Zusammenhänge von Zusammenhangsbegriffen

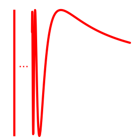
X homotop zu Y ($X \simeq Y$):

$\exists f : X \to Y, g : Y \to X :$
$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X, f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$

X zusammenhängend:

$\forall U, V \subseteq X$ offen, nicht-leer :
$U \cup V = X \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

X kann nicht in zwei diskunkte offene Mengen zerteilt werden

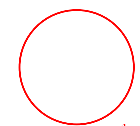


$\{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\} \cup \{\sin(1/x) | x > 0\}$

X wegzusammenhängend:

$\forall x, y \in X : \exists \gamma : [0,1] \to X :$
$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

Je zwei Punkte können durch einen Weg verbunden werden

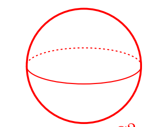


S^1

X einfach zusammenhängend:

X wegzusammenhängend
und $\pi_1(X) = 0$

wegzsh. und alle Schleifen zusammenziehbar

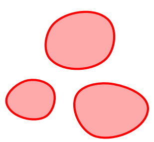


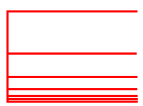
S^2

X zusammenziehbar:

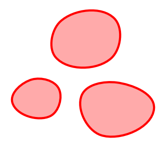
$X \simeq \{*\}$

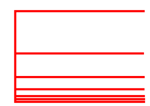
homotop zum 1-Pkt.-Raum





$\{0\} \times [0,1] \cup$
$[0,1] \times \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$
$\cup [0,1] \times \{0\}$





$\{0\} \times [0,1] \cup$
$[0,1] \times \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$
$\cup [0,1] \times \{0\}$

X lokal zusammenhängend:

$\forall x \in X, U \subseteq X$ Umg. v. x :
$\exists V \subseteq U$ Umg. v. $x : V$ zsh.

Jede Umg. enthält zsh. Umg.

X lokal wegzusammenhängend:

$\forall x \in X, U \subseteq X$ Umg. v. x :
$\exists V \subseteq U$ Umg. v. $x : V$ wegzsh.

Jede Umg. enthält wegzsh. Umg.

X lokal einfach zusammenhängend:

$\forall x \in X, U \subseteq X$ Umg. v. x :
$\exists V \subseteq U$ Umg. v. $x : V$ einf. zsh.

Jede Umg. enthält einf. zsh. Umg.

Kegel über
Hawaiianischen
Ohrringen:

X schwach lokal wegzusammenhängend:

$\forall x \in X, U \subseteq X$ Umg. v. $x : \exists V \subseteq X$ Umg. v. x :
$\forall y \in V : \exists x \rightsquigarrow y$ Weg in U

X halb-lokal einfach zusammenhängend:

$\forall x \in X : \exists U \subseteq X$ Umg. v. x :
$\pi_1(U, x) \hookrightarrow \pi_1(X, x)$ trivial

Jeder Pkt. besitzt eine Umg., die nur global triviale Schleifen enthält