Ejercicios y Casos Prácticos Bloque II: Análisis de Compatibilidad

Matemáticas Aplicadas a la Empresa

Universidad Francisco de Vitoria. Curso 2016-2017. JMCU. v0.1

1. Test Cálculo Matricial

1. Sean las matrices A de orden 2×3, B de orden 3×5, C de orden 5×2 y D de orden 5×2, entonces la expresión $(2C + D) AB$

a) es una matrix de orden 5.

b) es una matriz de orden 5×2.

c) es una expresión sin sentido.

2. Sean A y B matrices de orden n. Entonces

a) $(A - B)^2 = A^2 - B^2$.

b) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$.

c) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$.

3. Sean A y B matrices de orden n. Entonces

a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

c) $(A - B)^2 = (B - A)^2$.

4. Sean A una matriz de orden n que verifica que $A^2 = A$. Si $B = A - I$, entonces

a) $B^2 = B$.

b) $B^2 = I$.

c) $B^2 = -B$.

5. Sean A una matriz de orden n. Entonces

a) AA^t y A^tA son iguales.

b) AA^t es simétrica.

c) $A - A^t$ es simétrica.

6. Sean A y B matrices de orden n. Entonces
a) $(A+B)(B-A) = A^2 - B^2$
b) si A y B conmutan, $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$
c) $(A+B)(B-A) = (A-B)(A+B)$.

7. Sean A y B matrices simétricas de orden n. Entonces
a) $(\lambda AB)^t = \lambda AB$
b) $(AB)^t = AB$
c) $(AB)^t = BA$.

8. Los elementos de una matriz A de orden n verifican que $a_{ij} = a_{ji}$. Entonces A es
a) diagonal
b) simétrica
c) ortogonal.

9. Sean A y B matrices de orden n. Si se verifica que $A^2 = AB$, entonces
a) $A = B$
b) $A^2B = AB^2$
c) $A = B^{-1}$.

10. Sean A y B matrices de orden n. Entonces
a) $(AB)^t = A^tB^t$
b) $tr\,(AB) = tr\,(A)\,tr\,(B)$
c) $tr\,(AB) = tr\left[(BA)^t\right]$.

11. Sean A una matriz diagonal de orden n. Entonces
a) $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
b) $a_{ij} \neq 0$ para $i = j$.
c) $a_{ij} = 0$ para todo i, j.

12. Sean A, B y C matrices de orden n. Entonces
a) $tr\,(A+BC) = tr\,(A) + tr\,(B)\,tr\,(C)$.
b) $tr\,(A+BC) = tr\,(A) + tr\,(B) + tr\,(C)$.
c) $tr\,(A+BC) = tr\,(A) + tr\,(CB)$.

13. Sean A y B matrices de orden n. Entonces
a) $A(A+B) = (A+B)A$.
b) $AB = BA \Rightarrow AB^n = B^nA$.
c) $B(A+B) = (A+B)B$.

14. Sean A y B matrices de orden n, con B regular. Entonces
a) $AB^{-1} = B^{-1}A$.
b) $AB = BA \Rightarrow AB^{-1} = B^{-1}A$.
c) $AB^2 = B^2A$.

15. Si A es una matriz ortogonal de orden n, y D es una matriz diagonal del mismo orden, entonces
a) AD es simétrica.
b) $A^{-1}DA$ es simétrica.
c) $A^tD = DA^t$.

16. Sea A es una matriz de orden n. Entonces
a) siempre $tr\,(AA^t) > 0$.
b) $tr\,(AA^t) < 0$.
c) $tr\,(AA^t) = 0 \Rightarrow A = 0$.

17. Sea A es una matriz de orden n. Entonces
a) $AA^t = A^tA$.
b) $A + A^t$ es simétrica .
c) $A - A^t$ es simétrica.

18. Sean A y B matrices de orden n. Entonces
a) $(AB)^2 = A^2B^2$.
b) $AB = BA$.
c) $(AB)^2 = ABAB$.

19. Sean A y B matrices de orden n. Si A es simétrica, entonces
a) B es simétrica.
b) AB es simétrica.
c) B^tAB es simétrica.

