# 2024 年秋季学期研究生课程考核

## (读书报告、研究报告)

考　核　科　目：随机微分方程

学生所在院（系）：数 学 学 院

学　生　姓　名：李　晨　元

学　　　　　号：24S012056

学　生　类　别：研　究　生

考　核　结　果：　　　　　　　　阅　卷　人：

# 摘　　要

随机微分方程是常微分方程的某种推广, 随机微分方程的研究也围绕着解的存在唯一性, 解的稳定性，解的估计等问题展开, 具有和常微分方程中类似的形式.

本文主要介绍了随机微分方程的解的存在唯一性定理, 以及解的估计当中涉及到的不等式, 不等式主要来源于通用初等不等式和鞅不等式, 这些不等式在研究工作中起到重要作用, 贯穿解的估计以及解的稳定性研究.

接着介绍了随机微分方程的“时滞”推广——随机泛函微分方程及中立型随机泛函微分方程的一般形式, 中立型随机泛函微分方程包含一般随机泛函微分方程, 因此只讨论了中立型随机微分方程解的存在唯一性条件. 关于解的稳定性只在随机泛函微分方程中讨论, 结论和随机微分方程中类似. 随机泛函微分方程稳定性的判断起源于 Razumikhin 定理, 本文还对 Razumikhin 定理作了细化, 分别写出了 Razumikhin 定理在延迟随机泛函微分方程、扰动随机泛函微分方程中的应用.

**关键词：** 随机微分方程; 随机泛函微分方程; 中立型随机泛函微分方程; 解的存在唯一性; 解的估计; 解的稳定性

# 目录

# 1 随机微分方程

本节所需记号约定如下, 给定完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$,$\{\mathcal{F}_t\colon t\in\mathrm{R}_+\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上给定的 $\sigma$ 代数流, 满足通常条件; 随机过程的适应性总是对 $\mathcal{F}_t$ 而言的. 将 $w{=}(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 记为给定的 $m$ 维标准 Brown 运动. 所有问题都在区间 $J=[t_0,T]\,(\subset\mathbf{R}_+)$ 或 $\mathbf{R}_+$ 上考虑. 约定

$$L^p_{\mathcal{F}_t}\left(\Omega,\mathbf{R}^d\right)=\left\{X\in L^p\left(\Omega,\mathbf{R}^d\right):X\in\mathcal{F}_t\right\}. \tag{1}$$

其中 $X\in\mathcal{F}_t$ 表示 $X$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的.

## 1.1 准备工作

随机微分方程是常微分方程 (ODE) 的某种推广, 常微分方程 (ODE) 理论是基于普通函数的分析学, 而随机微分方程 (SDE) 理论基于随机函数的分析学. 从已知的常微分方程的理论可以类比学习随机微分方程. 在随机微分方程理论中相当一部分内容基于运用适当不等式对所涉及的随机函数进行估计, 包括矩估计和轨道估计等, 因此不等式的运用居于重要地位. 不等式主要来自于通用不等式和涉及 *Itô* 积分的不等式, 涉及 *Itô* 积分的不等式大多是鞅不等式的推论. 常用的初等不等式总结如下: 首先给出一些计号,$\|x\|_p$ 记为 $x\in R^d$ 的 $p$ 范数, 即

$$\|x\|_p=(\sum_i|x_i|^p)^{1/p},0<p<\infty,\quad \|x\|_\infty=\max_i|x_i|. \tag{2}$$

任给 $p>0$, 约定 $V_p(x)=\sum_i x_i^p=\|x\|_p^p\quad x\in R^d_+$.

