# Bloque II – ANALISIS DE COMPORTAMIENTO

# Apuntes

## Contenido

# II.1 Propiedades de las funciones

## II.1.1 Continuidad, Derivabilidad y Gradiente de una Función

Continuidad de funciones de una variable

Una función es contínua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. Matemáticamente, una función es contínua en el intervalo $I = (a, b)$, si es contínua en cualquier punto $c$ perteneciente a dicho intervalo $I$.

De este modo, decimos que la función $f(x)$ es contínua en cualquier punto $x = c \in I = (a, b)$ si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \in IR$$

y este valor de $f(c) \in IR$ es único, esto es, pertenece al recorrido de la función, $R_f$.

Para comprobar la continuidad de una función $f(x)$ para todo su dominio $x \in D_f$, se considera su aproximación lateral x+h por la izquierda ($h \to 0^-$) y la derecha ($h \to 0^+$), donde $h \in IR$, tiende a 0, siendo en el primer caso $h < 0$ y en el segundo caso es $h > 0$. De este modo, una función será contínua en todo su dominio si se cumple que su aproximación por la derecha o por la izquierda coincide,

$$\lim_{h \to 0^-} f(x+h) = f(x^-) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h) = f(x^+)$$

Ejemplo 1: estudiar la continuidad de las funciones $f(x) = E(x+1)$ y $g(x) = |1 - x|$

Ejemplo 2: estudiar la continuidad de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & si\ x \leq 2 \\ e^{x-2} + 6 & si\ x > 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x-1} & si\ 1 < x \leq 4 \\ \dfrac{10}{x-2} & si\ x > 4 \end{cases} \qquad \forall x \in IR \ / \ x > 1$$

Ejemplo 3: estudiar la continuidad de las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = Lx$

## Derivabilidad de funciones de una variable (ver también en *II.Doc1 CONCEPTO DE DERIVADA*)

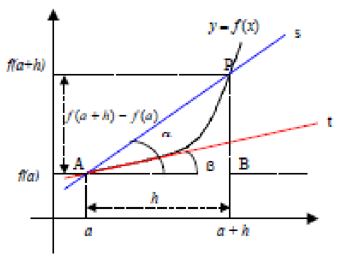
**Definición de derivada.**

La derivada de una función $f$ en el punto de abscisa $x = a$, se define como el siguiente límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A la derivada de una función en un punto se le llama también tasa de variación instantánea.

**Interpretación geométrica de la derivada.**




La recta secante $s$, corta a la curva $y = f(x)$, en los puntos $A$ y $P$.

Su pendiente es: $tg\alpha = \frac{PB}{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Si el punto $P$ se va acercando al punto $A$, hasta confundirse con él, la recta secante $s$, se transforma en la recta tangente $t$ y el ángulo $\alpha$ se transforma en el ángulo $\beta$, es decir, Cuando $P \to A$, que es equivalente a decir que $h \to 0$, el límite de la recta secante $s$, es la recta tangente $t$

Pero cuando $\alpha \to \beta$, $tg\alpha \to tg\beta$ que es equivalente a $\lim_{h \to 0} tg\alpha = tg\beta$

Por tanto, $tg\beta = \text{pendiente de t} = \lim_{h \to 0} tg\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Queda probado que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

**Derivadas laterales.**

Las definimos por las siguientes fórmulas:

Derivada por la derecha: $f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivada por la izquierda: $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Para que una función sea derivable en un punto tienen que existir las derivadas laterales y estas ser iguales.

Ejercicio 1:

Halla la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x+1}$ en el punto $x = 3$ usando la definición.

Ejercicio 2:

Dada la función $f(x) = x^2$, halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

**Función derivada.**

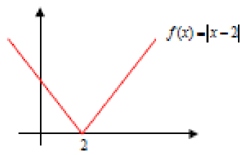
La derivada de una función en un punto de abscisa $x = a$, asigna a dicho punto un número real, que es el valor de la derivada en dicho punto.
También podemos considerar una función que asocie a cada punto $x$, el valor de la derivada en ese punto. Recibe el nombre de función derivada o simplemente derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Derivación y continuidad.**

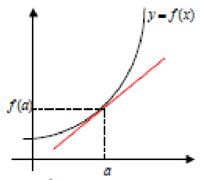
Si una función es derivable en un punto, es continua en dicho punto. Si la función es continua no tiene por qué ser derivable.

Ejercicio 3




¿Es continua en $x = 2$? ¿Y derivable en $x = 2$?.

**Ecuación de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.**




Para halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = a$, procedemos de la forma siguiente:

- Hallamos el valor de la función en dicho punto, $f(a)$ con lo que obtenemos el punto por donde pasa la recta tangente: $(a, f(a))$
- Calculamos la pendiente de la recta que es el valor de la derivada en el punto considerado: $m = f'(a)$
- Aplicamos la fórmula de la ecuación punto – pendiente $y - y_o = m(x - x_o)$, es decir, $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ejercicio 4:

Ecuación de recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x + 1$, en el punto de abscisa $x = 4$

Ejercicio 5:

Demuestra, aplicando la definición, que la derivada de una constante es 0.

Ejercicio 6:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \le 0 \\ x+1 & si \ 0 < x \le 2 \\ 2x - 1 & si \ x > 2 \end{cases}$

Estudia si es derivable en los puntos $x = 0$ y $x = 2$

Ejercicio 7:

Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x + 1$ en el punto de abscisa $x = 2$. Escribe la ecuación de dicha recta.

Ejercicio 8:

¿Qué valores han de tener $a$ y $b$ para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & si \ x \le 2 \\ ax^2 + b & si \ x > 2 \end{cases}$ sea derivable en $x = 2$?

Ejercicio 9:

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3sen2x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 10:

El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t) = 3t^2 - t + 1$ donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante t = 2 segundos.

Ejercicio11:

Utilizando la definición de derivada, demuestra que la derivada de $y = ax$ es a.

Ejercicio 12:

Di si la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & si \ x \le 1 \\ 2x - 2 & si \ x > 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$.

Las derivadas de orden superior se definen a partir de la derivada anterior. De este modo, la función derivada segunda de una función $f(x,y)$ sería

$$y'' = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{df^2(x)}{dx^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Y la derivada segunda de una función en un punto x=a, f''(a), se obtendría sustituyendo en dicha función derivada el valor en dicho punto.

Esto se puede replicar para las derivadas de orden n-ésimo que tenga la función.

El <u>gradiente de una funció</u>n f(x), $\nabla f(x)$ , se define como la variación infinitesimal de una función respecto a una variación infinitesimal de su variable, que en el caso de funciones de una variable coincide con su función derivada, por lo tanto:

$$\nabla f(x) = f'(x)$$

Por lo que, el gradiente de dicha función en un punto $x = c \in D_f$ será:

$$\nabla f(c) = f'(c)$$

y nos dará la sensibilidad o <u>tasa de variación infinitesimal</u> de la función en dicho punto. También suele llamarse <u>función marginal</u> en dicho punto.

Propiedades de las funciones derivables de una variable: (ver también en *II.Doc2 APLICACIONES DE LA DERIVADA*)

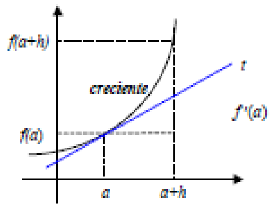
**Crecimiento y decrecimiento.**

Cuando una función es derivable en un punto, podemos conocer si es creciente o decreciente en dicho punto:

- Una función *f(x)* es creciente en un punto *a*, si su derivada es positiva
- Una función *f(x)* es decreciente en un punto *a*, si su derivada es negativa.

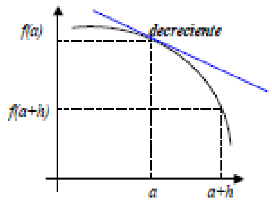
Es decir,

Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $x = a$
Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $x = a$




$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

Como $f(a+h) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a)$, es decir, la función es creciente en $x = a$




$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$$

En este caso $f(a+h) - f(a) < 0 \Rightarrow f(a+h) < f(a)$, es decir, la función es decreciente en $x = a$

Estudiar la monotonía de una función es hallar los intervalos en los que es creciente y decreciente.

Se procede de la siguiente forma:

- Se halla la derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante
- Con los puntos en los que se anula la derivada dividimos el dominio en intervalos.
- Se estudia el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

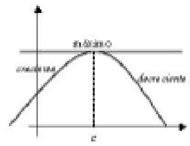
Ejemplo 1.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

**Máximos y mínimos.**

Son los puntos en que la función cambia de monotonía.

- Si una función derivable presenta un máximo o un mínimo en un punto $c \in (a, b)$, entonces $f'(c) = 0$




En el punto de abscisa $x = c$ la función pasa de creciente a decreciente

Geométricamente significa que la tangente en el punto $x = c$ es horizontal

- Si $f'(c) = 0$ y existe la segunda derivada, se verifica:
  Si $f''(c) > 0$, hay un mínimo relativo en el punto $c$
  Si $f''(c) < 0$, hay un máximo en dicho punto.

Para la determinación de máximos y mínimos podemos utilizar los siguientes criterios:

Criterio de la primera derivada:

- Se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Existe máximo relativo en los puntos en que la función pasa de creciente a decreciente.
- Existe mínimo relativo en los puntos en que pasa de decreciente a creciente.

Criterio de la segunda derivada:

- Calculamos la primera derivada, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.
- Hallamos la segunda derivada.
- Las raíces de la ecuación obtenida se sustituyen en la segunda derivada.
- Si el resultado obtenido es positivo existe mínimo y si es negativo máximo.

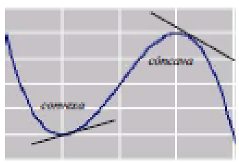
Ejemplo 2.

Halla los máximos y mínimos de la función $f(x) = 3x - x^3$

---

**Concavidad y convexidad.**

Los conceptos con convexidad y concavidad son relativos.
Adoptaremos el siguiente criterio:
La función es convexa en un intervalo si la gráfica de la función queda encima de la recta tangente en un punto cualquiera del intervalo.
La función es cóncava cuando la gráfica queda por debajo.




Puntos de inflexión son aquellos en los que la función cambia de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

- Una función derivable es convexa en un intervalo *(a, b)*, si $f''(x) > 0, \ \forall x \in (a, b)$
- Una función derivable es cóncava en un intervalo *(a, b)*, si $f''(x) < 0, \ \forall x \in (a, b)$

Estudiar la curvatura de una función consiste en hallar los intervalos en los que es cóncava y convexa.
Se procede de la siguiente forma:

- Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.
- Con los puntos en los que se anula la derivada dividimos el dominio en intervalos.
- Se estudia el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

Ejemplo 3.

Halla los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

Observamos que la función cambia de curvatura en aquellos puntos donde se cumple que $f''(x) = 0$. A estos puntos de $x \in IR$ donde cambia la tendencia de la curva, los denominamos *puntos de inflexión*.

A modo de **resumen**, podemos decir pues que, en los puntos $x \in D_f$ más característicos de una función $f(x)$, se cumple que:

- Puntos de corte y simetría:
  Puntos de corte: $f(x) = 0 \;\; con\ EJE\ X \qquad f(0)\ con\ EJE\ Y$
  Puntos de simetría: $si\ f(x) = f(-x) \;\; PAR \qquad si\ f(x) = -f(-x) \;\; IMPAR$

- Puntos asintóticos:
  $$si \lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty\,, en\ x = c\ \in D_f\ hay\ una\ asíntota\ vertical$$

  Comentario 1: Asíntota horizontal, es un concepto que se aplica a la función y determina si cuando $x \to \pm\infty$, la función tiene a un valor constante.

  Comentario 2: Asíntota oblícua, también se produce cuando y, a su vez, no existe un comportamiento asintótico horizontal de la función.

- Puntos críticos:

  +Extremos relativos: $f'(x = c) = 0, en\ x = c \in D_f\ hay\ un\ máximo\ ó\ mínimo$

  $$(puede\ ser, en\ algunos\ casos, un\ pto.\ de\ inflexión)$$

  *y, si además:*

  $f''(x = c) < 0\ entonces\ en\ x = c\ hay\ un\ Máximo$

  $f''(x = c) > 0\ entonces\ en\ x = c\ hay\ un\ mínimo$

  +Extremos absolutos: los valores de x para los que se obtiene el mayor (máximo absoluto) o menor (mínimo absoluto) valor de la función.

  Comentario 3: Cuando hablamos de buscar el **punto óptimo de una función**, buscamos sus extremos absolutos, que pueden coincidir con el mayor de los extremos relativos dentro de su dominio $D_f$. Si se da el caso en el que el dominio está definido en un intervalo, $I = [a, b] \in D_f \subseteq IR$, los valores óptimos (mínimo o máximo) de la función serán $f(a)$ y/o $f(b)$, cuando dichos valores extremos del intervalo den un valor de la función menor (mínimo absoluto) o superior (máximo absoluto) a los obtenidos dentro del dominio.

- Puntos de Inflexión:

  $$f''(x = c) = 0\ entonces, en\ x = c, hay\ un\ Punto\ de\ Inflexión$$

Los extremos relativos definen los intervalos del dominio en los que la función crece o decrece.

Los puntos de inflexión definen los intervalos del dominio en los que la función cambia de curvatura.