20. Sean A una matriz de orden n y λ un número real. Entonces
a) $tr\,(\lambda A) = \lambda^n tr\,(A)$
b) $tr\,(\lambda A) = \lambda tr\,(A)$
c) $tr\,(\lambda A) = tr\,(A)$

21. Sea A una matriz simétrica. Entonces
a) $A^2 = A$
b) $A^2 = I$
c) A^2 es simétrica.

22. Sean A y B matrices ortogonales de orden n. Entonces
a) AB es ortogonal.
b) $A + B$ es ortogonal.
c) AB puede ser no ortogonal.

23. Sean A y B matrices ortogonales. Entonces
a) A^t y B^{-1} son ortogonales.
b) A^t es ortogonal y B^{-1} no lo es.

c) B^{-1} es ortogonal y A^t no lo es.

24. Si los elementos de la diagonal principal de una matriz A son nulos y los otros elementos verifican que $a_{ij} = -a_{ji}$, entonces
a) $A = -A^t$.
b) $A = -A$.
c) $A = A^t$.

25. Sean A y B matrices de orden n que verifican que $AB = 0$. Entonces
a) $A = 0$ ó $B = 0$.
b) A regular $\Rightarrow B = 0$.
c) $BA = 0$.

26. Sean A y B matrices que veifican $AB = BA$. Entonces
a) A y B no tienen por qué ser cuadradas.
b) A y B tienen que ser cuadradas, aunque pueden tener distinto orden.
c) A y B tienen que ser cuadradas del mismo orden.

27. Sean A y B matrices de orden n. Entonces
a) $(AB)^t = B^t A^t$.
b) $tr\,(AB) = tr\,(A)\,tr\,(B)$.
c) $(AB)^t = A^t B^t$.

28. Sean A, B y C matrices regulares de orden n. Entonces
a) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.
b) $(ABC)^{-1} = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$.
c) $(ABC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}B^{-1}$.

29. Sea A una matriz de orden n. Entonces
a) $det\,(A) + det\,(-A) = 0$.
b) $det\,(-A) = -det\,(A)$, si n es par.
c) $det\,(-A) = -det\,(A)$, si n es impar.

30. Sea A una matriz ortogonal. Entonces
a) $A^{-1} = A$.
b) $det\,(A) = det\,(A^{-1})$.
c) $A^t = A$.

31. Sean A y B matrices ortogonales de orden n. Entonces
a) AB^{-1} es ortogonal.
b) $A + B^{-1}$ es ortogonal.
c) $det\,(A + B^{-1}) = 0$.

32. Sean A y B matrices de orden n. Entonces
a) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

b) $Adj\,(A) = Adj\,(A^t)$.
c) $(Adj\,(A))^t = Adj\,(A^t)$.

33. Sean A y B matrices regulares de orden n. Entonces
a) $AB = BA$.
b) AB puede ser la matriz 0.
c) BA es regular.

34. Sea A una matriz de orden n. Si $det\,(A) = 6$, entonces
a) $A \cdot Adj\,(A) = 6I$.
b) $A^t \cdot Adj\,(A^t) = 6I$.
c) $A^t \cdot Adj\,(A^t) = 6I$.

35. Sean A y B matrices de orden n que verifican que $AB^2 = 0$. Si A es regular, entonces
a) $A = 0$.
b) $B = 0$.
c) B no es regular.

36. Sean A y B matrices de orden 3. Si $det\,(A) = 6$ y $det\,(B) = -2$, entonces
a) $det\,(2AB^{-1}) = -24$.
b) $det\,(A + B) = 6 - 2 = 4$.
c) $det\,(Adj\,(A)) = 6$.

37. Sean A y B matrices singulares de orden n. Entonces
a) $AB = BA$.
b) $AB = 0$.
c) BA es singular .

38. Sean A y B matrices regulares de orden n. Entonces
a) $|AB| = 0$.
b) $|AB| = 1$.
c) $|AB| \neq 0$ es singular .

39. Sean A y B matrices de orden n. Entonces
a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
b) A y B regulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
c) A y B regulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

40. Sean A, B y C matrices de orden n. Si A es regular y $AB = AC$, entonces
a) $B = C$.
b) $B \neq C$.
c) $A = 0$.

2. Test Modelos Lineales

1. Un sistema $AX = B$ de m ecuaciones con n incógnitas es
a) siempre compatible.
b) siempre incompatible.
c) compatible o incompatible.

2. Un sistema $AX = B$ de m ecuaciones con n incógnitas que tien solución es
a) siempre compatible determinado.
b) siempre compatible indeterminado.
c) compatible determinado o compatible indeterminado.

