

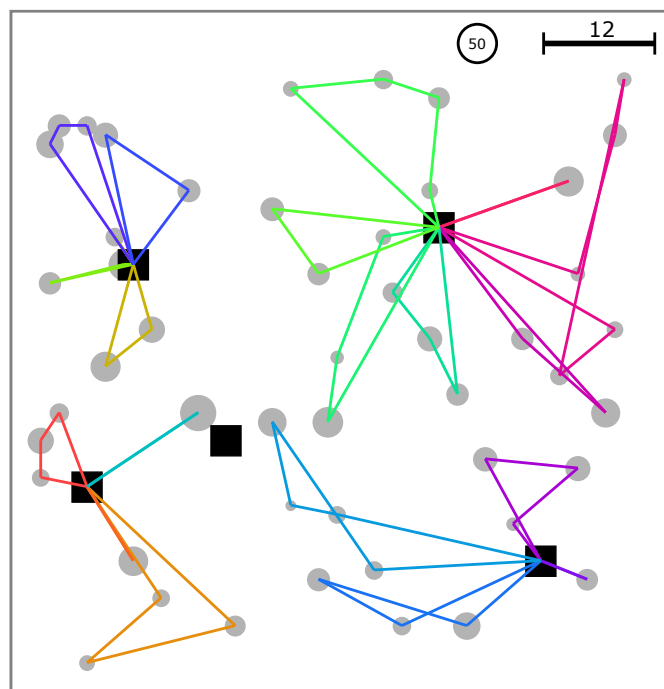
UNIVERSITÄT AUGSBURG

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Ausarbeitung

zum Programmierprojekt

Capacitated Location Routing with Hard Facility Capacities



von:
Lukas GRAF

Betreut von:
Prof. Dr. Tobias HARKS

Inhaltsverzeichnis

1	Capacitated Location Routing (CLR)	3
1.1	Problemdefinition	3
1.2	Ein Approximationsalgorithmus für CLR	4
1.3	Visualisierung des Algorithmus	6
2	CLR with Hard Facility Capacities (CLRhFC)	7
2.1	Problemdefinition	7
2.2	Lösungsansätze	9
2.3	Der Algorithmus und seine Implementierung	9
2.3.1	Toursplitting	10
2.3.2	Greedy Fabrikeröffnung	11
2.3.3	Fabrikeröffnung durch wiederholte UFL/MST-Phasen	12
2.3.4	Zulässigkeitsprüfung	13
2.4	Analyse der Algorithmen	14
2.4.1	Theoretische Betrachtungen	15
2.4.2	Heuristische Beurteilung	17
	Literatur	22

Einleitung

Gegeben eine Menge von Kunden mit unterschiedlich großen Bedarfen nach einem einheitlichen Gut, eine Menge möglicher Fabrikstandorte mit jeweils verschiedenen Eröffnungskosten, eine unbegrenzte Anzahl von Lieferfahrzeugen mit einheitlicher Kapazität sowie eine metrische Abstandsfunktion auf der Gesamtmenge. Welche Standorte sollte man eröffnen und wie sollte man die Fahrzeuge einsetzen um alle Bedarfe aller Kunden zu erfüllen und dabei die Summe der Kosten für Fabrikeröffnungen und gefahrene Strecken zu minimieren?

Diese Fragestellung beschreibt das *Capacitated Location Routing*-Problem (CLR), ein NP-schweres Optimierungsproblem.

Da es also vermutlich keinen polynomiellen exakten Algorithmus hierfür gibt, interessiert man sich dafür polynomielle Approximationsalgorithmen hierfür zu finden. Einen solchen 4,38-approximativen Algorithmus beschrieben und implementierten Harks, König und Matuschke in [HKM13].

Aufbauend auf diesem existierenden Programm wurden im Rahmen des hier beschriebenen Programmierprojekts zwei Ergänzungen zu diesem Algorithmus bzw. dessen Implementierung vorgenommen: Es wurde die Möglichkeit hinzugefügt das Ergebnis sowie verschiedene Zwischenschritte des Algorithmus graphisch auszugeben. Und der Algorithmus selbst wurde um zwei Varianten ergänzt, die nun zusätzlich mit Kapazitätsbeschränkungen der Fabriken umgehen können, und weiterhin zulässige Lösungen finden (allerdings ohne garantierte Approximationsgüte).

In der folgenden Ausarbeitung wird zunächst kurz der bestehende Algorithmus für CLR skizziert und dann die Implementierung der beiden neuen Bestandteile beschrieben. Schließlich wird der erweiterte Algorithmus auf einigen Instanzen getestet.