- $(\sum_i x_i)^p\le d^{(p-1)\vee 0}(\sum_i x_i^p)$;
- $x^\alpha y^\beta\le\frac{\alpha x^{\alpha+\beta}+\beta y^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta},\quad x,y\ge 0,\alpha,\beta\ge 0,\alpha+\beta>0$;
- $x^\alpha y^\beta\le\frac{\alpha(\varepsilon x)^{\alpha+\beta}+\beta\left(\varepsilon^{-\alpha\beta}y\right)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta},\quad x,y\ge 0$;
- $xy\le p^{-1}(\varepsilon x)^p+q^{-1}\left(\varepsilon^{-1}y\right)^q,\quad x,y\ge 0$;
- $(x+y)^p\le(1-\varepsilon)^{1-p}x^p+\varepsilon^{1-p}y^p,\quad 0<\varepsilon<1$;
- $(x+y)^p\le(1+\varepsilon)^{p-1}\left(x^p+\varepsilon^{1-p}y^p\right),\quad \varepsilon>0$.

下面是 Burkholder-Davis-Gundy 不等式 (BDG 不等式).

**定理 1.1.1 BDG 不等式**设 $g\in\mathcal{L}^2(J,\mathrm{R}^{d\times m}),p>0$, 则:

$$c_p\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^T|g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{p}{2}}\le\mathrm{E}\left[\sup_{t\in\mathcal{J}}\left|\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}w(s)\right|^p\right]\le C_p\mathrm{E}\left[\int_{v_0}^T|g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{p}{2}}, \tag{3}$$

其中

$$c_p=\begin{cases}\left(\frac{p}{2}\right)^p, & 0<p<2,\\ 1, & p=2,\\ (2p)^{-p/2}, & p>2,\end{cases}\qquad C_p=\begin{cases}(32/p)^{p/2}, & 0<p<2,\\ 4, & p=2,\\ \left[\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\right]^{\frac{p}{2}}, & p>2.\end{cases} \tag{4}$$

Gronwall 不等式是另一个非常常用的不等式，尤其在随机泛函微分方程解的估计中. **定理 1.1.2 Gronwall 不等式**设 $\varphi(\cdot)$ 是 $J$ 上的有界非负 Borel 可测函数,$k(\cdot),\beta(\cdot)$ 为 $J$ 上的非负可积函数，则

$$\begin{cases} \varphi(t) \leq k(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J \\ \Rightarrow \varphi(t) \leq k(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)k(s)\exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{5}$$

依次取 $\beta(\cdot) \equiv \beta, k(\cdot) \equiv k, k(\cdot) \equiv 0$ 得到以下几个 Gronwall 不等式的特殊情况：

$$\begin{gathered} \begin{cases} \varphi(t) \leq k(t) + \beta\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J \\ \Rightarrow \varphi(t) \leq k(t) + \beta\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\beta(t-s)}k(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(t) \leq k + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J \\ \Rightarrow \varphi(t) \leq k\exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)\mathrm{d}s\right), \end{cases} \\ \varphi(t) \leq \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)\mathrm{d}s \Rightarrow \varphi(t) \equiv 0, \quad t \in J \end{gathered} \tag{6}$$

上述不等式的倒向形式如下，

$$\begin{gathered} \begin{cases} \varphi(t) \leq k(t) + \beta\int_{t}^{T} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J \\ \Rightarrow \varphi(t) \leq k(t) + \beta\int_{t}^{T} \mathrm{e}^{\beta(s-t)}k(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(t) \leq k + \beta\int_{t}^{T} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J, \\ \Rightarrow \varphi(t) \leq k\mathrm{e}^{\beta(T-t)} \end{cases} \\ \varphi(t) \leq \beta\int_{t}^{T} \varphi(s)\mathrm{d}s \Rightarrow \varphi(t) \equiv 0, \quad t \in J. \end{gathered} \tag{7}$$

## 1.2 一般结论

ODE 的一般形式如下：

$$\dot{x} = f(t, x(t)), t \in J \tag{8}$$

其中,$f$:$J \times R^d \to R^d$. 凡是确定地依赖于初始状态的时间系统，通常可以表示为某个形如的 ODE 模型，但实际生活中，由于随即干扰作用的影响，ODE 并不能很好地描述实际情况，需要对已有的 ODE 模型进行修改，使之能够反映出随机干扰作用的影响，可以在等式右边加入随机干扰项，将其转化为如下的随机微分方程：

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t), t \in J \tag{9}$$

其中 $f$:$J \times R^d \to R^d$，$g$:$J \times R^d \to R^{d\times m}$ 为给定的 Borel 函数.