3. Un sistema lineal de 3 ecuaciones y 4 incógnitas
a) puede ser compatible determinado.
b) es compatible indeterminado.
c) puede ser incompatible.

4. Un sistema lineal de 3 ecuaciones y 4 incógnitas no puede ser
a) incompatible.
b) compatible indeterminado.
c) compatible determinado.

5. Sea A la matriz de los coeficientes y sea AM la matriz ampliada de un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas. El sistema es compatible determinado si, y sólo si,
a) $r(A) = r(AM) = m$.
b) $m = n$.
c) $r(A) = r(AM) = n$.

6. Un sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas
a) es compatible determinado.
b) es compatible indeterminado.
c) puede ser incompatible.

7. Sea A la matriz de los coeficicnetes y sea AM la matriz ampliada de un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas. El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si,
a) $r(A) = r(AM) < n$.
b) $m < n$.
c) $r(A) = r(AM) < m$.

9. Sea un sistema compatible indeterminado de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Si AM es la matriz ampliada, entonces $r(AM)$
a) puede valer 1.
b) vale 3.
c) vale 4.

10. El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas es 2. Entonces el sistema no puede ser
a) compatible determinado.
b) compatible indeterminado.
c) incompatible.

11. Sea A la matriz de los coeficientes y AM la matriz ampliada de un sistema compatible determinado de 5 ecuaciones con 4 incógnitas. Entonces
a) $r(A) < 4$.
b) $r(AM) = 5$.
c) $r(A) = 4$.

12. Sea A la matriz de los coeficientes y AM la matriz ampliada de un sistema incompatible de 5 ecuaciones con 3 incógnitas. Entonces
a) $r(AM) = 4$ ó 5.
b) $r(AM) = 4$.
c) $r(AM) = 5$.

13. Sea un sistema lineal de 3 ecuaciones con 5 incógnitas. Si $r(A) = 3$, donde A es la matriz de los coeficientes, entonces el sistema es
a) incompatible.
b) compatible determinado.
c) compatible indeterminado.

14. Sea A una matriz de orden 3. Entonces
a) si $r(A) = 3$ no existe una matriz $X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $AX = 0$.
b) si $r(A) = 2$ no existe una matriz $X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $AX = 0$.
c) si $r(A) = 1$ no existe una matriz $X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $AX = 0$.

15. Sea un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Si $r(AM) = 3$, donde AM es la matriz ampliada, entonces el sistema no puede ser
a) compatible determinado.
b) incompatible.
c) compatible indeterminado.

16. Sean A la matriz de los coeficientes y AM la matriz ampliada de un sistema incompatible de 4 ecuaciones con 3incógnitas. Entonces
a) $r(A) = r(AM) - 1$.
b) $r(AM) = 4$ siempre.
c) $r(AM) = 3$ siempre.

17. Sea un sistema compatible indeterminado de m ecuaciones con 4 incógnitas. Si A es la matriz de los coeficientes, entonces
a) $r(A) < 4$.

b) $m \geq 4$.
c) $r(A) = 4$.

18. Sea un sistema compatible determinado de 3 ecuaciones con n incógnitas. Si A es la matriz de los coeficientes, entonces
a) $r(A) = 4$.
b) si $r(A) = 2 \Rightarrow n = 2$.
c) $n = 3$.

19. En un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sustituimos la segunda ecuación por la suma de las 3 ecuaciones. Entonces el nuevo sistema
a) más soluciones que el sistema inicial.
b) las mismas soluciones que el sistema inicial.
c) soluciones que no sabemos cómo son.

21. Sean A la matriz de los coeficientes y AM la matriz ampliada de un sistema lineal. Si $r(A) = r(AM) =$(nº de ecuaciones -1), entonces
a) existe una ecuación que es combinación lineal de las restantes.
b) todas las ecuaciones del sistema son linealmente independientes.
c) necesariamente (nº de incógnitas)=(nº de ecuaciones -1)

22. En un sistema compatible indeterminado de 3 ecuaciones con 4 incógnitas añadimos una ecuación que es doble de la suma de las primeras ecuaciones. Entonces el nuevo sistema
a) es compatible determinado.
b) puede ser incompatible.
c) es compatible indeterminado.

23. Sean C_1 y C_2 dos soluciones del sistema $AX = 0$. Entonces $C_1 + aC_2$
a) es solución del sistema para cualquier número real a.
b) no es solución del sistema.
c) es solución del sistema solamente cuando $a \neq 0$.

