3.- Sabemos que la función de producción, $P(L,K)$, depende de dos variables, L (mano de obra) y K(capital), sin embargo, no conocemos su expresión. Sabemos que, en el punto de partida, $L = 10$ y $K = 10$, el vector gradiente de dicha función en ese punto es $\nabla_{P(10,10)} = \begin{pmatrix} 1.770 \\ 1.730 \end{pmatrix}$. Responda ordenadamente a los siguientes apartados:

a) calcular la **variación aproximada de la producción P** en un punto final donde se incrementa la mano de obra en 1 y el capital en 4. (1 pto)

b) Interpretar los elementos calculados para la resolución del problema e indique si es una buena aproximación. (0,75 ptos)

c) Sabiendo que el valor de la función en el punto de partida $P(L = 10, K = 10) = 11.500$, indique el **valor aproximado de $P(L,K)$** en el punto final. (0,75 ptos)

d) Si ahora nos dicen que el valor real de P en el punto final es 18.496, calcule el **error porcentual** cometido al emplear la aproximación para el cálculo de P en el punto final respeto al valor real que nos acaban de dar. (0,75 ptos)

e) Hallar **la tasa de variación porcentual** de $P(L,K)$ en el punto final respecto al valor de $P(L,K)$ en el punto de partida. (0,75 ptos)

2.- La siguiente función de producción, mide la cantidad de datos analizados:

$$P(L,K) = 5L + 2L^2 + 3LK + 8K + 3K^2$$

(en decenas de miles de unidades de datos analizados en un tiempo determinado arbitrario),

Si partimos de la situación inicial: $L = 5$ (mano de obra, en miles de h/h) y $K = 10$ (capital invertido en equipos, en miles de Eu), y la situación final se da cuando $\Delta L = -0{,}5$ y $\Delta K = +0{,}5$, se pide contestar y resolver en orden los siguientes apartados:

a) Calcular la **Tasa de Variación** de $P(L,K)$ en % al pasar del punto inicial al punto final. **(1,5 ptos)**

b) Determinar a partir de la aproximación del teorema del diferencial total,el error relativo en % que cometeríamos si utilizamos dicha aproximación para encontrar la **Variación de la Producción**, $\Delta P(L,K;\Delta L,\Delta K)$ al pasar del punto inicial al final indicado anteriormente. Justifique e interprete el resultado obtenido. **(1,5 pto)**

c) Determinar el error relativo en % que cometeríamos si utilizamos dicha aproximación pero esa vez en términos de la **Producción Final**, $P(L,K;\Delta L,\Delta K)$ respecto a final real. ¿Cuándo merece la pena realizar este tipo de aproximaciones?. **(1 pto)**

d) Dada la diferencia entre la función de producción P aproximada estimada a priori respecto al valor real de datos analizados que hemos obtenido de la fórmula, si cada dato analizado supone un beneficio de 0,001 Eu, indicar la cantidad que nos ha supuesto de más o de menos este error en la aproximación (ojo, recordar las dimensiones empleadas en la función P). **(1 pto)**

3.- Dada la siguiente función de producción, que mide la cantidad de datos analizados:

$$P(L,K) = L^4 + 2L^2K - L^2 + 3K^2$$ (en decenas de miles de unidades de datos analizados),

Si partimos de la situación inicial: $L = 10$ (mano de obra, en miles de h/h) y $K = 10$ (capital invertido en equipos, en miles de Eu), y la situación final se da cuando $\Delta L = -1$ y $\Delta K = +1$, se pide contestar y resolver en orden los siguientes apartados:

a) Calcular la **Tasa de Variación** de $P(L,K)$ en % al pasar del punto inicial al punto final. **(1,5 ptos)**

b) Determinar a partir de la aproximación del teorema del diferencial total el error relativo en % que cometeríamos si utilizamos dicha aproximación para encontrar la **Variación de la Producción**, $\Delta P(L,K;\Delta L,\Delta K)$ al pasar del punto inicial al final indicado anteriormente. Justifique e interprete el resultado obtenido. **(1,5 pto)**

c) Determinar el error relativo en % que cometeríamos si utilizamos dicha aproximación pero esa vez en términos de la **Producción Final**, $P(L,K;\Delta L,\Delta K)$ respecto a final real. ¿Cuándo merece la pena realizar este tipo de aproximaciones?. **(1 pto)**

