



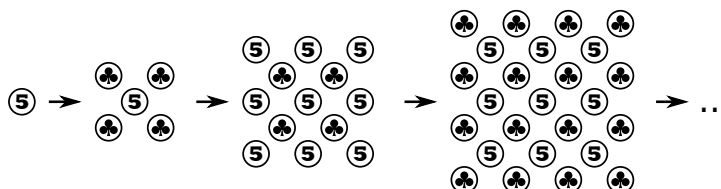
Vierter Korrespondenzbrief

Erste Beweise mit Induktion

In diesem Brief werden wir eine besondere, in der Mathematik sehr oft genutzte Beweistechnik kennen lernen: Den *Beweis durch Induktion*. Eine Besonderheit dieser Beweistechnik ist, dass man mit ihr nicht nur eine Aussage, sondern gleich unendlich viele Aussagen auf einmal zeigen kann!

1 Induktion mit Bildern

Vor kurzem habe ich mal wieder mein Sparschein geleert um es zur Bank zu bringen. Davor wollte ich aber natürlich wissen, wie viel Geld sich überhaupt darin befunden hatte. Und um mir das Zählen zu erleichtern (und vielleicht auch, weil mir gerade ein wenig langweilig war) habe ich die Münzen zu einem Muster zusammengelegt:



Aufgabe 1. Der nächste Schritt

Erkennst du das Schema, nach dem ich dieses Muster gebaut habe? Kannst du das nächste Viereck zeichnen?

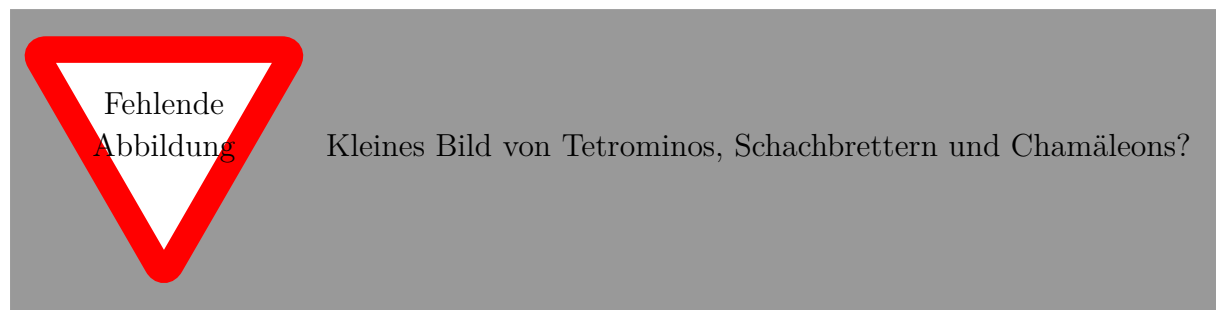
Während ich also immer größere Vierecke gelegt habe, ist mir das folgende aufgefallen: Die Zahl an Münzen, die ich für ein Viereck benötige, scheint immer eine ungerade Zahl zu sein: Für das erste 1, beim zweiten 5, beim dritten 13, beim vierten 25, beim fünften —, ...

Ob das wohl für alle solchen Vierecke stimmt? Ich habe noch ein paar weitere solchen Vierecke gelegt, und für tatsächlich habe ich für jedes eine ungerade Anzahl an Münzen gebraucht. Aber irgendwann sind mir natürlich die Münzen ausgegangen. Wie kann ich nun also herausfinden, ob meine Vermutung wirklich für *alle* solche Vierecke gilt?

Wir haben nun also für ein paar kleine Beispiele gesehen, dass die Aussage „Für ein (zentriertes) Viereck benötigt man eine ungerade Zahl an Münzen.“ für diese stimmt. Wir

können nun aber nicht *alle* möglichen Vierecke durchprobieren und für jedes einzelne prüfen, ob die Aussage auch für diese stimmt.

Ein ähnliches Problem hatten wir zu Beginn dieses Schuljahres schon einmal in einem Zirkelbrief? Erinnerst du dich noch an den Brief mit den Unmöglichkeitbeweisen? Den Tetrominos, den Schachbrettern und den Chamäleons?



Darin hatten wir doch ein ganz ähnliches Problem: Wir hatten zum Beispiel eine Menge verschiedenfarbiger Chamäleons, die ihre Farbe nach einem bestimmten Muster ändern, wenn sie sich treffen. Wir wollten nun zeigen, dass wir nie gleich viele Chamäleons jeder Farbe bekommen können.

