Ejercicios y Casos Prácticos Bloque II: Análisis de Compatibilidad. Soluciones

Matemáticas Aplicadas a la Empresa

Universidad Francisco de Vitoria. Curso 2016-2017. JMCU. v0.0

1. Test Cálculo Matricial

1.a 2.c 3.c 4.c 5.b 6.b 7.c 8.b 9.b 10.c 11.a 12.c 13.b 14.b 15.b 16.c 17.b 18.c 19.c 20.b 21.c 22.a 23.a 24.a 25.b 26.c 27.a 28.a 29.c 30.b 31.a 32.c 33.c 34.c 35.c 36.a 37.c 38.c 39.b 40.a

2. Test Modelos Lineales

1.c 2.c 3.c 4.c 5.c 6.b 7.a 9.a 10.a 11.c 12.b 13.c 14.a 15.c 16.a 17.a 18.b 19.b 21.a 22.c 23.a 24.c 25.b 26.b 27.a 28.b 29.c 30.b

3. Ejercicios

1. $x = 6$, $y = 1$, $t = -7$.

2. 3 y -1.

3. $k = 3$.

4. Sistema compatible determinado para $m \neq 1$. Para $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

5. a) Incompatible. b) Compatible determinado. c) Compatible determinado.

6. $(A+B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $A^t + B^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

7. $(AB)^t = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$, $B^tA^t = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

8. $X = (A-I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 3{,}3333 & -1 \\ 3{,}5 & -1 \end{pmatrix}$

9. $r(A) = 2$ si $t \neq 4$. $r(A) = 1$ si $t = 4$.

10. $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,$Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

11. $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \neq A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$
$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \neq A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Las fórmulas válidas siempre son: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ y $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$. Las fórmulas iniciales sólo son valídas si $AB = BA$.

12. $r(A) = 2$.

13. $A^2 - 3A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a$

16. La tercera columna es combinación de las 2 primeras con los coeficientes a y 1.

17. $|A^1 + \alpha A^2 + \beta A^3, A^2, A^3| = |A^1, A^2, A^3| + \alpha\,|A^2, A^2, A^3| + \beta\,|A^3, A^2, A^3| = |A^1, A^2, A^3|$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$. Si $ab \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$. Si $(a \neq 0$ y $b = 0)$ ó $(b \neq 0$ y $a = 0)$ $r(A) = 2$. Si ambos son 0, $r(A) = 1$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix}$. La tercera columna es la sumas de la primera y segunda.

20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |3 \\ 1 & 1 & 0 & |4 \\ 3 & 3 & -2 & |7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |3 \\ 0 & 0 & 1 & |1 \\ 0 & 0 & 1 & |16 \end{pmatrix}$. Sistema incompatible.

21. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & |a \\ 1 & 4 & a^2 & |6+a \\ 1 & -8 & a^2 & |-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & |a \\ 0 & 6 & a\,(a-1) & |6 \\ 0 & 0 & 2a\,(a-1) & |-a \end{pmatrix}$. Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ $\Rightarrow$Sistema compatible determinado (SCD). Si $a = 0$ $\Rightarrow$Sistema compatible indeterminado (SCI). Si $a = 1$ $\Rightarrow$Sistema incompatible (SI).

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & |7 \\ 3 & 0 & -a & |11 \\ 0 & 5 & 3 & |-a \\ 1 & -1 & a & |0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & |7 \\ 0 & -1 & \frac{2a}{3} & |\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2a}{3}+\frac{3}{5} & |\frac{1}{3}-\frac{a}{5} \\ 0 & 0 & 0 & |-2 \end{pmatrix}$El sistema siempre es incompatible para todo valor de a.

23. El determinante de la matriz de coeficientes debe ser $0 \Rightarrow a^3 + 4a^2 - 11a + 6 = 0 \Rightarrow a = 1$ o $a = -6$.

24. $A^{-1} = \dfrac{1}{33}\begin{pmatrix} 17 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 8 \\ 5 & 10 & -7 \end{pmatrix}$.

25. $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

26. $x = -1/7$, $y = 1/7$, $z = 2/7$.

27. $m = -5/62$.

28. $a \neq 0$ y $a \neq 1/4$ y $a \neq -1$.

29. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -t & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2t & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = \dfrac{t}{3}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -t & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = -\dfrac{t}{9}, z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -t \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = \dfrac{2t}{9}.$

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Orden 1: $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow r\,(A) \geq 1$.

Orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r\,(A) \geq 2$.

Orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2.$

31. $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

32.

a) $A + B + C = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ 5 & -1 & 14 \\ 5 & 6 & 17 \end{pmatrix}$

b) $A - 2C + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 21 \\ 1 & -1 & 25 \end{pmatrix}$

c) $2[A - 3B] - 2C = \begin{pmatrix} -12 & -18 & 0 \\ -14 & 14 & -16 \\ -6 & -8 & -62 \end{pmatrix}$

d) $A^t - 2B^t = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -17 \end{pmatrix}$

e) $AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 14 & 9 & 90 \\ 11 & 7 & 40 \end{pmatrix}$

f) $BA = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 22 \\ 11 & 14 & 5 \\ 22 & 25 & 37 \end{pmatrix}$

g) $(A + B)C = \begin{pmatrix} 13 & -6 & -1 \\ 31 & 46 & 50 \\ 35 & 42 & 52 \end{pmatrix}$

33.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 31, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -75 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -39,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 62, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -38,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 60, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad , \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 3b - c \ ,$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 1 & b & 2 \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = abc + 7 + 2b - 2c - 2a, \quad \begin{vmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 38a^2 - 6a + 31$$

34. Si $A = (a_{ij})$:
a) $(A + A^t)^t = (A^t + A) = (A + A^t) \Rightarrow (A + A^t)$ es simétrica.
b) $(A - A^t)^t = (A^t - A) = -(A + A^t) \Rightarrow (A - A^t)$ es antisimétrica.
c) Por a) y b) sabemos que $(A + A^t)$ es simétrica y $(A - A^t)$ antisimétrica. $\frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = A$
c) La matriz A se descompone como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica de la forma siguiente: $A = \dfrac{1}{2}(A + A^t) + \dfrac{1}{2}(A - A^t)$.

4. Casos Prácticos

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 15 & 10 & 2 \\ 17 & 12 & 7 & 3 \\ 11 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33{,}4167 & 13{,}25 & 8{,}5833 & 3 \end{pmatrix}$ coches del tipo T_1, T_2, T_3 y T_4 aplazado. Pago al contado: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 15 & 10 & 2 \\ 17 & 12 & 7 & 3 \\ 11 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44{,}58 & 20{,}75 & 13{,}4167 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\left.\begin{array}{l} 0{,}4x + 0{,}25y + 0{,}2z = 114 \\ 0{,}1x + 0{,}25y + 0{,}3z = 111 \end{array}\right\}$. Solución $(x, y, z) = \left(10 + \frac{1}{3}\lambda, 440 - \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right)$. Las cantidades deben de ser positivas, por lo que $0 \leq \lambda \leq 330$. $B = 3620 - \frac{4}{3}\lambda \Rightarrow \lambda = 0$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ p_A \\ p_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ p_A \\ p_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. a) Modelo Leontief: $X = AX + y$. Sea $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} \frac{240}{1200} & \frac{750}{1500} \\ \frac{720}{1200} & \frac{450}{1500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. La matriz de transacciones $\overline{A}$ se puede recuperar haciendo $\overline{A} = A \cdot diag\,(X_1, X_2) = A \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$

Demanda final: $y = \begin{pmatrix} 210 \\ 330 \end{pmatrix}$

Producción bruta o total: $X = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1500 \end{pmatrix}$

Matriz de Leontief: $I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ -0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de Leontief: $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}6923 & 1{,}9231 \\ 2{,}3077 & 3{,}0769 \end{pmatrix}$

b) Nuevas demandas finales: $y' = \begin{pmatrix} 312 \\ 299 \end{pmatrix}$.

La nueva producción será $X' = (I - A)^{-1}\, y' = \begin{pmatrix} 1415 \\ 1640 \end{pmatrix}$

c) Insumos primarios: $I_p = X - (A \cdot diag\,(X_1, X_2))^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 455 \\ 440 \end{pmatrix}$

5. a) $AB = \begin{pmatrix} 365{,}2 \\ 351{,}0 \\ 341{,}8 \\ 437{,}0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ da el coste de fabricación por unidad de los cuatro bienes P_1, P_2, P_3 y P_4.

$CAB = \begin{pmatrix} 638720 \\ 530530 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ da el coste de adquisición para cada uno de los dos distribuidores.

b) Nos piden el consumo de cada materia prima en kg, que lo da la matriz $AC = \begin{pmatrix} 50630 & 44095 \\ 43520 & 39399 \\ 50030 & 43878 \\ 74360 & 61252 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Si se quiere el consumo total de los dos distribuidores, hay que sumar las dos columnas: $AC \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94{,}7 \\ 82{,}9 \\ 93{,}9 \\ 135{,}6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, donde se ha da el resultado en toneladas.

6. $\left.\begin{array}{r} 13 - 2x + y + z = 12 + x \\ 5 + x - y + z = 5 + y \\ 10 + x + 3y - z = 2 + z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -3x + y + z = -1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y - 2z = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$ Como las cantidades son negativas, no se alcanza el equilibrio.