2.- Dada la siguiente función de producción, que mide la cantidad de datos analizados:

$$P(L,K) = L^4 + 2L^2K - L^2 + 3K^2 \quad \text{(en decenas de miles de unidades de datos analizados),}$$

Si partimos de la situación inicial: $L = 10$ (mano de obra, en miles de h/h) y $K = 10$ (capital invertido en equipos, en miles de Eu), y la situación final se da cuando $\Delta L = -0{,}5$ y $\Delta K = +0{,}5$, se pide contestar y resolver en orden los siguientes apartados:

a) Calcular la **Tasa de Variación** de $P(L,K)$ en % al pasar del punto inicial al punto final. **(1,5 ptos)**

b) Determinar a partir de la aproximación del teorema del diferencial total el error relativo en % que cometeríamos si utilizamos dicha aproximación para encontrar la **Variación de la Producción**, $\Delta P(L,K;\Delta L,\Delta K)$ al pasar del punto inicial al final indicado anteriormente. Justifique e interprete el resultado obtenido. **(1,5 pto)**

c) Determinar el error relativo en % que cometeríamos si utilizamos dicha aproximación pero esa vez en términos de la **Producción Final**, $P(L,K;\Delta L,\Delta K)$ respecto a final real. ¿Cuándo merece la pena realizar este tipo de aproximaciones?. **(1 pto)**

d) Dada la diferencia entre la función de producción P aproximada estimada a priori respecto al valor real de datos analizados que hemos obtenido de la fórmula, si cada dato analizado supone un beneficio de 0,001 Eu, indicar la cantidad que nos ha supuesto de más o de menos este error en la aproximación (ojo, recordar las dimensiones empleadas en la función P). **(1 pto)**

A.4 Dada la siguiente función de producción $P(L,K) = 2L^2 - 7LK + 8L^2K + 2LK^2 + 2K^3$ (en centenares de unidades producidas), partimos de la situación inicial: L=10 (mano de obra, en miles de h/h) y K=10 (capital, en miles de Eu).
Se pide contestar y resolver en orden los siguientes apartados:

a) la producción inicial para (L, K)=(10, 10)
b) el vector gradiente para ese punto inicial e interpreta su resultado,
c) la variación de la producción si se incrementa la mano de obra en 2 (en miles de h/h),
d) la producción final después de dicha variación
e) si empleamos para el cálculo de la producción final el teorema de la aproximación del diferencial total, indicar qué error absoluto y relativo cometemos en el cálculo de la producción final y justificar el resultado de dicho error.
f) se desea ahora calcular la tasa de variación de la producción al pasar de la situación inicial de recursos de (L, K)=(10, 10) a una final de (L, K)=(20, 5).

C.4 Dada la siguiente función de producción

$$P(L,K) = L^4 + 2L^2K - L^2 + 3K^2 \quad \text{(en centenares de unidades producidas),}$$

Si partimos de la situación inicial: $L = 10$ (mano de obra, en miles de h/h) y $K = 10$ (capital, en miles de Eu), se pide contestar y resolver en orden los siguientes apartados: (3ptos)

a) Calcular los extremos relativos de esta función y justificar de qué tipo son
b) la Tasa de Variación de $P(L,K)$ en % al pasar del punto inicial $(L,K) = (10,10)$ a un punto final $(L,K) = (8,12)$.
c) Determinar a partir de la aproximación del teorema del diferencial total el error relativo en % que cometeríamos si utilizamos dicha aproximación para encontrar la Variación de la Producción, $\Delta P(L,K;\Delta L,\Delta K)$ al pasar del punto inicial al final indicado anteriormente. ¿Cuándo merece la pena realizar este tipo de aproximaciones?

4. Desde el INCIBE, se quiere realizar una previsión para este año del $nivel\ resolución\ de\ ciberataques$, a través de la función $R(x, y)$ que depende de dos variables supuestamente independientes entre sí:

$x = unidades\ analizadas\ [\times\ 1.000\ puntos\ de\ análisis\ por\ ud]$.