### 1.2.1 存在性定理

SDE 的解是一个随机过程，它除了要满足方程 9，还需要具有一定的性质，较 ODE 的解稍复杂.SDE 解的详细定义如下.

**定义 1.2.1** 若 $R^d$ 值随机过程 $x(t)$（$t \in J$）满足以下条件：

(1)$x(t)$ 是连续适应过程；

(2)$f(t,x(t)) \in \mathcal{L}^1(J,R^d)$,$g(t,x(t)) \in \mathcal{L}^2(J,R^{d\times m})$;

(3)$x(t)$ 满足如下随机积分方程：

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} g(s,x(s))\,dw(s) \tag{10}$$

则称 $x(t)$ 是方程 (9) 具有初值 $x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}(\Omega,R^d)$ 的解或者解过程. 若 $x(t)$ 同方程 (9) 的其他具有初值 $x_0$ 的解无差别，则称 $x(t)$ 为方程 (9) 具有初值 $x_0$ 的唯一解. 对于 SDE(9) 有和 ODE 中相似的结论，关于方程 (9) 的解的存在唯一性总结为如下定理.

**定理 1.2.1** 设函数 $f(t,x),g(t,x)$ 在 $J\times R^d$ 上满足以下条件：

- **一致 Lipschitz 条件**: 存在正常数 $\bar{K}$，使得

$$|f(t,x)-f(t,y)|^2 \vee |g(t,x)-g(t,y)|^2 \le \bar{K}|x-y|^2 \tag{11}$$

- **线性增长条件**：存在正常数 $K$，使得

$$|f(t,x)|^2 \vee |g(t,x)|^2 \le K(1+|x|^2) \tag{12}$$

则对于任给的 $x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}(\Omega,R^d)$, 方程 (9) 存在唯一解 $x(t)$, 且 $x(t) \in \mathcal{M}^2(J,R^d)$.

**注** 当 $f(t,0)$ 和 $g(t,0)$ 在 $J$ 上有界时，一致 Lipschitz 条件可以推出线性增长条件.

定理 1.2.1 虽然证明了随机微分方程解的存在唯一性，但所需条件过强。可以通过放宽条件，得到更加一般的存在唯一性定理。

**定理 1.2.2** 设 $I$ 是以 $t_0$ 为左端点的一个有限或无限区间，$f$ 与 $g$ 在 $I\times R^d$ 上有定义且满足以下条件：

- **局部 Lipschitz 条件:** 对于任给紧区间 $J\subseteq I, n\ge 1$，存在正常数 $K_{J_n}$, 使得当 $t\in J$ $x,y\in R^d, |x|\vee|y|\le n$ 时有

$$|f(t,x)-f(t,y)|^2 \vee |g(t,x)-g(t,y)|^2 \le K_{J_n}|x-y|^2 \tag{13}$$

- **单调性条件:** 任给紧区间 $J\subseteq I$, 存在正常数 $K_J$, 使得在 $J\times R^d$ 上成立

$$2x^T f(t,x) + |g(t,x)|^2 \le K_J(1+|x|^2) \tag{14}$$

则对于任给的 $x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}(\Omega,R^d)$, 方程 (9) 存在定义于 $I$ 上的唯一解 $x(t)$, 且 $x(t)\in\mathcal{M}^2(\Omega,R^d)$, 即对于任意紧区间 $J\in J$, 均存在初值为 $x_0$ 的解 $x(t)\in\mathcal{M}^2(\Omega,R^d)$. 若定理 1.2.1 中的线性增长条件满足，则根据高维柯西不等式可以推出定理 1.2.2 中的单调性条件，但反之不行，由此可见单调性条件是对线性增长条件真正意义上的放宽。

### 1.2.2 解的估计

关于解的性质的研究主要包括分析性质和统计性质，这里主要讨论分析性质，也就是解的估计，包括矩估计、轨道估计和渐进估计等，解的估计对于研究解的稳定性也非常有帮助.