Los puntos asintóticos hay que tenerlos en cuenta tanto en la definición de dichos intervalos de crecimiento/decrecimiento como de curvatura.

Continuidad y derivabilidad en funciones de varias variables:

El concepto de continuidad de una función de una variable se puede generalizar a varias variables, si bien, es más difícil de interpretar gráficamente en funciones de más de dos variables.

La condición que debe cumplirse para que la función sea contínua en un punto $(x, y, z, u, w \dots) \rightarrow (x_0, y_0, z_0, u_0, \dots)$ de su dominio, será ahora:

$$\lim_{(x,y,z,u,\dots)\rightarrow(xo,yo,zo,uo\dots)} f(x, y, z, u, \dots) = f(x_0, y_0, z_0, u_0, \dots)\ y\ este\ valor\ es\ \text{único}\ \ en\ R_f \in IR$$

Para **funciones de dos variables**, debemos tener en cuenta que ahora la aproximación a un punto cualquiera $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ de su dominio $D_f \in IR^2$, ahora ya no es solo lateral en uno de sus dos ejes $X$ e $Y$, si no que ahora hay infinitas posibilidades de aproximación. En términos generales, si lo hacemos por $(x_0 + h1, y_0 + h2)$, donde $h1$ y $h2 \in IR$ y tienden a cero, nos da infinitas formas de llegar al punto $(x_0, y_0)$. Para que la función sea contínua en dicho punto, se debe cumplir la condición anterior *en todas* las maneras de aproximarse a dicho punto dentro de su dominio.

Podríamos aproximarnos por planos perpendiculares a los ejes, esto es, por ejemplo $(x_0 + h1, y_0)$ o bien $(x_0, y_0 + h2)$, donde $h1$ y $h2$ tienden a cero, pero existen otros caminos dentro de su dominio para llegar al valor de la función en $(x_0, y_0)$.

Otra manera de aproximarse sería a través de la dependencia de una variable respecto a la otra. Por ejemplo, si queremos estudiar la continuidad en un punto específico $(x_0, y_0) \in D_f$, se podría hacer mediante la relación polinómica $y = y_o + mx$, donde m$\in IR$ y, de este modo, se utilizaría un paso intermedio, $(x, y) \rightarrow (x, y_0 + mx)$ que se sustituiría en el límite que define la continuidad, para posteriormente, lo calcularíamos para $(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)$. Si al resolver dicho límite resulta que el resultado es dependiente de $m \in IR$, entonces la función tendría infinitas soluciones y la función no sería contínua.

De este modo, la función sería contínua si se cumple que:

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(xo,yo+mx)} f(x, y) = \lim_{(x,yo)\rightarrow(xo,yo)} f(x, y) = f(x_0, y_0)\ y\ este\ valor\ es\ \text{único}\ \ en\ R_f \in IR$$

Otra aproximación, más útil en algunos casos, sería pasando las variables dependientes a sus coordenadas polares: $x = x_o + \rho\ cos\theta$ e $y = y_0 + \rho\ sen\theta$, y calculando el límite que define la continuidad a $\rho \rightarrow 0$, si el resultado dependiera del ángulo de aproximación $\theta$, el valor de la función no sería único en dicho punto y entonces no sería tampoco contínua.

Y así, la función será contínua si se cumple que:

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(xo+\rho cos\theta,yo+\rho sen\theta)} f(x, y) = \lim_{\rho\rightarrow 0} f(x, y) = f(x_0, y_0)\ y\ este\ valor\ es\ \text{único}\ \ en\ R_f \in IR$$

La condición de continuidad de una función exige que, en cualquier punto de su dominio, el valor de la función sea el mismo sea cual sea su aproximación a dicho punto. En aquellos puntos donde la función no sea contínua, se verifica entonces que no es derivable en ese punto.

En **funciones de varias variables**, debemos recurrir el concepto de derivada parcial (o función marginal) de una función, dado que ahora existen tantas derivadas parciales como número de variables tenga la función. Así pues, la derivada parcial de la función $f(x, y, z, u, \dots)$ respecto, por ejemplo, a la variable independiente $y$, se definirá como:

$$f_y(x, y, z, u, \dots) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h, z, u, \dots) - f(x, y, z, u, \dots)}{h}$$

Y lo mismo haríamos para obtener el resto de las derivadas parciales $f_x, f_z, f_u$, ... (respecto a $x$, $z, u$, ..., respectivamente).

Recordar que ahora tenemos una notación distinta para las derivadas parciales de una función de varias variables si lo comparamos con la de una variable. Por otro lado, observamos que sólo derivamos respecto a la variable de marginalidad y el resto las consideramos invariables (constantes). Por este motivo, también se suelen llamar funciones marginales respecto a la variable en cuestión. Conviene también indicar que para las funciones sean derivables en cualquier punto de su dominio, ésta debe ser continua en todos los puntos en los que esté definida la función.

Para el caso de una **función de dos variables**, dada por la expresión $z = f(x, y)$, tendremos solo dos derivadas y su notación será:

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$$

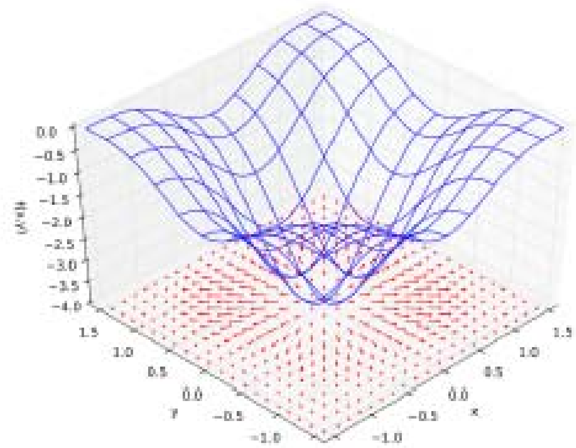
Si construimos el vector $\nabla f(x, y)$ (o matriz columna en $IR^2$) con las derivadas parciales, obtenemos la función gradiente siguiente,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

que particularizada a un punto $(x_0, y_0) \in D_f$, será:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

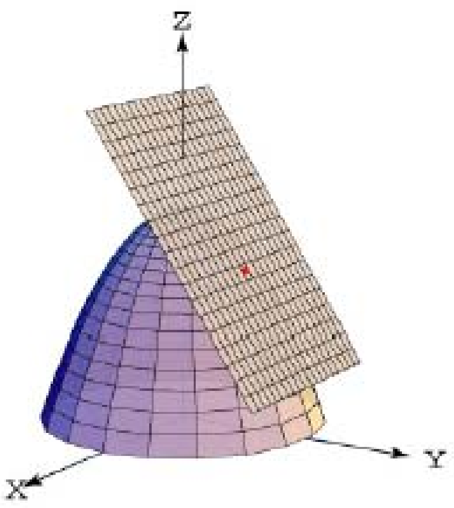
e indica la dirección en el cual el campo de $f$ varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de $f$ en la dirección de dicho vector gradiente. El signo indicará si crece o decrece dicha tendencia o variación.



Ejemplo del campo generado (sobre el plano horizontal)
por los vectores gradientes de la función $f(x,y)$ =-$(cos^2x + cos^2y)^2$.

Siguiendo en el ejemplo de una función de dos variables $z = f(x,y)$, podemos obtener la <u>ecuación del planto tangente a un punto de una superficie $z$</u>. Si consideramos que $(x_0, y_0)$ es un punto del dominio de $f(x,y)$, $D_f$, podemos obtener el plano tangente a dicho punto de la superficie a través de la siguiente ecuación:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$




Plano tangente a una superficie (en este caso un paraboloide).

Apliquemos la definición de derivadas parciales visto anteriormente, para obtener las derivadas parciales de orden superior. Siguiendo con en el **caso de dos variables**, las derivadas parciales segundas (o de segundo orden) serán:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

De este modo, para una función de dos variables, obtendremos una **matriz** que llamamos **Hessiana**, y que será cuadrada y de orden 2. A las derivadas parciales $f_{xy}$ y $f_{yx}$ se les denomina derivadas cruzadas.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

De igual modo, aplicando de nuevo sobre dichas derivadas parciales dicha definición, obtendríamos las 8 derivadas terceras $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dots, f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ , … y así sucesivamente.

Propiedades de las funciones derivables de varias variables:

El *teorema de Clariant o de Schwarz* demuestra que, si existen las derivadas cruzadas y éstas son contínuas, entonces son iguales. Es decir, en el caso de dos variables, se cumple que, $f_{xy}$= $f_{yx}$.

Estos conceptos son extensibles a 3 o más variables, si bien, sus matrices Hessianas crecerán en tantas dimensiones como número de variables tenga la función.

## II.1.2 Reglas Básicas para el Cálculo rápido de Funciones Derivadas

Dado que la definición de función derivada que se ha visto en el apdo. anterior resulta muy difícil de aplicar cuando las funciones no son simples, existen unas reglas que nos permiten calcular las derivadas de **funciones de una variable** por muy complejas que sea dichas funciones (ver también en *II.E1 A.Derivadas.Teoría y Ejercicios*):

**Derivadas de operaciones con funciones.**

Aplicando la definición de derivada se obtienen las siguientes fórmulas:

Derivada de una suma o diferencia: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Derivada de un producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

Derivada de un cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$

**Derivada de una función compuesta: Regla de la cadena.**

Sea la función compuesta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

**Cálculo de derivadas.**
Aplicando la definición, a través del límite, y teniendo en cuenta la regla de la cadena, se obtienen las derivadas de las siguientes funciones:

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo potencial | $y = x^a$ | $y' = ax^{a-1}$ |
| | $y = f^a$ | $y' = af^{a-1} \cdot f'$ |

Ejercicios:
- $y = x^4$;
- $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$;
- $y = (3x^2 - 2)^5$;
- $y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$;
- $y = \dfrac{1}{(2x+5)^3}$;

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo raíz cuadrada | $y = \sqrt{x}$ | $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| | $y = \sqrt{f}$ | $y' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ |

Ejercicio:
- $y = \sqrt{x^2 - 3x}$;

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo exponencial | $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| | $y = e^f$ | $y = e^f \cdot f'$ |
| | $y = a^x$ | $y = a^x \, La$ |
| | $y = a^f$ | $y = a^f \cdot f' La$ |

Ejercicios:
- $y = e^{-x}$;
- $y = e^{3x+2}$;
- $y = 2^x$;
- $y = 5^{x^2+1}$;

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo logarítmico | $y = Lx$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ |
| | $y = Lf$ | $y' = \dfrac{f'}{f}$ |
| | $y = \log_a x$ | $y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{La}$ |
| | $y = \log_a f$ | $y' = \dfrac{f'}{f} \cdot \dfrac{1}{La}$ |

Ejercicios:
- $y = L(2x^3 + 5x)$;
- $y = \log_2 x$;
- $y = \log_3 (4x+1)$;

---

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo seno | $y = sen x$ | $y' = \cos x$ |
| | $y = sen f$ | $y' = \cos f \cdot f'$ |

Ejercicios:
- $y = sen(4x - 1)$;
- $y = sen^3 x$;  $y = (sen\, x)^3$;
- $y = sen\, x^2$;
- $y = sen^3 (2x^3 + 2x)$;

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo coseno | $y = \cos x$ | $y' = -sen x$ |
| | $y = \cos f$ | $y' = -sen f \cdot f'$ |

Ejercicios:
- $y = \cos 5x$;
- $y = \cos \sqrt{x}$;

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo tangente | $y = tg x$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$ |
| | $y = tg f$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$ |

Ejercicios:
- $y = tg\, 5x$;
- $y = tg^3 x$;  $y = (tg\, x)^3$;

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Tipo cotangente | $y = ctg x$ | $y' = \dfrac{-1}{sen^2 x}$ |
| | $y = ctg f$ | $y' = \dfrac{-1}{sen^2 f} \cdot f'$ |

Ejercicios:
- $y = ctg\, x^3$;
- $y = ctg\, e^x$;

| TIPO | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| Funciones arco | $y = arcsen x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| | $y = arcsen f$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - f^2}} \cdot f'$ |
| | $y = \arccos x$ | $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| | $y = \arccos f$ | $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - f^2}} \cdot f'$ |
| | $y = arctg x$ | $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ |
| | $y = arctg f$ | $y' = \dfrac{1}{1 + f^2} \cdot f'$ |

Ejercicios:
- $y = arcsen\, x^3$;
- $y = arctg(e^x)$;
- $y = arc \cos 5x$;

Como indicamos en el apdo II.1.1, las derivadas parciales de una **función de varias variables** se obtendrán a partir de las derivadas de la función para cada una de sus variables dependientes considerando el resto como valores constantes. De esta manera se puede replicar el método de cálculo visto anteriormente para una variable.

### II.1.3 Diferencial Total y Regla de la Cadena

Cuando queremos calcular la variación infinitesimal de una función $y = f(x)$ para una variación infinitesimal de su única variable independiente $x$, que denotamos como $dx$, podemos simplemente obtenerla a partir de su función derivada, obteniendo el diferencial total de una **función de una variable** $y = f(x)$, que denotamos como, $dy$,

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \rightarrow dy = df(x) = f'(x)\,dx$$

En este caso, simplemente se obtiene de la derivada de la función. Sin embargo, si ahora consideramos, por ejemplo, una **función de dos variables**, $z = f(x, y)$, definimos su diferencial total como,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x dx + f_y dy$$

Donde ahora, $dx$ y $dy$ son incrementos infinitesimales de las variables independientes $x$ e $y$. En algunas ecuaciones a dichas funciones derivada parcial o funciones marginales $f_x$ y $f_y$, se les suele denotar también como $z_x$ y $z_y$, respectivamente.