24. Sea AM la matriz ampliada de un sistema lineal de 5 ecuaciones con 4 ingógnitas. Si $r(AM) = 5$, entonces el sistema es
a) compatible determinado.
b) compatible indeterminado.
c) incompatible.

25. Sea un sistema incompatible de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Si la matriz de los coeficientes tiene rango 2, entonces la matriz ampliada tiene rango
a) 2.
b) 3.
c) 4.

26. Sea un sistema incompatible de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Si la matriz ampliada tiene rango 3, entonces el rango de la matriz de los coeficientes
a) puede valer 1.
b) vale 2.
c) puede valer 3.

27. Un sistema $AX = B$ es compatible determinado, entonces el sistema $AX = 0$ es
a) compatible determinado.
b) compatible indeterminado.
c) incompatible.

28. Un sistema $AX = B$, con la matriz A de orden n, es incompatible. Entonces el sistema $AX = 0$ es
a) compatible determinado.
b) compatible indeterminado.
c) incompatible.

29. Sea $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ una solución de un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Entonces el sistema
a) simpre es homogéneo.
b) nunca es homogéneo.
c) puede ser homogéneo.

30. Un sistema $AX = B$ es compatible indeterminado. Entonces el sistema AX=0
a) es compatible determinado.
b) es compatible indeterminado.
c) no es compatible.

3. Ejercicios

1. Resuelve por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} 4x - y + 3t = 2 \\ 2x - 2y + t = 3 \\ 3x - 3y + 2t = 1 \end{array}\right\}$$

2. En el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 2x - y = -1 \\ x + 4y = 10 \end{array}\right\}$$

la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras. Encuantra los coeficientes de la combinación.

3. Hallar el valor de k para que el siguiente sistema tenga sólo la solución trivial.

$$\left.\begin{array}{r} x-5y=0 \\ 4x-6y+2z=0 \\ 5x-4y+kz=0 \end{array}\right\}$$

4. Estudia el siguiente sistema para los distintos valores de m.

$$\left.\begin{array}{c} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)\,z=m \\ x+y+z=m \end{array}\right\}$$

5. Clasifica los sistemas:

$$a)\ \left.\begin{array}{c} x+y=1 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$$

$$b)\ \left.\begin{array}{c} 2x+y=3 \\ x+2y=3 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{c} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{array}\right\}$$

6. Comprueba que $(A+B)^t = A^t + B^t$ con

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Comprueba usando las matrices anteriores que $(AB)^t = B^t A^t$.

8. Resolver la ecuación matricial $AX - B = X$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ para los distintos valores de t.

10. Resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

11. Comprueba que las siguientes identidades algebreaicas $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ y $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$ no son ciertas para para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Modifica el segundo miembro de esas identidades para obtener fórmulas válidas para todas las matrices cuadradas A y B. ¿Para qué matrices son válidas las fórmulas establecidas?

12. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ determine el rango.

13. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^2-3A-I donde I es la matriz identidad.

14. Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Calcula aplicando propiedades de los determinantes: $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

16. Prueba sin desarrollarlo que $\begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & b & a+b \\ 1 & c & a+c \end{vmatrix} = 0$

17. Demuestre la siguiente propiedad de los determinantes: Si una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el valor del determinante no varía, es decir, $Det\,(A^1, A^2, A^3) = Det\,(A^1+\alpha A^2+\beta A^3, A^2, A^3)$.

18. Prueba que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$. Calcula el rango de la matriz para los distintos valores de los parámetros.

19. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale 0 para $a = 3$. Comprueba que es así sin desarrollarlo.

20. Discute el sistema $\left.\begin{array}{c} x+y-z=3 \\ x+y=4 \\ 3x+3y-2z=7 \end{array}\right\}$

21. Estudia según los valores de a el sistema $\left.\begin{array}{c} x-2y+az=a \\ x+4y+a^2z=6+a \\ x-8y+a^2z=-6 \end{array}\right\}$

22. Halla los valores del parámetro real a que hacen compatible el sistema $\left.\begin{array}{c} 2x+y=7 \\ 3x-az=11 \\ 5y+3z=-a \\ x-y+az=0 \end{array}\right\}$

23. Halla a para que el sistema $\left.\begin{array}{c} x+ay-az=0 \\ 12x-(a+2)\,y-2z=0 \\ ax-2y+z=0 \end{array}\right\}$ tenga solución distinta de la trivial.

