2.- El número de ataques en la red, A, dependen de la combinación de dos paquetes de software cuyo coeficiente de incidencia viene dado por las variables x e y, respectivamente, y producen en dichos ataques el siguiente efecto:

$$A(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 - 4xy + 100$$

Considerando que las variables x e y solo puede tomar valores reales positivos, se pide: (1 pto/apdo)

a) Hallar valores de x e y que producen un efecto de punto de silla en dichos ataques,
b) Deducir matemáticamente la respuesta del apdo. anterior,
c) Calcular el valor de dichos ataques, resultantes de esa situación.

1.- NO se conoce la función rendimiento de un determinado sistema pero sí sabe que depende de dos variables, x e y, y que su vector gradiente viene dado por el siguiente vector:

$$\nabla_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} e^{x-1}(y^2-4) \\ 2y(e^{x-1}-1) \end{pmatrix}$$

Donde x e y son costes de personal y capital invertido (x >0 e y >0), respectivamente, y dados en unidades arbitrarias (u.a.).

Se pide: **(1 pto/apdo)**

1'5 a) Determinar los valores de x e y donde haya punto/s crítico/s,
1'5 b) Justificar matemáticamente la respuesta del apdo. anterior,
~~c) Calcula el valor de ese rendimiento para ese/esos punto/s crítico/s,~~
1 d) ¿Qué información da el vector gradiente de la función dada respecto a los costes x e y?. Pon un ejemplo.

2.- Un determinado empresario, saca dos productos nuevos al mercado A y B, con unas expectativas de demanda dadas por las siguientes expresiones:

$$p_A = 6 - x \qquad\qquad p_B = 16 - 2y$$

donde x e y las cantidades demandadas de los productos A y B, y p_A y p_B sus respectivos precios unitarios. La función de costes de la empresa viene dada por la siguiente expresión:

$$C(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy$$

Determinar qué cantidades se deben fabricar para optimizar el beneficio de la empresa y calcular dicho valor resultante. **(3,5 ptos)**

1.- Se quiere obtener el valor máximo de la función eficiencia de un determinado sistema:

$$f(x,y) = x^3y^2(6 - x - y)$$

Donde x e y son costes de personal y capital invertido (x >0 e y >0), respectivamente, y dados en unidades arbitrarias (u.a.).

Determinar: **(1 pto/apdo)**

a) Los valores de x e y que maximizan la eficiencia,
b) Justificar matemáticamente la respuesta del apdo. anterior,
c) Calcula el valor de la eficiencia máxima,
d) ¿Qué información da el vector gradiente de la función dada respecto a los costes x e y?. Pon un ejemplo.
e) ¿Qué se consigue igualando las funciones marginales de una función?. Pon como ejemplo la función dada y justifica el valor resultante.

A.3 Se conocen las curvas de demanda de dos paquetes de software antivirus de similares características, A y B, que compiten en el mercado (esto es, están relacionados entre sí): $x_A = 200 - 20p + 20q$ y $x_B = 300 + 40p - 10q$, donde (x_A, p) y (x_B, q) son los vectores de cantidad de producto demandado y precio unitario de A y B, respectivamente. Se pide,

a) Calcular la siguiente matriz

$$J(x_A, x_B; p, q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_A}{\partial p} & \frac{\partial x_A}{\partial q} \\ \frac{\partial x_B}{\partial p} & \frac{\partial x_B}{\partial q} \end{pmatrix}$$

b) interpretar el significado del resultado obtenido en cada elemento de la matriz J, describiendo el ejemplo de un mercado de productos de ciberseguridad que sea competitivo y potencialmente real.

En el caso del producto A y considerando ahora que $q = 1$, y que la curva de oferta para A viene dada por la siguiente ecuación: $p = x_A - 4$, se pide:

c) Calcular el punto de corte de ambas curvas (oferta y demanda),
d) Representar en una gráfica p en función de x_A e indicar si existe realmente equilibrio de este producto en el mercado.

