Tema 2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

PROGRAMACIÓN LINEAL

Ejercicios: SOLUCIONES

1. Problema de maximización de ingresos: formulación y resolución (Vitutor, Problemas I, ejercicio 5)

   1er paso: Elección de las incógnitas.

   x = nº de lotes de A
   y = nº de lotes de B

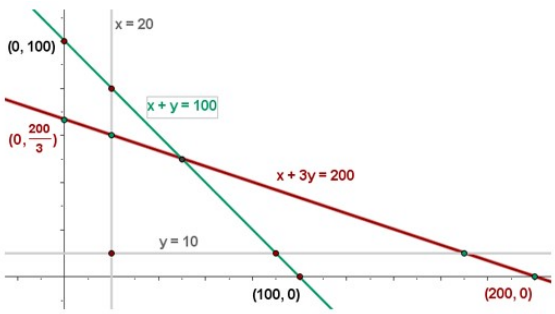
   2º paso: Función objetivo Máx z=f(x, y) = 30x + 50y

   3er paso: Restricciones

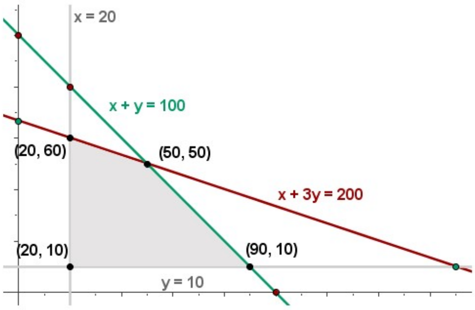
	A	B	Mínimo
Camisas	1	3	200
Pantalones	1	1	100

$x + 3y \leq 200$
$x + y \leq 100$
$x \geq 20$
$y \geq 10$

4º paso: hallar el conjunto de soluciones factibles



5º paso: calcular las coordenadas de los vértices del reciento de las soluciones factibles



6º paso: calcular el valor de la función objetivo

$f(x, y) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 10 = 1100$ €

$f(x, y) = 30 \cdot 90 + 50 \cdot 10 = 3200$ €

$f(x, y) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 60 = 3600$ €

$f(x, y) = 30 \cdot 50 + 50 \cdot 50 = 4000$ € Máximo

<u>Solución óptima:</u> f(50, 50)=4000

2. Problema de maximización de ventas (Vitutor, PL, Ejemplo)

1er paso: Elección de las incógnitas.

x = nº de pantalones
y = nº de chaquetas

2º paso: Función objetivo Máx $z=f(x, y) = 50x + 40y$

3er paso: Restricciones

	pantalones	chaquetas	Disponible
Algodón	1	1,5	750
Poliéster	2	1	1000

$x + 1{,}5y \leq 750 \rightarrow 2x+3y \leq 1500$

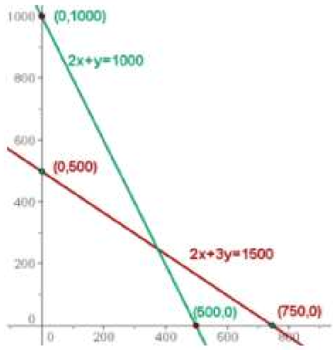
$2x + y \leq 1000$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

4º paso: hallar el conjunto de soluciones factibles

Tenemos que representar gráficamente las restricciones.

Al ser $x \geq 0$ e $y \geq 0$, trabajaremos en el primer cuadrante.

Representamos las rectas, a partir de sus puntos de corte con los ejes.



Resolvemos gráficamente la inecuación: $x + 1{,}5y \leq 750$, para ello tomamos un punto del plano, por ejemplo el (0,0).

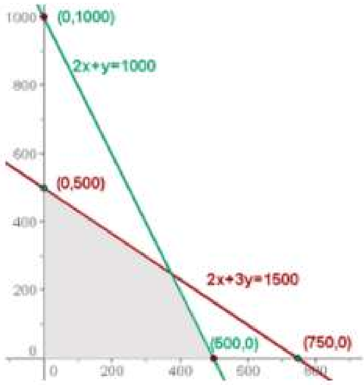
$0 + 1{,}5 \cdot 0 \leq 750$

$0 \leq 750$, entonces el punto (0,0) se encuentra en el semiplano donde se cumple la desigualdad.

De modo análogo resolvemos $2x + y \leq 1000$.

$2 \cdot 0 + 0 \leq 1\,000$

La zona de intersección de las soluciones de las inecuaciones sería la solución al sistema de inecuaciones, que constituye el conjunto de las soluciones factibles.