24. Halla la inversa de la matrix $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

25. Halla la inversa de la matrix $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

26. Resuelve por la regla de Cramer: $\left.\begin{array}{c} 3x+2y+4z=1 \\ 3x+y+z=0 \\ x+2y+3z=1 \end{array}\right\}$

27. Se consideran las tres rectas de ecuaciones $\left.\begin{array}{c} 2x-5y=3 \\ -x+3y=m \\ 3x-7y=3m+1 \end{array}\right\}$. Determine m para que las tres rectas sean concurrentes y halle el punto de intersección.

28. Estudia para qué valores de a tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & a+1 & a-1 \\ -2a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$

29. Resuelve por la regla de Cramer el siguiente sistema homogéneo $\left.\begin{array}{c} x-y+z+t=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x-3y+2t=0 \end{array}\right\}$

30. Calcula el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

31. Calcula la matriz inversa

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

32. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A + B + C$
b) $A - 2C + 3B$
c) $2\,[A - 3B] - 2C$
d) $A^t - 2B^t$
e) AB
f) BA
g) $(A + B)\,C$

33. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 1 & b & 2 \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

34. Dada una matriz cuadrada A, demuestre las siguientes afirmaciones:

a) La matriz $A + A^t$ es simétrica.
b) La matriz $A - A^t$ es antisimétrica.
c) La matriz A se descompone como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica de la forma siguiente: $A = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$.

4. Casos Prácticos

1. Una empresa de importación de vehículos recibe pedidos de tres concesionarios A, B y C. El primer concesionario ha solicitado 50 coches del modelo T_1, 15 del modelo T_2 , 10 coches del modelo T_3 y 2 del modelo T_4; el concesionario B ha solicitado 17 coches del modelo T_1, 12 del modelo T_2, 7 del modelo T_3 y 3 del modelo T_4; y el concesionario C ha pedido 11, 7, 5 y 4 coches de los modelos T_1, T_2, T_3 y T_4 respectivamente. Los concesionarios aportan una parte del capital al efectuar la compra y aplazan a 90 día el resto. El concesionario A paga el 50 por cien del total y aplaza el resto, B aplaza un tercio y C aplaza un cuarto del pago. Calcula la cantidad de coches de los tipos T_1, T_2, T_3 y T_4 que la empresa vende al contado y cuántos con pago a aplazado.

2. Una empresa de productos alimenticios tiene un stock de 114 kilos de chocolate y 111 litros de leche, con los que puede elaborar tres productos distintos A, B y C. El producto A requiere un 40 % de chocolate y un 10 % de leche, el producto B requiere un 25 % de chocolate y un 25 % de leche, mientras que C requiere un 20 % de chocolate y un 30 % de leche. Del resto de ingredientes (azúcar, etc.) la empresa dispone de reservas abundantes. Determina las posibilidades que tiene la empresa para consumir su stock con los productos A, B y C. ¿Cuál de a todas le proporcionará más beneficios si la empresa obtiene 10€ por cada kilo de A, 8€ por cada kilo de B y 6€ por cada kilo de C?

3. Dos productos A y B compiten. Las demandas x_A y x_B de estos productos están relacionadas a sus precios p_A y p_B por las ecuaciones de demanda,

$$x_A = 17 - 2p_A + \frac{1}{2}p_B$$
$$x_B = 20 - 3p_B + \frac{1}{2}p_A$$

Las ecuaciones de la oferta son,

$$p_A = 2 + x_A + \frac{1}{3}x_B$$
$$p_B = 2 + \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{4}x_A$$

Estas ecuaciones dan los precios a los cuales las cantidades x_A y x_B estarán disponibles en el mercado. En el punto de equilibrio del mercado, las cuatro ecuaciones deben satisfacerse (dado que la demanda y la oferta deben ser iguales). Se pide: calcular los valores de equilibrio de (x_A, p_A) y (x_B, p_B).

4. Suponga que en una economía hipotética con sólo dos industrias, I y II, la interacción entre las industrias es como se muestra en esta tabla:

	Insumos I	Insumos II	Demandas finales	Producción total
Producción I	240	750	210	1200
Producción II	720	450	330	1500
Insumos primarios	240	300		

(a) Determine la matriz insumo-producto A

(b) Obtenga la matriz de producción si las demandas finales cambian a 312 unidades en el caso de la industria I y a 299 unidades para la industria II.

