5.2. Введение в математическую статистику. Часть 1

5.2.1. Предмет и задачи математической статистики

Предмет математической статистики – разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений.

Основные **задачи** математической статистики:

1. Выбор способов сбора и группировки статистических сведений.
2. Определение законов распределения случайной величины по статистическим данным.
3. Проверка правдоподобия гипотез.
4. Нахождение неизвестных параметров распределения.

5.2.2. Генеральная совокупность

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, при изучении партий деталей качественным признаком может служить стандартность деталей, а количественным – контролируемый размер детали. С этой целью проводят сплошное обследование объектов совокупности относительно интересующего нас признака.

Определение. Вся подлежащая изучению совокупность объектов называется *генеральной совокупностью*. Число элементов в генеральной совокупности называется ее объемом.

Отбор из всей совокупности ограниченного числа объектов и их изучение представляет собой *выборочный* метод исследования, а отобранная совокупность объектов называется *выборкой*.

Ошибки, которые могут возникнуть в ходе исследования.

Ошибкой регистрации называется разность между истинным и наблюденным значениями изучаемого признака у членов совокупности.

Ошибкой репрезентативности называется расхождение характеристик признака в генеральной и выборочной совокупностях, возникающее только в результате того, что исследуется не вся совокупность, а лишь ее часть.

5.2.3. Вариационные ряды и их характеристики

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой в точности не известен. Требуется определить этот закон из опыта или проверить экспериментально гипотезу о том, что величина X подчинена тому или иному закону. С этой целью над случайной величиной X производят ряд независимых опытов (наблюдений), в каждом из которых случайная величина X принимает определенное значение. Совокупность наблюдаемых значений случайной величиной X – $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ представляет собой первичный статистический материал, подлежащий обработке и анализу.

Пример. Число баллов, полученных на вступительных экзаменах по математике 60 абитуриентами:

20	19	22	24	21	18	23	17	20	16	15	23
21	24	21	18	23	21	19	20	24	21	20	18
17	22	20	16	22	18	20	17	21	17	19	20
20	21	18	22	23	21	25	22	20	19	21	24
23	21	19	22	21	19	20	23	22	25	21	21.

Введем ряд понятий.

— Различные значения признака x_i, наблюдающиеся у членов совокупности, называются *вариантами*.

— Число, показывающее, сколько раз встречается вариант в совокупности, называется его *частотой* (m_i).

— Отношение частоты варианта m_i к числу членов совокупности n называется его *частостью*: $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$. Частости вариантов выражают доли (удельные веса) членов совокупности с одинаковыми значениями признака.

— Частоты или частости вариантов называют их *весами*.

Таблица 1

Число баллов (варианты)	Число абитуриентов (частоты)	Доля абитуриентов	
		Частость	В процентах
15	1	0,017	1,7
16	2	0,033	3,3
17	4	0,067	6,7
18	5	0,083	8,3

19	6	0,1	10,0
20	10	0,167	16,7
21	13	0,217	21,7
22	7	0,116	11,6
23	6	0,1	10,0
24	4	0,167	6,7
25	2	0,033	3,3
Итого	**60**	**1,00**	**100,0**

Сумма частот = объему совокупности = числу абитуриентов = 60.

Определение. *Вариационным рядом* называется ранжированный в порядке возрастания или убывания ряд вариантов с соответствующими им весами.

Вариационные ряды делятся на дискретные (или прерывные) и непрерывные (или интервальные).

Определение. Вариационный ряд называется *дискретным*, если значения признака отличаются друг от друга не менее, чем на некоторую постоянную величину, и *непрерывным*, если значения признака могут отличаться на сколь угодно малую величину и непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Общий вид дискретного вариационного ряда представлен таблицей 2.

Таблица 2

Варианты	Веса (частоты или частости)
x_1 x_2 … x_m	m_1 m_2 … m_m
Итого	n

Примеры непрерывных вариационных рядов: распределение рабочих предприятия по проценту выполнения нормы, людей по возрасту, посевной площади по урожайности и т.п. Непрерывный вариационный ряд задается таблицей 3.

Таблица 3

Значения признака	Веса (частоты или частости)
От x_1 *до* x_2 *От* x_2 *до* x_3 … *От* x_m *до* x_{m+1}	m_1 m_2 … m_m
Итого	n

Предполагается, что каждому интервалу принадлежит лишь один из его концов – либо во всех случаях левый, либо во всех случаях правый. Будем считать для определенности, что в таблице 2 варианты расположены в возрастающем порядке, а веса в таблицах 2 и 3 отличны от нуля.

Разности $x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, ..., x_{m+1} - x_m$ называются *интервальными разностями*.

Вариационный ряд часто оформляется графически в виде гистограммы. По оси абсцисс откладываются варианты, и на каждой из вариант как на основании строится прямоугольник, площадь которого равна частоте данного варианта. В качестве высоты прямоугольника берется частное частоты каждого варианта на его длину. Из способа построения гистограммы следует, что полная ее площадь равна единице.

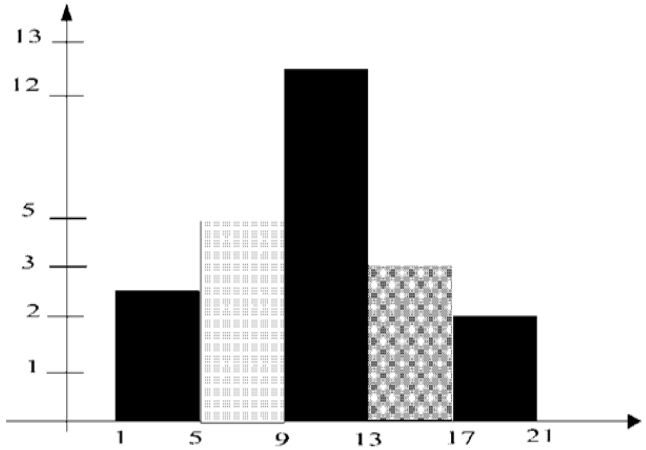
Пример. Построим гистограмму частот по данному распределению выборки.

