# Tema 4: Aplicaciones Lineales

## 3.1. Aplicación Lineal:

Una aplicación $f: V \rightarrow V'$ entre dos espacios vectoriales es lineal si se cumple las dos condiciones siguientes:

- $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$;

donde $\lambda$ es un escalar, y $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Ejemplo:

Identificar si las siguientes aplicaciones entre espacios vectoriales son lineales.

(a) $f(x,y) = (2x-y, 3y, x)$.

- $f\big((x,y)+(x',y')\big) = f(x+x', y+y') = (2(x+x')-(y+y'), 3(y+y'), x+x') =$
$= (2x-y, 3y, x) + (2x'-y', 3y', x') = f(x,y) + f(x',y')$
- $f\big(\lambda(x,y)\big) = f(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x - \lambda y, 3\lambda y, \lambda x) = \lambda(2x-y, 3y, x) = \lambda f(x,y)$

Sí, es una aplicación lineal

(b) $g(x) = e^x$.

- $g(x+x') = e^{x+x'} = e^x e^{x'} = g(x)\cdot g(x') \neq g(x) + g(x')$

Entonces, no es una aplicación lineal.

## 3.2. Clasificación de las aplicaciones lineales:

**a. Inyectivas:**
Si $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$, entonces $\vec{u} = \vec{v}$. En este caso diremos que $f$ es un MONOMORFISMO.

**b. Sobreyectivas:**
Si $\forall \vec{v} \in V', \exists \vec{u} \in V / f(\vec{u}) = \vec{v}$. En este caso diremos que $f$ es un EPIMORFISMO.

**c. Biyectivas:**
Si $f$ es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva), diremos que $f$ es un ISOMORFISMO.

Caso particular:

A veces se consideran aplicaciones en un mismo espacio vectorial, es decir, $f: V \to V$. En este caso, si la aplicación es lineal, se llama ENDOMORFISMO u OPERADOR LINEAL.

Si además es biyectiva diremos que $f$ es un AUTOMORFISMO.

### 3.3. Propiedades:

1. Toda aplicación lineal transforma el vector nulo del primer espacio en el vector nulo del segundo.
$$f(\vec{0}_V) = \vec{0}_{V'}$$

2. En toda aplicación lineal $f: V \to V'$, el transformado del primer espacio es un subespacio del segundo y se denomina ***Imagen de la función***.
$$Im(f) = \{\vec{v} \in V' / \exists \vec{u} \in V: f(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

3. En toda aplicación lineal $f: V \to V'$, el conjunto de vectores del primer espacio que se transforman en el vector nulo forman un subespacio vectorial que se denomina ***Núcleo de la aplicación***.
$$Ker(f) = \{\vec{u} \in V / f(\vec{u}) = \vec{0}_{V'}\}$$

4. Es condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal sea **inyectiva** que el núcleo de la aplicación sea el vector nulo de V.
$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow: Ker\ (f) = \vec{0}_V$$

### 3.4. Matriz asociada a una aplicación lineal

Toda aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensiones finitas $f: V \to V'$ está determinada por una matriz $A_{m \times n}$.

Ejemplo:

La aplicación $f(x, y, z) = (x + y, y - z, x + 2y - z)$ puede expresarse en forma matricial:

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z, x + 2y - z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ es decir,}$$
$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

La dimensión de la aplicación lineal coincide con el rango de la matriz que la determina:

$$Dim\left(Im(f)\right) = rg(A)$$

Ejemplo (continuación):

$$Rango(A) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2. \text{ Entonces, } Dim\left(Im(f)\right) = 2.$$

Expresada de esta forma la aplicación lineal, podemos afirmar que:

- $Im(f) = Subespacio\ generado\ por\ la\ \boldsymbol{columnas\ de\ la\ matriz\ A}$
- La aplicación $f$ es **sobreyectiva** si $Dim\ (Im(f)) = Dim(V')$
- $Ker\ (f) = \{\vec{x} \in V / \boldsymbol{A\vec{x}} = \boldsymbol{O_{V'}}\}$
- Las **columnas de A** son las **imágenes de los vectores de la base canónica de V**.

Ejemplo (continuación): $f(x, y, z) = (x + y, y - z, x + 2y - z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

La **imagen** de $f$ viene dada por: $Im(f) = Lin((1,0,1); (1,1,2); (0, -1, -1))$.