下面是几个在矩估计中常用的 (不) 等式：

$$|x(t)|^p \leq 3^{p-1}[|x_0|^p + |\int_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds|^p + |\int_{t_0}^t g(s,x(s))\,dw(s)|^p], \tag{15}$$

$$\mathrm{E}|x(t)|^p = E|x_0|^p + \mathrm{E}\int_{t_0}^t L|x(s)|^p\,ds, \tag{16}$$

$$\mathrm{E}[1+|x(t)|^2]^{p/2} = \mathrm{E}[1+|x_0|^2]^{p/2} + \mathrm{E}\int_{t_0}^t L[1+|x(s)|^2]^{p/2}\,ds, \tag{17}$$

首先是对于解 $x(t)$ 的 $p$ 阶矩的估计有如下定理.

**定理 1.2.3** 设 $x(t)=x(t,x_0), x_0 \in L^2 \cap L^p, p>0$.

- 若存在正常数 $\alpha$, 使得在 $J \times R^d$ 上成立：

$$x^{\mathrm{T}} f(t,x) + \frac{1 \bigvee (p-1)}{2}|g(t,x)|^2 \leq \alpha\left(1+|x|^2\right), \tag{18}$$

  则对 $t \in J$ 有

$$\mathrm{E}|x(t)|^p \leq 2^{(p/2-1)\vee 0}\left(1+\mathrm{E}\,|x_0|^p\right)\mathrm{e}^{\alpha p(t-t_0)}, \tag{19}$$

- 若线性增长条件满足，则上述估计式成立，其中

$$\alpha = \sqrt{K} + \frac{1 \vee (p-1)}{2}K. \tag{20}$$

更一般的矩估计结果如下.

**定理 1.2.4** 设 $p$>0, 存在 $V(t,x) \in C^{1\,2}(J \times R^d)$ 与常数 $\alpha > 0$, 使得

$$|x|^p \vee \alpha^{-1}\mathcal{L}V(t,x) \leq V(t,x), t \in J, x \in R^d. \tag{21}$$

则对任给的 $x_0 \in L^2 \cap L^p$, 方程 (9) 的解 $x(t,x_0)$ 满足：

$$E|x(t,x_0)|^p \leq EV(t_0,x_0)e^{\alpha(t-t_0)}, t \in J. \tag{22}$$

下面建立极大不等式，较定理 1.2.3 中的结果稍强.

**定理 1.2.5** 设设 $p>0, x(t)=x(t,x_0), x_0 \in L^2 \cap L^p$. 若方程满足线性增长条件，则有如下估计：

$$\begin{cases} \mathrm{E}(\underset{t_0 \leq s \leq t}{sup}|x(s)|^p) \leq 2\mathrm{E}(1+|x_0|^2)^{p/2}\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \quad t \in J, \\ \beta = p[2\sqrt{K} + K(32p+1+|p-2|)]. \end{cases} \tag{23}$$

因此在线性增长条件下，对任何 $p>0$ 与 $x_0^{2p}$, 有

$$\mathrm{E}(\sup_{t_0\le s\le t}|x(s,x_0)|^p)<\infty,\quad t\in J.$$

由矩估计的方法可以得到解的矩连续性.

**定理 1.2.6** 设随机微分方程满足线性增长条件，解 $x(t)=x(t,x_0),x_0\in L^2\cap L^p,p>0$, 则有：

$$E|x(t)-x(s)|^p\le C_p|t-s|^{p/2},\quad t,s\in J, \tag{24}$$

其中 $C_p$ 为与 $s,t$ 无关的正常数, 因此，$x(t)$ 在 $J$ 上 $p$ 阶矩连续.

Liapunov 指数可以刻画解随着时间变化增长的快慢, 是判断零解的稳定性的一个重要指标.(轨道)Liapunov 指数和 $p$ 阶矩 Liapunov 指数分别定义为 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}t^{-1}\ln|x(t)|$ 与 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}t^{-1}\ln\mathrm{E}|x(t)|^p$. 可以看出 Liapunov 指数和矩估计关系密切, 若定理 1.2.3 中的条件成立可直接推出 $p$ 阶矩 Liapunov 指数 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}t^{-1}\ln\mathrm{E}|x(t)|^p\le\alpha p$.