$y = unidades\ de\ tiempo\ dedicado\ por\ punto\ de\ análisis\ [\times\ 10seg\ por\ ud.\ de\ tiempo]$.

El año pasado (situación de partida) se obtuvo un nivel de resolución de $R_{0\ real} = R(x_0 = 100, y_0 = 50) = 10.500\ ud$, y la función marginal del nivel de resolución respecto a x fue de 120 y respecto a y fue de 4.

Si este año pretendemos incrementar x en **4** y decrecer y en 1, calcular: **(4,0 p)**

a) El valor aproximado de la variación de la función nivel de resolución para este año respecto a la del año pasado, ΔR_{aprox}.

b) El valor aproximado del nivel de resolución previsto para este año, $R_{1\ aprox}$, a partir del valor obtenido en el apdo. anterior.

Si al final de este año, comprobamos que para los valores de x e y resultantes, la función nivel de resolución real ha sido de $R_{1\ real} = 11.000\ ud$,

c) Calcular el error relativo (en %) cometido en el cálculo obtenido en a) respecto al valor real, ΔR_{real}.

d) Calcular el error relativo (en %) que se producido al considerar el valor aproximado de la función a finales de este año obtenido en b) respecto al valor real de la función, $R_{1\ real}$ y justificar el resultado.

e) Determinar la Tasa de Variación relativa (%) de la función nivel de resolución de este año, $R_{1\ real}$, respecto a la del año pasado, $R_{0\ real}$, e interpretar lo que ha sucedido.

Aproximación de funciones (3,0 p) 4.1

La función de Nivel de Resolución de Ciberataques en un cierto intervalo de tiempo puede modelarse como:

$$N(x, y) = 2x^2 - 7xy + 8x^2y + 2xy^2 + 2y^3$$

Los valores iniciales de las variables independientes de las que depende N son $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$. Queremos estudiar el nuevo valor de $N(x, y)$ al incrementar x en 0,1 ($\Delta x = 0{,}1$), y mantener el valor inicial de y. Para ello, calcular:

(a) el nuevo valor de la función.

(b) la variación real de la función respecto a su valor inicial, ΔN_{real}.

(c) el error relativo que cometeríamos si utilizamos el *teorema de la aproximación de la variación de una función a partir de su diferencial total*, esto es, $\varepsilon_r(\%) = 100 \cdot \left|\frac{\Delta N_{aprox} - \Delta N_{real}}{\Delta N_{real}}\right|$ e interpreta tu resultado.

Aproximación de funciones (3,0 p) 4.2

La función de Nivel de Resolución de Ciberataques en un cierto intervalo de tiempo puede modelarse como:

$$N(x, y) = 8x^2 - x^3 + 8xy^2 + 2x^2y + 10y$$

Los valores iniciales de las variables independientes de las que depende N son $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$. Queremos estudiar el nuevo valor de $N(x, y)$ al incrementar x en 0,1 ($\Delta x = 0{,}1$), y mantener el valor inicial de y. Para ello, calcular:

(a) el nuevo valor de la función.

(b) la variación de la función respecto a su valor inicial, ΔN_{real}.

(c) el error relativo que cometeríamos si utilizamos el *teorema de la aproximación de la variación de una función a partir de su diferencial total*, esto es, $\varepsilon_r(\%) = 100 \cdot \left|\frac{\Delta N_{aprox} - \Delta N_{real}}{\Delta N_{real}}\right|$ e interpreta tu resultado.

Aproximación de funciones (3,0 p) 4.3

La función de Nivel de Resolución de Ciberataques en un cierto intervalo de tiempo puede modelarse como:

$$N(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 8x^2y - 3xy^2 + 10y^3$$

Los valores iniciales de las variables independientes de las que depende N son $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$. Queremos estudiar el nuevo valor de $N(x,y)$ al incrementar x en 0,1 ($\Delta x = 0{,}1$), y mantener el valor inicial de y. Para ello, calcular:

(a) el nuevo valor de la función.

