

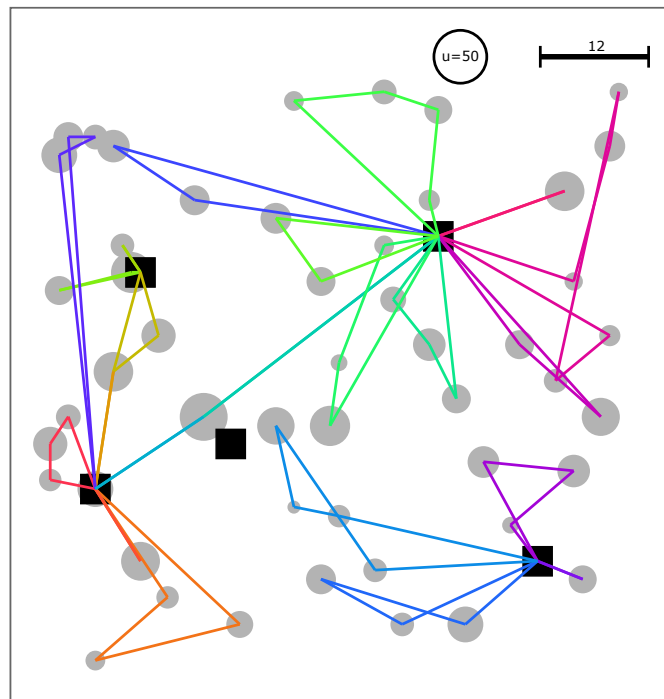
UNIVERSITÄT AUGSBURG

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Ausarbeitung

zum Programmierprojekt

# Capacitated Location Routing with Hard Facility Capacities



*von:*  
Lukas GRAF

*Betreut von:*  
Prof. Dr. Tobias HARKS

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Capacitated Location Routing (CLR)</b>	<b>3</b>
1.1	Problemdefinition . . . . .	3
1.2	Ein Approximationsalgorithmus für CLR . . . . .	4
1.3	Visualisierung des Algorithmus . . . . .	5
<b>2</b>	<b>CLR with Hard Facility Capacities (CLRhFC)</b>	<b>5</b>
2.1	Problemdefinition . . . . .	6
2.2	Lösungsansätze . . . . .	7
2.3	Algorithmus . . . . .	8
2.4	Analyse der Algorithmen . . . . .	9
2.5	Ausblick . . . . .	9
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

## „Abstract“

Zusammenfassung/Überblick der Arbeit

# 1 Capacitated Location Routing (CLR)

## 1.1 Problemdefinition

Eine Instanz des **Capacitated Location Routing Problems (CLR)** ist gegeben durch

- einen ungerichteten, zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$ ,
- eine Partition der Knoten in Kunden  $\mathcal{C}$  und Fabrikstandorte  $\mathcal{F}$ ,
- eine metrischen Kostenfunktion auf den Kanten  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,
- Eröffnungskosten für die Fabriken  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,
- Bedarfe der Kunden  $d : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
- und eine einheitliche Kapazität  $u > 0$  für die Fahrzeuge.

Zulässige Lösungen bestehen aus

- einer Teilmenge  $F \subseteq \mathcal{F}$  von eröffneten Fabriken
- und einer Menge von Touren  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$ ,

sodass gilt:

- Zu jeder Tour gibt es eine geöffnete Fabrik  $f \in F$ , an der diese startet und endet.
- Alle Touren zusammen erfüllen alle Bedarfe der Kunden.
- Keine der Touren übersteigt die Kapazität  $u$ .

Das Optimierungsziel ist es die Gesamtkosten für das Eröffnen der Fabriken und die gefahrenen Touren zu minimieren, also die Minimierung der Kostenfunktion <sup>1</sup>

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} c(T) + \sum_{f \in F} \phi(f)$$

*Beobachtung 1.1.* CLR ist NP-schwer, denn es beinhaltet beispielsweise metrisches TSP (betrachte Instanzen mit  $|\mathcal{F}| = 1$ ,  $d \equiv 1$  und  $u = |\mathcal{C}|$ ).

