Aufgaben zum Vorkurs Mathematik

vor dem WS 2022/23

Markus Junker, Jakob Stiefel
Universität Freiburg

12.Oktober 2022

Mittwoch

Aufgaben zum Induktionsprinzip:

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips: Für jede natürliche Zahl n gilt

   a) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$

   b) $\sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{1}{2}\, n(3n-1)$

   c) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

   d) $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$

      Hinweis: Nutzen Sie die binomische Formel und den 'kleinen Gauß'.

   e) Erinnern Sie sich an die Ableitungsregeln. Leiten Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mehrmals ab und stellen Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf. Beweisen Sie ihre Vermutung mit Hilfe des induktionsprinzips.

LÖSUNG:

1. Der Induktionsanfang ist jeweils klar. Wir gehen jeweils davon aus, dass die Aussage bereits für n gilt und zeigen die Aussage für $n+1$.

a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 &= \tfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\big(2n^2 + 7n + 6\big) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(3i-2) &= \frac{1}{2}n(3n-1) + (3(n+1)-2) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2} + 3n + 1 \\ &= \frac{3}{2}n^2 + 3n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{3}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(3(n+1)-1).\end{aligned}$$

c)

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

d)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \big(\sum_{i=1}^{n} i\big)^2 + (n+1)^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2\big(n^2+4n+4\big) \\ &= \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2 = \big(\sum_{i=1}^{n+1} i\big)^2.\end{aligned}$$

e) Wir leiten mehrmals ab und vermuten, dass die n-te Ableitung gegeben ist durch

$$f^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Das ist offensichtlich richtig für $n=0$. Angenommen die Aussage simmt für ein n, dann erhalten wir die $n+1$-te Ableitung durch einmaliges Ableiten der n-ten Ableitung:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n(-1)\frac{n!(n+1)}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{(n+1)+1}}.$$

Freitag

3. Prüfen Sie die beiden folgenden Definitionen auf Wohldefiniertheit:

   a) Ein Bruch $\frac{a}{b} \neq 0$ ist *positiv*, wenn die beiden Komponenten des Repräsentanten (a, b) gleiches Vorzeichen haben.

   b) Ein Bruch ist *gerade*, wenn a gerade ist.

HINWEIS: Der Begriff der Wohldefiniertheit wird auf Seite 28 des Skripts eingeführt.

LÖSUNG:
Wir müssen prüfen, ob die hier definierten Eigenschaften von der Wahl des Repräsentanten abhängen.

a) Angenommen, zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (ungleich 0) haben denselben Repräsentanten, d.h. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Dann haben entweder a, b sowie c, d jeweils dasselbe Vorzeichen oder jeweils verschiedene Vorzeichen. Die Eigenschaft, dasselbe Vorzeichen zu haben, hängt also nicht vom Repräsentanten ab. Die Definition ist wohldefiniert.

b) Es ist z.B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, aber 1 ist gerade und 2 ist ungerade. Die Definition ist nicht wohldefiniert!