Si la **función** dependiera **de tres variables**, $u = f(x, y, z)$, la diferencial total de esta nueva función, $du$, sería ahora,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

y así sucesivamente, según aumente la función en el número de variables independientes de las que depende.

Hasta ahora, hemos considerado que una variable dependiente es función de otra/s variable/s independiente/s. Supongamos ahora que dichas variables independientes, a su vez, también dependen de otras variables. Para resolver esta nueva situación y así poder seguir operando y relacionando dichas variables entre sí, se recurre a la regla de la cadena que se muestra a continuación.

Volvemos al caso de la **función de dos variables**, $z = f(x, y)$, donde ahora $x$ e $y$ dependen de otra variable $t$. Por esta razón, podemos decir entonces que $z$ depende también de $t$, esto es, $z = f(t, x(t), y(t))$ y entonces su diferencial total será:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_t dt + f_x dx + f_y dy$$

Que si dividimos por $dt$ ambos miembros de la ecuación, resulta la siguiente expresión:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Dado que $x$ e $y$ solo dependen a su vez de una y sola una variable, $t$, entonces podemos escribirla de forma sencilla, resultando que podemos denotarla del siguiente modo,

$$z'(t) = f_t + f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t)$$

NOTA: es muy importante recordar que el operador $d$ lo utilizamos para derivar una función que depende de solo una variable (y a veces utilizamos también el superíndice ‘, o bien, ‘’ y así sucesivamente, para indicar que se trata de su derivada primera, segunda, …). Sin embargo, ojo, pues el operador $\partial$ lo emplearemos para derivar una función de forma parcial o marginal cuando la función dependa de más de una variable.

## II.1.4 Ejercicios resueltos

(ver las soluciones en *II.Doc6 Soluciones de II.1.4)*

Ejercicio 1

Calcular el gradiente de las siguientes funciones $f(x,y)$ y halar el vector resultante en el punto $P_0$ en aquellos casos en los que se dé.

a) $f(x,y) = x^2 + 2y - 1$ , en el punto $P_0 = (1,2)$
b) $f(x,y) = \frac{2}{y} - 4xy$ , en el punto $P_0 = (-1,1)$
c) $f(x,y) = 4xy^2 - sen(x)$

Ejercicio 2

Hallar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = z^2 + 2x^3 - 5y^2 + 4xy - 2zy + 1$
b) $f(x,y,z) = \frac{x+z}{y-z} + 4xz^2 - x^3y$

Ejercicio 3

Determinar las funciones de productividad marginales para las siguientes funciones de producción e interpretar los resultados:

a) $P(L,K) = 8L^2 - L^3 + 8LK^2 + 2L^2K + 10K$ donde L=10 mil horas-hombre y K=5 mil €. La producción se mide en centenares de artículos.
b) $P(L,K) = 6L^2 - 2L^3 + 8L^2K - 3LK^2 + 10K^3$ donde L=10 mil horas-hombre y K=10 mil €. La producción se mide en centenares de artículos.

Ejercicio 4

Determinar para cada caso las cuatro funciones de demanda marginal de las siguientes funciones de demanda de dos productos interrelacionados entre sí, A y B, en función de los precios unitarios de dichos productos, e indicar si son competitivos o complementarios:

a) $x_A = 200 - 20p + 20q$ $\quad$ $x_B = 300 + 40p - 10q$
b) $x_A = 500 - 4p^2 - 10q^2$ $\quad$ $x_B = 400 - 6p^2 - 8q^2$

Ejercicio 5

Calcular el diferencial total de la función $z = 2x^2y^2 - 5x^3y + 4xy^3$ en el punto $P_0 = (-1,1)$, para un valor de $dx = -0{,}1$ y $dy = 0{,}1$. ¿Tiene sentido dicho planteamiento?

Ejercicio 6

Calcular $\frac{dz}{dt}$ utilizando la regla de la cadena para cada uno de los dos casos planteados:

a) $z = 10x^2 + 4xy - 3y^2$ donde $x = t^2 - 2$ e $y = 6t - 1$
b) $z = \ln(x^2 - y^2)$ donde $x = e^{-2t}$ e $y = 2e^t$

Ejercicio 7

Determinar los extremos relativos de las siguientes funciones y clasificarlos:

a) $z = x^2 + xy + y^2 + 5x - 11y + 47$
b) $z = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2y^3 - 3y^2 +$

## II.1.5 Aplicaciones de las Derivadas en el Entorno Empresarial

En el entorno empresarial se definen algunos conceptos que surgen de la consideración de variaciones incrementales de las funciones. La formulación matemática parte del concepto de función derivada como una variación infinitesimal respecto a variaciones infinitesimales de sus variables. Así pues, surgen los conceptos de función promedio, función marginal y elasticidad de una función, respecto de una de sus variables independientes.

Cuando consideramos que la **función** depende **de una sola variable**, esto es, $y = f(x) \in R_f,\ \forall x \in D_f$ , estamos teniendo en cuenta que una variable depende de uno solo parámetro. Veamos algunos ejemplos:

*Coste promedio:* viene expresado como $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

Del mismo modo calcularíamos los ingresos promedio $\bar{I}(x)$ y beneficio promedio $\bar{B}(x)$, teniendo en cuenta que se trata de una definición de promedio lineal.

*Coste marginal*: es el valor límite del coste promedio por cada artículo extra cuando ese número de artículos extra tiende a cero.

$$C_{Marg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = C'(x)$$

*Ingreso marginal*: representa las entradas adicionales producidas por un artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos.

$$I_{Marg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = I'(x)$$

NOTA: recordar que $I(x) = x \cdot p$, donde $p$ suele estar relacionado con la $x$ a través de la ecuación de la demanda.

*Beneficio marginal*: representa el beneficio total por la venta de $x$ unidades, siendo pues el beneficio adicional por cada artículo extra si la producción sufre un pequeño incremento.

$$B_{Marg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta x} = B'(x)$$

donde $B(x) = I(x) - C(x)$, e $I(x) = x \cdot p$, y además, $p$ y $x$ suelen estar relacionados por la ecuación de la demanda.

*Elasticidad de la demanda*: es el valor límite de la razón de cambio porcentual en la demanda respecto al cambio porcentual en el precio, cuando el cambio en el precio tiende a cero.

De este modo, la elasticidad de una curva de demanda de, por ejemplo, número de productos demandados, $x$, respecto a su precio unitario, $p$, esto es, $x = f(p)$, nos indicará la variación relativa del número de productos demandados respecto a la variación relativa de su precio, y vendrá dada por:

$$\frac{E_x}{E_p}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta x/x}{\Delta p/p}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{p}{x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta p}=\frac{p}{f(p)}\cdot f'(p)$$

Clasificación de la elasticidad, en función de su módulo se define a partir de $\eta=|E_x/E_p|$ donde si:

η=0 ⇒PERFECTAMENTE INELÁSTICA (la cantidad demandada del bien no se modifica en absoluto al variar el precio)

0<η<1 ⇒INELÁSTICA (la demanda varía en forma proporcionalmente menor a lo que varía el precio).

η=1 ⇒UNITARIA (la demanda varía en igual proporción que el precio)

η>1 ⇒ELÁSTICA (varía en proporción mayor que el precio)

η=∞ ⇒PERFECTAMENTE ELÁSTICA.

El signo indicaría el tipo de elasticidad (positiva, la función es creciente; negativa, la función es decreciente).

En una economía de mercado, si sube el precio de un producto o servicio, la cantidad demandada de éste bajará, y si baja el precio de dicho producto o servicio, la cantidad demandada subirá. La elasticidad informa en qué medida se ve afectada la demanda por las variaciones en el precio. Cuando variaciones pequeñas en el precio modifican mucho la cantidad demanda diremos que la demanda de dicho producto o servicio es elástica y en caso contrario será inelástica.

Lo mismo ocurre cuando consideramos **funciones de varias variables**. En este caso cada función marginal será la derivada parcial de la función respecto a la variable determinada, indicando así que es la función marginal respecto a la variable considerada.

Veamos algunos de estos conceptos aplicados a una **función de dos variables**, $z=f(x,y)\in R_f\subseteq IR,\ (x,y)\in D_f\subseteq IR^2$.

El concepto de función marginal lo podemos aplicar ahora a las funciones producción $P$ que nos dan la cantidad de bienes producidos en función del capital invertido, $K$, y la mano de obra empleada, $L$, esto es, $P=f(K,L)$.

En este caso, la *productividad marginal del capital*, dado en unidades de producto por unidad monetaria invertida, vendrá dada como,

$$P_K=\frac{\partial P}{\partial K}$$

Y la *productividad marginal del trabajo*, dada en unidades de producto por unidad de mano de obra empleada, vendrá dada como,

$$P_L = \frac{\partial P}{\partial L}$$

Tiene sentido hablar de incremento de producción cuando, por ejemplo, se incrementa en una unidad el capital o el trabajo. En este caso, utilizaremos los teoremas de aproximación que se estudian en este bloque más adelante.

Las derivadas parciales también las podemos aplicar al estudio de la demanda de productos interrelacionados entre sí. Para acostumbrarnos a su nomenclatura, supongamos que las curvas de demanda de cantidades $Q$ de dos productos, $A$ y $B$, en función de sus precios unitarios, las modelizamos como:

$$\begin{cases} Q_A \equiv Q_A(p_A, p_B) \\ Q_B \equiv Q_B(p_A, p_B) \end{cases}$$

Donde, en términos generales, las cantidades demandadas $Q_A$ y $Q_B$ dependen simultáneamente de los precios de ambos productos $p_A$ y $p_B$. Como veíamos más arriba*, la función elasticidad relaciona el precio y cantidades demandadas*, por lo que, las elasticidades para el producto A y B, respectivamente, se calcularán a partir de las siguientes expresiones:

$$E_A = \frac{E_{Q_A}}{E_{p_A}} = \frac{p_A}{Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}$$

$$E_B = \frac{E_{Q_B}}{E_{p_B}} = \frac{p_B}{Q_B}\frac{\partial Q_B}{\partial p_B}$$

Estas expresiones explican la variación de la cantidad demandada de los productos A y B, respectivamente, respecto a variaciones producidas en sus propios precios unitarios.

Para poder evaluar la variación de la cantidad demandada de un producto debido a la variación del precio de otro producto interrelacionado, recurrimos al concepto de *elasticidad cruzada*. De este modo, la elasticidad cruzada del producto A respecto al producto B, tendrá la siguiente expresión:

$$E_{A,B} = \frac{E_{Q_A}}{E_{p_B}} = \frac{p_B}{Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$$

y medirá el efecto que tiene la variación del precio de B en la demanda de un producto A.

Para calcular la elasticidad cruzada del producto B respecto al producto A, $E_{B,A}$, se procede de forma similar.

Para entender bien este concepto, ponemos un ejemplo que relaciona el precio de la gasolina en función del tipo de coche:

*si, en respuesta a un incremento del* $10\%$ *en el precio de la gasolina, la demanda de coches diésel decreciera un* $20\%$*, la elasticidad cruzada de la demanda sería* $-20/10 = -2$.

La elasticidad cruzada negativa denota que los dos productos (coches diésel y gasolina) son *complementarios*, sin embargo, si hubiera sido positiva, entonces los dos productos serían *sustitutivos*.

Otras aplicaciones relacionadas:

Para poder estudiar las preferencias individuales de los consumidores ante varios bienes simultáneos, se definen las llamadas funciones de utilidad $U(x, y)$. Esta función asigna un valor de preferencia a las cantidades de dos bienes $A$ y $B$. De esta forma se puede establecer una jerarquía de preferencias. Por ejemplo, si $A$ son manzanas y $B$ son peras, y asignamos $U(1,3) = 1$ y $U(3,1) = 3$, quiere decir que para este consumidor prefiere 3 manzanas y una pera a tener una manzana y 3 peras, aunque en ambos casos el número de artículos totales es el mismo. Los valores de las funciones utilidad no son monetarios y no tienen sentido compararlos entre consumidores diferentes. Las isolíneas de una función de utilidad representa aquella combinación de artículos que satisfacen de igual forma al consumidor. Por ello se les denomina curvas de *indiferencia*.

Las derivadas parciales nos pueden servir para calcular las derivadas ordinarias de un afunción dada en forma implícita. Así, supongamos que nos dan una relación implícita entre dos variables de la siguiente forma: $g(x, y) = 0$. Supongamos que queremos calcular la derivada de la función $y$ con respecto a $x$. Suponiendo entonces $g(x, y(x)) = 0$. Entonces la derivada buscada se puede calcular como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

En particular, podemos obtener la pendiente a las curvas de nivel. Así sea una función $f(x, y)$ de dos variables y sus líneas de contorno o isolíneas definidas de la forma usual

$$\{(x, y) \,|\, f(x, y) = cte\}$$

Aplicando la regla de derivación de la función implícita, podemos obtener las pendientes de las isolíneas:

$$f(x, y) = cte \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Si una función $f$ es tal que

$$f(cx, cy) = c^D f(x, y),$$

diremos que es *homogénea* de grado $D$. El número $D$ se le denomina *grado de homogeneidad*. Estas funciones modelizan el concepto de *economías de escala*.

