



Mai-Mathetag 2023

Spiele und Gewinnstrategien

Ein einfaches Nim-Spiel:

Wir starten mit einem Haufen von Münzen. Die beiden Spielerinnen müssen nun abwechselnd eine, zwei, drei oder vier Münzen wegnehmen. Wer die letzte Münze wegnimmt, gewinnt.

Aufgabe 1.

Spieler das Spiel mit verschiedenen Anzahlen an Münzen zu Beginn. Wenn du zusätzliche Variation willst, kannst du auch eine andere Zahl von Münzen vereinbaren, die man in jedem Zug wegnehmen darf.

Aufgabe 2.

Gibt es für eine der beiden Spielerinnen (die Startspielerin oder die zweite Spielerin) eine *Gewinnstrategie*? Also eine Strategie, mit der sie immer gewinnen kann egal was die andere Spielerin macht?

Tipp: Überlege dir zunächst einmal, was passiert, wenn wir nur mit einer kleinen Zahl von Münzen starten. Also nur mit einer oder zwei oder fünf? Was passiert bei sechs, sieben oder zehn? Findest du ein Muster?

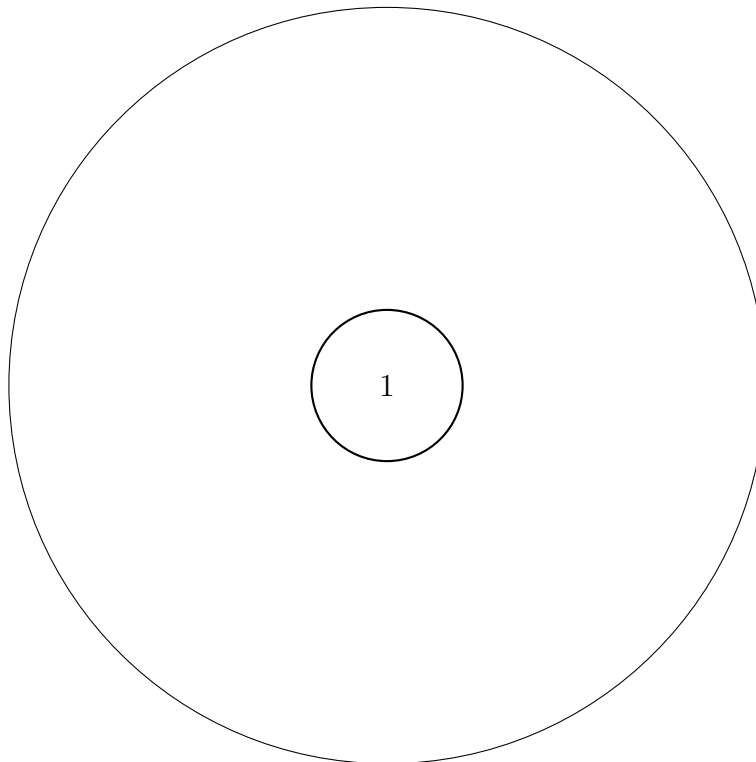
Zusatzfrage: Was ist, wenn die Spielerinnen in jedem Zug bis zu k (für irgendeine feste Zahl k) wegnehmen dürfen?

Münzen legen:

In der Mitte eines runden Tisches liegt eine Münze. Die beiden Spielerinnen legen nun immer abwechselnd je eine weitere Münze auf den Tisch. Die Münzen müssen dabei ganz auf dem Tisch liegen, dürfen sich also nicht mit anderen Münzen überlappen. Wer keine Münze mehr auf den Tisch legen kann, hat verloren.

Aufgabe 3.

Spieler das Spiel auf dem unten abgebildeten Kreis.

**Aufgabe 4.**

Hat eine der beiden Spielerinnen eine Gewinnstrategie? Wenn ja, wie sieht diese aus?

Zusatzfrage: Was passiert, wenn das Spiel mit einem leeren Tisch beginnt?