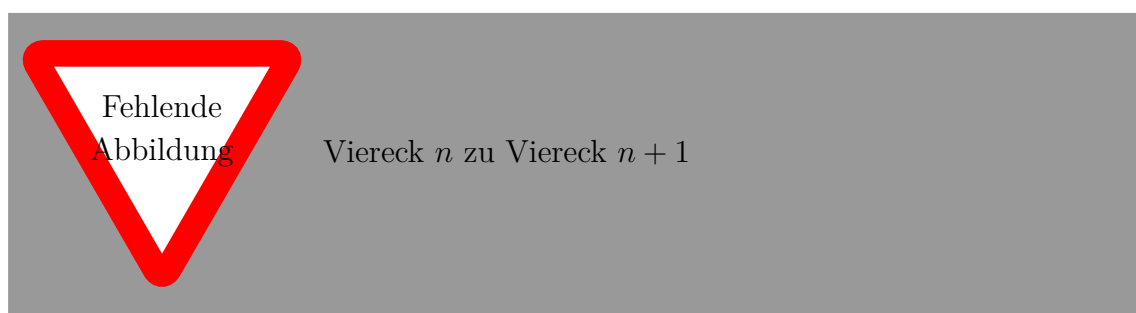
Wie ging es weiter (Invariante!)

Ganz genauso wollen wir nun auch mit unseren Münzvierecken vorgehen, um zu zeigen, dass wir immer eine ungerade Anzahl von Münzen benötigen:

Anfang: Für das kleinstmögliche Viereck (mit Seitenlänge 1) ist die Aussage klar: Es besteht aus genau einer Münze - und 1 ist eine ungerade Zahl.

Voraussetzung: Wir haben ein Viereck mit Seitenlänge n , für das wir bereits wissen, dass wir für es ungerade viele Münzen benötigen.

Schlussfolgerung: Wir wollen nun zeigen, dass auch ein Viereck mit Seitenlänge $n + 1$ ungerade viele Münzen benötigt. Dazu nehmen wir unser Viereck mit Seitenlänge n und machen daraus ein Viereck der Seitenlänge $n + 1$:



Was müssen wir dazu also machen? Wir fügen auf jeder Seite zusätzlich eine Reihe Münzen hinzu (*). Da wir nun auf jeder der vier Seiten gleich viele Münzen hinzufügen, ist die Zahl der neuen Münzen sicher durch 4 teilbar, also eine gerade Zahl.

Die Gesamtzahl der Münzen im $(n + 1)$ -Viereck ist also gleich der Zahl der Münzen im n -ten Viereck (ungerade!) plus der Zahl der neuen Münzen (gerade!). Da nun die

Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl wieder eine ungerade bildet ¹, ist also auch die Zahl der Münzen in unserem größeren Viereck erneut eine ungerade Zahl.

Damit haben wir nun bewiesen, dass alle nach dem beschriebenen Schema gelegten Vierecke eine ungerade Anzahl von Münzen benötigen. Warum?

Erklärung: Viereck kann gebaut werden, indem wir mit einem kleinen anfangen (ungerade Zahl Münzen nach Anfang), dann das Viereck um einen Schritt größer machen (weiterhin ungerade Zahl nach Schlussfolgerung). Damit gilt die Voraussetzung und wir können beim erneuten Größermachen wieder die Schlussfolgerung anwenden. Immer so weiter bis wir das gewünschte Viereck erreicht haben. Während dem ganzen schrittweisen Bauen blieb die Aussage ungerade Münzen immer wahr. Also ist sie es auch am Ende noch

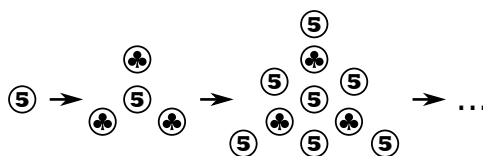
Aufgabe 2. *Wie viele neue Münzen?*

Im obigen Beweis wird an der Stelle (*) nur gesagt, dass die Zahl der neuen Münzen durch 4 teilbar ist. Kannst du sogar herausfinden, wie viele Münzen es genau sind (in Abhängigkeit von n)?

Anders gesagt: Wie viele zusätzliche Münzen benötigt man, um aus einen Viereck mit Seitenlänge n eines mit Seitenlänge $n + 1$ zu machen?

Aufgabe 3. *Zentrierte Dreieckszahl*

Natürlich kann man aus Münzen nicht nur Vierecke legen, sondern zum Beispiel auch Dreiecke:



Zeige, dass die zentrierte Dreieckszahl nie durch 3 teilbar ist (du kannst sogar noch genauer zeigen, dass sie immer um 1 größer ist als eine durch 3 teilbare Zahl).

2 Induktion mit Zahlen

Begriff Induktionsbeweis einführen, etwas formale Beschreibung

Formalisierung: Induktionsanfang + Induktionsvoraussetzung + Induktionsschritt

Formaler Induktionsbeweis für: Beweise für diese Formel: Zahl ist für alle n ungerade

¹Du bist skeptisch, ob diese Aussage wirklich für alle Zahlen gilt? Sehr gut! In der Mathematik sollte man nie irgendwelche Behauptungen einfach so glauben, sondern sie am besten selbst nachprüfen. Teste die Aussage am besten mal an ein paar Beispielen. Wenn du sie wirklich beweisen willst, dann schau dir noch einmal den zweiten Korrespondenzbrief (zu Teilbarkeit) an - darin findest du alle dafür notwendigen Werkzeuge.

Aufgabe 4. *Durch 3 teilbar?*

Dreieckszahl minus 1

Aufgabe 5. *Eine alte Bekannte*

Weiteres dazu: Beweise n -te Viereckszahl ist $2n^2 - 2n + 1$.