# II.2 Análisis, representación e interpretación de funciones

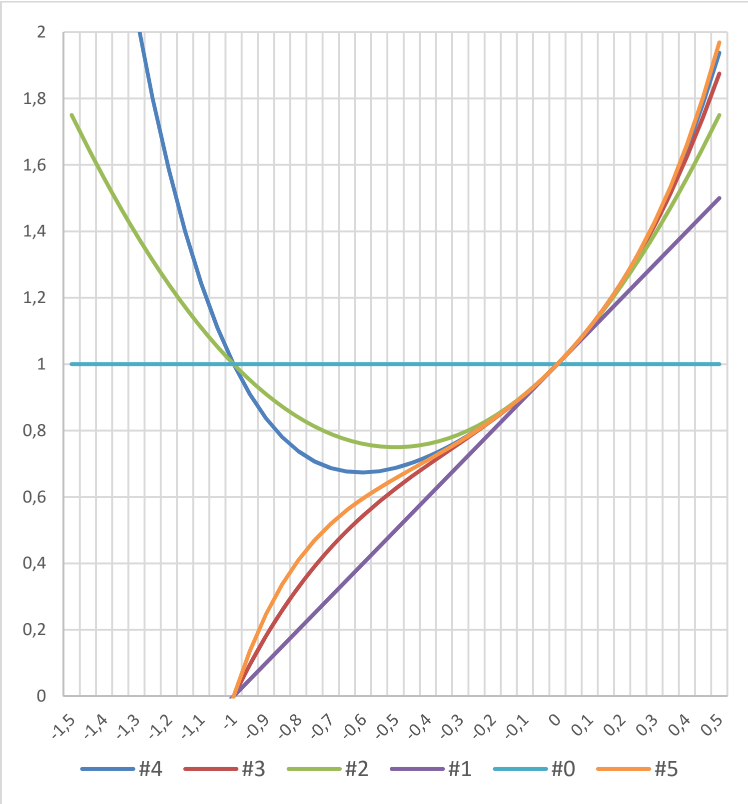
## II.2.1 Análisis y Representación de Funciones Matemáticas Simples

<u>Funciones polinómicas</u>

$$y = f(x) = x_o x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + \cdots + x_{n-1} x^{n-1} + x_n x^n$$

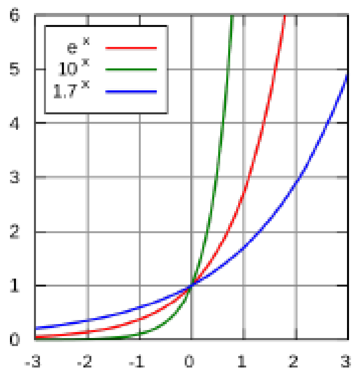
$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in IR$$

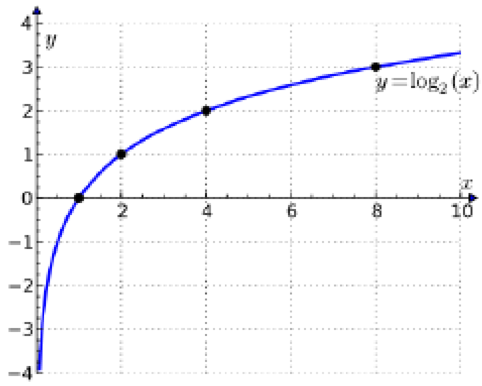
Ejemplo: polinomios de orden #0 a #5, con coeficientes $x_i = 1$, donde $i = 0, \dots 5$, y obtenido en el programa de Microsoft ® Excel.



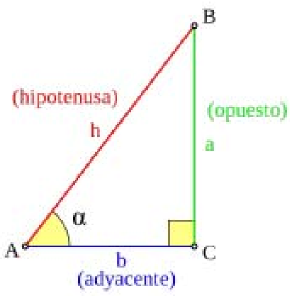

Los polinomios cuyo orden $n$ no es un número $IN$, generan funciones donde el dominio no tiene por qué ser todo el conjunto de los números $IR$ (por ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$

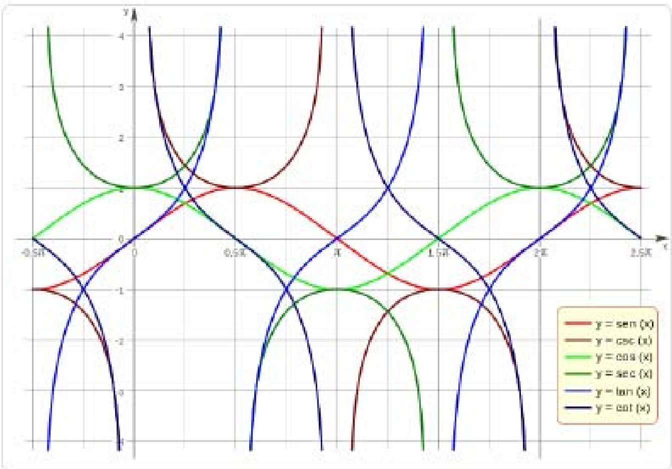
<u>Funciones exponenciales y logarítmicas</u>




<u>Funciones trigonométricas</u>




Funciones compuestas

$$y = f(x) + g(x) \qquad y = f(x) - g(x) \qquad y = f(x)\,g(x) \qquad y = f(x)/g(x)$$

$y = f(x)^c$ $\quad y = c^{f(x)}$ donde $c \in IR$ $\quad y = f{\circ}g(x) = f(g(x))$

Para funciones de una variable compuestas podemos conocer su aspecto a partir de las herramientas que hemos aprendido hasta ahora conociendo de forma ordenada lo siguiente:

1. Identificando su entorno o dominio
2. Conociendo su comportamiento de simetría y puntos de cortes con los ejes
3. Determinando sus comportamientos asintóticos
4. Calculando su monotonía (los intervalos de crecimiento y decrecimiento entre sus extremos relativos).
5. Calculando los intervalos de curvatura (intervalos convexos y cóncavos entre puntos de inflexión)
6. Trazando su aspecto en un gráfico

## II.2.2 Un Algoritmo muy completo para Analizar y Representar Funciones Complicadas

Algoritmo para la representación de **funciones de una variable**: (ver también en *II.Doc3 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES. ESQUEMA*).

| PROPIEDADES | CARACTERIZACION | OBSERVACIONES |
|---|---|---|
| Dominio | $Dom\,f = \{ x \in R \,/\, f(x) \in R \}$<br>Cuando no se indique lo contrario explícitamente el dominio de la función será el máximo posible. | $f(x) = P(x) \Rightarrow Domf = R$<br>$f(x) = P(x)/Q(x) \Rightarrow Domf = R - \{x:\ Q(x) = 0\}$<br>$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \Rightarrow Domf = R - \{x:\ g(x) \geq 0\}$<br>$f(x) = \lg_a g(x) \Rightarrow Domf = R - \{x:\ g(x) > 0\}$<br>$\left.\begin{matrix} f(x) = \text{sen}(g(x)) \\ f(x) = \cos(g(x)) \end{matrix}\right. \Rightarrow Domf = Domg$ |
| Recorrido | $Im\,f = \{ k \in R \,/\, [f(x) = k] \in Dom\,f \}$ | |
| Discontinuidades | $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ | |
| Puntos de Corte | $\text{OY}:\ f(0) = y$<br>$\text{OX}:\ f(x) = 0$ | Con OY tiene ninguno o un punto. Con OX tienen ninguno, uno o más puntos.<br>Si *f ´* no posee raíces reales, el nº máximo de raíces de *f* es uno. Si *f ´* solo posee una raíz real, *f* tendrá dos raíces como máximo. etc... |
| Signo | $f(x) > 0 \Rightarrow$ grafica por encima del eje OX<br>$f(x) < 0 \Rightarrow$ grafica por debajo del eje OX | Hacer un esquema para las regiones de existencia del siguiente modo:<br> |
| Simetrías | Eje de simetria OY $\rightarrow$ Par : $f(-x) = f(x)$<br>Centro de simetria $O(0,0) \rightarrow$ Impar : $f(-x) = -f(x)$ | Si una función es par o impar sólo es necesario estudiarla en $R^+$ , es decir para valores positivos de *x*. |
| Periodicidad | $f(x+T) = f(x)$ | T es el periodo mínimo |
| Asíntotas | A.V. : $x = u \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to u} f(x) = \pm\infty \ ,\ u = a, a^+, a^-$<br>A.H. : $y = k \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = k$<br>A.O. : $y = mx + b \Rightarrow \left\| \begin{matrix} m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \end{matrix} \right.$<br>R.P. : En la direccion de OY $\Rightarrow m = \pm\infty$<br>En la direccion de OX $\Rightarrow m = 0$<br>En la direccion de A.O. $\Rightarrow m \neq 0$ y $b = \pm\infty$ | Una función puede tener como máximo dos A.H., y la gráfica puede cortar a la asíntota.<br>Una función puede tener infinitas A.V. y la gráfica nunca corta a la asíntota.<br>Las funciones enteras no presentan asíntotas.<br>Las funciones racionales tienen asíntotas verticales en los valores de x que anulan el denominador. |
| Monotonía | Intervalos de Crecimiento : $f' > 0$<br>Intervalos de Decrecimiento : $f' < 0$ | Localizar los valores de *x* en los que *f ´(x)=0* o la *f ´(x)* no está definida. Estos valores determinan unos intervalos prueba donde mirar el signo de *f ´(x)*. |
| Extremos Relativos | $f'(a) = 0 \ y \ f''(a) < 0 \Rightarrow$ *Maximo* en $(a, f(a))$<br>$f'(a) = 0 \ y \ f''(a) > 0 \Rightarrow$ *Minimo* en $(a, f(a))$ | Otros criterios para localizar los extr. son:<br>• Cambio de signo de la *f ´(x)*<br>• Teorema de Taylor |
| Curvatura | Intervalos de Concavidad : $f'' > 0$<br>Intervalos de Convexidad : $f'' < 0$ | Localizar los valores de *x* en los que *f ´´(x)=0* o la *f ´´(x)* no está definida. Estos valores determinan unos intervalos prueba donde mirar el signo de *f ´´(x)*. |
| Puntos de Inflexión | $f''(a) = 0 \ y \ f'''(a) \neq 0 \Rightarrow$<br>*Punto de Inflexion* en $(a, f(a))$ | Otros criterios para localizar los p.inflex. son:<br>• Cambio de signo de la *f ´´(x)*<br>• Teorema de Taylor |
| Tabla de valores | Construir una tabla de valores con los puntos característicos ya calculados más otros convenientemente elegidos y así facilitar su representación gráfica. | La situación de la gráfica con relación a las asíntotas es importante para la representación gráfica. |
| Gráfica | La gráfica de la función *f* es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación *y = f(x)* | Dividir los ejes convenientemente para representar todas las características de *f*. |

Para el análisis e interpretación de **funciones de varias variables** debemos tener en cuenta que si una función tiene un dominio superior a dos variables independientes es muy difícil su representación espacial en una gráfica debiendo recurrir a otro tipo de técnicas de representación como son la agrupación de variables, curvas de colores, tamaños de puntos o agrupaciones de los mismos (llamados también, conglomerados), por ejemplo, muy utilizadas en marketing. En su defecto, para dicho análisis e interpretación se recurrirá al estudio de su continuidad y derivabilidad, el cálculo de sus puntos críticos, o bien, comportamientos marginales en intervalos reales específicos, como se verá más adelante.

Si nos centramos en la representación de **funciones de 2 variables**, esto es, funciones del tipo $(x, y) \in IR^2 \rightarrow z = f(x, y) \in IR$, tenemos muchos programas que generan en 3D dichas funciones a través de sus ejes cartesianos $(x, y, z = f(x, y)) \in IR^3$.

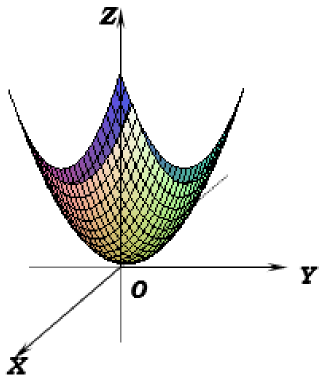
A continuación, se muestran algunos enlaces para practicar:

GENERADORES DE GRAFICAS: FUNCIONES DE 2 VARIABLES

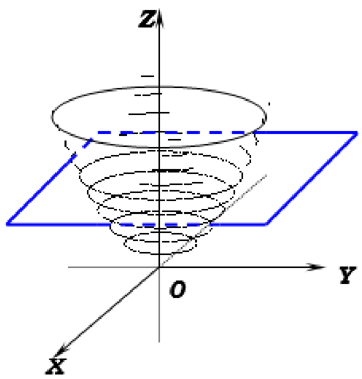
- http://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html
- https://academo.org/demos/3d-surface-plotter/
- https://academo.org/demos/contour-plot/

Otro método útil para la representación gráficamente una función de dos variables es similar el del indicado anteriormente, a través de un relieve tridimensional pero ahora se realizar por medio de un mapa topográfico bidimensional. Se utilizan las *curvas de nivel (o isolíneas)* de la función para valores de discretos de la función, definida dentro de su dominio $D_f$ y su recorrido $R_f$. Las curvas de nivel de, por ejemplo, una función de producción se llaman también *isocuantas.*

Para su mejor comprensión, suponga que la superficie $z = f(x, y)$ se intercepta con el plano $z = k$, y que la curva de intersección se proyecta sobre el plano $xy$. Esta curva proyectada tiene a $f(x, y) = k$ como una ecuación de dos dimensiones, denominándose curva de nivel (o isolíneas o de contorno) de la función $f$ en $k$. Cada punto de la curva de nivel corresponde a un solo punto de la superficie que se encuentra a $k$ unidades sobre ella, si $k$ es positivo, o debajo de ella si $k$ es negativo. Al considerar diferentes valores para la constante $k$ (perteneciente al recorrido de la función $R_f$), se obtiene un conjunto de curvas de nivel en 2D llamado *mapa de contornos* (isolíneas o curvas de nivel).