确定 Liapunov 指数的思路如下：为证

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}t^{-1}\ln|x(t)|\le\gamma,a.s., \tag{25}$$

只需证当 $t$ 充分大时，对于任意 $\omega\in\Omega,\forall\epsilon>0$, 有 $|x(t)|^p\le conste^{(\gamma+\varepsilon)t}$.

下面取定 $\tau>0$, 将上述不等式离散化，得到如下离散不等式：

$$\sup_{n\tau-\tau\le t\le n\tau}|x(t)|^p\le const\ e^{n\tau(y\gamma+\varepsilon)}. \tag{26}$$

由 Chebyshev 不等式得：
$P\left(\sup\limits_{n\tau-\tau\le t\le n\tau}|x(t)|^p\ge e^{n\tau(\gamma+\varepsilon)}\right)\le e^{-n\tau(\gamma+\varepsilon)}E\left(\sup\limits_{n\tau-\tau\le t\le n\tau}|x(t)|^p\right)\triangleq b_n$, 得到矩估计：

$$E\left(\sup_{n\tau-\tau\le t\le n\tau}|x(t)|^p\right)\le const\ e^{n\gamma\tau}, \tag{27}$$

继而由 Borel-Cantelli 引理得离散不等式 (26)a.s. 成立. 下面讨论几种经典情况下的 Liapunov 指数的估计.

**定理 1.2.7** 设 $p>0,\gamma\in R,x(t)=x(t,x_0),x_0\in L^2\cap L^p$. 则以下每个条件都能保持 (25) 成立：

- $f,g$ 在 $[t_0,\infty)\times R^d$ 上满足线性增长条件,$p=2,\gamma=4\sqrt{K}+130K$.
- 对 $x(t)$ 有矩估计 $E|x(t)|^p\le conste(t\ge t_0)$;$f,g$ 在 $[t_0,\infty)\times R^d$ 上满足以下条件：

$$|x^Tf(t,x)|\vee|g(t,x)|^2\le K|x|^2. \tag{28}$$

- $p=2$,$f,g$ 在 $[t_0,\infty)\times R^d$ 上满足条件：

$$2x^Tf(t,x)+|g(t,x)|^2\le\gamma(1+|x|^2). \tag{29}$$

基于指数鞅不等式可以得到较定理 1.2.7 更加精细的结果，总结如定理 1.2.8.

**定理 1.2.8** 设 $f,g$ 在 $[t_0,\infty)\times R^d$ 上满足条件:

$$x^T f(t,x)\le\gamma|x|^2+a, g(t,x)^2\le b, \tag{30}$$

其中 $a,b\ge 0$. 则对于方程 (9) 的解 $x(t)$ 有以下估计:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-\gamma t}|x(t)|}{\sqrt{lnlnt}}=0, a.s., \quad \gamma>0, \tag{31}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|x(t)|}{\sqrt{2tlnlnt}}\le\sqrt{be}, a.s., \quad \gamma=0, \tag{32}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|x(t)|}{\sqrt{lnt}}\le\sqrt{\frac{be}{|\gamma|}}, a.s., \quad \gamma<0, \tag{33}$$

下一节将进行稳定性的分析.

# 2 随机泛函微分方程

一般情况下, 在随机微分方程描述的系统中系统的未来状态是只基于当前时刻的状态, 没有记忆性, 但实际问题当中, 很多系统的未来状态还取决于历史状态. 因此为更加精确描述系统, 引入时滞, 就得到了随机泛函微分方程. 随机泛函微分方程的讨论空间是赋范线性空间, 因此除了沿用上节中的记号还需补充一些记号.