1 Capacitated Location Routing (CLR)

1.1 Problemdefinition

Eine Instanz des **Capacitated Location Routing Problems (CLR)** ist gegeben durch

- einen ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$,
- eine Partition der Knoten in Kunden \mathcal{C} und Fabrikstandorte \mathcal{F} ,
- eine metrischen Kostenfunktion auf den Kanten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- Eröffnungskosten für die Fabriken $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- Bedarfe der Kunden $d : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
- und eine einheitliche Kapazität $u > 0$ für die Fahrzeuge.

Zulässige Lösungen bestehen aus

- einer Teilmenge $F \subseteq \mathcal{F}$ von eröffneten Fabriken
- und einer Menge von Touren $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$,

sodass gilt:

- Zu jeder Tour gibt es eine geöffnete Fabrik $f \in F$, an der diese startet und endet.
- Alle Touren zusammen erfüllen alle Bedarfe der Kunden.
- Keine der Touren übersteigt die Kapazität u .

Das Optimierungsziel ist es die Gesamtkosten für das Eröffnen der Fabriken und die gefahrenen Touren zu minimieren, also die Minimierung der Kostenfunktion ¹

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} c(T) + \sum_{f \in F} \phi(f)$$

Beobachtung 1.1. CLR ist NP-schwer, denn es beinhaltet beispielsweise metrisches TSP (betrachte Instanzen mit $|\mathcal{F}| = 1$, $d \equiv 1$ und $u = |\mathcal{C}|$).

Bemerkung 1.2. Gilt $d \equiv 1$ und $u = 1$, so erhält man eine Instanz des (metrischen) *Uncapacitated Facility Location Problems* (UFL). Statt Touren von den geöffneten Fabriken zu den Kunden zu finden, genügt es hier offensichtlich eine Zuordnung von Kunden zu Fabriken zu bestimmen. Für dieses Problem sind eine ganze Reihe von Approximationsalgorithmen bekannt (vergleiche z.B. [Shm00]), unter anderem erweist sich ein einfacher Greedy-Ansatz bereits als 1,861-approximativ (siehe [Jai+02]).

1.2 Ein Approximationsalgorithmus für CLR

Der in [HKM13] beschriebene 4,38-approximative² Algorithmus für CLR basiert im Wesentlichen auf den folgenden Schritten (schematisch dargestellt in Abb. 1):

UFL-Phase: Erstelle eine UFL-Instanz mit den gleichen Fabriken und Kunden, aber mit um $2/u$ skalierten Kosten. Löse diese Instanz approximativ und eröffne alle hier geöffneten Fabriken auch in der CLR-Instanz. Es zeigt sich, dass die Kosten einer optimalen Lösung der UFL-Instanz eine untere Schranke für die optimale Lösung der CLR-Instanz bildet.

MST-Phase: Ergänze den Graphen der CLR-Instanz um einen zusätzlichen Knoten r mit kostenlosen Kanten zu allen Fabriken. Erhöhe ferner alle Kanten zwischen Fabriken

¹Wir verwenden hier, dass eine Funktion \mathbb{R} -wertige Funktion $c : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Menge M eine Funktion $\tilde{c} : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R} : M \supseteq N \mapsto \sum_{x \in N} c(x)$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ induziert. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir diese Funktion dann ebenfalls mit c . Unter nochmaliger Anwendung dieser Konvention ließe sich die obige Kostenfunktion daher auch als $c(\mathcal{T}) + \phi(F)$ schreiben.

²Die diesem Programmierprojekt zugrunde liegende Implementierung weist allerdings nur eine Approximationsgarantie von 5,722 auf, da zur approximativen Lösung der UFL-Instanz ein leichter zu implementierender Greedy-Algorithmus verwendet wurde, anstatt eines anderen Verfahrens mit besserer Approximationsgarantie.

und Kunden um die halben Eröffnungskosten der jeweiligen Fabrik. Dann finde einen minimalen Spannbaum B in diesem Graphen und öffne in der CLR-Instanz zusätzlich alle Fabriken, die in B wenigstens einen Kunden als Nachbarn haben. Die Kosten eines solchen Spannbaumes sind erneut eine untere Schranke für die Kosten einer optimalen Lösung der CLR-Instanz.

Large Demand-Phase: Alle Kunden mit Bedarf von mindestens u werden durch $\lceil d/u \rceil$ Touren mit der jeweils nächsten Fabrik verbunden. Die hierfür anfallenden Anbindungskosten sind höchstens zweimal die entsprechenden Kosten aus der UFL-Phase.

Merge-Phase Betrachte B aus der MST-Phase als Baum mit Wurzel r . Solange dies möglich ist, finde darin einen Teilbaum (mit Wurzel v), der einen Gesamtbedarf von mehr als u hat, aber dessen nächstkleinere Teilbäume (beginnend bei den Kindern von v) einen Bedarf von höchstens u haben. Ein solcher Baum wird als *Relieve-Tree* bezeichnet.