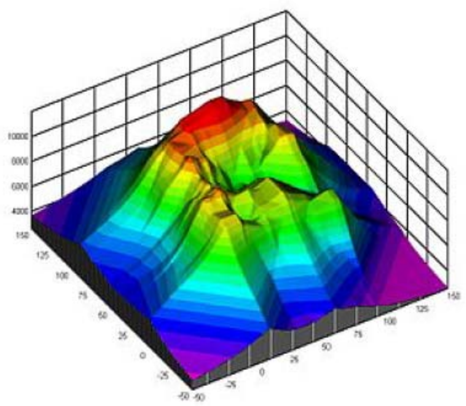

**Figura**



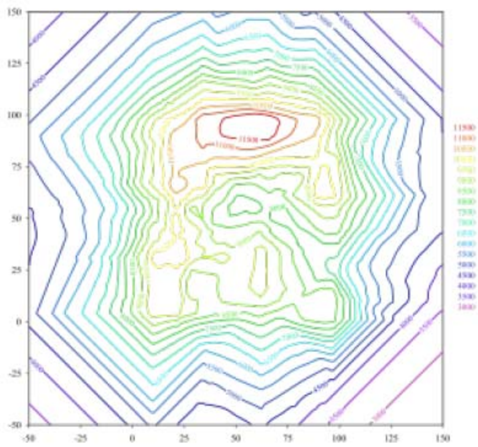

**Figura**

Proceso de intercepción de una superficie $z = f(x, y)$ con planos $z = k$, donde $k \in IR$

A continuación se muestra la representación de una función $z = f(x, y) \in R_f$ según sus valores $(x, y) \in IR^2$.



(a)



(b)

Representación de una función de dos variables:
(a) Superficie tridimensional. (b) Gráfico de isolíneas o curvas de nivel (también llamado mapa de contorno).

## II.2.3 Ejercicios resueltos

<u>Representación gráfica de funciones de una variable</u>: ( ver *en II.Doc4 REPRESENTACION DE FUNCIONES.ANALISIS*)

<u>Representación gráfica de funciones de varias variables:</u>

Ejercicio 1: representación gráfica

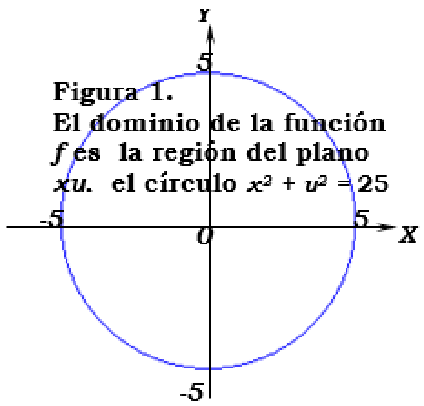
Sea la función de dos variables $f: IR^2 \to IR$ , definida por $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

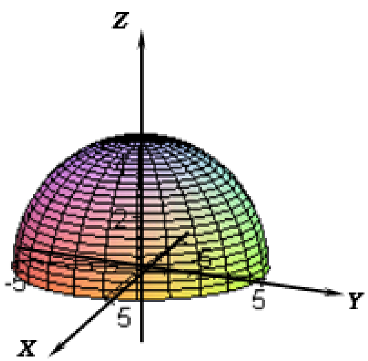
El dominio de f es el conjunto $D_f = \{(x,y)/\ x^2 + y^2 \leq 25\ \}$. Este es es el conjunto d epuntos del plano xy sobre el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

La representación gráfica del dominio de f se muestra en la figura 1.

Debido a que $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, entonces $0 \leq z \leq 5$, siendo así el rango o recorrido de f el conjunto de números reales comprendido en el intervalo cerrado $[0, 5]$.

La traza de la función $f$ con el plano $xy$, se obtiene al sustituir z=0, resultando la ecuación $x^2 + y^2 = 5$, que es una circunferencia de radio 5 y centro el origen. Las trazas con los planos $yz$ y $xz$ se obtienen al sustituir $x = 0$ e $y = 0$ respectivamente, de esta forma se obtienen las semicircunferencias $z = \sqrt{25 - y^2}$ y $z = \sqrt{25 - x^2}$, y la sección transversal en el plano $z = k$, paralelo al plano xy, son las isolíneas o curvas de nivel que forma circunferencias con cnetro en el eje Z y radio $\sqrt{25 - k}$ con $0 < k < 5$. Cuando $k = 5$ se obtiene el punto $(0,0,5)$ y así sucesivamente como se muestra en el gráfico.



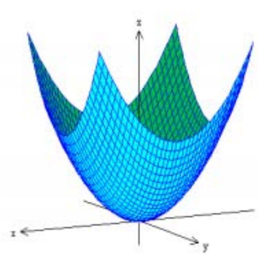




Las curvas de nivel de f conforman una semiesfera

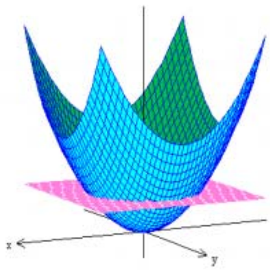
Ejercicio 2: representación gráfica

Dibujar las curvas de nivel para $k = 1, 2, 3, 4, 5\ y\ 6$ , para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

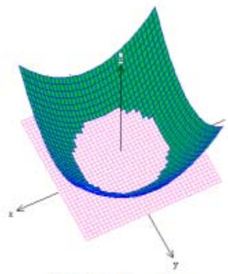
Las curvas de intersección de la superficie con los puntos del plano $z = k$, donde $k = 1, 2, 3, 4, 5\ y\ 6$ son circunferencias con centros en el eje Z y radio $\sqrt{k}$. La figura siguiente presenta las curvas proyectadas sobre el plano $xy$. Las circunferencias proyectadas, son las curvas de nivel solicitadas de la función f y representan una vista desde un punto del eje Z hacia abajo.



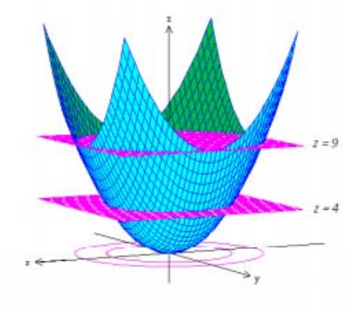
Gráfica de $f(x,y) = x^2 + y^2$



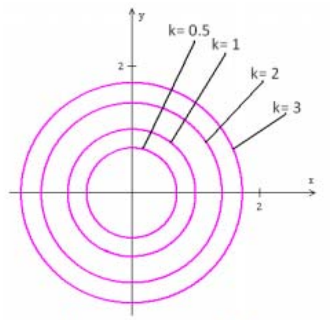
Corte de la gráfica por el plano $z = k$



Vista desde arriba.




Proyección de las intersecciones en el plano $xy$

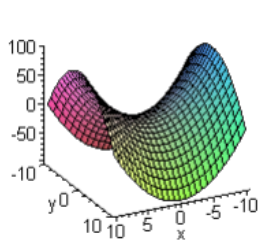


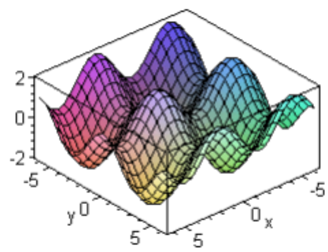

Algunas curvas de nivel

Un mapa de contornos de z=f(x,y) muestra la variación de z con respecto a x e y en el plano xy y se consigue a través de las curvas de nivel. Los valores de z cambian más rápidamente cuando las curvas de nivel se encuentras más cercanas entre sí, dando un perfil más escarpado. En caso contrario, tendríamos un perfil más suave. Un buen ejemplo de ello son las cartografías o mapas acotados.

Otros ejemplos:

Existen muchos programas que permite trazar gráficas de funciones utilizando computadoras, como son, MAPLE-V, MATLAB, DERIVE, etc. En este bloque se proponen otros ejemplos más sencillos que permiten visualizar su aspecto.



# II.2.4 Interpretación de Funciones Matemáticas en el Entorno Empresarial

*Ventas* *Ingresos = (Valor de venta por unidad=p) · (Número de unidades vendidas=x) = p·x*

*Modelo de coste lineal* *Coste total = Costes variables + Costes fijos*

*Beneficio (Utilidad)*: *Ingresos-Costes*

*Valores porcentuales y unitarios:*

El *porcentaje* es un número asociado a una razón, que representa una cantidad dada como una fracción en *100* partes. También se le llama comúnmente tanto por ciento y se denota por *%*. Para obtener un tanto por ciento de un número, simplemente se multiplica por el porcentaje y se divide por *100*. Alternativamente, nos pueden dar la razón en tanto por uno, por lo que no hay que dividir por *100*. Alternativamente, también se podría dar en tantos por mil (‰) y entonces es la cantidad relativa por cada 1000.

Dado un valor unitario, por ejemplo, el coste c de un producto, y un número de unidades q, el valor total se obtiene multiplicando ambos números. Así, el *coste total* de todas las unidades fabricadas será *c x q.*

*Depreciación lineal* *Tasa de depreciación (anual) =*
*= (Valor inicial – Valor de desecho) / (Tiempo de vida en años).*

*Modelos de mercado*

Uno de los modelos más sencillos y frecuentes es el denominado de *oferta y demanda*. Para un bien determinado, relaciona el precio $p$ y las cantidades vendidas $q$ en un determinado período de tiempo.

La función demanda determina las cantidades vendidas en función del precio desde el punto de vista del consumidor $D(p)$. Suele ser una función decreciente.

De la misma forma, se define la función $S(p)$ (usamos $S$ por la palabra inglesa *Supply*) que describe el comportamiento de las cantidades vendidas en función del precio de venta desde el punto de vista del proveedor o empresario que suministra/produce dicho bien. Suele ser una función creciente.

El mercado llegará a un equilibrio cuando ambas curvas se corten, siempre y cuando el corte dé un precio y una cantidad de producto positivos (primer cuadrante en una gráfica), esto es, $D(p) = S(p)$.

Este modelo puede tener en cuenta impuestos indirectos, es decir, una tasa fija T que un gobierno pueda llegar a imponer en cada venta de un producto. Esto variaría el punto de equilibrio, que ocurriría en dicho caso cuando se cumpliera que , $D(p) = S(p - T)$. Es decir, el proveedor no obtendrá como ingreso neto un precio p, sino que su ganancia vendrá determinada por p-T, esto es, reducida por la tasa impuesta. En términos de porcentaje respecto al precio y entonces sería $p - p \cdot t(\%) = p \cdot (1 - t(\%))$.

En este tipo de modelos se dice que una empresa opera en *competencia perfecta* cuando es pequeña y su producción no afecta al precio del mercado del bien en cuestión, es decir, el precio es fijo desde su punto de vista. En el caso opuesto, una empresa opera como un *monopolio* cuando suministra la totalidad de la producción de un determinado bien, por lo que, su producción sí influye en el precio de venta.

## *Modelos financieros:*

*Interés simple*: supongamos que invertimos una cantidad inicial $P$ (principal) a un tipo de interés $r$ (expresado en tanto por uno) en un período de tiempo. Al cabo de ese período de tiempo habremos obtenido un incremento de capital, siendo la nueva cantidad $C = (1 + r)P$.

*Interés compuesto*: si al cabo del primer período repetimos la inversión, siendo el tipo de interés constante e igual a r, al cabo de N períodos obtendremos una cantidad $C = (1 + r)^N P$. Al contrario se queremos obtener el capital final $C$, la expresión que nos da la cantidad que debemos invertir es $P = (1 + r)^{-N} C$, y se denomina *valor actual*.