7. $\left.\begin{array}{c} 3p + 5x = 200 \\ 7p - 3x = 56 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 28; p = 20.$

8. $\left.\begin{array}{c} 3p + 5x = 200 \\ 7 \cdot 0{,}89p - 3x = 56 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 26{,}849; p = 21{,}918.$

9. a)Modelo Leontief: $X = AX + y$.

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} \frac{60}{200} & \frac{75}{150} \\ \frac{80}{200} & \frac{30}{150} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Demanda final: $y = \begin{pmatrix} 65 \\ 40 \end{pmatrix}$

Producción bruta o total: $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$

Matriz de Leontief: $I - A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de Leontief: $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}222 & 1{,}3889 \\ 1{,}111 & 1{,}9444 \end{pmatrix}$

b) $X' = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 104 \\ 172 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 470 \\ 450 \end{pmatrix}$

c) Por una simple regla de tres, la indutria P necesitará $\frac{60}{200}470 = 141$ y la industria Q necesitará $\frac{45}{150}450 = 135$.

10. a) Ingresos totales $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (E + F + M + A) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 38707$ €.

b) Incremento de ingresos entre enero y febrero $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (F - E) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -270$ €.

c) Comisiones en el cuatrimestre de los vendedores $= 0{,}08\,(E + F + M + A) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1021{,}9 \\ 1040{,}2 \\ 1034{,}4 \end{pmatrix}$

11. $AP = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 226677 & 233787 & 266525 \\ 247755 & 254767 & 279800 \\ 177159 & 181915 & 200706 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$

12. $\left.\begin{array}{r} 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 45 = x_1 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}5x_3 + 50 = x_2 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 51 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow AX + B = IX$ con $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ y
$B = \begin{pmatrix} 45 \\ 50 \\ 51 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (I - A)^{-1} B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 430 \\ 620 \\ 520 \end{pmatrix}$

13. Equilibrio: $\left.\begin{array}{r} 2p_1 + 3p_2 + 7p_3 - 30 = 140 - 8p_1 - 5p_2 - 2p_3 \\ 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 10 = 107 - p_1 - 8p_2 - p_3 \\ p_1 + 3p_2 + 3p_3 - 20 = 78 - p_1 - p_2 - 5p_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\left.\begin{array}{r} 10p_1 + 8p_2 + 9p_3 = 170 \\ 5p_1 + 10p_2 + 4p_3 = 117 \\ 2p_1 + 4p_2 + 8p_3 = 98 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 5 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 117 \\ 98 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\triangle\overline{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\triangle S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\triangle D = -\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 140 \\ 107 \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 \\ 87 \\ 60 \end{pmatrix}$$

14. $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{3}x_a + \frac{1}{3}x_b + \frac{1}{2}x_c = x_a \\ \frac{1}{3}x_a + \frac{1}{3}x_b + \frac{1}{4}x_c = x_b \\ \frac{1}{3}x_a + \frac{1}{3}x_b + \frac{1}{4}x_c = x_c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 4 & 6 \\ 4 & -8 & 3 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix} X = 0$

Como la matriz de Leontief es singular, hay más soluciones que la trivial. Resolviendo por Gauss: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$. La solución será $\forall\lambda \geq 0$, $\begin{pmatrix} \lambda/2 \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$. Como en el punto de equilibrio todos las cantidades deben de ser positivas, sólo existe la solución trivial.

15. a) Es la demanda intermedia de los productos de la tercera industria por unidad producidad

$= 0{,}5$. Es decir, la mitad de losproducido por C se consume en el proceso industrial.

b) El elemento $a_{12} = 0{,}1$ el porcentaje (en tanto por uno) de la producción total de la industria A que es consumida como materia prima por la industria B.

c) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 210 \\ 111 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 294{,}07 \\ 252{,}54 \\ 161{,}09 \end{pmatrix}$

16. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{41} & \frac{19}{240} & \frac{1}{185} \\ \frac{5}{41} & \frac{89}{240} & \frac{40}{240} \\ \frac{5}{41} & \frac{37}{240} & \frac{37}{185} \end{pmatrix}$

b) $X' = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 25 \\ 201 \\ 145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80{,}21 \\ 407{,}05 \\ 271{,}92 \end{pmatrix}$

c) $X'' = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 150 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76{,}63 \\ 313{,}76 \\ 228{,}39 \end{pmatrix}$

17. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{20}{80} & \frac{15}{40} \\ \frac{15}{80} & \frac{15}{40} \end{pmatrix}$

b) $X' = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106{,}667 \\ 80{,}0 \end{pmatrix}$