(b) la variación de la función respecto a su valor inicial, ΔN_{real}.

(c) el error relativo que cometeríamos si utilizamos el *teorema de la aproximación de la variación de una función a partir de su diferencial total*, esto es, $\varepsilon_r(\%) = 100 \cdot \left|\frac{\Delta N_{aprox} - \Delta N_{real}}{\Delta N_{real}}\right|$ e interpreta tu resultado.

4. Dada la siguiente función de Producción $P(L,K) = 2L^2 - 7LK + 8L^2K + 2LK^2 + 2K^3$, donde L es la mano de obra [x1000 h/h] y K es el capital invertido [x1000€]. Se quiere calcular cómo cambia P al cambiar sus variables L y K. Para ello, ten en cuenta que el punto inicial es ($L = 8, K = 7$), y que el punto final será sólo frente a un incremento de la mano de obra en mil h/h, manteniendo igual el valor del capital invertido.

Se pide:

a) La tasa de variación relativa, TV_P (%), del nuevo valor de P en el punto final respecto al valor de P en el punto inicial. **(0,5 p)**

b) El vector gradiente de dicha función, $\vec{\nabla}P$, en el punto inicial ($L = 8,\ K = 7$). **(0,5 p)**

c) La variación aproximada de dicha función, ΔP_{aprox}, al pasar del punto inicial al punto final
NOTA: utiliza la aproximación al teorema del diferencial total de una función. **(0,5 p)**

d) El error relativo cometido en dicha aproximación, definido como, **(0,5 p)**
$\varepsilon_r(\%) = 100 \cdot \left|\frac{\Delta P_{aprox} - \Delta P_{real}}{\Delta P_{real}}\right|$. Justifica si es o no una buena aproximación e indica por qué.

2. Los costes de fabricación de los productos de una empresa dependen fundamentalmente de dos variables x e y, según la expresión:

$$C(x,y) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 2y^3 - 24y + 50$$

de modo que las variables x e y puede tomar cualquier valor real.

Calcular:

a) El coste mínimo y los valores de las variables que lo minimizan. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

b) El vector gradiente de la función de coste para unos valores de partida de $x = 1$ e $y = 1$. **(0,5 punto)**

c) La variación aproximada que experimenta la función de costes (ΔC_{aprox}) si el parámetro x aumenta un 10% y el parámetro y disminuye un 10%. Para ello, se debe utilizar el *método de aproximación del diferencial total de una función.* **(0,75 punto)**

d) Los valores de la función de costes para el punto inicial y para el punto final (dado a partir de la expresión $C(x,y)$ que se da en el enunciado), y obtener la variación real de la función de costes (ΔC_{real}) que se obtiene al pasar del punto inicial al punto final. Compara ahora ambos resultados (ΔC_{aprox}, calculada en el apdo. anterior, y ΔC_{real}, calculada en este apdo.) e indica si el error cometido en la aproximación del apdo (c) es o no es aceptable. Justifica tu respuesta. **(0,75 puntos)**

3. Se desea hacer una previsión para este año de la producción de una empresa, $P(L, K)$, que depende de la variable "mano de obra" L (dada en centenares de horas-hombre, esto es, x100 h-h) y la variable capital K (dada en decenas de miles de Euros, esto es, x10.000 €). **(3,5 p)**

El año pasado, (1) se obtuvo una producción de $P(L = 100, K = 50) = 10.500$ unidades de producto, (2) y su producción marginal respecto a la mano de obra fue de 120 y respecto al capital necesario fue de 40.

Si este año pretendemos incrementar la mano de obra en 4 y decrecer el capital en 1, calcular:

a) El valor aproximado de la variación de la producción para este año respecto a la del año pasado,

b) El valor aproximado de la producción prevista para este año,

Si al final de este año, comprobamos que para los valores de mano de obra y capital que hemos supuesto anteriormente, resulta que la producción real ha sido de 11.000 uds,

c) Calcular el error relativo (en %) cometido en el cálculo obtenido en a) respecto al valor real valor aproximado de la variación de la producción entre el año pasado y este, obtenida en a).