---

<sup>1</sup>Wir verwenden hier, dass eine Funktion  $\mathbb{R}$ -wertige Funktion  $c : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Menge  $M$  eine Funktion  $\tilde{c} : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R} : M \supseteq N \mapsto \sum_{x \in N} c(x)$  auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  induziert. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir diese Funktion dann ebenfalls mit  $c$ . Unter nochmaliger Anwendung dieser Konvention ließe sich die obige Kostenfunktion daher auch als  $c(\mathcal{T}) + \phi(F)$  schreiben.

## 1.2 Ein Approximationsalgorithmus für CLR

Der in [HKM13] beschriebene 4,38-approximative Algorithmus für CLR basiert im Wesentlichen auf den folgenden Schritten (schematisch dargestellt in Abb. 1):

Algorithmus beschreiben (auf schlechtere Approximationsgüte der Implementierung hinweisen!)

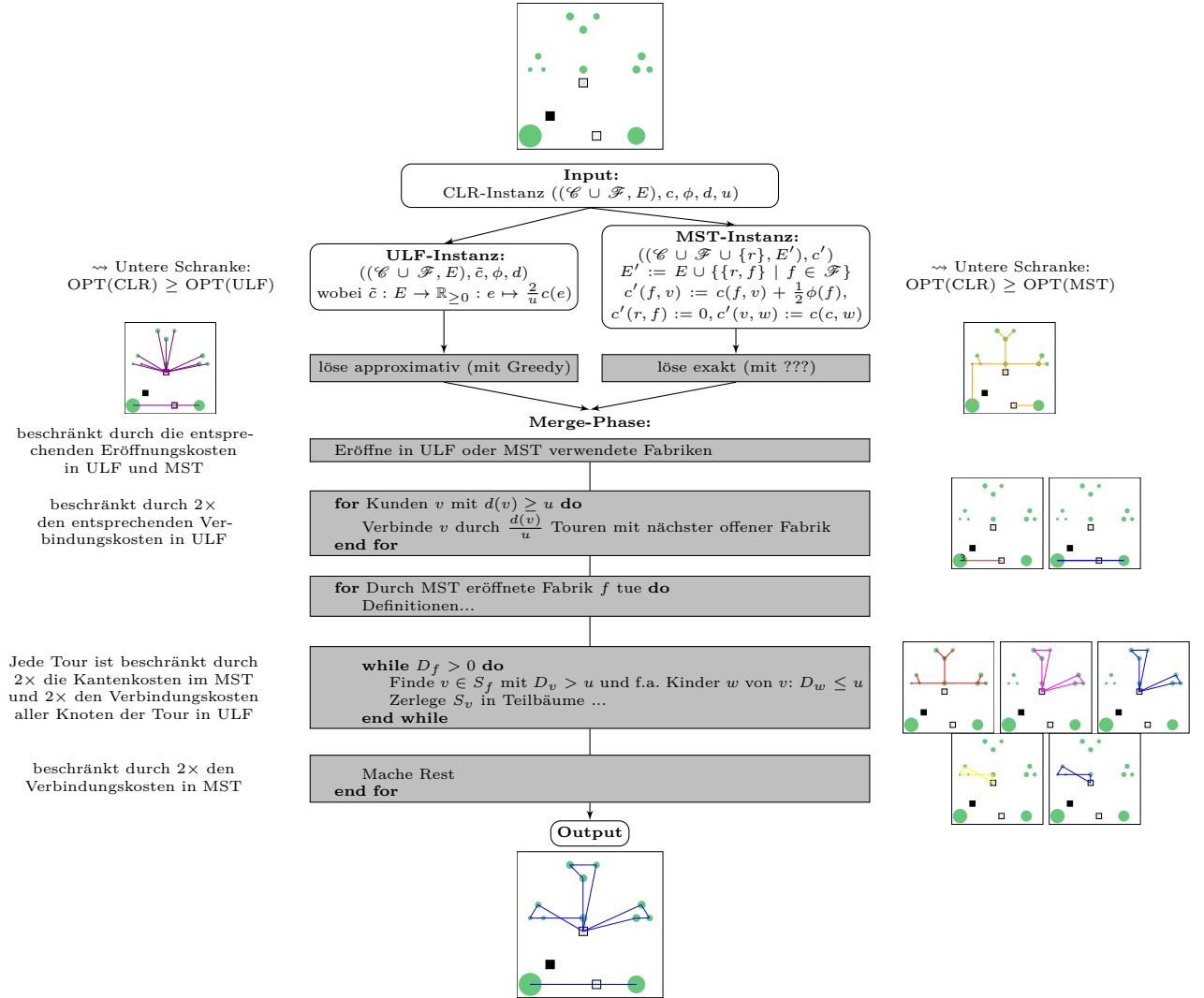


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Algorithmus für CLR

### 1.3 Visualisierung des Algorithmus

Im ersten Teil des Programmierprojektes ging es darum den Ablauf sowie das Ergebnis des oben beschriebenen Algorithmus zu visualisieren. Dazu wurde die existierende Implementierung des Algorithmus um eine Klasse `CLR_Drawing` erweitert. Diese wird zu Beginn des Algorithmus mit der zu lösenden Instanz initialisiert und kann dann an verschiedenen Stellen des Algorithmus aufgerufen werden, um einen Schnappschuss mit dem momentanen Stand zu erstellen.