номер интервала	частичный интервал	сумма частот вариант интервала	плотность частоты
i	x_i, x_{i+1}	m_i	m_i / h_i
1	1 – 5	10	2,5

2	5 – 9	20	5
3	9 – 13	50	12,5
4	13 – 17	12	3
5	17 – 21	8	2

Р е ш е н и е: $h_i = x_{i+1} - x_i$; $n = \sum_{i=1}^{5} m_i = 100$.

Построим на оси абсцисс заданные интервальные длины $h_i = 4$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс, и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим m_i / h_i. Искомая гистограмма имеет вид:



Замечание. В теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и весами (частотами или частостями).

При увеличении числа опытов эта кривая будет представлять собой график плотности распределения величины X.

5.2.4. Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{m(x)}{n},$$

где $m(x)$ – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Эмпирическая функция обладает следующими *свойствами*:

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1];
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция;
3. Если x_1 – наименьшая варианта, а x_k – наибольшая, то $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

В теории вероятностей под функцией распределения случайной величины X понимают вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение меньше x. Число же $F^*(x)$ есть относительная частота этого события. По теореме Бернулли при больших n относительная частота события A приблизительно равна его вероятности (точнее, сходится по вероятности к $P(A)$). Поэтому эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ заменяет в математической статистике известную из теории вероятностей функцию распределения $F(x)$, называемую теоретической функцией распределения.

Пример. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки.

x_i	1	4	6
m_i	10	15	25

Р е ш е н и е. Найдем объем выборки: n = 10+15+25=50.
Наименьшая варианта равна единице, следовательно, $F^*(x)=0$ при $x \le 1$.
Значение $x<4$, а именно $x_1=1$, наблюдалось 10 раз, следовательно, $F^*(x)=10/50=0.2$ при $1<x\le 4$.

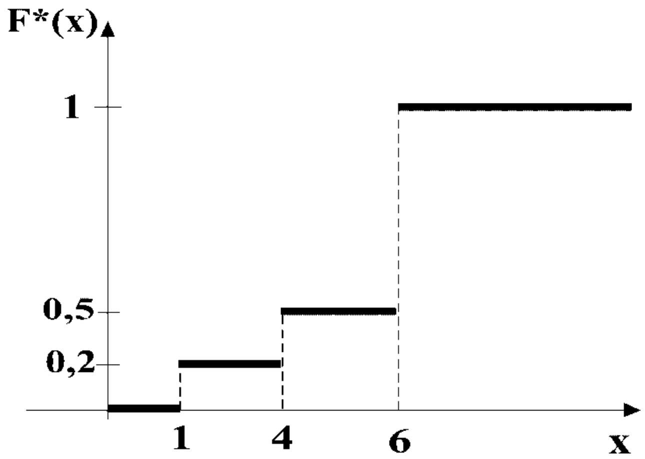
Значение $x < 6$, а именно $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, наблюдалось 10+15=25 раз, следовательно, $F^*(x) = 25/50 = 0.5$ при $4 < x \le 6$.

$x = 6$ – наибольшая варианта, поэтому $F^*(x) = 1$ при $x > 6$.

Искомая эмпирическая функция имеет вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \;\; x \le 1, \\ 0{,}2 & \textit{при} \;\; 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \textit{при} \;\; 4 < x \le 6, \\ 1 & \textit{при} \;\; x > 6. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид:



5.2.5. Числовые характеристики вариационного ряда

Пусть собранный и обработанный статистический материал представлен в виде вариационного ряда.

Определение. *Средней арифметической* вариационного ряда называется дробь, числителем которой служит сумма произведений вариантов ряда на соответствующие им веса, а знаменателем – сумма весов, т.е.

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_m n_m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}. \quad (1)$$

Пример. Вычислить среднюю заработную плату рабочих по данным таблицы.

Заработная плата, тыс. р.	Число рабочих	Заработная плата, тыс. р.	Число рабочих
70 – 80	1	110 – 120	20
80 – 90	3	120 – 130	12
90 – 100	10	130 – 140	7
100 - 110	15	140 – 150	2

По формуле (1) находим:

$$\bar{x} = \frac{75 \cdot 1 + 85 \cdot 3 + 95 \cdot 10 + 105 \cdot 15 + 115 \cdot 20 + 125 \cdot 12 + 135 \cdot 7 + 145 \cdot 2}{70} \approx 79{,}86 .$$

За среднюю арифметическую непрерывного вариационного ряда принимают среднюю арифметическую дискретного распределения, соответствующего данному непрерывному, т.е. частоты непрерывного распределения относят к серединам соответствующих интервалов, которые становятся вариантами.

Пример. Вычислить среднее число жителей в поселках городского типа СНГ по данным таблицы.

Число жителей, Тыс. человек	**Число поселков городского типа**
Менее 3	1039
От 3 до 5	976
5–10	1251
10–20	422
20 и более	51
Итого	**3739**

Установим границы крайних интервалов. Последнему интервалу предшествует интервал от 10 до 20 тыс. человек. Его интервальная разность равна 10 тыс. человек.

Следовательно, условно считаем правую границу последнего интервала равной 20+10=30.

Аналогично получим, что начало первого интервала равно 1. Учитывая эти результаты и принимая за варианты середины интервалов, найдем искомое среднее число жителей:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 1039 + 4\cdot 976 + 7{,}5\cdot 1251 + 15\cdot 422 + 25\cdot 51}{3739} \approx 6{,}14 \text{ (тыс. человек)}$$

Теорема 1. Если варианты увеличить (уменьшить) в одно и то же число раз, то средняя арифметическая увеличится (уменьшится) во столько же раз, т.е.

$$\overline{k\cdot x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} k\cdot x_i\cdot n_i}{n} = k\cdot\bar{x}. \tag{2}$$

Теорема 2. Если варианты уменьшить (увеличить) на одно и то же число, то средняя арифметическая уменьшится (увеличится) на то же число, т.е.