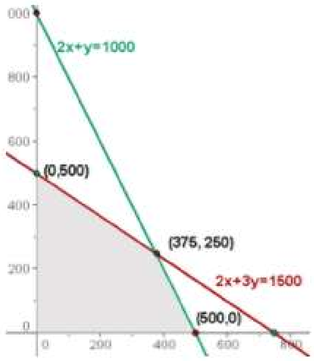
5º paso: calcular las coordenadas de los vértices del reciento de las soluciones factibles

La solución óptima, si es única, se encuentra en un vértice del recinto. Estas son las soluciones a los sistemas:

$2x + 3y = 1500$; $x = 0$ (0, 500)

$2x + y = 1000$; $y = 0$ (500, 0)

$2x + 3y = 1500$; $2x + y = 1000$ (375, 250)



6º paso: calcular el valor de la función objetivo

En la función objetivo sustituimos cada uno de los vértices.

f(x, y) = 50x + 40y

f(0, 500) = 50 · 0 + 40 · 500 = 20 000 €

f(500, 0) = 50 · 500 + 40 · 0 = 25 000 €

f(375, 250) = 50 · 375 + 40 · 250 = 28 750 € Máximo

<u>Solución óptima</u>: es fabricar 375 pantalones y 250 chaquetas para obtener un beneficio de 28750 €

NOTA: solución múltiple

Solución múltiple

La solución no siempre es única, también podemos encontrarnos con una solución múltiple.

Si la función objetivo del ejercicio anterior hubiese sido:

- f(x,y)= 20x + 30y
- f(0,500) = 20 · 0 + 30 · 500 = **15 000 €** **Máximo**
- f(500, 0) = 20 · 500 + 30 · 0 = 10 000 €
- f(375, 250) = 20 · 375 + 30 · 250 = **15 000 €** **Máximo**

En este caso todos los pares, con soluciones enteras, del segmento trazado en negro serían máximos.

- f(300, 300)= 20 · 300 + 30 · 300 = 15 000 € Máximo

3. (… doc trabajo investigación por parte de los alumnos)

4. Problema de asignación de personal: formulación (Ejemplo pág. 12-13, doc Daniel Serra, II.2_PROGRAMACIÓN LINEAL)

   En primer lugar, se tienen que definir las variables del modelo que queremos desarrollar. Como hemos de controlar en número de personal en cada turno, definimos X_j como la cantidad de personal que entra a trabajar en el turno j, en donde j=1,...,6. Es decir, hay una variable para cada turno.

Las restricciones del modelo tienen que reflejar la necesidad de que la cantidad de personal que entren en el periodo *j* más el número de personas que entraron a trabajar en el turno *j*-1 sean suficientes para cubrir las necesidades del turno *j* (N_j). Esta situación queda reflejada en el siguiente cuadro:

Tramos Horarios						
Turno j (j=1…6)	1 0:00-4:00h	2 4:00-8:00h	3 8:00-12:00h	4 12:00-16:00h	5 16:00-20:00h	6 20:00-24:00h
Personal N_j	9	5	3	7	5	6
0:00-4:00h	X_1	X_1				
4:00-8:00h		X_2	X_2			
8:00-12:00h			X_3	X_3		
12:00-16:00h				X_4	X_4	
16:00-20:00h					X_5	X_5
20:00-24:00h	X_6					X_6

Necesidades de personal por tramos horarios

En esta tabla, un trabajador que entra a trabajar, por ejemplo, a las 4:00, trabajará en los turnos 2 y 3, y por tanto, contribuirá a cubrir las necesidades de estos dos turnos. En otras palabras, el turno *j* estará siendo atendido por X_{j-1} y X_j. En consecuencia, tendremos que $X_{j-1} + X_j$ (el personal que trabaja durante el turno *j*) tiene que ser, como mínimo, igual a N_j, que es el número mínimo de personal de enfermería necesario para este turno. En términos matemáticos la restricción es la siguiente:

$$X_{j-1} + X_j \geq N_j$$

Habrá una restricción para cada horario de entrada.
El objetivo de la gerencia consiste en la minimización del número total de personal de enfermería necesario para cubrir las necesidades diarias. Este número será igual a $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ que representa la suma del número de personal que entra en cada periodo.

Finalmente, el modelo matemático es el siguiente:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{6} X_j$$

Sujeto a:

$$X_6 + X_1 \geq 9$$
$$X_1 + X_2 \geq 5$$
$$X_2 + X_3 \geq 3$$
$$X_3 + X_4 \geq 7$$
$$X_4 + X_5 \geq 5$$
$$X_5 + X_6 \geq 6$$
$$X_j \geq 0,\ j = 1,...,6$$

5. (ver resolución en el mismo doc II.2.E2 EJEMPLO_PL.SOLVER)
   Ventas totales: $5,525.00, #Pepperoni=65, #Vegetariana=25, #Suprema=60.

6. (Ejemplo 1.3.2, pág. 13-15, doc. de Daniel Serra, II.2_PROGRAMACIÓN LINEAL; solución en págs.48-53, apdo 2.5, doc. de Daniel Serra)
   Max Z (34, 30) = 64