Die Ausgabe besteht aus SVG-Dateien, die mit Hilfe der C++-Bibliothek `simple-svg` ([Tur10]) erstellt werden. Diese können dann beispielsweise von Hand übereinander gelegt werden, um ein bestimmtes Zwischenstadium des Algorithmus darzustellen, oder zu einer Animation zusammengesetzt werden, um den gesamten Ablauf des Algorithmus abzubilden.

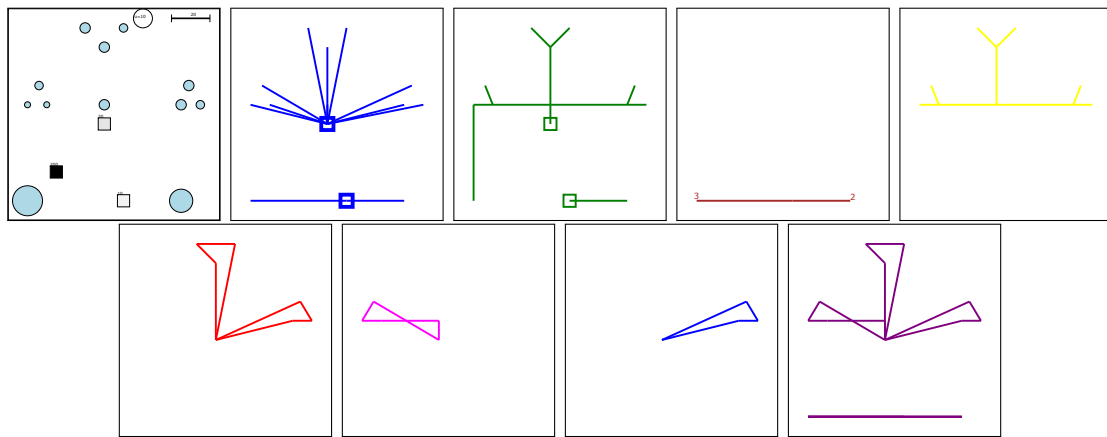


Abbildung 2: Ausgabe der Klasse `CLR_Drawing`: Die Instanz selbst, die Lösung der ULF-Instanz, die Lösung der MST-Instanz, Touren aus der Large-Demand-Phase, ein Relieve-Tree, eine daraus entstandene Tour, eine Remaining-Tour, eine einzelne Tour, alle Touren

Ein Beispiel für ersteres sind die Bilder in dieser Arbeit, als Beispiel für Letztes ...

Klasse detaillierter beschreiben?

Verweis  
auf  
Websei-  
te/Anhang/...?

## 2 CLR with Hard Facility Capacities (CLRhFC)

Eine Verallgemeinerung von CLR erhält man, indem man die Kapazitäten der Fabriken beschränkt. In diesem Kapitel geht es darum, wie der Approximationsalgorithmus für CLR so angepasst werden kann, dass er auch für das neue Problem zulässige Lösungen findet.