C.3 Se conocen las **curvas de demanda** de dos paquetes de software antivirus únicos en el mercado de similares características, A y B, que están relacionados entre sí: $x_A = 800(p_B - p_A)$ y $x_B = 400(9 + p_A - 4p_B)$, donde (x_A, p_A) y (x_B, p_B) son los vectores de cantidad de producto demandado y precio unitario de A y B, respectivamente. Se pide, (3ptos)

a) Calcular la matriz Jacobiana siguiente, indicar su significado y reflexionar sobre el tipo de relación existente entre ambos productos en el mercado:

$$J(x_A, x_B; p_A, p_B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_A}{\partial p_A} & \frac{\partial x_A}{\partial p_B} \\ \frac{\partial x_B}{\partial p_A} & \frac{\partial x_B}{\partial p_B} \end{pmatrix}$$

En el caso del producto A y considerando ahora que $p_B = 10$, y que **la curva de oferta para A** viene dada por la siguiente ecuación: $p_A = (x_A + 250)/500$, se pide:

b) Representar en una gráfica x_A en función de p_A e indicar si existe realmente equilibrio de este producto en el mercado.
c) Obtener el punto de corte de ambas curvas (oferta y demanda de A),

3. Si la función beneficio de una empresa viene dada por la función **(3,0 p)**

$$B(x, y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

donde x e y son costes de lanzamiento de dos productos determinados, A y B, obtener:

(a) los valores de x e y que maximizan el beneficio y justificar el resultado,
(b) el valor del beneficio máximo,
(c) ¿qué información nos da el vector gradiente de esta función beneficio, respecto a los costes x y respecto a los costes de y?.

Optimización de funciones (3,0 p) 3.1

Si la función EFICIENCIA de un sistema viene dada por la función

$$E(x,y) = -x^3 - y^3 + 9xy - 27$$

donde x e y son costes de personal y capital invertido, respectivamente y dadas en unidades arbitrarias (u. a.). Se pide:

(a) los valores de x e y que maximizan la eficiencia y justifica tu respuesta,
(b) el valor de eficiencia máxima,
(c) ¿qué información nos da el vector gradiente de la función dada, $\vec{\nabla}E$, respecto a los costes x e y?.

Optimización de funciones (3,0 p) 3.2

Si la función de BENEFICIO de una determinada unidad de negocio viene dada por la función

$$B(x,y) = -x^4 - y^4 + 4xy - 8$$

donde x e y son costes de dos productos determinados. Considerando que las variables pueden ser cualquier número real y que vienen dadas en unidades arbitrarias (u. a.), obtener:

(a) los valores de $x > 0$ e $y > 0$ que maximizan dicha función y justifica tu respuesta,
(b) obtener el valor máximo de la función beneficio,
(c) ¿qué información nos da la función marginal cruzada, B_{xy}?.

Optimización de funciones (3,0 p) 3.3

Los COSTES de implantación de un nuevo sistema informático dependen fundamentalmente de dos variables x e y, según la expresión:

$$C(x,y) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 2y^3 - 24y + 60$$

de modo que las variables x e y pueden tomar cualquier valor real y el coste viene dado en unidades arbitrarias (u. a.).

Calcular:

a) Los valores de los extremos relativos de la función.
b) El valor de x e y para un coste MÍNIMO de implantación. Justifica tu respuesta.
c) El vector gradiente de la función de coste, $\vec{\nabla}C$ en $x = 1$ e $y = 1$. Explica también qué información nos da dicho vector en ese punto.

3. El beneficio de una empresa depende fundamentalmente de dos variables x e y, según la expresión:

$$B(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

Calcula:

a) Los valores de x e y que maximizan la función y justifica matemáticamente la respuesta. **(1,0 p)**
b) El valor del beneficio máximo. **(0,5 p)**
b) El beneficio marginal respecto a cada variable, para unos valores de partida de $(x = 1, y = 1)$. Interpreta el resultado. **(1,0 p)**

2. Si la función beneficio de una empresa viene dada por la función: **(3,5 p)**

$$B(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

donde x e y son costes de lanzamiento de dos productos determinados, A y B, obtener:

(a) los valores de x e y que maximizan el beneficio y justificar el resultado,
(b) el valor del beneficio máximo,
(c) ¿qué información nos dan los beneficios marginales, respecto a los costes x y respecto a los costes de y?. Interprete los resultados obtenidos en a) y b), en términos de beneficios y costes.

2. Si la función coste de fabricación de una empresa viene dada por la función: **(2,0 p)**

$$C(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 27y + 120$$

donde x e y son respectivamente las unidades fabricadas de dos productos determinados, A y B, obtener:

(a) los valores de x e y que minimizan el coste y justificar el resultado,

(b) el valor del coste mínimo,

(c) ¿qué información nos dan los costes marginales, respecto a x y respecto a y?. Interprete los resultados obtenidos en a) y b), en términos costes y unidades fabricadas.