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - c)\cdot n_i}{n} = \bar{x} - c. \tag{3}$$

Теорема 3. Сумма произведений отклонений вариантов от средней арифметической на соответствующие им веса равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot n_i=0. \qquad (4)$$

Теорема 4. При увеличении или уменьшении весов в одно и то же число раз средняя арифметическая не изменяется

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i\cdot k\cdot n_i}{k\cdot n}=\bar{x}. \qquad (5)$$

Пусть некоторая совокупность разбита на части – группы, не обязательно одинаковые по объему. Тогда средние арифметические распределения членов групп называется *групповыми средними*, а среднюю арифметическую распределения по тому же признаку всей совокупности называют *общей средней*.

Группы называются *непересекающимися*, если каждый член совокупности принадлежит только одной группе.

Теорема 5. Общая средняя равна средней арифметической групповых средних всех непересекающихся групп.

$$\bar{x} = \frac{\overline{x_1} \cdot N_1 + \overline{x_2} \cdot N_2 + \ldots + \overline{x_l} \cdot N_l}{N_1 + N_2 + \ldots + N_l} = \frac{\sum_{i=1}^{l} \overline{x_i} \cdot N_i}{N},$$

где $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_l$ – групповые средние; $N_1, N_2, \ldots, N_l$ – объем соответствующих непересекающихся групп.

<u>Теорема 6.</u> Если каждое значение признака z представляет сумму (разность) значений признаков x и y, то средняя арифметическая признака z равна сумме (разности) средних арифметических x и y.

Пусть $z_i = x_i \pm y_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{m} z_i \cdot n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i \pm y_i) \cdot n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n} \pm \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot n_i}{n} = \bar{x} + \bar{y}. \tag{6}$$

Дисперсия вариационного ряда и ее свойства

В статистике наибольший интерес представляет разброс значений признака около их средней арифметической. Отклонения вариантов x_i от средней арифметической выражают разности $x_i - \overline{x}$, а веса вариантов показывают, как часто эти разности встречаются в распределении.

<u>Определение.</u> Дисперсией σ^2 вариационного ряда называется средняя арифметическая квадратов отклонений вариантов от их средней:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot n_i}{n}. \qquad (7)$$

Средним квадратическим отклонением называется арифметическое отклонение значение корня квадратного из дисперсии.

Пример. Вычислим дисперсию и среднее квадратическое отклонение распределения рабочих предприятия по времени, затрачиваемому на обработку одной детали.

Время, затрачиваемое на обработку одной детали, мин.	Число рабочих
2 – 4	42
4 – 6	73
6 – 8	154
8 – 10	205
10 – 12	26
Итого	**500**

Вычислим среднюю арифметическую, приняв за варианты середины интервалов:

$$\bar{x} = \frac{3\cdot 42 + 5\cdot 73 + 7\cdot 154 + 9\cdot 205 + 11\cdot 26}{500} = 7{,}4 \text{ (мин.)}$$

По формуле (7) находим искомую дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{(3-7{,}4)^2\cdot 42 + (5-7{,}4)^2\cdot 73 + (7-7{,}4)^2\cdot 154 + (9-7{,}4)^2\cdot 205 + (11-7{,}4)^2\cdot 26}{500} = 4{,}24.$$

Среднее квадратическое отклонение того же распределения составляет:

$$\sigma = \sqrt{4{,}24} \approx 2{,}059 \text{ (мин.)}. \blacktriangleleft$$

Сравнив средние квадратические отклонения одного и того же признака в разных совокупностях, можно сказать, где вариация признака больше. Поэтому среднее квадратическое отклонение является показателем однородности совокупности.

Сформулируем теоремы, характеризующие свойства дисперсий. Предполагаем, что задан дискретный ряд, представленный таблицей 2, его средняя арифметическая равна $\bar{x}$, а дисперсия σ^2.

Теорема 1. Если все варианты увеличить (уменьшить) в k раз, то дисперсия увеличится (уменьшится) в k^2 раз, а среднее квадратическое отклонение – в $|k|$ раз.

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(k\cdot x_i - k\cdot\bar{x}\right)^2\cdot n_i}{n} = k^2\cdot\sigma^2.$$

Теорема 2. Если варианты увеличить или уменьшить на одну и ту же постоянную величину, то дисперсия не изменится.

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(x_i + c\right) - \left(\bar{x} + c\right)\right]^2\cdot n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\cdot n_i}{n}.$$

Теорема 3. Если веса увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то дисперсия не изменится.

$$\frac{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot k\cdot n_i}{\sum\limits_{i=1}^{m}k\cdot n_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot n_i}{n}.$$

<u>Теорема 4.</u> Дисперсия равна средней арифметической квадратов вариантов на соответствующие им веса без квадрата средней арифметической, т.е.

$$\sigma^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}{x_i}^2 n_i}{n}-(\overline{x})^2. \tag{8}$$

Пусть совокупность разбита на l непересекающихся групп.

<u>Определение.</u> Групповой дисперсией σ_j^2 называется дисперсия распределения членов j-ой группы относительно их средней – групповой средней $\overline{x}_j$, т.е.

$$\sigma_j{}^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x}_j)^2 m_i}{N_j}, \tag{9}$$

где m_i – частоты вариантов в группе, $N_j=\sum\limits_{i=1}^{m}m_i$ – объем группы.

Определение. Дисперсия распределения по этому же признаку всей совокупности относительно общей средней называется *общей дисперсией*.

Определение. *Межгрупповой дисперсией* σ^2 называется средняя арифметическая квадратов отклонений групповых средних $\bar{x}_j$ всех непересекающихся групп от общей средней $\bar{x}$, т.е.

$$\delta^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \cdot N_j}{n}, \tag{10}$$

где N_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$ – объемы групп.