Fasse diese kleineren Teilbäume und den „Baum“ $\{v\}$ so zusammen, dass jede Menge einen Bedarf zwischen $\frac{u}{2}$ und u hat (die letzte ggfs. weniger). Wandle jede der großen Mengen in eine Tour um (durch Verdoppeln der Kanten im entsprechenden Teilbaum und nachfolgendem Abkürzen bei doppelt besuchten Kunden) und verbinde sie mit der nächstliegenden offenen Fabrik. Die Verbindungskosten hierfür sind beschränkt durch das Doppelte der Kosten im Spannbaum B und den entsprechenden Verbindungskosten aus der UFL-Phase. Die Kunden aus der kleinen Menge bleiben vorerst unversorgt und werden beim nächsten Relieve-Tree neu berücksichtigt.

Ist der verbleibende Gesamtbedarf unter einer Fabrik schließlich kleiner oder gleich u , so werden alle im entsprechenden Teilbaum verbliebenen Kunden zu einer Tour (*Remaining-Tour*) zusammengefasst und mit der nächstliegenden offenen Fabrik verbunden. Die Verbindungskosten hierfür sind erneut durch das Doppelte der entsprechenden Kosten aus dem Spannbaum begrenzt.

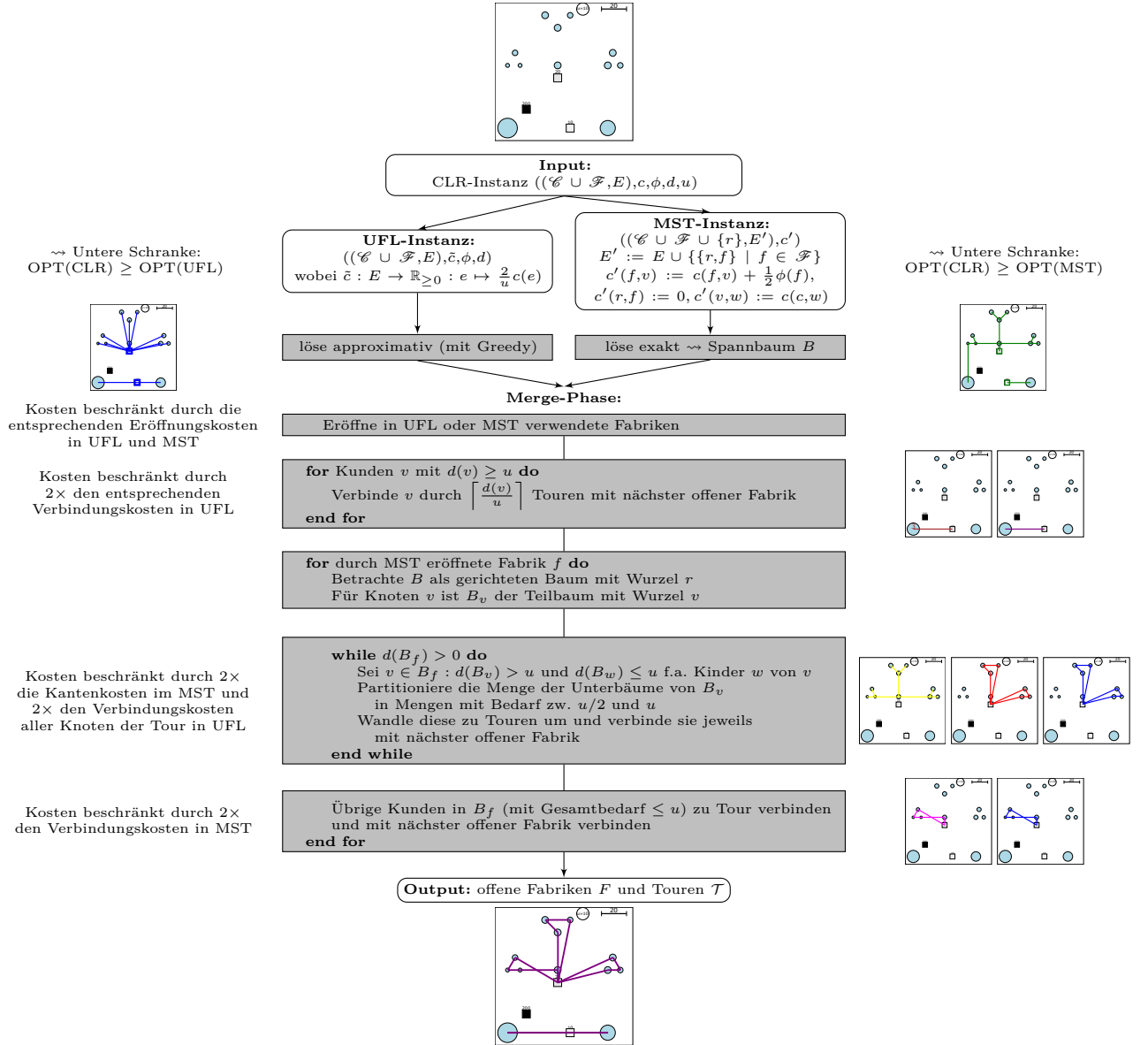


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Algorithmus für CLR

1.3 Visualisierung des Algorithmus

Im ersten Teil des Programmierprojektes ging es darum den Ablauf sowie das Ergebnis des oben beschriebenen Algorithmus zu visualisieren. Dazu wurde die existierende Implementierung des Algorithmus um eine Klasse `CLR_Drawing` erweitert. Diese wird zu Beginn des Algorithmus mit der zu lösenden Instanz initialisiert und kann dann an

verschiedenen Stellen des Algorithmus aufgerufen werden, um einen Schnappschuss mit dem momentanen Stand zu erstellen.

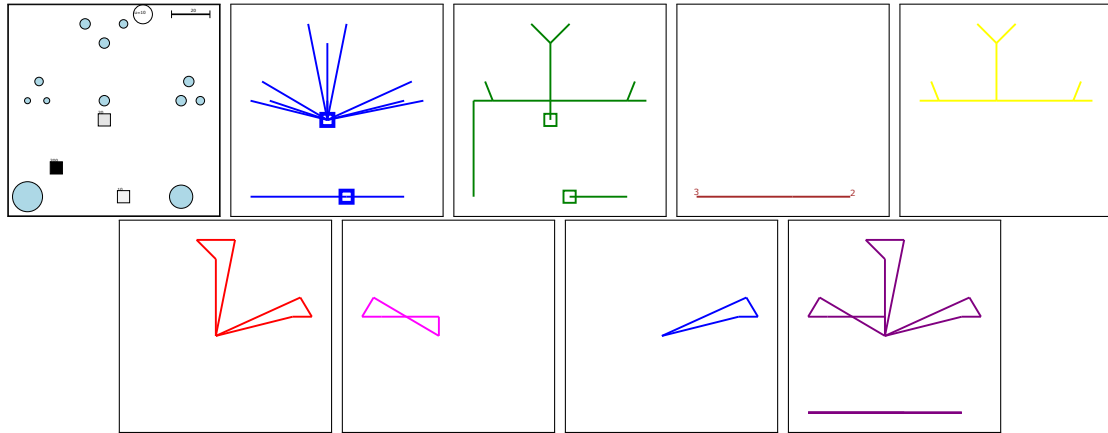