约定 $\tau\in R_+$, 记 $C=C([-\tau,0],R^d)$,$C$ 依范数 $\varphi=\max_{-\tau\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|$ 为 Banach 空间. 每个 $C$ 值随机变量 $\varphi$ 可以看作一个二元函数 $\varphi(\theta,\omega):[-\tau,0]\times\Omega\to R^d$, 它关于 $\theta$ 连续, 关于 $\omega\mathcal{F}-\mathcal{B}_C$ 可测. 约定

- $L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega,C)=\{\varphi:\varphi\text{是}\mathcal{F}_t\text{可测的}C\text{值随机变量}, E\|\varphi\|^p<\infty\}$;
- $C^b_{\mathcal{F}_t}(\Omega,C)=\{\varphi:\varphi\text{是}\mathcal{F}_t\text{可测有界}C\text{值随机变量}\}$;
- $\|\varphi\|_0^p\le E\|\varphi\|^p\le\|\varphi\|_\infty^p$;
- $J_\tau=[t_0-\tau,T]$

随机微分方程的现代形式:

$$dx(t)=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t), \quad t\ge 0. \tag{34}$$

## 2.1 随机泛函微分方程的稳定性

对于随机微分方程稳定性的研究核心结果是 Razumikhin 定理, 该定理的原型是对于延迟微分方程建立的, 延迟微分方程的一般形式如下:

$$dx(t)=F(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),\dots,x(t-\delta_k(t)))dt+G(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),\dots,x(t-\delta_k(t)))dw(t), \tag{35}$$

其中 $\delta_j(\cdot):\mathrm{R}_+\to[0,\tau]$ 为非零连续函数，$F:\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^{d(k+1)}\to R^d, G:\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^{d(k+1)}\to R^{d\times m}$ 连续且满足存在唯一性定理所要求的条件. Razumikhin 定理如下.

**定理 2.1.1** 设 $p>0$, 存在 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathrm{R}^d)$ 与常数 $c_1,c_2,\mu>0,q>1$, 使得以下条件满足:

$$c_1|x|^p\le V(t,x)\le c_2|x|^p,\quad t\ge-\tau,x\in\mathrm{R}^d, \tag{36}$$

$$\begin{cases}\varphi\in L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega,C),\mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta))\le q\mathrm{E}V(t,\varphi(0)),\quad\forall\theta\in[-\tau,0],\\ \Rightarrow\mathrm{E}\mathcal{L}V(t,\varphi)\le-\mu\mathrm{E}V(t,\varphi(0)).\end{cases} \tag{37}$$

令 $\gamma=\mu\wedge\tau^{-1}\ln q$. 则对任何有界的初值 $\xi$, 即 $\xi\in C^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega,C)$, 有

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\le(c_2/c_1)\,\|\xi\|_0^p\mathrm{e}^{-\gamma t},\quad t\ge0. \tag{38}$$

若方程 (34) 还满足如下条件,

$$\mathrm{E}\left|f\left(t,x_t\right)\right|^p\vee\mathrm{E}\left|g\left(t,x_t\right)\right|^p\le K\left\|x_t\right\|_0^p,\quad p\ge2, \tag{39}$$

或

$$\mathrm{E}\left(\sup_{t-\tau\le s\le t}\left|f\left(s,x_s\right)\right|^p\right)\vee\mathrm{E}\left(\sup_{t-\tau\le s\le t}\left|g\left(s,x_s\right)\right|^p\right)\le K\left\|x_t\right\|_0^p,\quad 0<p<2. \tag{40}$$

则方程 (34) 的零解 $p$ 阶矩指数稳定,a.s. 指数稳定. 基于定理 2.1.1, 对于不同类型的随机泛函微分方程, 当 $V(t,x)$ 取不同形式时又发展出丰富的推论结果，将定理 2.1.1 中的内容细化，这些推论结果在具体应用中比上述定理中的条件容易验证.

下面是在延迟微分方程中的应用.