Определение. Средней групповых дисперсий $\overline{\sigma^2}$ называется средняя арифметическая групповых дисперсий, т.е.

$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} \sigma_j{}^2 \cdot N_j}{n},$$

где N_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$ – объем непересекающихся групп.

Теорема 5. (правило сложения дисперсий). Общая дисперсия σ^2 равна сумме средней групповых дисперсий $\overline{\sigma^2}$ непересекающихся групп, на которые разбита совокупность, и межгрупповой дисперсии δ^2, т.е.

$$\sigma^2 = \overline{\sigma^2} + \delta^2. \tag{11}$$

Отношение среднего квадратичного отклонения к средней величине признака, вычисленное в процентах, называется *коэффициентом вариации*:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%. \tag{12}$$

Разность между наибольшим и наименьшим значениями признака называют *размахом вариации*:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

5.2. Введение в математическую статистику. Часть 2

Моменты вариационного ряда

Моментом k-го порядка $M_k(a)$ варьирующего признака x по отношению к значению a называют среднее математическое из k-х степеней отклонений значений признака от a, т.е.

$$M_k(a) = \overline{(X-a)^k} = M(X-a)^k.$$

Если $a = 0$, момент называется *начальным* (ν_k), а при $a = \overline{X}$ его называют *центральным* (μ_k). Таким образом,

$$\nu_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^{l} x_i^k \cdot \frac{m_i}{n},$$

$$\mu_k = M(X-\overline{X})^k = \sum_{i=1}^{l} (x_i - \overline{X})^k \cdot \frac{m_i}{n}.$$

За показатель отклонения распределения признака X от симметрии относительно X принимают величину

$$\alpha = \mu_3 / \sigma^3, \qquad (13)$$

называемую *асимметрией*.

Пределы значений асимметрии α – от -∞ до +∞. При $\alpha = 0$ распределение симметрично: $M_0 = \overline{X}$. При $\alpha > 0$ $M_0 < \overline{X}$, а при $\alpha < 0$ $M_0 > \overline{X}$.

Эксцессом называют величину

$$\varepsilon = \mu_4 / \sigma^4 - 3. \qquad (14)$$

Эксцесс показывает степень крутости кривой распределения признака X по сравнению с крутостью нормального распределения, дисперсия которого равна D(x). При $\varepsilon = 0$ распределение нормальное. Если $\varepsilon > 0$, то крутость положительная и кривая распределения имеет более острую вершину, чем при нормальном распределении. Если же $\varepsilon < 0$, то крутость отрицательная и кривая имеет более плоскую вершину. В этом случае возможно даже, что в центре распределения будут выемки (двухмодальная кривая). Значения эксцесса лежат на полусегменте [-3; + ∞).

Пример. Дана статистическая совокупность, характеризующая затраты (в копейках) на рубль продукции (работ, услуг) за 1990 г., по 100 предприятиям г. Минска:

61,55	61,59	62,09	63,08	63,97	64,74	65,07
67,12	68,10	69,38	70,21	70,21	70,36	71,25
71,86	72,00	72,39	72,41	72,46	72,50	72,80
72,84	73,44	74,93	75,46	75,65	77,13	77,37
77,64	77,86	77,93	78,03	78,28	78,74	78,97

79,07	79,10	79,34	79,34	79,34	79,40	79,49
79,70	80,02	80,26	80,56	80,65	80,69	81,13
81,32	81,40	81,54	81,85	82,27	82,71	82,74
82,78	83,03	83,05	83,59	83,68	83,74	83,78
83,96	84,98	85,18	85,32	85,64	85,71	85,84
86,01	86,03	86,05	86,11	86,48	86,94	86,98
87,38	87,47	87,59	87,89	88,03	88,04	88,11
88,24	88,98	90,34	90,40	90,58	90,73	90,76
92,51	92,72	92,94	94,58	95,06	95,73	96,11

96,34 96,55

Необходимо составить интервальный ряд распределения, вычислить числовые характеристики признака X, характеризующего затраты.

Р е ш е н и е. Каждое индивидуальное измерение затрат представлено отдельно, поэтому их называют *несгруппированными дискретными данными*. Они могут быть подвергнуты группировке в виде дискретного или интервального ряда. Для построения интервального ряда вычислим длину интервала:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n} = \frac{96{,}55 - 61{,}55}{1 + 3{,}322 \cdot \lg 100} \approx 5\,.$$

В результате ряд примет вид, приведенный в таблице

Затраты x_i на 1 руб. продукции, коп.	Число пред-приятий m_i	Частость W_i	Накопленная частость
61,55 - 66,55	7	0,07	0,07
66,55 – 71,55	7	0,07	0,14
71,55 – 76,55	11	0,11	0,25
76,55 – 81,55	27	0,27	0,52
81,55 – 86,55	23	0,23	0,75
86,55 – 91,55	16	0,16	0,91
91,55 – 96,55	9	0,09	1,00

В этой таблице даны частости, вычисленные по формуле $W_i = m_i / n$. Используя накопленные частости $F_i = \sum_{j=1}^{i} W_j$, получаем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 61{,}55, \\ 0{,}07 & \text{при} \quad 61{,}55 < x \le 66{,}55, \\ 0{,}14 & \text{при} \quad 66{,}55 < x \le 71{,}55, \\ 0{,}25 & \text{при} \quad 71{,}55 < x \le 76{,}55, \\ 0{,}52 & \text{при} \quad 76{,}55 < x \le 81{,}55, \\ 0{,}75 & \text{при} \quad 81{,}55 < x \le 86{,}55 \\ 0{,}91 & \text{при} \quad 86{,}55 < x \le 91{,}55, \\ 1{,}00 & \text{при} \quad 91{,}55 < x. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 1.