(c) ¿Cuáles serán entonces los nuevos insumos primarios correspondientes a las dos industrias?

5. Una empresa produce cuatro bienes diferentes P_1, P_2, P_3 y P_4, para los que utiliza cuatro materias primas m_1, m_2, m_3 y m_4. El consumo en kg para obtener 1 unidad de cada producto es el siguiente:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 56 & 32 & 21 & 43 \\ 62 & 23 & 15 & 54 \\ 57 & 17 & 21 & 61 \\ 75 & 28 & 35 & 42 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix}$$

y los costes, en € por kg, de cada una de las materias es:

$$B = \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ 3{,}3 \\ 2{,}5 \\ 1{,}3 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{matrix}$$

Dos distribuidores, D_1 y D_2, adquieren las siguientes unidades:

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 270 & 130 & 1370 & 60 \\ 230 & 175 & 972 & 121 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix}$$

(a) Calcula e interpreta el significado de los productos AB y CAB.

(b) ¿Cuántos kg se consumen de cada materia prima para satisfacer las a demandas de D_1 y D_2?

6. El comportamiento en el mercado de tres productos, A, B y C vienen expresados por las siguientes curvas de oferta y demanda:

$$\begin{matrix} D_A = 13 - 2x + y + z & S_A = 12 + x \\ D_B = 5 + x - y + z & S_B = 5 + y \\ D_C = 10 + x + 3y - z & S_C = 2 + z \end{matrix}$$

donde x, y, z son los precios unitarios de los productos A, B, C, respectivamente. Calcula las cantidades que se deben ofrecer de cada producto para alcanzar el equilibrio entre ofertas y demandas.

7. Las ecuaciones de la demanda y la oferta de cierto artículo son $3p+5x = 200$ y $7p-3x = 56$, respectivamente. Determine los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

8. Si se impone un impuesto sobre las ventas de 11 % en cada artículo del ejercicio anterior, calcule los nuevos valores de la cantidad x y del precio p_1 pagado por los consumidores.

9. La tabla que se muestra a continuación muestra la interacción entre dos sectores (industrias P y Q) de una economía hipotética:

	Insumos P	Insumos Q	Demandas finales	Producción total
Producción de P	60	75	65	200
Producción de Q	80	30	40	150
Mano de obra	60	45		

Se pide:
(a) Determinar la matriz insumo-producto A
(b) Encontrar la matriz de producción si las demandas finales cambian a 104 en el caso de P y a 172 para Q.
(c) Calcular cuáles son los nuevos requerimientos de mano de obra.

10. Tres agentes comerciales a comisión, V_1, V_2 y V_3, venden tres productos P_1, P_2, P_3. Las matrices E, F, M y A reflejan los ingresos del primer cuatrimestre del año 2015 expresados en €:

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1150 & 1095 & 905 \\ 1230 & 1130 & 871 \\ 1050 & 1350 & 970 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}$$

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1202 & 1150 & 875 \\ 1135 & 1232 & 781 \\ 993 & 1250 & 863 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1090 & 1201 & 883 \\ 1140 & 1345 & 872 \\ 1090 & 1254 & 867 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1223 & 1098 & 902 \\ 1142 & 1224 & 901 \\ 1100 & 1250 & 893 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}$$

(a) Calcula los ingresos totales del cuatrimestre.
(b) Calcula el incremento de ingresos entre el mes de enero y el de febrero.

(c) Si los vendedores reciben un 8 % de los ingresos por ventas en concepto de comisión, ¿cuánto ganó cada uno en este cuatrimestre?

11. Tres empresas E_1, E_2 y E_3, necesitan cuatro materias primas P_1, P_2, P_3, P_4.. El consumo mensual medio de estas empresas se puede expresar mediante la matriz siguiente:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 273 & 133 & 1375 & 62 \\ 330 & 232 & 975 & 160 \\ 257 & 161 & 770 & 76 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

donde las cifras están dadas en Tm. En el primer trimestre del año 2015, los precios de estas materias primas, expresados en € por Tm., han sido

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & F & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 123 & 127 & 131 \\ 330 & 326 & 315 \\ 99 & 103 & 126 \\ 213 & 230 & 254 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}$$

donde las columnas E, F, M representan los meses de enero, febrero y marzo respectivamente. Expresa mediante una matriz el gasto total de cada empresa cada mes.