*Anualidad*: como alternativa al incremento de capital, la gente invierte a menudo su dinero con el objetivo de obtener unos ingresos regulares, llamados anualidad. Supongamos que invertimos $P$ y extraemos una cantidad $I$ al final de cada año, durante $N$ años, momento en el cual se retira el capital. En el año $t$, el capital $y_t$ se puede expresar en función del capital del año anterior $y_{t-1}$:

$$y_t = (1 + r)y_{t-1} - I$$

Donde en el primer momento $y_0 = P$. Se puede demostrar que el capital en el año t será,

$$y_t = \frac{I}{r} + \left(P - \frac{I}{r}\right)(1 + r)^t$$

Utilizando la condición de no dejar nada de capital después de $t = N$ años, obtenemos que:

$$0 = \frac{I}{r} + \left(P - \frac{I}{r}\right)(1 + r)^N \;\rightarrow\; I(P) = \left(\frac{r(1 + r)^N}{(1 + r)^N - 1}\right)P$$

## *Modelos logísticos*

$y = y_m/(1 + Ce^{-kt})$ también llamado de *crecimiento restringido.*

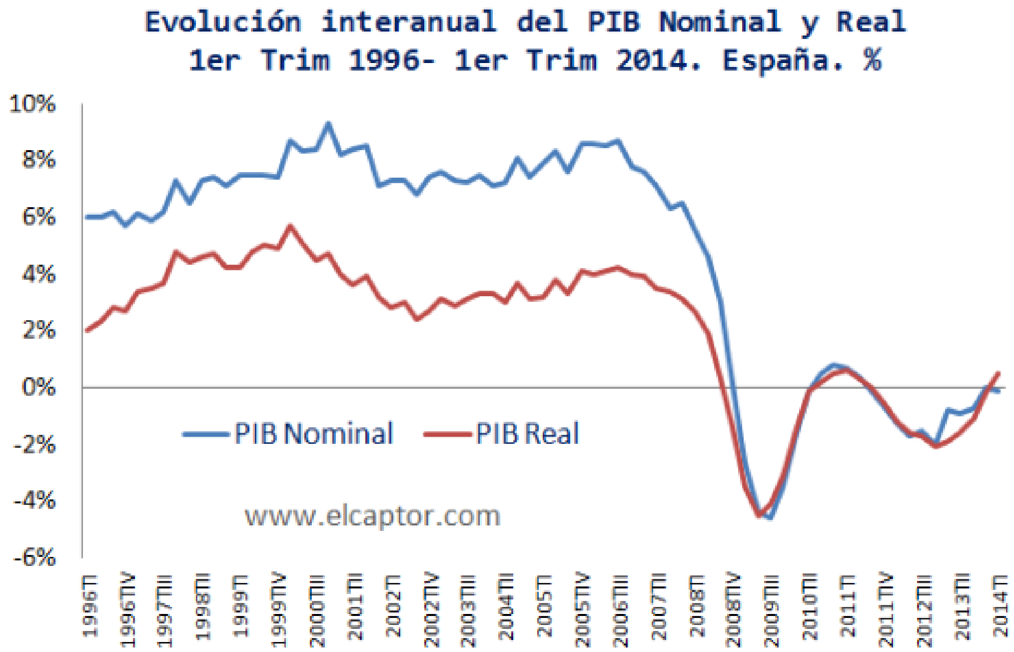
donde $y$ es el tamaño de la población en el instante $t$ y el resto son constantes positivas. Suele ser muy utilizado en análisis de crecimientos de poblaciones con restricciones de sus entornos.

## *Otros modelos: casos de estudio* (se proponen ejemplos en el apdo. *Casos de Discusión*)

- *de costes, producción y productividad*
- *de análisis y viabilidad de inversión*
- *de rentabilidad en proyectos de emprendimiento*

*<u>Interpretación gráfica</u>:*

*PIB*



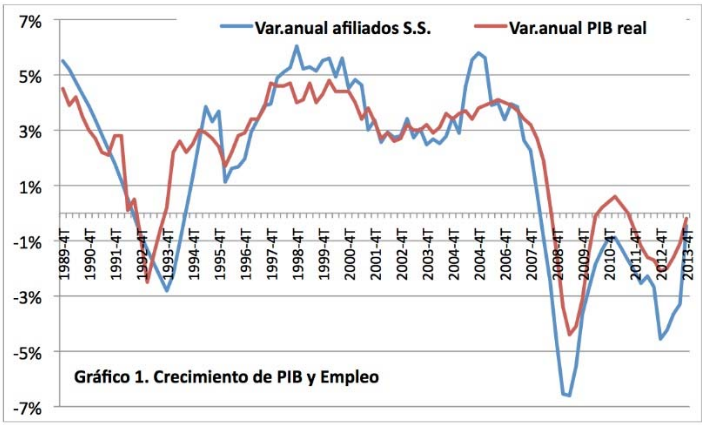
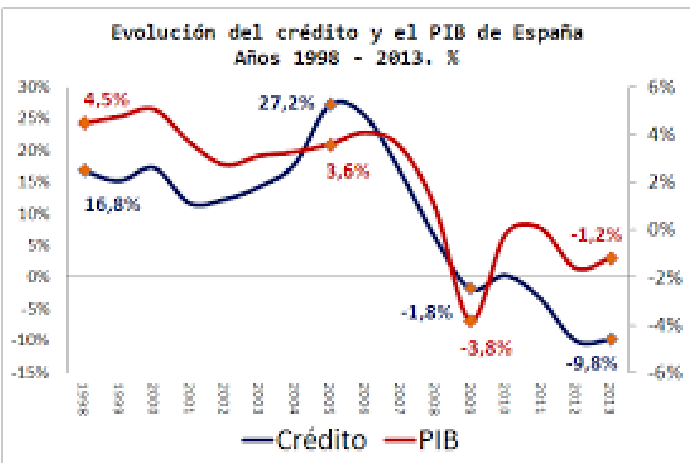



Gráfico 1. Crecimiento de PIB y Empleo



# II.3 Métodos para la Optimización de Funciones

## II.3.1 Algoritmo de Optimización de Funciones SIN Restricciones de Entorno

En el apdo II.2.2 se resume el procedimiento para analizar **funciones de una variable** de forma muy completa de forma que nos permita representar la función en sus ejes cartesianos $\{x,\ y = f(x)\}$. Para obtener los valores de x donde la función tiene puntos críticos (máximo, mínimo o punto de inflexión), se utilizan dos condiciones necesarias de optimización según el orden de la función:

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, x = x_2, \dots \, serán\ los\ puntos\ críticos$$

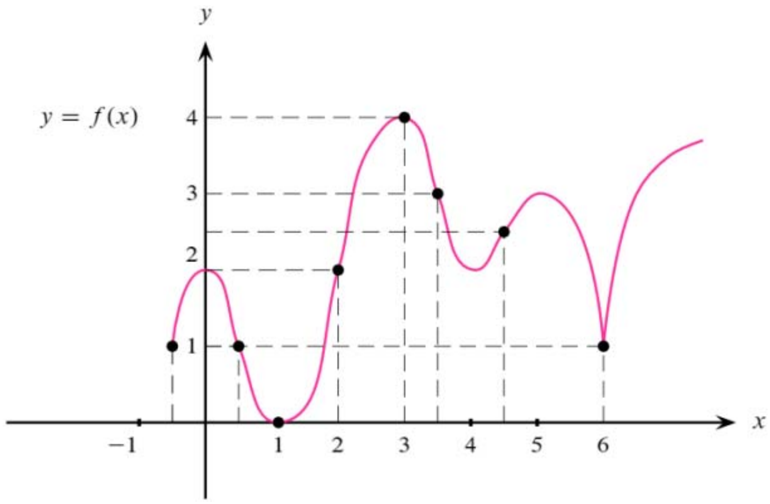
Para cada punto crítico (supongamos, por ejemplo, el primer punto crítico obtenido $x = x_0$),

$$si\ f''(x_0)\ es \begin{cases} > 0 & \rightarrow en\ x_0\ la\ función\ tiene\ un\ valor\ mínimo \\ < 0 & \rightarrow en\ x_0\ la\ función\ tiene\ un\ valor\ mínimo \\ = 0 & \rightarrow en\ x_0\ la\ función\ tiene\ un\ pto.de\ inflexión \end{cases}$$

Y lo mismo haríamos para el resto de los puntos críticos obtenidos en la primera condición.

Cuando las funciones son de varias variables, se emplea un procedimiento similar, si bien, el número de derivadas parciales es mayor por lo que las agrupamos como elementos de matrices.

En la siguiente figura se muestra una función de una variable representada $(x, f(x))$ en $IR^2$.




Observe los puntos de la gráfica e indentifique y discuta cuáles son los puntos óptimos de la función en el intervalo definido $[-0{,}5, +\infty)$.

Sabiendo que el procedimiento se expande de la misma forma para el caso de más de dos variables, se resume a continuación el caso de **optimización de funciones de dos variables**, $z = f(x, y)$, donde $z$ es la función (o variable dependiente) y, $x$ e $y$ son las variables independientes:

Funciones de dos variables: condiciones de optimización

1. Condición necesaria de primer orden:

   Si la función $z = f(x, y)$ posee un valor óptimo en el punto $(x_0, y_0) \in D_f$, entonces el valor del gradiente de la función en ese punto será: $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Esto significa que sus derivadas parciales, que son los elementos de la matriz Jacobiana que definen la función gradiente particularizados en ese punto, son nulos (valen cero): $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$.

   De esta forma, para encontrar los óptimos de una función se debe encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \rightarrow puntos\ críticos$$

   No todos los puntos críticos son óptimos, dado que entre ellos puede existir puntos de silla.

2. Condiciones de segundo orden:

   Si $(x_0, y_0) \in D_f$ es un punto crítico de $z = f(x, y)$, se recurre a obtener el determinante de la matriz Hessiana. Dicha matriz no es más que el conjunto ordenado de las derivadas segundas de la función en cuestión, cuyos elementos se particularizan para cada punto crítico a analizar.

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \rightarrow para\ simplificar: Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

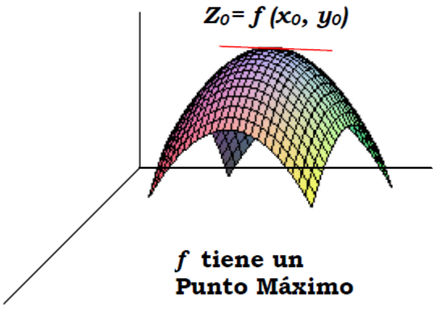
   Por lo tanto, su determinante será: $|Hf(x_0, y_0| = AC - B^2$

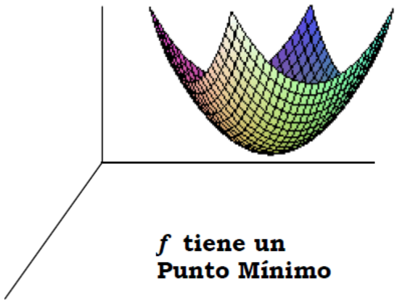
   Con todo ello, tenemos que:

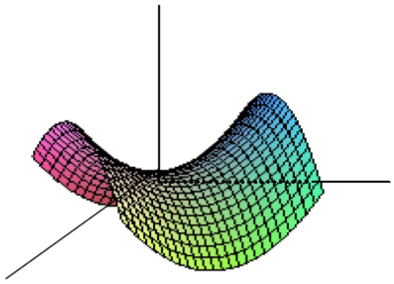
- Si $(x_0, y_0)$ *es un pto. crítico en* $f$*, entonces* $AC - B^2 > 0$ *y* $A < 0$ $\rightarrow f(x_0, y_0)$ *es máximo*
- Si $(x_0, y_0)$ *es un pto. crítico en* $f$*, entonces* $AC - B^2 > 0$ *y* $A > 0$ $\rightarrow f(x_0, y_0)$ *es mínimo*
- Si $(x_0, y_0)$ *es un pto. crítico en* $f$*, entonces* $AC - B^2 < 0$ $\rightarrow f(x_0, y_0)$ *es un punto de silla*
- Si $(x_0, y_0)$ *es un pto. crítico en* $f$*, entonces* $AC - B^2 = 0$*, el caso es dudoso*; *puede tratarse de un máximo, de un mínimo o de un punto de silla*

Este estudio se debe hacer para cada uno de los puntos críticos encontrados en la primera condición, entendiendo que ahora cada punto crítico está definido en $IR^2$ y por lo tanto los puntos son del tipo $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ …

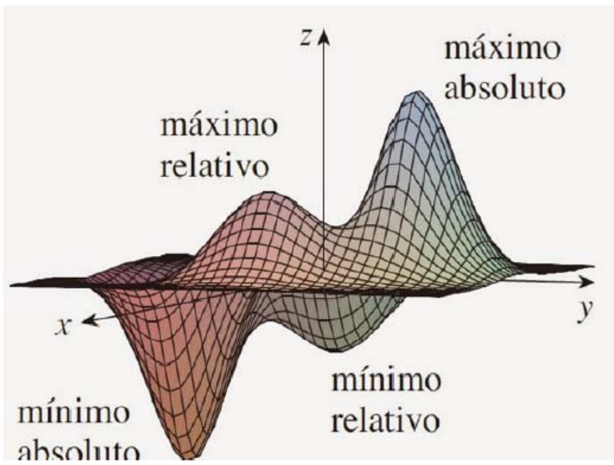
A continuación, se muestran ejemplos de estas de funciones $(x, y, z = f(x, y))$ representados en $IR^3$:



La función $f(x,y)$=$x^2 - y^2$ posee un Punto de Silla en (0,0)




Puntos críticos en una función cualquiera, expresados como extremos relativos y absolutos y puntos de silla.

Si observamos, para encontrar los puntos críticos debemos resolver sistemas de tantas ecuaciones como derivadas parciales de primer orden tenga la función (función de dos variables corresponden dos ecuaciones, de tres variables corresponden 3 ecuaciones y así sucesivamente). Por lo tanto, la matriz Jacobiana será un vector de 2, 3, … elementos y la matriz Hessiana que se forma será siempre cuadrada, esto es, de tipo $nxn$ donde $n$ es el número de variables de la función a optimizar. Esto nos permite encontrar los valores óptimos de **funciones de n variables**, cuyo método de resolución más cómodo sería matricial. En el Bloque III veremos cómo hacerlo si dichos elementos están compuestos por expresiones lineales.