Для несгруппированных данных находим среднее арифметическое:

$$\overline{X} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{1}{100} \cdot (61{,}55 + 62{,}09 + \ldots + 96{,}34 + 96{,}55) = 80{,}828 .$$

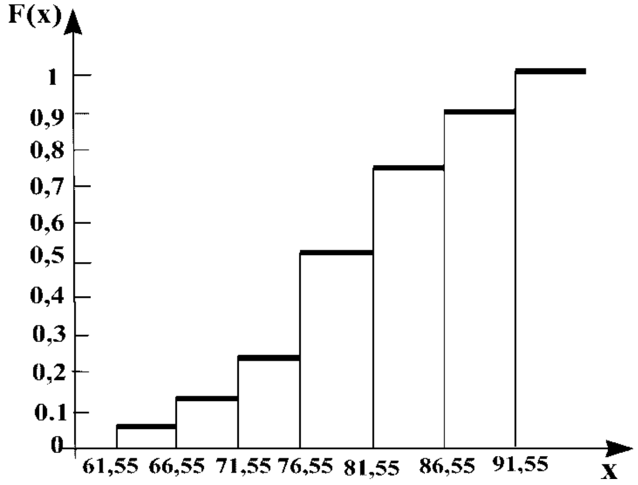


Рис. 1.

Если данные представлены в виде интервального ряда, то среднее арифметическое также можно находить по формуле (1):

$$\overline{X} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{7} x_i^* m_i = \frac{1}{100} \cdot (64{,}05 \cdot 7 + 69{,}05 \cdot 7 + 74{,}05 \cdot 11 +$$
$$+ 79{,}05 \cdot 27 + 84{,}05 \cdot 23 + 89{,}05 \cdot 16 + 94{,}05 \cdot 9) = 80{,}85\,.$$

Здесь x_i^* – среднее значение признака x из интервала $x_i - x_{i+1}$.

Видим, что группировка исходных данных сопровождается потерей точности. Поэтому остальные числовые характеристики вычислим по несгруппированным данным, которые образуют дискретный вариационный ряд.

С теоретической точки зрения наиболее подходящей мерой колеблемости ряда распределения служит статистическая дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} (x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{100} \cdot (371{,}641 + 370{,}101 + \ldots + 247{,}181) = 70{,}165\,.$$

Отсюда $\sigma = \sqrt{70{,}165} = 8{,}376$.

Пределы изменения затрат характеризует размах

$$R = 96{,}55 - 61{,}55 = 35{,}0\,.$$

По формуле (12) вычисляем коэффициент вариации:

$$v = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\,\% = \frac{8{,}376}{80{,}828} \cdot 100\,\% = 10{,}36\,.$$

Величина этого коэффициента показывает, что совокупность исходных данных однородна.

Выяснение общего характера распределения предполагает вычисление асимметрии и эксцесса по формулам (13) и (14):

$$\alpha = \frac{1}{100 \cdot \sigma^3} \sum_{i=1}^{100} (x_i - \overline{X})^3 = \frac{-3373{,}1453}{100 \cdot 578{,}7334} = -0.0574\,,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100 \cdot \sigma^4} \sum_{i=1}^{100} (x_i - \overline{X})^4 - 3 = \frac{1317\,212{,}245}{492\,311{,}4} - 3 = -0{,}3244\,.$$

Асимметрия отрицательна, следовательно, распределение характеризуется незначительной левосторонней асимметрией. Отрицательный эксцесс указывает на более плосковершинное распределение по сравнению с нормальным.

Ошибки асимметрии и эксцесса находим по формулам:

$$E_\alpha = \sqrt{\frac{6 \cdot (100 - 1)}{(100 + 1) \cdot (100 + 3)}} = 0{,}2389\,,$$

$$E_{\varepsilon}=\sqrt{\frac{24\cdot 100\cdot(100-2)\cdot(100-3)}{(100+1)^2\cdot(100+3)\cdot(100+5)}=0{,}4547}\,.$$

Так как отношения $|\alpha|/E_{\alpha}=0{,}0574/02389=0{,}24$ и $|\varepsilon|/E_{\varepsilon}=0{,}3244/0{,}4547=0{,}71$ меньше числа 3, то асимметрия и эксцесс незначительны в распределении затрат.

5.2.6. Точечные оценки параметров распределения случайной величины

Рассмотрим задачу об определении неизвестных параметров, от которых зависит закон распределения случайной величины, по ограниченному числу опытов, т.е. выборке. Такое приближенное, случайное значение будем называть *оценкой*.

Статистические оценки делятся на точечные и интервальные. Оценка, определяемая одним числом, называется *точечной*.

Пусть x – случайная величина, закон распределения которой содержит неизвестный параметр a. Обозначим наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2, ..., x_n$. Их можно рассматривать как n независимых случайных величин, каждая из которых распределена по тому же закону, что и случайная величина x. Требуется найти подходящую оценку для параметра a по результатам n независимых опытов.

Обозначим через $\tilde{a}$ оценку для параметра a. Она должна представлять собой функцию величин $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\tilde{a} = \tilde{a}\,(x_1, x_2, ..., x_n).$$

К оценке $\tilde{a}$ предъявляется ряд требований:

1. Чтобы, пользуясь величиной $\tilde{a}$ вместо a, не делать систематических ошибок в сторону занижения или завышения, т.е. чтобы $M(\tilde{a}) = a$. Оценка, удовлетворяющая такому условию, называется *несмещенной*. Величина смещения определяется по формуле $b(\tilde{a}) = M(\tilde{a}) - a$.

2. Чтобы с увеличением числа опытов n случайная величина $\tilde{a}$ приближалась (сходилась по вероятности) к параметру a, т.е. чтобы $D(\tilde{a}) \to 0$ или

$$\lim_{n\to\infty} (P(\tilde{a} - a) \geq \varepsilon) = 0.$$

Оценка, обладающая таким свойством, называется *состоятельной*.