Una base de la Imagen de $f$ es: $B(Im(f)) = \{(1,0,1), (1,1,2)\}$.

Como la $Dim\ (Im(f)) = 2 \neq Dim(R^3)$ , entonces $f$ no es sobreyectiva.

El **núcleo** de $f$ viene dada por: $Ker(f) = \{(x, y, z)/x + y = 0; y - z = 0\} = \{(-\lambda, \lambda, \lambda)\}$

Una base del núcleo de $f$ es: $B(Ker(f)) = \{(-1,1,1)\}$

Como la $Ker(f) \neq \{(0,0,0\}$, entonces $f$ no es inyectiva.

**Imágenes de la base canónica**: {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, -1, -1)$$

### 3.5. Operaciones con Aplicaciones Lineales

- **SUMA de aplicaciones:**
  Dadas las siguientes aplicaciones: $f: V \to V'$ y $g: V \to V'$, se define
  $(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$.
  La matriz de la aplicación $(f + g)$ es la suma de las matrices de $f$ y $g$.

- **PRODUCTO de un escalar por una aplicación lineal:**

  El producto de un escalar $\lambda$ por una aplicación lineal $f: V \to V'$ y $g: V \to V'$ es otra aplicación lineal $\lambda f: V \to V'$ tal que $(\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$
  La matriz de la aplicación $(\lambda f)$ se obtiene multiplicando $\lambda$ por la matriz de $f$.

- **COMPOSICIÓN de aplicaciones lineales:**

  Dadas dos aplicaciones lineales: $f: V \to V'$ y $g: V' \to V''$ , la aplicación lineal $f$ compuesta con $g$ es la aplicación $(g \circ f): V \to V''$ tal que $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$.

  La matriz $g \circ f$ es el producto de matrices de $g$ y $f$ ($M_{g \circ f} = M_g \cdot M_f$).

- **INVERSA de una aplicación lineal:**

  Dada la aplicación lineal: $f: V \to V'$ , la aplicación lineal inversa, si existe, es $f^{-1}: V' \to V$ y verifica que $(f \circ f^{-1}) = Id$ y $f^{-1} \circ f = Id$ (siendo $Id: V \to V'$atal que $Id(\vec{x}) = \vec{x}$).

  Para que exista la aplicación lineal inversa, $f$ ha de ser biyectiva, lo que equivale a que exista la inversa de la matriz $f$.
  La matriz de $f^{-1}$ es la inversa de la matriz de $f$.

Ejemplo:

Sean las aplicaciones lineales: $f: R^3 \to R^3$ y $g: R^3 \to R^3$ dadas por:

$f(x, y, z) = (x, x - z, y)$ y $g(x, y, z) = (0, x, y)$

a) Realizar el análisis matricial de $f$ y $g$.

$$f(x, y, z) = (x, x - z, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces $Dim\left(Im(f)\right) = 3 = Dim\,(R^3)$ y por tanto $f$es sobreyectiva.

Además, $Ker(f) = \{(x, y, z)/x = 0; z = 0; y = 0\} = \{(0,0,0)\}$, entonces $f$ es inyectiva.

Al ser inyectiva y sobreyectiva, $f$ es biyectiva.

$$g(x, y, z) = (0, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$Rango(A) = rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Entonces, $Dim\left(Im(g)\right) = 2 \neq Dim(R^3)$ y por tanto $g$ no es sobreyectiva (ni por consiguiente, biyectiva).

El núcleo de $g$ viene dado por:

$Ker(f) = \{(x, y, z)/x = 0; y = 0\} = \{(0,0,z)\} = Lin((0,0,1))$. Por tanto, $g$ no es inyectiva.

b) Calcular $3f + 2g$.

$$M_{3f+2g} = 3M_f + 2M_g = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, la aplicación lineal será:

$$(3f + 2g)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x, 5x - 3z, 5y)$$

b) Hallar $f^{-1}$ y $g^{-1}$, si existen.

Al no ser $g$ biyectiva, no existe $g^{-1}$

Al ser $f$ biyectiva, sí existe $f^{-1}$, siendo

$$M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La aplicación lineal es:

$$f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, z, x - y)$$

c) Hallar las funciones $g \circ f$.

$$M_{g\circ f} = M_g \cdot M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la aplicación lineal será:

$$(g \circ f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, x, x - z)$$

Comprobación: $(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x)) = g(x, x - z, y) = (0, x, x - z)$