Tema 5: Autovalores y Autovectores

5.1. Autovector y Autovalor de una aplicación lineal f:

Dada la aplicación lineal $f: V \rightarrow V$ con matriz asociada A, diremos que un vector $\vec{u} \neq 0$ del espacio vectorial V es un **autovector** de f (o de A) si su imagen mediante f es proporcional a sí mismo. Es decir:

$\vec{u}$ es autovector de f si:

- $\vec{u} \neq 0$
- $\exists \lambda \in \boldsymbol{R} / f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

Al escalar λ se le llama **autovalor** de f (o de A).

Respecto a la matriz cuadrada A, la definición de autovalor-autovector queda de la siguiente forma:

$$\boxed{A\vec{u} = \lambda \vec{u}}$$

donde $\vec{u}$ es autovector y λ su correspondiente autovalor.

Ejemplo:

Hallar los autovalores y autovectores de $f: R^3 \rightarrow R^3$ siendo su matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores y autovectores de f cumplen:

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u}$$

Es decir, si $\vec{u} = (x, y, z)$, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Reescribiendo la ecuación $A\vec{u} = \lambda \vec{u}$, como $A\vec{u} - \lambda \vec{u} = \vec{0}$, resulta: $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$, es decir:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando resulta:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, resulta resolver este sistema de ecuaciones lineales homogéneo, que como sabemos, siempre es compatible.

Ahora bien, si el sistema es compatible determinado, la única solución es la solución trivial:

$(x = y = z = 0)$, es decir, $\vec{u} = (0,0,0)$ y la solución es el vector cero.

Si el sistema es compatible indeterminado, obtendremos una colección de vectores:

$\vec{u} = (x, y, z)$, que cumplirían dicha condición, para cada valor posible de λ.

En otras palabras, obtendríamos los autovalores $\{\lambda_i\}$ y los correspondientes autovectores $\{\vec{u}_{\lambda_i}\}$.

Entonces, para que el sistema sea compatible indeterminado el determinante de la matriz de coeficientes tiene que ser igual a cero, es decir:

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 1] = 0$$

Es decir, $(1-\lambda)^3 = 0$

Entonces, $\lambda = 1$ (triple)

Por tanto, la aplicación f (o la matriz A) sólo tiene un autovalor: $\lambda_1 = 1$ (con multiplicidad 3) y su correspondiente autovector se halla resolviendo dicho sistema de ecuaciones homogéneo para $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, se reduce a la siguiente ecuación:

$$-y + z = 0$$

En otras palabras, todos los vectores del subespacio vectorial siguiente constituyen el conjunto de autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$:

$$V_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in R^3 / -y + z = 0\} = \{(\alpha, \beta, \beta) \in R^3\}$$

O bien,

$$V_{\lambda_1} = Lin\{(0,1,1), (1,0,0)\}$$

5.2. Propiedades de los Autovectores y Autovalores de una aplicación lineal f:

- Un autovector lleva asociado un único autovalor, por ser $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ único.
- Sin embargo, un autovalor puede estar asociado a múltiples autovectores.

- Autovectores asociados a autovalores distintos dos a dos son linealmente independientes.
- Los autovectores asociados a un mismo autovalor λ_i, junto con el $\vec{0}$, forman un subespacio vectorial $L(\lambda_i)$, determinado por:

$$L(\lambda_i)=\{ \vec{u} \in V / \ (A - \lambda_i I)\vec{u} = \vec{0}\}$$

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de una aplicación f, entonces los subespacios generados por ellos son disjunto, es decir, ningún autovector puede serlo de dos autovalores distintos a la vez.

- Ser autovector es una propiedad que no depende de la base de referencia que se tome.

- Dada una matriz regular A (es decir, no singular, que su determinante es distinto de cero, y por tanto tiene inversa), los autovalores de su inversa son los inversos de sus autovalores.

5.3. Cálculo de Autovalores:

Se define el <u>polinomio característico</u> de la matriz A al polinomio en la variable λ que resulta al desarrollar el determinante $|A - \lambda I|$.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Los autovalores de una matriz cuadrada A son las raíces de su polinomio característico.

Para calcular los autovalores de una matriz cuadrada A de orden n, basta por tanto resolver la ecuación de grado n

$$|A - \lambda I| = 0$$

5.4. Cálculo de Autovectores:

Para cada autovalor λ se calcula su subespacio de autovectores asociado, resolviendo la ecuación:

$$(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$$

5.5. Matrices semejantes:

Se dice que dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes, si existe una matriz regular C, tal que:

$$A = C^{-1}BC$$

- Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, el mismo determinante y la misma traza*.
  *La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal.
- Además, si dos matrices son semejantes, también lo son sus potencias de exponente natural:

$$A^n = C^{-1}B^nC$$

Ejemplo:

Probar si las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

Para ser semejantes han de cumplir que existe una matriz C, tal que: $I = C^{-1}AC$, o lo que es lo mismo: $A = CIC^{-1}$. En este caso, equivale a decir que: $A = CC^{-1} = I$, pero sabemos que no es cierto, $A \neq I$.

Por tanto, estas matrices no son semejantes, aunque se puede ver que sí tienen la misma traza y el polinomio característico.

$$Traza(A) = 1 + 1 + 1 = 3 = Traza(I)$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

$$P(\lambda) = |I - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

5.6. Matriz diagonalizable:

Una matriz es diagonalizable si, y sólo si, A es semejante a una matriz diagonal**
**Matriz diagonal: aquella cuyos elementos no nulos están situados en la diagonal principal de la matriz.
Es decir, que existe una matriz cuadrada P regular, tal que:

$$D = P^{-1}AP,$$

Lo que equivale a que

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

- **Es condición necesaria y suficiente** para que la matriz cuadrada A **de orden n** sea diagonalizable, **que exista una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de autovectores** de A.