Plus und Mal:

Auf einem Blatt Papier stehen in einer Reihe die Zahlen von 1 bis 10. Die beiden Spielerinnen platzieren abwechselnd eines der Rechenzeichen $+$ und \times zwischen je zwei Zahlen. Sobald alle neun Lücken mit Rechenzeichen gefüllt sind, berechnet man das Ergebnis der Rechnung. Ist dieses eine ungerade Zahl, so gewinnt die Startspielerin – andernfalls gewinnt die zweite Spielerin.

Aufgabe 5.

Spiele das Spiel einige Male. Du kannst auch mit mehr oder weniger Zahlen starten.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 =

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 =

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 =

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 =

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 =

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 =

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 =

Aufgabe 6.

Hat eine der beiden Spielerinnen eine Gewinnstrategie? Wenn ja, wie sieht diese aus?

Nim mit mehreren Haufen:

Wir starten mit mehreren Haufen von Münzen. Die beiden Spielerinnen wählen nun abwechselnd einen der Haufen aus und entfernen eine beliebige Anzahl von Münzen aus diesem (aber mindestens eine!). Wieder gilt: Wer die letzte Münze wegnimmt, gewinnt.

Aufgabe 7.

Spiele das Spiel einige Male mit verschiedenen großen und verschiedenen vielen Haufen zu Beginn.

Aufgabe 8.

Finde möglichst viele Startsituationen, in denen du eine Gewinnstrategie für eine der beiden Spielerinnen angeben kannst.

Kannst du diese Frage vollständig für den Fall beantworten, dass wir das Spiel mit zwei Haufen starten?

Aufgabe 9.

Auch für mehr als zwei Haufen kann man eine allgemeine Gewinnstrategie beschreiben. Diese zu finden ist allerdings etwas schwieriger und benötigt einen Trick:

Schreibe die Zahl der Münzen in jedem Haufen als Binärzahl. Addiere die so erhaltenen Binärzahlen dann schriftlich aber ohne Übertrag. Nun muss man testen, ob diese „Summe“ nur aus geraden Zahlen besteht oder nicht.

Führe diesen Trick für die Startsituationen durch, die du in der vorherigen Aufgabe gefunden hast. Fällt dir dabei etwas auf? Kannst du deine Vermutung beweisen?

Ein EinspielerSpiel:

