Zusammenhänge von Zusammenhangsbegriffen

X **homotop zu** Y **(**$X \simeq Y$**):**

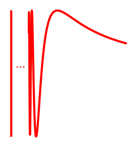
$$\exists f : X \to Y, g : Y \to X : \\ g \circ f \simeq \mathrm{id}_X, f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

X **zusammenhängend:**

$$\forall U, V \subseteq X \text{ offen, nicht-leer} : \\ U \cup V = X \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$$

X kann nicht in zwei diskunkte offene Mengen zerteilt werden

$\Leftarrow$ $\not\Rightarrow$



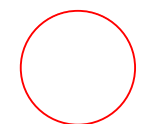
$\{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\} \cup \{\sin(1/x) | x > 0\}$

X **wegzusammenhängend:**

$$\forall x, y \in X : \exists \gamma : [0,1] \to X : \\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

Je zwei Punkte können durch einen Weg verbunden werden

$\Leftarrow$ $\not\Rightarrow$



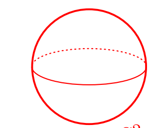
S^1

X **einfach zusammenhängend:**

X wegzusammenhängend und $\pi_1(X) = 0$

wegzsh. und alle Schleifen zusammenziehbar

$\Leftarrow$ $\not\Rightarrow$

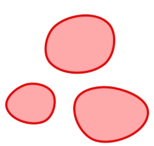


S^2

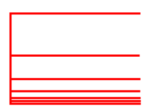
X **zusammenziehbar:**

$$X \simeq \{*\}$$

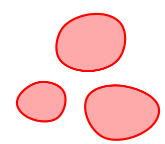
homotop zum 1-Pkt.-Raum



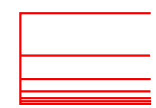
$\not\Uparrow$ $\not\Downarrow$



$\{0\} \times [0,1] \cup$
$[0,1] \times \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$
$\cup [0,1] \times \{0\}$



$\not\Uparrow$ $\not\Downarrow$



$\{0\} \times [0,1] \cup$
$[0,1] \times \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$
$\cup [0,1] \times \{0\}$

X **lokal zusammenhängend:**

$$\forall x \in X, U \subseteq X \text{ Umg. v. } x : \\ \exists V \subseteq U \text{ Umg. v. } x : V \text{ zsh.}$$

Jede Umg. enthält zsh. Umg.

$\Leftarrow$

X **lokal wegzusammenhängend:**

$$\forall x \in X, U \subseteq X \text{ Umg. v. } x : \\ \exists V \subseteq U \text{ Umg. v. } x : V \text{ wegzsh.}$$

Jede Umg. enthält wegzsh. Umg.

X **lokal einfach zusammenhängend:**

$$\forall x \in X, U \subseteq X \text{ Umg. v. } x : \\ \exists V \subseteq U \text{ Umg. v. } x : V \text{ einf. zsh.}$$

Jede Umg. enthält einf. zsh. Umg.

$\Downarrow$ $\Uparrow$ $\not\Downarrow$

X **schwach lokal wegzusammenhängend:**

$$\forall x \in X, U \subseteq X \text{ Umg. v. } x : \exists V \subseteq X \text{ Umg. v. } x : \\ \forall y \in V : \exists x \rightsquigarrow y \text{ Weg in } U$$

X **halb-lokal einfach zusammenhängend:**

$$\forall x \in X : \exists U \subseteq X \text{ Umg. v. } x : \\ \pi_1(U, x) \hookrightarrow \pi_1(X, x) \text{ trivial}$$

Jeder Pkt. besitzt in X zusammenziehbare Umg.