Aufgabe 6. *Induktion oder Nicht-Induktion?*

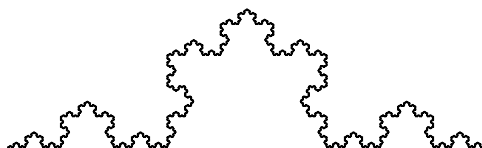
Beweise: Jede Viereckszahl ist Summe zweier aufeinander folgender Quadratzahlen (evtl. auch durch Bild?)

Schrittweise Josephus-Problem

3 Anwendung der Induktion

3.1 Geometrisches

Im letzten Korrespondenzbrief (zu Fraktalen) haben wir unter anderem die *Kochsche Schneeflocke* betrachtet:



Nur noch mal zur Erinnerung, wie man die Kochsche Schneeflocke (bzw. erstmal nur eine ihrer drei Seiten) erhält: Man beginnt mit einer einfachen Strecke. Diese Strecke teilt man in drei gleich lange Teile. Dann entfernt man das mittlere Stück und ersetzt es durch die zwei anderen Seiten eines gleichseitigen Dreiecks. Dadurch erhält man eine geometrische Figur, die aus vier Strecken besteht. Für den zweiten Schritt macht man nun mit jeder dieser vier Strecken das gleiche wie man es mit der ersten Strecke getan hat:



Und das geometrische Objekt, das man „nach unendlich vielen Schritten“ erhält, das nennt man dann Kochsche Schneeflocke.

Im letzten Korrespondenzbrief habe ich behauptet, dass die Länge der Linie, aus der die Kochsche Schneeflocke besteht *unendlich* lang ist. Der Beweis dazu war aber noch etwas ungenau: Wir haben nur gesehen, dass die Linie in den ersten beiden Schritten um jeweils mindestens 1 cm wächst - und dann einfach behauptet, dass das „offensichtlich“ auch für alle weiteren Schritte so sein wird.

Jetzt aber haben wir die Technik des Induktionsbeweises kennen gelernt - und diese eignet sich perfekt um genau solche Argumente mathematisch präzise zu machen.

Satz 1. *Beginnt man die Konstruktion einer Seite der Kochschen Schneeflocke mit einer Linie der Länge 3 cm, so ist die Linie nach dem n -ten Schritt mindestens $3+n$ cm lang.*

Bevor du weiter liest: Kannst du dir so ungefähr vorstellen, wie der Induktionsbeweis für diese Aussage aussehen könnte? Was wird wohl der Induktionsanfang sein, was die Induktionsvoraussetzung und was der Induktionsschluss?

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n :

IA ($n = 1$): Nach dem ersten Schritt besteht die Linie aus 4 Strecken, die jeweils einem Drittel der Anfangsstrecke entsprechen, also jeweils 1 cm lang sind. Die Gesamtlänge der Linie beträgt daher $4 \cdot 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm} = 3 + 1 \text{ cm}$.

IV: Wir wissen für festes n : Nach dem n -ten Schritt hat die Linie die Länge x cm, wobei gilt $x \geq 3 + n$.

IS ($n \rightarrow n + 1$): Im $(n + 1)$ -ten Schritt machen wir mit jeder Teilstrecke das gleiche, was wir im ersten Schritt mit der Anfangsstrecke gemacht haben. Dadurch wird also jede Strecke durch ein Liniensegment ersetzt, das $\frac{4}{3}$ -mal so lang ist. Dadurch wird natürlich auch die Gesamtlinie um den Faktor $\frac{4}{3}$ gestreckt. Nach dem Schritt gilt also für die Gesamtlänge:

$$\begin{aligned} \text{Länge} &= \frac{4}{3} \cdot x \text{ cm} \stackrel{\text{IV}}{\geq} \frac{4}{3} \cdot (3 + n) \text{ cm} = \left(4 + \frac{4}{3} \cdot n\right) \text{ cm} > (4 + n) \text{ cm} \\ &= (3 + (n + 1)) \text{ cm} \end{aligned}$$

Und das ist genau das, was wir zeigen wollten!

□

Aufgabe 7. Ein flächenloses Dreieck

Analog: Die Fläche des Sierpinski-Dreiecks ist 0

Beweise über Bäume? Evtl. als "echte" Bäume beschreiben und nur kurzer Hinweis auf Graphentheorie?

3.2 Korrektheitsbeweise

Induktion verwendet man auch für Korrektheitsbeweise von Computerprogrammen:

Beispiel: Quadratzahl x^2 berechnen als $x + x - 1 + x - 1 + x - 2 + \dots + 1$ - evtl. dargestellt als Flussdiagramm (rekursives Programm!)

Aufgabe?

Euklidischer Algorithmus? Verweis auf zweiten Brief

Bemerkung 2. Lauter Aussagen über natürliche Zahlen. Dies liegt daran, dass die natürlichen Zahlen selbst mit Hilfe von Induktion definiert sind. Verweis auf Peano-Axiome