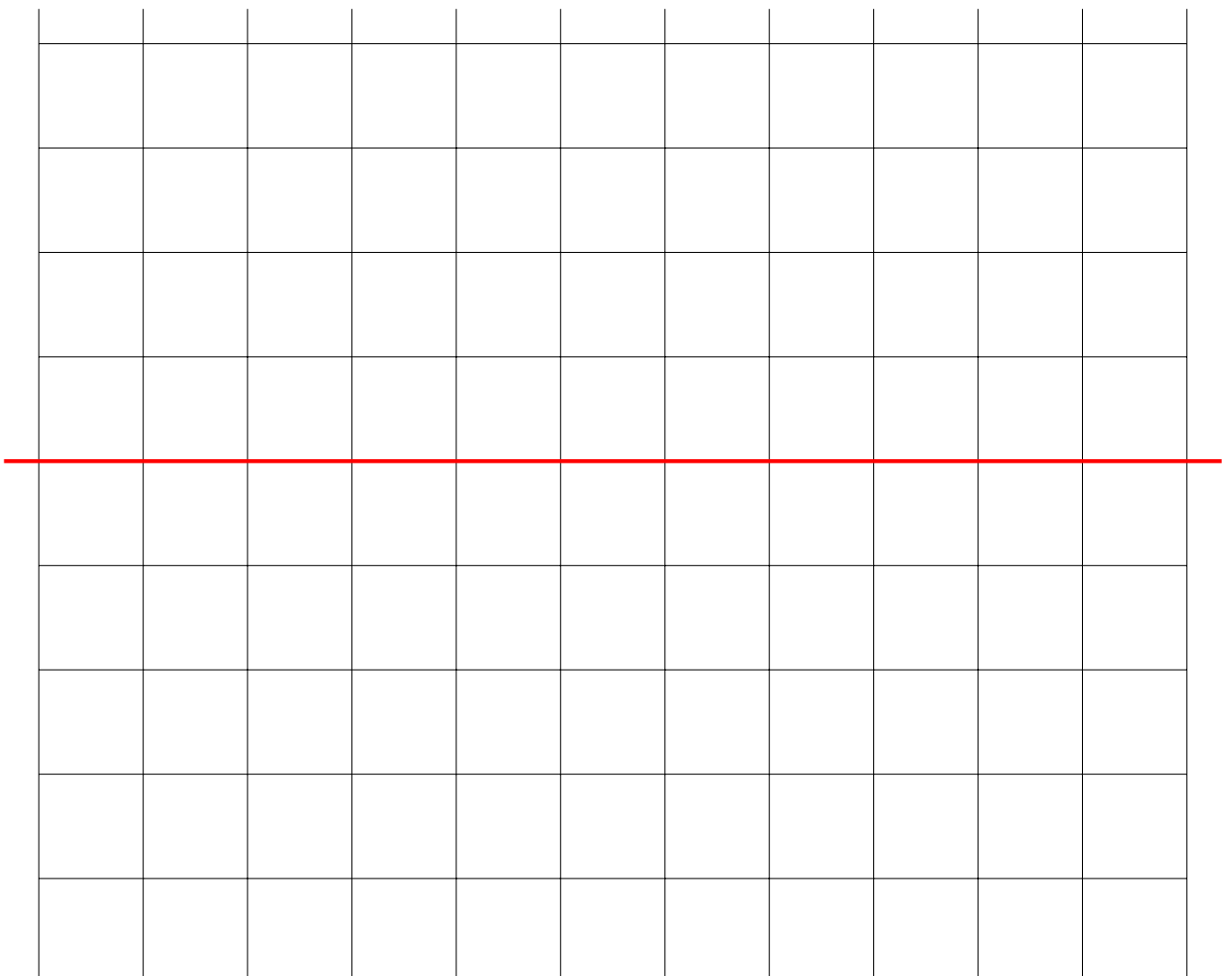
In diesem Spiel gibt es nur eine Spielerin: Diese startet mit einem karierten Feld mit einer waagrechten Linie in der Mitte. Sie darf nun zunächst beliebig viele Münzen in die Felder unterhalb der waagrechten Linie platzieren (aber immer nur eine Münze pro Feld)! Sobald sie all ihre Münzen platziert hat, beginnt das eigentliche Spiel: Eine Münze kann eine andere überspringen, wenn das entsprechende Feld hinter der zweiten Münze frei ist. Die übersprungene Münze wird danach vom Spielfeld entfernt. Die Spielerin kann diesen Spielzug nun so oft wiederholen bis kein weiterer mehr möglich ist.

Dein Ziel ist es mit wenigsten einer Münze so weit wie möglich oberhalb der waagrechten Linie zu kommen.

Aufgabe 10.

Spiele das Spiel. Wie hoch schaffst du es? Wie viele Münzen brauchst du dafür?

Tipp: Fange klein an! Versuche erstmal nur ein Feld hoch zu kommen. Dann zwei. Dann drei. Kannst du dieses System fortsetzen?



Aufgabe 11.

Schwere Bonusaufgabe: Tatsächlich ist es nicht möglich irgendein Feld der Höhe 5 zu erreichen – egal mit wie vielen Münzen man startet. Kannst du das beweisen?

Hinweis: Auf diesen Beweis alleine zu kommen, ist vermutlich zu schwierig (ich musste ihn jedenfalls auch nachlesen!). Du kannst dir aber bei mir ein paar Tipps abholen wie man zu diesem Beweis kommt. Alternativ kannst du dieses sehr schöne (englische) Video anschauen, in dem der Beweis erklärt wird: <https://youtu.be/BMPa0FA65Fk>