## 2.1 Problemdefinition

Eine Instanz von **Capacitated Location Routing with Hard Facility Capacities** (CLRhFC) ist gegeben durch:

- eine Instanz  $(G = (\mathcal{C} \cup \mathcal{F}, E), c, \phi, d, u)$  von CLR
- und zusätzlich Kapazitäten der Fabriken  $l : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Zulässige Lösungen sind Lösungen der zugrunde liegenden CLR-Instanz, die zudem die Kapazitätsschranken der Fabriken einhalten.

Das Optimierungsziel ist weiterhin die Minimierung der unveränderten Kostenfunktion der CLR-Instanz.

*Bemerkung 2.1.* Es gibt auch Varianten von CLR mit *weichen Fabrikkapazitäten*.

Näher erklären, Quellen (z.B. 10.1007/s00453-007-9032-7 ?)

CLRhFC kann auch wie folgt als Mixed Integer Program (MIP) beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiere} \\
 & \sum_{f \in \mathcal{F}} o_f \phi(f) + \sum_{T \in \mathcal{T}} y_T c(T) \\
 & \text{unter den Nebenbedingungen:} \\
 & \sum_{v \in T \setminus \mathcal{F}} x_{vT} \leq u y_T, \quad T \in \mathcal{T} \tag{1} \\
 & \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T \setminus \mathcal{F}} x_{vT} \leq o_f l(f), \quad f \in \mathcal{F} \tag{2} \\
 & \sum_{T \in \mathcal{T}, v \in T} x_{vT} \geq d(v), \quad v \in \mathcal{C} \tag{3} \\
 & \text{wobei} \\
 & o_f \in \{0, 1\}, \quad y_T \in \mathbb{N}_0, \quad x_{vT} \geq 0
 \end{aligned}$$

Dabei gibt es

- für jede Fabrik eine Variable  $o_f$ , welche bestimmt, ob die entsprechende Fabrik geöffnet (1) ist oder nicht (0),
- sowie für jede mögliche Tour  $T$  eine Variabel  $y_T$ , welche bestimmt, wie oft die entsprechende Tour genutzt wird,
- und für jeden auf  $T$  liegenden Kunden  $v$  eine Variable  $x_{vT}$ , welche besagt, wie viele Einheiten durch Tour  $T$  insgesamt an den Kunden  $v$  geliefert werden.

Die Nebenbedingungen bekommen damit die folgende Bedeutung:

- (1) Die Fahrzeugkapazität ( $u$ ) wird eingehalten. D.h. wird eine Tour  $y_T$ -mal genutzt, so können durch sie höchstens  $y_T u$  Einheiten an die auf ihr liegenden Kunden geliefert werden.
- (2) Die Fabrikkapazitäten ( $l$ ) werden eingehalten. Alle bei einer Fabrik  $f$  beginnenden Touren ( $\mathcal{T}_f$ ) können zusammen höchstens so viele Einheiten ausliefern, wie die Fabrikkapazität  $l(f)$  zulässt.
- (3) Die Bedarfe der Kunden ( $d$ ) werden erfüllt. Dies ist der Fall, wenn alle Touren, auf denen ein Kunde  $v$  liegt, zusammen mindestens so viel an ihn liefern, wie sein Bedarf  $d(v)$  ist.

*Beobachtung 2.2.* Die Menge aller denkbaren Touren  $\mathcal{T}$  wächst exponentiell in der Zahl der Kunden der CLRhFC-Instanz. Dementsprechend schnell steigt auch die Zahl der Variablen und der Nebenbedingungen an, sodass das Problem nur für sehr kleine Eingabeinstanzen exakt gelöst werden kann.

## 2.2 Lösungsansätze

Um überhaupt zulässige Lösungen für CLRhFC zu finden, muss der bestehende Algorithmus an wenigstens zwei Stellen angepasst werden: Beim Erstellen der Touren muss nun zusätzlich darauf geachtet werden, dass die Kapazität der ausgewählten Fabrik nicht überschritten wird. Und allgemein muss immer gewährleistet sein, dass überhaupt offene Fabriken mit freier Kapazität verfügbar sind.

Ersteres lässt sich sicherstellen, indem Touren gegebenenfalls noch weiter in Teiltouren aufgespalten werden, die jeweils klein genug sind, um von einer einzelnen offenen Fabrik vollständig beliefert zu werden.