12. Supongamos tres industrias interrelacionadas I_1, I_2, I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente: Cada unidad de I_1 requiere 0.3 unidades de I_1, 0.1 unidades de I_2 y 0.2 unidades de I_3. Cada unidad producida en I_2 necesita 0.2 unidades de I_1, 0.2 de I_2 y 0.5 de I_3, y cada unidad de I_3 precisa 0.3, 0.3 y 0.1 unidades producidas en I_1, I_2 e I_3 respectivamente. Si las demandas exteriores son 45, 50 y 51 unidades de I_1, I_2 e I_3, determina cuáles son los niveles de producción que permiten el equilibrio de esta economía.

13. Una empresa fabrica tres productos A, B y C. El vector de precios es $\overline{p}_0 = (4, 4, 5)$, pero la empresa advierte que tiene un exceso de demanda, por lo que decide aumentar los precios a la vez que aumenta su producción buscando una situación de equilibrio. Un análisis de la empresa muestra que su capacidad de producción para un vector de precios dado $\overline{p}$ viene dada por

$$\begin{aligned} S_A &= 2p_1 + 3p_2 + 7p_3 - 30 \\ S_B &= 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 10 \\ S_C &= p_1 + 3p_2 + 3p_3 - 20 \end{aligned}$$

Por otra parte, un estudio de mercado indica que la demanda prevista para un vector de precios $\overline{p}$ es

$$\begin{aligned} D_A &= 140 - 8p_1 - 5p_2 - 2p_3 \\ D_B &= 107 - p_1 - 8p_2 - p_3 \\ D_C &= 78 - p_1 - p_2 - 5p_3 \end{aligned}$$

Calcula el vector de incrementos de precios $\triangle\overline{p}$ necesario para alcanzar los precios de equilibrio, el incremento de producción $\triangle S = (\triangle S_A, \triangle S_B, \triangle S_C)$ que tendrá que efectuar la empresa para satisfacer toda la demanda y el incremento de demanda $\triangle D$ que producirá el aumento de los precios.

14. Tres productores A, B, C interrelacionados en una economía cerrada (demanda final o externa es nula) distribuyen sus outputs de la forma siguiente:

(a) La producción de A se destina en partes iguales a A, B y C.

(b) Lo mismo ocurre con la producción de B, es decir, se destina en partes iguales a A, B y C.

(c) La mitad de la producción de C se destina a A y el resto lo consumen B y C en partes iguales.

¿Cuál debe ser la relación entre las producciones para que el sistema esté en equilibrio?

15. Consideramos una economía formada por tres industrias interrelacionadas A, B, C. Sabemos que la matriz input-output es

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

y que el vector de demanda externa es $\overline{d} = (210, 111, 37)$.

(a) Interpreta el significado económico de la suma de los elementos de la tercera columna de M.

(b) Interpreta el significado económico del elemento $a_{12} = 0{,}1$ de la matriz M.

(c) Calcula los niveles de producción que permiten el equilibrio del modelo.

16. Sea la tabla de relaciones intersectoriales siguiente (unidades en miles de millones de euros):

	Agricultura	Industria	Servicios	Demanda Final	Demanda Total
Agricultura	11	19	1	10	41
Industria	5	89	40	106	240
Servicios	5	37	37	106	185
Insumos Primarios	20	95	107	21	243
Producción total	41	240	185	243	659

a) Hallar la matriz de coeficientes técnicos de producción.

b) Si cambia la demanda final por Agricultura a 25, Industria a 201 y Servicions 145, encontrar la producción total para esa demanda.

c) Lo mismo que el apartado anterior para una demanda final de 30, 150 y 125 respectivamente.

17. Sea una economía con sólo dos industrias interrelacionadas A y B según la siguiente tabla.

	A	B	Demanda Final	Demanda Total
A	20	15	45	80
B	15	15	10	40

a) Encuentre la matriz de coeficientes técnicos de esta economía.

b) Suponga que se desea un desarrollo de tal naturaleza que se elevan los niveles de demanda final a $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$. ¿Cuál debe ser la producción total de ambas industrias?

Referencias

[1] V. Alacid, M. V. Caballero, F. Gómez. “Test de Matemáticas para la Empresa”. DM. 2005.

[2] M. J. Canós, C. Ivorra, V. Liern. “Matemáticas para la a economía y la empresa”. Universidad de Valencia. 2001.

[3] W. Márquez. “La Matriz de Leontief”. www.matebrunca.com