. Así, se puede entender que una base es un **sistema de referencia** y las componentes serían las coordenadas respecto a ella.
- Al cambiar de base, cambiarán las coordenadas, pero debe quedar claro que **el vector es el mismo**.
- Si no se especifica, entenderemos que las componentes de un vector están referidas a las base canónica.

Para simplificar, consideremos el espacio vectorial V (de dimensión 3) y dos bases:

$$B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$$

$$B' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$$

Conocidas las coordenadas de un vector con respecto a una base B, queremos conocer sus coordenadas respecto de la otra base B'.

Entonces,

Si el vector $\vec{v} \in V$ tiene coordenadas (a, b, c) conocidas respecto de B, quiere decir que

$$\vec{v} = a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} + c\overrightarrow{v_3}$$

Las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de B' serán (x, y, z) y vendrán dadas por:

$$\vec{v} = x\overrightarrow{w_1} + y\overrightarrow{w_2} + z\overrightarrow{w_3}$$

Igualando las dos expresiones:

$$a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} + c\overrightarrow{v_3} = x\overrightarrow{w_1} + y\overrightarrow{w_2} + z\overrightarrow{w_3}$$

Obtendríamos un sistema de 3 ecuaciones (cada una, la correspondiente componente de los vectores) y 3 incógnitas x, y, z.

Es decir, en forma matricial resolveríamos:

$$(\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\overrightarrow{w_1} \quad \overrightarrow{w_2} \quad \overrightarrow{w_3}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde $(\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3})$ y $(\overrightarrow{w_1} \quad \overrightarrow{w_2} \quad \overrightarrow{w_3})$ son matrices de 3x3, cuyas columnas son los vectores que se indican.

Y por tanto, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\overrightarrow{w_1} \quad \overrightarrow{w_2} \quad \overrightarrow{w_3})^{-1} (\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

A la matriz $(\overrightarrow{w_1} \quad \overrightarrow{w_2} \quad \overrightarrow{w_3})^{-1} (\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3})$ se le denomina P^{-1} "Matriz cambio de base de B a B'.

Es decir, $(\overrightarrow{w_1} \quad \overrightarrow{w_2} \quad \overrightarrow{w_3})^{-1} (\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3}) = P^{-1}$

$$(\overrightarrow{w_1} \quad \overrightarrow{w_2} \quad \overrightarrow{w_3}) = (\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3}) P$$

Entonces, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ejercicio:

Dado el vector $(1, 2, 3)$ referido a la base $B = \{(1, 0, 2), (0, 2, 1), (1, 2,0)\}$, determine sus componentes respecto de la base: $B' = \{(3, 0, 4), (0, 3, 4), (3, 4,0)\}$,

Ejercicio:

Sea $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ una base del espacio vectorial V. Se considera $B' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, donde:

$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$

$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}$

$\overrightarrow{v_3} = 3\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}$

a) Probar que B' es una base de V
b) Hallar las coordenadas de $\vec{m} = -2\overrightarrow{v_1}+3\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ respecto de B.