**定理 2.1.2** 设 $p\ge2$. 若存在正常数 $\lambda>0,\alpha_0.\alpha_j,\beta_0,\beta_j\ge0$, 若以下两组条件之一满足，则方程 (35) 的零解 $p$ 阶矩指数稳定，a.s. 指数稳定.

$$\begin{cases}x^TF(t,x,0)\le-\lambda|x|^2,\\ |F(t,x,0)-F\left(t,x_0,y\right)|\le\alpha_0\left|x-x_0\right|+\sum\limits_j\alpha_j\left|y_j\right|,\\ |G(t,x,y)|^2\le\beta_0|x|^2+\sum\limits_j\beta_j\left|y_j\right|^2,\\ 2\lambda>2\alpha+(p-1)\beta;\end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases}x^TF(t,x,\cdots,x)\le-\lambda|x|^2,\\ |F(t,x,\cdots,x)-F\left(t,y_0,y_1,\cdots,y_k\right)|^p\le\sum\limits_{i=0}^k\alpha_i\left|x-y_i\right|^p,\\ |G(t,x,y)|^p\le\beta_0|x|^p+\sum\limits_j\beta_j\left|y_j\right|^p,\\ 2\lambda>2(K\alpha)^{1/p}+(p-1)\beta^{2/p},\end{cases} \tag{42}$$

以上 $t\ge0,x,x_0,y_0\in\mathrm{R}^d,y=(y_1,y_2,\ldots,y_k)\in\mathrm{R}^{dk}$,

$$\alpha=\sum_{i=1}^k\alpha_i,\quad\beta=\sum_{i=0}^k\beta_i,\quad K=2^{p-1}\left[\tau^p\left(\alpha_0+\alpha\right)+\beta\left(\frac{\tau p(p-1)}{2}\right)^{p/2}\right]. \tag{43}$$

另一个特殊例子是随机扰动方程，随机扰动方程的一般形式如下.

$$dx(t) = [f_0(t, x(t)) + f_1(t, x(t))]dt + g(t, x_t)dw(t), \tag{44}$$

下面是定理 2.1.1 在随机扰动方程中的应用.

**定理 2.1.3** 设 $p \geq 2$. 若存在 $V(t, x) \in C^{1,2}([-\tau, \infty) \times \mathrm{R}^d)$ 与正常数 $\mu, c_1, c_2, \beta_i \geq 0 (1 \leq i \leq 4)$ 及 $q > 1$, 使条件 (36) 以及以下条件满足:

$$|V_\tau(t, x)| \leq \beta_1 [V(t, x)]^{(p-1)/p}, \quad \|V_{xx}(t, x)\| \leq \beta_2 [V(t, x)]^{(p-2)/p}, \tag{45}$$

$$\begin{cases} V_t(t, x) + V_x(t, x) f_0(t, x) \leq -\mu V(t, x), \\ \varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega, C), \mathrm{E}V(t + \theta, \varphi(\theta)) \leq q\mathrm{E}V(t, \varphi(0)) (\forall \theta \in [-\tau, 0]) \\ \Rightarrow \mathrm{E}\,|f_1(t, \varphi)|^p \leq \beta_3 \mathrm{E}V(t, \varphi(0)), \\ \mathrm{E}|g(t, \varphi)|^p \leq \beta_4 \mathrm{E}V(t, \varphi(0)), \\ 2\mu > 2\beta_1 \beta_3^{1/p} + \beta_2 \beta_4^{2/p}, \end{cases} \tag{46}$$

则方程 (44) 的零解 $p$ 阶矩指数稳定，若进而假定: 存在常数 $K$, 使得对任何 $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}$ 有:

$$\mathrm{E}\,|f_0(t, \varphi(0))|^p \vee \mathrm{E}\,|f_1(t, \varphi)|^p \vee \mathrm{E}|g(t, \varphi)|^p \leq K \|\varphi\|_0^p, \tag{47}$$

则方程 (44) 的零解 a.s. 指数稳定. $V(t, x)$ 的取法主要有两种，一种是 $V(t, x) = |x|^p$, 一种是 $V(t, x) = x^T Q x$, 其中 $Q$ 为满足某种要求的正定矩阵.

## 2.2 中立型随机微分泛函方程

中立型随机微分方程一般形式为:

$$d[x(t) - u(x_t)] = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dw(t), \tag{48}$$

方程 (48) 与通常的 SFDE 的唯一区别就是左端多出了一项 $-du(x_t)$, 其中 $u(\cdot) : C \to R^d$ 是一个给定的连续函数. 当 $u(t) \equiv 0$ 时中立型随机微分方程的形式和一般随机微分方程的形式完全重叠，因此中立型随机微分方程涵盖了通常的随机泛函微分方程.