  En ese caso, D es la matriz diagonal formada por los autovalores, es decir,
  $$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$
  y P es la matriz formada por los autovalores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$, es decir,
  $$P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n),$$
  donde cada $\vec{v}_i$ es el autovector asociado al autovalor λ_i.

- Si la suma de las dimensiones de los subespacios asociados a los autovalores de la matriz cuadrada A coincide con la dimensión (orden) de la matriz A, entonces la matriz A es diagonalizable.

- Entonces, **si una matriz A tiene autovalores distintos**, entonces **A es diagonalizable**.

5.7. Matriz diagonalizable:

Sea Adiagonalizable y D la matriz diagonal semejante a A, entonces resulta que:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiar si A es diagonalizable y dar la relación que existe entre A y su matriz diagonal semejante.

Hallamos los autovalores de A mediante el polinomio característico:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$$

Entonces, los autovalores son: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$.

Como todos los autovalores son reales y distintos, la matriz A es diagonalizable. Las bases de los correspondientes subespacios de autovectores son:

$$B_{L(\lambda_1)} = \{(-1,1,1)\}$$

$$B_{L(\lambda_2)} = \{(1,-1,0)\}$$

$$B_{L(\lambda_3)} = \{(1,2,0)\}$$

De modo que la diagonalización de A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

5.8. Caso especial de las matrices siméticas:

- Si A es simétrica, A es diagonalizable.
- Los autovalores de una matriz simétrica son reales ($\lambda_i \in \boldsymbol{R}$).
- Si A es simétrica, existe una base de autovectores ortonormal (es decir, $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j \neq 0$ si $i \neq j$; $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1$), para la que la matriz P es ortogonal***.
  ***Matriz ortogonal: aquella que $PP^t = I$

Ejemplo:

Calcular A^5 siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Al ser A una matriz simétrica, A es diagonalizable, entonces el cálculo de A^nse puede realizar a partir de D^n, mediante la igualdad:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Para ello, calculamos los autovalores de A a través del polinomio característico:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 16\lambda - 20\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^3 = (-\lambda + 4)(\lambda - 2)^2$$

Los autovalores de A son:

$\lambda_1 = 4$, con multiplicidad 1, y $\lambda_2 = 2$, con multiplicidad 2.

Calculamos la base de autovectores para cada autovalor:

- Para $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Es decir,

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

  Solución: $x = z = \alpha; y = 0$.
  Entonces:

$$L(\lambda_1) = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R^3} / x - z = 0; y = 0\} = \{(\alpha, 0, \alpha)\} = Lin\{(1,0,1)\}$$

  Es decir, una de sus posibles bases es: {(1,0,1)}

- Para $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\{x + z = 0$$

Solución: $x = -z = \alpha; y = \beta$.

Entonces:

$$L(\lambda_1) = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}/x + z = 0\} = \{(\alpha, \beta, -\alpha)\} = Lin\{(1,0,-1), (0,1,0)\}$$

Es decir, una de sus posibles bases es: {(1,0,-1), (0,1,0)}

Finalmente, la matriz formada por la base de autovectores es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz diagonal D (semejante a A) formada por los autovalores de A es:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y por tanto,

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 528 & 0 & 496 \\ 0 & 32 & 0 \\ 496 & 0 & 528 \end{pmatrix}$$

NOTA:

Como A es simétrica se comprueba que existe una base de autovectores ortonormal: {(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)}, para la que la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = I$$

5.9. Aplicaciones en Economía:

Análisis de la solución de un sistema dinámico a lo largo del tiempo. La relación más común de un estado que evoluciona en el tiempo modificándose en cada período, viene dada por:

$$x_{t+1} = Ax_t$$

donde A es una matriz y x_t es el estado del sistema en el período t. Así, basta con conocer el estado en el período 0 para conocer cualquiera:

$$x_n = A^n x_0$$

El cálculo de A^n es sencillo si A es diagonalizable.

Ejemplo:

Dadas tres compañías de telefonía A, B, C de un país, se ha observado que, normalmente, la empresa A mantiene el 50% de sus clientes, pero el 30% pasa a la empresa B y el 20% a la C. La empresa B logra mantener el 80% de sus clientes y pierde un 20% repartido igualitariamente entre A y C. Por último, C conserva el 60% de su clientela, y del 40% restante, el 30% se va a A y el 10% a B.

a) Expresar el número de clientes de cada empresa en el año $t+1$ en función de los del año t.

Sea x_t, y_t, z_t los contratos de cada empresa A, B, C, respectivamente, en el instante t. Se tiene entonces que:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

b) Indique la evolución del mercado a lo largo del tiempo.

La evolución de los contratos a lo largo del tiempo vendrá dada por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz son: $\lambda_1 = 0.3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0.6$, que al ser distintos hacen que la matriz sea diagonalizable.
Por tanto, la diagonalizamos y calculamos de este modo su potencia de orden t:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = 1/12 \begin{pmatrix} 8(0.3)^t + 3 + (0.6)^t & 3 - 3(0.6)^t & -8(0.3)^t + 3 + 5(0.6)^t \\ -4(0.3)^t + 6 - 2(0.6)^t & 6 + 6(0.6)^t & 4(0.3)^t + 6 - 10(0.6)^t \\ -4(0.3)^t + 3 + (0.6)^t & 3 - 3(0.3)^t & 4(0.3)^t + 3 + 5(0.6)^t \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$