Für Letzteres gibt es zwei naheliegende Ansätze: Entweder man passt die ULF- und/oder MST-Phase so an, dass bereits hier die Fabrikkapazitäten berücksichtigt und dementsprechend viele Fabriken geöffnet werden. Oder man erlaubt dem Algorithmus zusätzlich noch in der Large-Demand- bzw. Merge-Phase bei Bedarf weitere Fabriken zu eröffnen.

Der erste Ansatz ließe sich beispielsweise dadurch verwirklichen, dass statt einer ULF-Instanz eine Instanz des *nonuniform Capacitated Facility Location Problems* erstellt und (approximativ) gelöst wird. Ein entsprechender auf lokaler Suche basierender Approximationsalgorithmus wird in [PTW01] beschrieben. Alternativ (oder auch zusätzlich) könnte man versuchen beim Erstellen des Spannbaumes die Fabrikkapazitäten zu berücksichtigen. Dies hätte möglicherweise den Vorteil. Allerdings ist nicht klar, wie eine entsprechende Anpassung dieser Phase aussehen könnte.

Add Vorteil

Der zweite Ansatz - neue Fabriken bei Bedarf eröffnen - ist dagegen deutlich leichter zu implementieren und ist daher auch der, der in diesem Programmierprojekt weiterverfolgt wurde. Er hat allerdings den Nachteil, dass dadurch der Zusammenhang zwischen den Kosten der in ULF- und MST-Phase gefundenen Lösungen und denen der letztendlich bestimmten Lösung der CLRhFC-Instanz verloren gehen.

siehe Abschnitt 2.4

## 2.3 Der Algorithmus und seine Implementierung

Allgemeines zur Implementierungsphilosophie (Vererbung)