Existen otras consideraciones importantes que debemos tener en cuenta:

1. A partir de 3 variables en adelante, las funciones ya no tienen una fácil interpretación gráfica.
2. Los puntos críticos deben pertenecer al dominio de $f$, $D_f$.
3. En este método, la función debe ser contínua y derivable en $D_f$.
4. Aunque no consideremos restricciones de entorno (se ve en el apdo. siguiente), conviene tener en cuenta que, en la vida real, muchas funciones matemáticas tienen limitaciones en su significado. Por ejemplo, si consideramos una función coste, no podemos contemplar valores negativos e incluso las inversiones realizadas pueden tener también un límite inferior, por lo que, deberíamos contemplar intervalos "factibles y razonables" para el problema que estemos resolviendo en su contexto de aplicación real, no sólo matemático.

## II.3.1 Algoritmos de Optimización de Funciones CON Restricciones de Entorno

Existen numerosos casos donde queremos obtener el valor óptimo (un valor máximo o mínimo, por ejemplo) de una función donde se suponen ciertas restricciones de entorno. Estas restricciones vienen expresadas en términos de ecuaciones o inecuaciones y dichas condiciones de contorno restringen el número posible de soluciones.

El **método general** para obtener el valor óptimo de una función con restricciones se basa en la introducción de las condiciones de contorno dentro de la función a optimizar, reduciendo así en número de variables (dado que unas variables dependen a su vez de las otras) la función para su resolución y, por lo tanto, simplificando el cálculo a través del método visto en el apartado anterior. Las restricciones suelen ser ecuaciones, tanto lineales como no lineales y las funciones pueden ser de cualquier tipo, pero teniendo en cuenta en todo momento el dominio de la función en la que está definida.

Para plantear un problema de optimización de estas características, podemos utilizar este procedimiento:

1er paso: Elección de incógnitas (variables).

2º paso: Plantear la función objetivo a optimizar (maximizar o minimizar).

3er paso: Determinar las restricciones en términos de ecuaciones o inecuaciones. Existen muchos métodos, como la tabulación matricial. En casos sencillos, donde las condiciones son dadas en ecuaciones se suele obtener de forma inmediata.

4º paso: Hallar el conjunto de soluciones factibles (puntos críticos) y determinar el/los valores óptimos de las incógnitas. Esto dependerá del tipo de restricciones existentes.

En casos sencillos, donde estas restricciones vienen definidas por ecuaciones no muy complejas, contínuas y derivables, y donde es fácil despejar alguna incógnita, suelen sustituirse directamente en la función objetivo y resolviendo a través de las condiciones de primer y segundo orden descritas en el apdo anterior. En el caso de tratarse de inecuaciones, suelen emplearse métodos de graficado o de programación lineal (se verán en Bloque III).

5º paso: Calcular el/los valor/es de la función objetivo para dichos valores óptimos de incógnitas.

El **método de Lagrange** suele ser el método más extendido de cálculo multivariable para casos más generales con restricciones. Aunque éste no sea objeto de estudio en esta asignatura, se muestran más abajo varios ejemplos de cómo se resuelve este tipo de problemas de optimización a través de los coeficientes de Lagrange.

La **programación lineal** (por ejemplo, a través de la aplicación *Solver* dentro del paquete de Microsoft® Excel) permite obtener los valores de las variables independientes para que una función sea óptima siempre y cuando dichas función y variables dependientes sean lineales. En el bloque siguiente (Bloque III - Análisis de Compatibilidad) se trabajará con esta herramienta para obtener mediante el cálculo computacional la solución de este tipo de problemas. Se trata de un algoritmo muy común en el entorno empresarial dando que gran parte de las funciones y restricciones suelen ser lineales.

## II.3.3 Ejercicios resueltos

Ejercicios de optimización de funciones de dos variables sin restricciones

https://static1.squarespace.com/static/526e85b4e4b09c47421bd159/t/5358f689e4b0b7727660197f/1398339209460/AMGFUN2VAR4.pdf

Ejercicios de optimización de funciones de una variable con restricciones: Método general

https://www.youtube.com/watch?v=XMBtl7Gzmqg
https://www.youtube.com/watch?v=wtvlyFDx63o
https://www.youtube.com/watch?v=ODG7PqIVwNg
https://www.youtube.com/watch?v=8_L3rV9hDOE

Ejercicios de optimización de funciones de dos variables con restricciones: Método de Lagrange (solo para investigar y profundizar)

https://www.youtube.com/watch?v=D49Ph4SgCec
https://www.youtube.com/watch?v=0mBZJcbseWA

## II.3.4 Aplicaciones de optimización en el entorno empresarial

Caso 1

Se quiere comercializar producto líquido de cosmética, dentro de un embase cilíndrico circular recto (r=radio de la base, h=altura del cilindro) con capacidad de A $dm^3$ ($A>0$ y $\in$ IR). Calcular el valor de r y de h para que el material utilizado sea lo más sostenible y económico posible, esto es, emplee "el menor área" de material (Vol_cilindro= $\pi r^2 h$; Area_cilindro=$2\pi r^2+2\pi rh$ ).

Caso 2

El coste de producir x número de artículos por semana es $C(x) = 10^3 + 6x - 3 \cdot 10^{-3}x^2 + 10^{-6}x^3$

a) Determinar la función de coste marginal e interpretar su valor para $x = 1000$.

El precio al que puede venderse x artículos por semana viene dado por la ecuación de demanda $p = 12 - 1{,}5 \cdot 10^{-3}x$

b) Calcular el precio unitario y volumen de ventas para los que el beneficio se hace máximo.

Caso 3

Una gran empresa tiene el monopolio de un determinado producto. La ecuación de demanda que relaciona la cantidad $x$ del producto con su precio de venta $p$ es: $x - 20 + p = 0$. La función de coste de fabricación de una cantidad $x$ de dicho producto es $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 30$

a) Calcular la cantidad $x$ que maximiza el ingreso de la empresa. Hallar el valor del ingreso máximo.
b) Calcular el intervalo donde debe situarse la cantidad producida $x$ para que la empresa no tenga pérdidas, es decir, que la función beneficio $B(x)$ sea positiva.
c) Calcular la cantidad $x$ que maximiza el beneficio de la empresa, así como el valor del beneficio máximo.

Caso 4

Si los ingresos de una empresa dependen de la combinación de dos campañas de publicidad, A y B, y resulta que se pueden expresar a través de la función (en decenas de Euros):

$$I(x, y) = -2x^2 - 4y^2 - 4xy + 1600x + 2400y$$

Donde $x$ (en miles de Euros) es la inversión en la campaña A e $y$ (en miles de Euros) es la inversión en la campaña B.

Hallar: a) Presupuesto de cada campaña que maximice los ingresos
b) Calcular dicho valor máximo de ingresos

# II.4 Métodos para la Aproximación de Funciones

## II.4.1 Aproximación de una función a partir de su Diferencial Total

En la vida real, no siempre tenemos conocimiento del comportamiento de una función para todos los valores del dominio de estudio, o bien, es complicada su obtención, y puede resultarnos necesario conocer las variaciones de dicha función ante variaciones de sus variables.

Uno método de aproximación sencilla es el que se obtiene a partir de su diferencial total.

Supongamos la **función de una variable** $y = f(x)$, donde la función para $x = x_0$ sabemos que vale $f(x_0)$. La pregunta que queremos responder sería: ¿cuál es la variación de la función $y = f(x)$, $\Delta y = \Delta f$, ante una variación de $x$, $\Delta x$, respecto $x_0$?.

Lo primero que se nos ocurre es plantear el valor de la función en, por ejemplo, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x)$, y entonces calcular:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = Vreal$$

La obtención del valor de una función en un punto muy alejado de otro ($|\Delta x| \gg |x_0|$, requiere conocer el comportamiento de dicha función. Sin embargo, si la variación desde el punto de partida es pequeña, esto es, $|\Delta x| \ll |x_0|$, entonces podemos aproximar la diferencial total $df \approx \Delta f$ y entonces, podemos predecir, como primera aproximación, el valor de dicha variación de la función a partir de su derivada en el punto $x_0, f'(x_0)$ multiplicada por el valor de la variación en $x$, $\Delta x$, esto es,

$$\Delta f(x_0, \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x = Vaprox$$

$$si\ |\Delta x| \ll |x_0|$$

Está claro que en cualquier aproximación cometemos un error que será tanto menor cuanto más se cumpla la condición indicada más arriba respecto a la distancia entre los dos puntos del dominio de f. El valor del error cometido se podrá calcular así:

$$\varepsilon_{abs} = |Vreal - Vaprox| \qquad error\ absoluto$$

$$\varepsilon_r = \frac{|Vreal - Vaprox|}{|Vreal|} \cdot 100\ (\%) \qquad error\ relativo$$

Para el caso en el que la **función** depende **de dos variables**, $z = f(x, y)$, ahora el valor real de la variación de $f$, $\Delta z = \Delta f$ respecto a variaciones de $x$, $\Delta x$, y de $y$, $\Delta y$, desde el punto de partida $(x_0, y_0)$, la llamaremos $Vreal$ y será ahora:

$$\Delta f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = Vreal$$

Y su valor aproximado se podrá obtener ahora a partir de las derivadas parciales en el punto de partida $(x_0, y_0)$, será llamado ahora $Vaprox$, y resultando que:

$$\Delta f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) \approx f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y = Vaprox$$

$$si \begin{cases} |\Delta x| \ll |x_0| \\ |\Delta y| \ll |y_0| \end{cases}$$

El error cometido se calculará de forma idéntica, esto es:

$$\varepsilon_{abs} = |Vreal - Vaprox| \qquad error\ absoluto$$

$$\varepsilon_r = \frac{|Vreal - Vaprox|}{|Vreal|} \cdot 100\ (\%) \qquad error\ relativo$$

Recordar que cuando una de las variables dependientes no sufra variación entonces su operador correspondiente $\Delta$ valdrá cero y por lo tanto no será preciso calcular su correspondiente marginal.

Por otro lado, si nos pidieran el valor aproximado de una función en un punto no muy lejano de un punto de partida, podríamos indicar que es:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + Vaprox$$

siempre y cuando justificáramos la adecuación del resultado aproximado a partir de la condición de cercanía de ambos puntos indicada más arriba.

Este procedimiento se puede replicar para el resto de funciones con más de dos variables.

## II.4.2 Aproximación polinómica de una función complicada: Polinomios de Taylor y McLaurin

En numerosas ocasiones podemos aproximar funciones complicadas mediante otras funciones más simples que proporcionan una precisión suficiente para ciertas aplicaciones. Para simplificar su estudio, vamos a suponer que sólo trabajamos con funciones de una variable y=f(x) en el intervalo $I = (a, b) \subseteq D_f$. Hemos visto que la primera aproximación de una función en un punto $x = c \in I$ sería la recta horizontal

$$y \approx P_0(x) = f(c) \text{ (sería un polinomio de grado 0, esto es, } y = f(c) \cdot x^0)$$

pero que si bien su valor es exacto al de la función en ese punto x=a, a medida que nos vamos alejando de dicho punto la función va a coincidir cada vez menos con dicho valor en el nuevo valor de x y el error o imprecisión cometida será cada vez mayor.

Una siguiente aproximación sería aproximarlo por una recta tangente en dicho punto, esto es,

$$y \approx P_1(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) \quad \text{(sería un polinomio lineal o de grado 1)}$$

Si quisiéramos aumentar todavía más la precisión en la aproximación de la función en un intervalo $I$ alrededor de $c$, y emplearíamos un polinomio de grado 2, cuya expresión polinómica de dicho grado que más se ajusta a la función alrededor de $c$ sería,

$$y \approx P_2(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - c)^2 \quad \text{(sería un polinomio de grado 2)}$$

El teorema de Taylor es una generalización del teorema de valor medio de Lagrange y permite obtener una función derivable en un intervalo $I = (a, b)$ del dominio de la función donde $c \in I$, la expresión polinómica exacta de una función complicada a partir de una serie infinita de potencias alrededor del punto $c$:

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(c)}{k!} \cdot (x - c)^k$$

Esto da lugar a un polinomio de grado infinito lo que no simplifica mucho las cosas. Normalmente, solemos ajustar los datos basados en números reales a un valor con una cierta precisión. Por este motivo, podemos obtener una función aproximada a partir de un polinomio de grado $n$ finito, pudiendo expresar la función $f(x)$ mediante un polinomio de grado n de la siguiente forma:

$$y = f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

donde,

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

es el <u>polinomio de Taylor de grado n</u> que da la expresión aproxima de la función $f(x)$ en el entorno de $x = c$, y el término de orden $n + 1$ lo conocemos como el <u>resto de Lagrange</u>,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1)}(\alpha)}{n+1!}(x-c)^{n+1}$$

y es el término que acumula todo el error cometido por no haber considerado la serie infinita del polinomio de Taylor y que se suele acotar al valor mayor de error que se pueda cometer dentro de intervalo $I$. Esto se debe a que a medida que aumentamos el grado del polinomio de Taylor, la precisión de la función en dicho intervalo $I$ alrededor de $c$ es cada vez mayor y así el error cometido para un punto dado del intervalo, obtenido a través del resto de Lagrange será menor. Por otro lado, según comentábamos al principio, cada vez que nos alejamos del punto c, el valor de la función es más incierto. Por este motivo, acotaremos el valor del resto al valor de $\alpha \in I$, con el que se obtenga mayor resto.