3. Чтобы выбранная несмещенная оценка обладала по сравнению с другими наименьшей дисперсией, т.е.

$$D(\tilde{a}) = \min.$$

Оценка, обладающая таким свойством, называется *эффективной*.

В качестве *оценки для математического ожидания* предлагается брать среднее арифметическое наблюдаемых значений:

$$\tilde{m} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

Эта оценка является состоятельной и несмещенной.

Несмещенной оценкой дисперсии является величина

$$\tilde{D} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i-1}^{n} (x_i - \tilde{m})^2 = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \tilde{m}^2 \right) \cdot \frac{n}{n-1} \,.$$

Замечание. Сравнивая формулы

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{и} \quad \tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

видим, что они отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях n объема выборки, выборочная и исправленная дисперсия (несмещенная оценка) будут мало различаться. На практике пользуются исправленной дисперсией, если $n < 30$.

Одним из важнейших методов нахождения оценок параметров распределения по данным выборки является метод максимального правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия

Пусть из генеральной совокупности с плотностью распределения вероятностей $f(x,a)$ произведена выборка объема n и получены результаты $x_1, x_2, ..., x_n$. Предположим, что x – дискретная случайная величина, закон распределения которой зависит от неизвестного параметра a. Например, случайная величина x имеет распределение Пуассона $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $a=\lambda$ – неизвестный параметр.

Будем рассматривать результаты выборки как реализацию n – мерной случайной величины $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Предположим, что составляющие этой случайной величины независимы. В этом случае вероятность того, что составляющие примут значения, равные наблюдаемым, (она называется функцией правдоподобия) равна

$$L = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = P(x_1, a) \cdot P(x_2, a) \cdot ... \cdot P(x_n, a) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, a) .$$

В случае непрерывной случайной величины функция правдоподобия имеет вид

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, a) \cdot f(x_2, a) \cdot ... \cdot f(x_n, a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, a) . \qquad (19)$$

Формула (19) определяет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины $(X_1, X_2, ..., X_n)$, или плотность распределения выборки.

В качестве оценки неизвестного параметра a, найденной по методу максимального правдоподобия, выбирается такая функция $\tilde{a} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая максимизирует функцию правдоподобия. Следовательно, на основании известных правил дифференциального исчисления для нахождения оценок максимального правдоподобия составляется система m уравнений (m – число оцениваемых параметров):

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1,2,3,...,m)$$

и выбирается то решение, которое обращает функцию правдоподобия в максимум. Поскольку экстремум функции L и $\ln L$ достигается при одних и тех же значениях $\tilde{a} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, то иногда для упрощения расчетов пользуются логарифмической функцией правдоподобия. В этом случае оценки максимального правдоподобия находятся из системы уравнений $\frac{\partial \ln L}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1,2,...,m)$.

Метод максимального правдоподобия обладает рядом преимуществ по сравнению с методом моментов.

Укажем некоторые важные свойства оценок максимального правдоподобия:

1) метод максимального правдоподобия дает состоятельные оценки;

2) если существует эффективная оценка, то метод максимального правдоподобия дает эту оценку;

3) оценки максимального правдоподобия асимптотически эффективны;

4) оценки максимального правдоподобия имеют асимптотически нормальное распределение с параметрами

$$M(\tilde{a}) = a, \quad D(\tilde{a}) = -\frac{1}{M\left(\dfrac{\partial^2 \ln f(x,a)}{\partial a^2}\right)};$$

5 если существуют достаточные оценки, то метод максимального правдоподобия дает их.

Для самостоятельного изучения

Интервальные оценки параметров распределения случайной величины

В ряде задач требуется не только найти для параметра a подходящее численное значение, но и оценить его точность и надежность. Требуется знать – к каким ошибкам может привести замена параметра a его точечной оценкой $\tilde{a}$ и с какой степенью уверенности можно ожидать, что эти ошибки не выйдут за известные пределы?

Чтобы дать представление о точности и надежности оценки $\tilde{a}$, в математической статистике пользуются *доверительными интервалами* и *доверительными вероятностями*.

Пусть для параметра a получена на опыте несмещенная оценка $\tilde{a}$. Мы хотим оценить возможную при этом ошибку. Назначим некоторую достаточно большую вероятность β (например, $\beta = 0{,}9$, или $0{,}99$) такую, что событие с вероятностью β можно считать практически достоверным, и найдем такое значение ε, для которого

$$P(|a - \tilde{a}| < \varepsilon) = \beta . \qquad (20)$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибки, возникающий при замене a на $\tilde{a}$, будет $\pm\varepsilon$; большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью $\alpha = 1 - \beta$.

Ясно, что $\tilde{a}$ тем точнее определяет параметр a, чем меньше абсолютная величина разности $|a - \tilde{a}|$, т.е., чем меньше ε, тем оценка точнее. Положительное число ε характеризует *точность оценки*. Перепишем (20) в виде:

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta \,. \tag{21}$$

Равенство (21) означает, что с вероятностью β неизвестное значение параметра a попадает в интервал (рис. 2):

$$I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon; \tilde{a} + \varepsilon) \,. \tag{22}$$

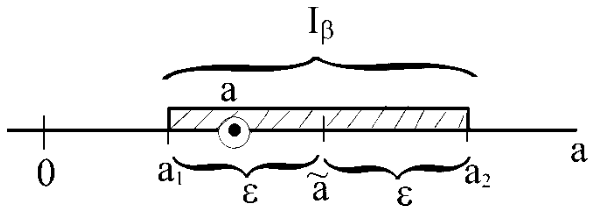


Рис. 2

Вероятность β принято называть *доверительной вероятностью (надежностью)*, а интервал I_β – *доверительным интервалом*. [1]). Границы интервала I_β: $a_1 = \tilde{a} - \varepsilon$ и $a_2 = \tilde{a} + \varepsilon$ называются доверительными границами.