Beschreibung des angepassten Algorithmus

### 2.3.1 Toursplitting

### 2.3.2 Greedy Fabrikeröffnung

### 2.3.3 Fabrikeröffnung durch wiederholtes ULF/MST

### 2.3.4 Zulässigkeitsprüfung

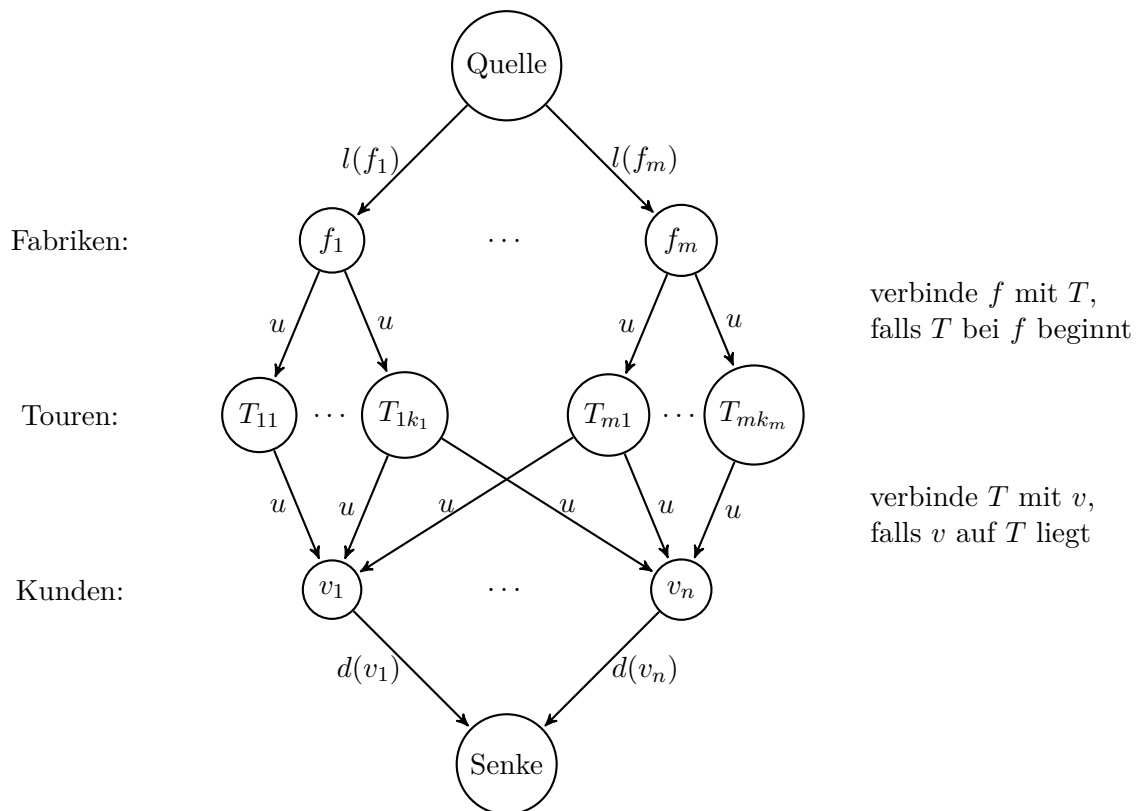


Abbildung 3: Die MaxFlow-Instanz

genauere Beschreibung



Beschreibe Edmonds-Karp-Implementierung

## 2.4 Analyse der Algorithmen

### 2.4.1 Theoretische Betrachtungen

In [HKM13] werden zwei untere Schranken für die Kosten der optimalen CLR-Lösung gezeigt: Die Kosten der optimalen Lösungen der im Algorithmus verwendeten ULF-Instanz sowie die der MST-Instanz. Da jede Lösung einer CLRhFC-Instanz insbesondere auch eine zulässige Lösung der zugrunde liegenden CLR-Instanz sind, gelten diese Schranken weiterhin.

Untere Schranken

Schlechte Beispiele

### 2.4.2 Heuristische Beurteilung

Schon für nur Kunden und Fabriken besteht das erzeugte MIP aus Variablen und Nebenbedingungen.

Um das MIP zumindest ein wenig kleiner zu halten, wird bei der Generierung des MIP nicht jede mögliche Tour betrachtet, sondern zu jeder Menge von Kunden und jeder Startfabrik eine jeweils optimale Tour. Zur Lösung des entsprechenden TSPs wird ein sehr einfacher Branch-and-Bound-Algorithmus verwendet.

7?

5?

Zahlen  
einfügen

## 2.5 Ausblick

Was könnte man verbessern? Welche Probleme gibt es dabei?

## Liste der noch zu erledigenden Punkte

Zusammenfassung/Überblick der Arbeit . . . . .	3
Algorithmus beschreiben (auf schlechtere Approximationsgüte der Implementierung hinweisen!) . . . . .	4
Verweis auf Webseite/Anhang/...? . . . . .	5
Klasse detaillierter beschreiben? . . . . .	5
Näher erklären, Quellen (z.B. 10.1007/s00453-007-9032-7 ?) . . . . .	6
Add Vorteil . . . . .	7
siehe Abschnitt 2.4 . . . . .	7
Allgemeines zur Implementierungsphilosophie (Vererbung) . . . . .	8
Beschreibung des angepassten Algorithmus . . . . .	8
genauere Beschreibung . . . . .	8
Beschreibe Edmonds-Karp-Implementierung . . . . .	9
Untere Schranken . . . . .	9
Schlechte Beispiele . . . . .	9
7? . . . . .	9
5? . . . . .	9
Zahlen einfügen . . . . .	9
Was könnte man verbessern? Welche Probleme gibt es dabei? . . . . .	9

## Literatur

- [HKM13] Tobias Harks, Felix G. König und Jannik Matuschke. „Approximation Algorithms for Capacitated Location Routing“. In: *Transportation Science* 47.1 (2013), S. 3–22. DOI: <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1120.0423>. URL: <http://researchers-sbe.unimaas.nl/tobiasharks/wp-content/uploads/sites/29/2014/02/HKM-TS-2013.pdf>.
- [PTW01] Martin Pal, Eva Tardos und Tom Wexler. „Facility Location with Non-uniform Hard Capacities“. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science*. 2001, S. 329–338. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.16.1003>.
- [Tur10] Mark Turney. *simple-svg*. Google Code Archive. simple-svg ist eine header-only C++ Library, mit deren Hilfe einfache svg-Graphiken erstellt werden können. 2010. URL: <https://code.google.com/archive/p/simple-svg/>.