将方程 (48) 改写成:

$$d\widetilde{x}(t) = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dw(t), \tag{49}$$

其中 $\widetilde{x}(t) = x(t) - u(x_t)$. 同随机微分方程相同，中立型随机微分方程的主要研究问题仍然是解的存在唯一性，以及解的特性.

### 2.2.1 存在性定理

中立型随机微分方程解的定义如下.

**定义 2.2.1** 若一个 $R^d$ 值随机过程 $x(t)(t \in J_\tau)$ 满足以下条件:

- $x(t)$ 是连续适应过程，且$x_t : t \in J$ 是适应的 $C$ 值随机过程;

- $f(t,x_t) \in \mathcal{L}^1(J,R^d), g(t,x_t) \in \mathcal{L}^2(J,R^{d\times m})$;

- $x_{t_0} = \xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}(\Omega, C)$,$x(t)$ 在 $J$ 上满足随机积分方程:

$$x(t) = \xi(0) - u(\xi) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds + \int_{t_0}^{t} g(s,x_s)dw(s) \tag{50}$$

则称 $x(t)$ 为方程在 $J$ 上的具有初值 $\xi$ 的解. 若 $x(t)$ 和方程在 $J$ 上的任何具有初值 $\xi$ 的解无差别，则称 $x(t)$ 是方程在 $J$ 上具有初值 $\xi$ 的唯一解，写作 $x(t,\xi)$. 中立型随机微分方程解的存在唯一性定理总结如下.

**定理 2.2.2** 设函数 $f, g$ 在其定义域内满足以下条件:

- 一致 Lipschitz 条件: 存在正常数 $K$, 使得

  $|f(t,\varphi) - f(t,\psi)|^2 \vee |g(t,\varphi) - g(t,\psi)|^2 \leq K\|\varphi - \psi\|$;

- 线性增长条件: 存在正常数 $K$, 使得

  $|f(t,\varphi)|^2 \vee |g(t,\varphi)|^2 \leq K(1 + \|\varphi\|^2)$;

- 压缩性条件: 存在 $K \in [0,1)$, 使得

  $|u(\varphi) - u(\psi)| \leq K\|\varphi - \psi\|$.

则对任给 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega, \mathcal{C})$, 方程 (48) 存在唯一具初值 $\xi$ 的解 $x(t)(t \in J_\tau)$, 且有 $x(t) \in \mathcal{M}^2(J_\tau, R^d)$.

更具一般性的存在唯一性定理如下.

**定理 2.2.3** 设 $f, g$ 是以 $t_0$ 为左端点的 (有限或无限) 区间 $I$ 上的函数, $f, g$ 满足以下条件:

- (i) 局部 Lipschitz 条件: 任给紧区间 $J \subset I$ 与 $n \in N$, 存在正常数 $K_J$, 使得当 $t \in J, \varphi, \psi \in \mathcal{C}, \|\varphi\| \vee \|\psi\| \leq n$ 时有 $|f(t,\varphi) - f(t,\psi)|^2 \vee |g(t,\varphi) - g(t,\psi)|^2 \leq K_J\|\varphi - \psi\|^2$;

- (ii) 线性增长条件: 任给紧区间 $J \subset I$, 存在正常数 $K_J$, 使得在 $J \times \mathcal{C}$ 上有 $|f(t,\varphi)|^2 \vee |g(t,\varphi)|^2 \leq K_J(1 + \|\varphi\|^2)$;

- (iii) 压缩性条件: 存在 $K \in (0,1)$, 使得 $|u(\varphi) - u(\psi)| \leq K\|\varphi - \psi\|, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}$,

则对任给 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega, \mathcal{C})$, 方程 (48) 存在唯一具有初值 $\xi$ 的解 $x(t)$, 且 $x(t) \in \mathcal{M}^2(J_\tau, R^d)$.