Если бы нам был известен закон распределения величины $\tilde{a}$, задача нахождения доверительного интервала была бы весьма проста: достаточно было бы найти такое значение ε, для которого

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta .$$

Затруднение состоит в том, что закон распределения оценки $\tilde{a}$ зависит от закона распределения величины x и, следовательно, от его неизвестных параметров (в частности, и от самого параметра a).

1. Рассмотрим задачу о доверительном интервале для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

Пусть проведено n независимых опытов над случайной величиной x, характеристики которой – математическое ожидание m и дисперсия D неизвестны. Для этих параметров получены оценки:

---

[1]) На рис. 2 рассматривается доверительный интервал, симметричный относительно $\tilde{a}$. Вообще говоря, это не обязательно.

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}; \quad \tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \tilde{m}\right)^2}{n-1}. \qquad (23)$$

Требуется построить доверительный интервал I_β, соответствующий доверительной вероятности β, для математического ожидания m величины x.

При решении этой задачи воспользуемся тем, что величина $\tilde{m}$ представляет собой сумму n независимых одинаково распределенных случайных величин x_i, и, согласно центральной предельной теореме, при достаточно большом n ее закон распределения близок к нормальному. На практике же даже при относительно небольшом числе слагаемых (порядка 10–20) закон распределения суммы можно приближенно считать нормальным. Будем исходить из того, что величина $\tilde{m}$ распределена по нормальному закону. Характеристики этого закона – математическое ожидание и дисперсия – равны соответственно m и $\frac{D}{n}$. Предположим, что величина D нам известна, и найдем такую величину ε_β, для которой

$$P(\left|\tilde{m} - m\right| < \varepsilon_\beta) = \beta. \qquad (24)$$

Выразим вероятность в левой части (24) через нормальную функцию распределения

$$P(|\tilde{m} - m| < \varepsilon_\beta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right), \tag{25}$$

где $\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{D}{n}}$ – среднее квадратическое отклонение оценки $\tilde{m}$.

Из уравнения

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right) = \beta$$

находим значение ε_β:

$$\varepsilon_\beta = \sigma_{\tilde{m}} \cdot \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right), \tag{26}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (приложение 2), а $\arg\Phi(x)$ – обратная ей функция, т.е. такое значение аргумента, при котором нормальная функция распределения равна x.

Дисперсия D, через которую выражена величина $\sigma_{\tilde{m}}$, нам в точности не известна; в качестве ее ориентировочного значения можно воспользоваться оценкой $\tilde{D}$ (23) и положить приближенно:

$$\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}.$$

Таким образом, приближенно решена задача построения доверительного интервала, который равен: $I_\beta = (\tilde{m} - \varepsilon_\beta;\ \tilde{m} + \varepsilon_\beta)$, где ε_β определяется формулой (26).

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью β можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\tilde{m} - \sigma_{\tilde{m}} \cdot \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right);\ \tilde{m} + \sigma_{\tilde{m}} \cdot \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$ покрывает неизвестный параметр m; точность оценки $\varepsilon_\beta = \sigma_{\tilde{m}} \cdot \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания m по выборочным средним $\bar{x}$, если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\beta = 0{,}95$.

Р е ш е н и е. Из соотношения

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde m}}\right)=0{,}95 \text{ получим } \Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde m}}\right)=0{,}475.$$

По таблице (приложение 2) найдем

$$\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde m}}=1{,}96, \text{ где } \sigma_{\tilde m}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \tilde m=\bar x.$$

Найдем точность оценки:

$$\varepsilon_\beta=\frac{\sigma\cdot\arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0{,}98.$$

Запишем доверительный интервал:

$$(\tilde m-0{,}98;\ \tilde m+0{,}98).$$

Например, если $\bar x=\tilde m=4{,}1$, то доверительный интервал имеет следующие доверительный границы:

$$\tilde m-0{,}98=4{,}1-0{,}98=3{,}12;$$

$$\tilde m+0{,}98=4{,}1+0{,}98=5{,}08.$$

Таким образом, значения неизвестного параметра m, согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют неравенству

$$3{,}12 < m < 5{,}08.$$

Поясним смысл, который имеет заданная надежность $\beta = 0{,}95$. Она указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяют такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключен; лишь в 5% случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Замечание. Минимальный объем выборки, который обеспечит требуемую оценку математического ожидания с достаточной точностью ε и надежностью β, можно найти по формуле

$$n = \frac{\left[\arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2}$$

2. Рассмотрим задачу о доверительном интервале для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.

Необходимо найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание m нормально распределенной случайной величины X с заданной надежностью β.

По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ найдем среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и дисперсию $\tilde{D} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Рассмотрим новую случайную величину

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\tilde{m}}},$$

где $\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}, \bar{x} = \tilde{m}$. Функция распределения этой случайной величины называется законом распределения Стьюдента (или t – распределением) с $(n-1)$ степенями свободы. В таблице (приложение 4) с двумя входами дается решение уравнения $P(|t| > x) = q$. Строка выбирается по числу $(n-1)$ степеней свободы, а столбец – по значению q. На пересечении выбранных строки и столбца находится число x.

Чтобы получить границы доверительного интервала для параметра m с надежностью β, необходимо найти по таблице такое число t_β, для которого выполняется неравенство

$$P(|t| < t_\beta) = \beta .$$

Воспользуемся тем, что события $|t| \le t_\beta$ и $|t| > t_\beta$ противоположны. Если $P(|t| > t_\beta) = q$, а $P(|t| < t_\beta) = \beta$, то

$$\beta = P(|t| < t_\beta) = 1 - P(|t| > t_\beta) = 1 - q .$$

Следовательно, $q = 1 - \beta$. По числу степеней свободы $(n-1)$ и числу $q = 1 - \beta$ находим по таблице t_β. Неравенство

$$\left| \frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\tilde{m}}} \right| < t_\beta$$

преобразуется в равносильное ему неравенство

$$-t_\beta < \frac{m - \bar{x}}{\sigma_{\tilde{m}}} < t_\beta ; \quad -t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}} < m - \bar{x} < t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}} ; \quad \bar{x} - t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}} < m < \bar{x} + t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}} .$$

Или, учитывая, что $\bar{x} = \tilde{m}$, запишем искомый доверительный интервал

$$(\tilde{m} - t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}} < m < \tilde{m} + t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}}).$$

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема n=16 найдены выборочная средняя $\bar{x} = 20{,}2$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\sqrt{\tilde{D}} = 0{,}8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью $\beta = 0{,}95$.