Por este motivo, solemos decir que la función derivable hasta el orden $n+1$, $y = f(x)$, se aproxima a un polinomio de Taylor de orden $n$, $P_n(x)$, alrededor del punto $x = c \in I = (a,b)$ y dentro de un intervalo $I$ del dominio de la función, de forma que,

$$y = f(x) \approx P_n(x) =$$
$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Cometiéndose un error absoluto acotado por el valor calculado a partir del resto de Lagrange:

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1)}(\alpha)}{n+1!}(x-c)^{n+1}$ donde $\alpha \in I = (a,b)$ y $\left|f^{n+1)}(\alpha)\right| < M$, valor máximo

Para estudiar el <u>polinomio de McLaurin</u>, no tenemos que hacer nada más que considerar que el punto de aplicación o desde donde partimos como referencia es $c = 0$ y entonces la expresión aproximada de la función derivable de grado n+1, f(x), alrededor de dicho punto $x = 0 \in I = (a,b) \subseteq D_f$, será más sencilla:

$$y = f(x) \approx P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n$$

Siendo el resto de Lagrange ahora:

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1)}(\alpha)}{n+1!}x^{n+1}$ donde $\alpha \in I = (a,b)$ y $\left|f^{n+1)}(\alpha)\right| < M$, valor máximo

### II.4.3 Otras aproximaciones de funciones a partir de sus datos: interpolación y extrapolación.

En muchas ocasiones solo disponemos de datos obtenidos entre variables relacionadas entre sí y nos puede interesar modelizar el comportamiento a través de una función en un intervalo o dominio determinado.

La interpolación es un proceso por el cual se define el valor de un punto cualquiera a partir de los valores conocidos en otros puntos dentro de un dominio o intervalo en concreto. Esto implica encontrar la relación existente entre una variable dependiente de otras variables. Si nos centramos en funciones de una variable, podemos obtener una aproximación de dicha función a partir de diferentes técnicas de interpolación y el número de puntos (datos) que tengamos como referencia.

La *interpolación polinómica* permite hacerlo a través de polinomios de grado igual al número de puntos conocidos menos 1. Esto es, podemos conseguir una interpolación lineal a partir de dos puntos dados, uno cuadrático a partir de tres y así sucesivamente. La precisión en este caso no aumenta necesariamente con el grado del polinomio, pero es muy sencillo y suele emplearse de forma común. En el apdo. siguiente se muestran varios ejercicios resueltos a partir de este método, para la obtención de funciones polinómicas de grado uno y dos. El cálculo de funciones de interpolación con grados mayores requerirá la utilización de técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes $\in IR$ (ver bloque III *Análisis de Compatibilidad*, o bien, programas de interpolación integrados en herramientas informáticas de cálculo.

Existen otros tipos de interpolación a partir de otro tipo de aproximaciones como son la *interpolación de Lagrange*, o bien, la *interpolación de Spline Cúbico*, por ejemplo.

Cuando lo que queremos es obtener un punto o conjunto de ellos, en concreto, a partir de otros con las mismas características, entonces estamos realizando un proceso de extrapolación. Existen diversos métodos de extrapolación, como son el lineal, polinomial, cónico y el de curva francesa que, por estar fuera del temario de este bloque, dejamos al lector que indague en base a su interés por conocer dichos métodos.

Para ahondar en aplicaciones muy utilizadas en el mundo del marketing y la empresa, es muy común querer predecir o prever la evolución en el tiempo de determinadas variables (número de clientes, ventas, costes, horas trabajadas, impacto de campañas, …) a partir de su comportamiento en el pasado. Un ejemplo de ello son las funciones predictivas basadas en series temporales que emplea comúnmente Microsoft Excel ® y, como extensión fuera del temario de este bloque, se recomienda su lectura para poderse aplicar a través de un ejemplo que muestra dicha aplicación.

Funciones predictivas basadas en algoritmos ETS (*Exponential Smoothing*): (solo para investigar y profundizar)

- FORECAST.ETS function
- FORECAST.ETS.SEASONALITY function
- FORECAST.LINEAR function
- FORECAST.ETS.CONFINT function
- FORECAST.ETS.STAT function

## II.4.4 Ejercicios resueltos

### Ejercicio 1

La función de beneficio de una empresa es $B(x) = -x^2 + 150x - 250$. Actualmente, se producen 150 unidades.

a) Obtener la función de beneficio marginal.
b) Calcular el beneficio marginal si se incrementa la producción en 12 uds.
c) Interpretar los resultados.

Solución: a) $B_{marginal}(x) = \frac{dB}{dx} = -2x + 150$, b) $B_{marginal}(162) = -174$ , c) el beneficio marginal determina la sensibilidad del beneficio respecto a la cantidad de unidades producidas. El resultado de aumentar la producción hace que su marginal pase de -150 a -174 es decir aumenta el valor negativo de su beneficio. Si analizamos e interpretamos esta función en particular observamos que el beneficio marginal es negativo (decrece el beneficio) si $x$ supera las 75 unidades y positivo (crece el beneficio) si las cantidades producidas están entre 0 y 75 unidades, siendo entonces $x = 75$ el número de unidades para las que el beneficio es máximo.

### Ejercicio 2

El vector gradiente de una función producción $P(K, L)$ en el punto $K = 40$ y $L = 60$, viene dado por el vector $(7, 10)$. La variable $K$ es el capital y la variable $L$ es el trabajo. Indicar cómo varía dicha función producción cuando el capital ($K$) aumenta en 1 unidad y el trabajo, $L$, disminuye en 1 unidad, y calcular y justificar su valor numérico.

Solución: $\Delta P \approx -3$, disminuye la producción en 3 unidades, $|1| \ll |40|\ y\ \ |-1| \ll |60|$, luego es una buena aproximación.

### Ejercicio 3

Aproximación de funciones a partir de los polinomios de Taylor y McLaurin:
Ver documento con casos resueltos en los siguientes enlaces:

- https://www.youtube.com/watch?v=YglsE_cQY7M
- https://www.youtube.com/watch?v=mZNUtp9Kryc

Más ejercicios resueltos: (ver *II.Doc7 TAYLOR Y MCLAURIN.Ejemplos* en "*Casos de Discusión*").

### Ejercicio 4

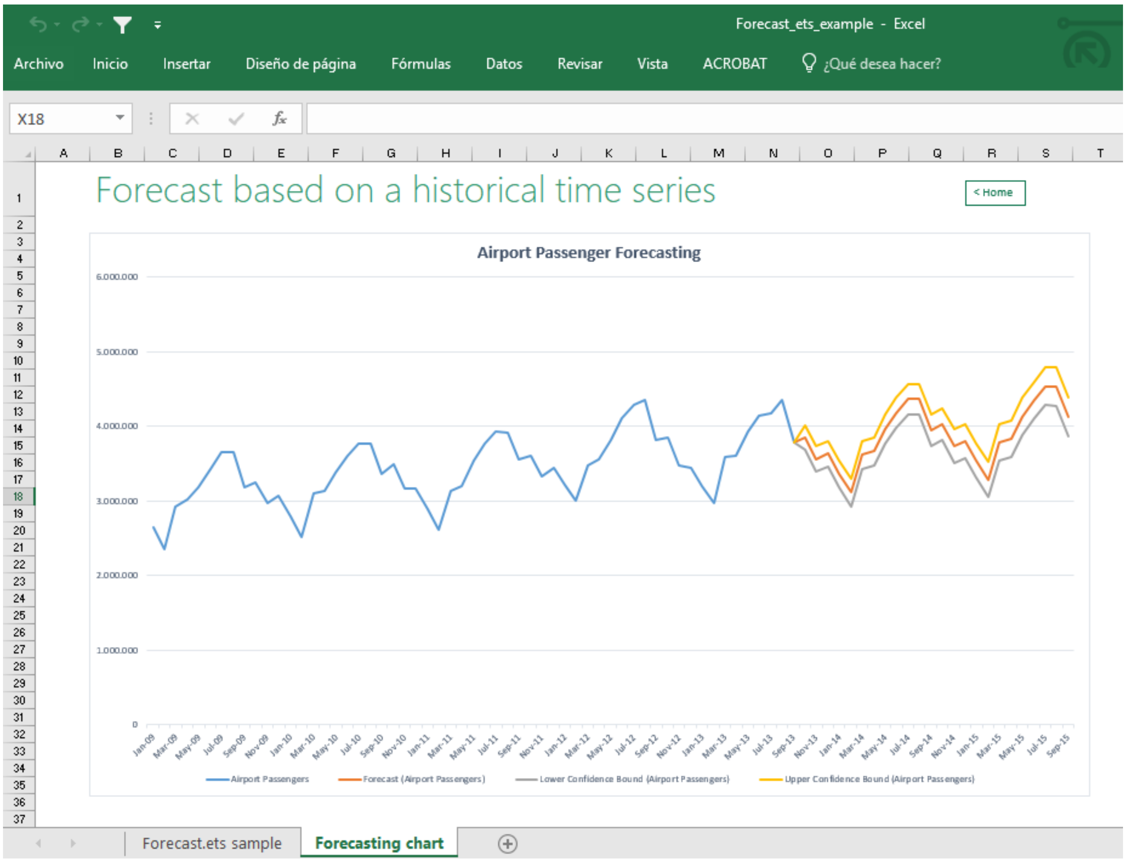
Interpolación a partir de datos relacionados (ver en *II.Doc8 INTERPOLACIÓN.Ejemplos* en "*Casos de Discusión*")

### Ejercicio 5

Extrapolación a partir de series temporales:

En el siguiente fichero se ilustra el ejemplo que Microsoft ® Excel ilustra como ejemplo resuelto y que lo aplica a la previsión de viajeros en un aeropuerto:

- Forecast_ets_example.xls




Resultado del ejemplo planteado en el tutorial de Microsoft ®

## II.4.5 Aplicaciones de aproximación en el entorno empresarial

### Caso 1

Supongamos que la función de producción $P(x, y)$ (dada en unidades de productos fabricados) tiene la siguiente expresión:

$$P(x, y) = 600x + 1600y - 3x^2 - 10xy - 25y^2$$

Donde $x$ es el capital empleado (cada unidad en miles de euros) e $y$ es el tiempo empleado (cada uniad en centenares de horas de mano de obra). Se pide responder a cada uno de los apartados siguientes:

a) Obtener el/los valor/es óptimo/s de la producción $P$ e interpretar el/los resultado/s en función de el/los valor/es crítico/s de las variables $x$ e $y$.
b) Determinar las funciones de *producción marginal* en función de $x$ e $y$, y explicar su significado aplicado a la empresa.
c) Determinar el valor del vector gradiente $\nabla P(x, y)$ en el punto de partida $x_0, y_0) = (65, 20)$.
d) Obtener la variación **aproximada** de la producción, $\Delta P_{aprox}$, al <u>aumentar en 5</u> unidades la variable $x$ y <u>disminuir en 2</u> unidades la variable $y$, a partir del punto de partida del apdo. anterior (NOTA: utilizar para este apdo. la expresión aproximada del diferencial total).
e) 1.- Calcular el valor **exacto** de dicha variación de producción, $\Delta P_{real}$. 2.- Comparar el resultado anterior con el resultado del apdo. d, y calcular el % de error cometido, explicando el resultado. 3.- ¿Qué condición se debe cumplir para minimizar el error cometido en el cálculo del valor aproximado?.
f) Para hacer frente a la demanda del mercado se requiere aumentar la producción $P$ en unas $100$ unidades más y, para ello, se necesita aumentar la mano de obra en 3 unidades de $x$. Calcular la variación aproximada del capital necesario para cubrir dicha demanda.

### Caso 2

La producción de una determinada fábrica, expresada como $P\ (L, K)$ en centenares de artículos, viene dada en función de $L$ (trabajo empleado, unidades en miles de hora-hombre) y $K$ (capital invertido, unidades en miles de €). De dicha función de producción, conocemos sus funciones marginales a través de su vector gradiente en el punto $(L = 25, K = 300)$ siendo su valor $\nabla P(25, 300) = (10, 8)$.

Indicar cuánto varía la función de producción en las siguientes situaciones.

a) Disminuyo en 2 unidades la mano de obra empleada y aumento en 1 unidad el capital,
b) Aumento en 2 unidades la mano de obra empleada y disminuyo el capital en 2 unidades,
c) Aumento en 20 unidades la mano de obra empleada y disminuyo el capital en 250 unidades.
d) Justificar en cada uno de los casos anteriores la bondad de las aproximaciones empleadas y explicar el significado de los resultados obtenidos.

### Caso 3

Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de cada una de las funciones de actualización de capital: $f(x) = 1/(1 + x)^k$, donde $k = 1, 3\ y\ 5$ (número de años), en el entorno de $x_0 = 0{,}01$ (interés del 1%) y calcularlo para $x = 0{,}05$ (interés del 5%) obteniendo el orden de magnitud del error cometido.