Р е ш е н и е. Пользуясь таблицей (приложение 4), по $\beta = 0{,}95$ и $n = 16$ находим $t_\beta = 2{,}13$. Найдем доверительные границы:

$$\bar{x} - t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}} = 20{,}2 - 2{,}13 \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{16} = 19{,}774},$$

$$\bar{x} + t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}} = 20{,}2 + 2{,}13 \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}626.$$

Итак, с надежностью 0.95 неизвестный параметр m заключен в доверительный интервал $19{,}774 < m < 20{,}626$.

Замечание 1. При неограниченном возрастании объема выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому при $n > 30$ можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением. Однако, для малых выборок ($n < 30$) замена распределения нормальным приводит к грубым ошибкам, а именно – к неоправданному сужению доверительного интервала, т.е. к повышению точности оценки. Например, если $n = 5$ и $\beta = 0{,}99$, то, пользуясь распределением Стьюдента, найдем $t_\beta = 4{,}6$, используя функцию Лапласа, найдем $t_\beta = 2{,}58$, т.е. доверительный интервал в последнем случае окажется более узким, чем найденный по распределению Стьюдента. Это вовсе не свидетельствует о слабости метода Стьюдента, а объясняется тем, что малая выборка содержит малую информацию об интересующем нас признаке.

<u>Замечание 2</u>. Если z – нормальная величина с $m_z = 0$ и $\sigma_z = 1$, а V – независимая от z величина, распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы, то величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \tag{27}$$

распределена по закону Стьюдента с k степенями свободы.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально с $m_x = a, \sigma_x = \sigma$. Если из этой совокупности извлекать выборки объема n и по ним находить выборочные средние $\bar{x}$, то можно доказать, что выборочная средняя распределена нормально, причем

$$m_x = a, \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тогда величина

$$Z = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (28)$$

также имеет нормальное распределение, как линейная функция нормального аргумента $\bar{x}$, причем, $m_z = 0, \sigma_z = 1$.

Доказано, что независимая от Z случайная величина

$$V = \frac{(n-1) \cdot \tilde{D}}{\sigma^2} \qquad (29)$$

($\tilde{D}$ – исправленная выборочная дисперсия) распределена по закону χ^2 с $k = n - 1$ степенями свободы.

Следовательно, подставив (28) и (29) в (27), получим величину

$$T = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sqrt{\tilde{D}}},$$

которая распределена по закону Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы.

3. Рассмотрим задачу о доверительном интервале для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по "исправленному" выборочному среднему квадратическому отклонению $\sigma = \sqrt{\tilde{D}}$. Найдем доверительные интервалы, покрывающие параметр σ с заданной надежностью β.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P\left(\left|\sigma - \sqrt{\tilde{D}}\right| < \varepsilon\right) = \beta \text{ или } P\left(\sqrt{\tilde{D}} - \varepsilon < \sigma < \sqrt{\tilde{D}} + \varepsilon\right) = \beta.$$

Для того, чтобы можно было пользоваться готовой таблицей, преобразуем двойное неравенство: $\sqrt{\tilde{D}} - \varepsilon < \sigma < \sqrt{\tilde{D}} + \varepsilon$ в равносильное неравенство

$$\sqrt{\tilde{D}}\left(1-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{D}}}\right)<\sigma<\sqrt{\tilde{D}}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{D}}}\right).$$

Положив $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{D}}}=q$, получим

$$\sqrt{\tilde{D}}\,(1-q)<\sigma<\sqrt{\tilde{D}}\,(1+q)\,. \qquad (30)$$

Для того, чтобы найти q, введем в рассмотрение случайную величину χ:

$$\chi=\frac{\sqrt{\tilde{D}}}{\sigma}\sqrt{n-1},$$

где n – объем выборки. Как было указано (замечание 2, соотношение (29)), величина $\frac{\tilde{D}\,(n-1)}{\sigma^2}$ распределена по закону χ^2, поэтому корень из нее обозначают χ.

Преобразуем неравенство (30) так, чтобы оно приняло вид

$$\chi_{\min}<\chi<\chi_{\max}.$$

Вероятность этого неравенства равна заданной вероятности β. Предполагая, что $q<1$, перепишем (30):

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{D}}\,(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\sqrt{\tilde{D}}\,(1-q)}.$$

Умножив все члены неравенства на $\sqrt{\tilde{D}\,(n-1)}$, получим

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{\sqrt{\tilde{D}\,(n-1)}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Вероятность того, что это неравенство, а следовательно, и равносильное ему неравенство (30) будет выполняться, равна β.

Практически для отыскания q пользуются таблицей (приложение 4). Вычислив по выборке $\sqrt{\tilde{D}}$ и найдя по таблице q, получим искомый доверительный интервал (30), покрывающий σ с заданной надежностью β, т. е. интервал

$$\sqrt{\tilde{D}}\,(1-q) < \sigma < \sqrt{\tilde{D}}\,(1+q).$$

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 25$ найдена несмещенная оценка $\tilde{D} = 0{,}64$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

Р е ш е н и е. По таблице (приложение 4) для $\beta = 0{,}95$ и $n = 25$ найдем $q = 0{,}32$. Искомый доверительный интервал (30) таков:

$$0{,}8(1 - 0{,}32) < \sigma < 0{,}8(1 + 0{,}32) \quad \text{или} \quad 0{,}544 < \sigma < 1{,}056.$$