Abbildung 2: Ausgaben der Klasse *CLR_Drawing*: Die Instanz selbst, die Lösung der UFL-Instanz, die Lösung der MST-Instanz, Touren aus der Large-Demand-Phase, ein Relieve-Tree, eine daraus entstandene Tour, eine Remaining-Tour, eine einzelne Tour, alle Touren

Die Ausgabe besteht aus SVG-Dateien, die mit Hilfe der C++-Bibliothek simple-svg ([Tur10]) erstellt werden. Diese können dann beispielsweise von Hand übereinander gelegt werden, um ein bestimmtes Zwischenstadium des Algorithmus darzustellen, oder zu einer Animation zusammengesetzt werden, um den gesamten Ablauf des Algorithmus abzubilden.

Ein Beispiel für ersteres sind die Bilder in dieser Arbeit, als Beispiel für Letztes ...

Klasse detaillierter beschreiben?

Verweis auf eigenständiges Programm zum Einlesen von Touren

Verweis auf Webseite/Anhang/...?

2 CLR with Hard Facility Capacities (CLRhFC)

Eine Verallgemeinerung von CLR erhält man, indem man die Kapazitäten der Fabriken beschränkt. In diesem Kapitel geht es darum, wie der Approximationsalgorithmus für CLR so angepasst werden kann, dass er auch für das neue Problem zulässige Lösungen findet.

2.1 Problemdefinition

Eine Instanz von **Capacitated Location Routing with Hard Facility Capacities (CLRhFC)** ist gegeben durch:

- eine Instanz $(G = (\mathcal{C} \cup \mathcal{F}, E), c, \phi, d, u)$ von CLR
- und zusätzlich Kapazitäten der Fabriken $l : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Zulässige Lösungen sind Lösungen der zugrunde liegenden CLR-Instanz, die zudem die Kapazitätsschranken der Fabriken einhalten.

Das Optimierungsziel ist weiterhin die Minimierung der unveränderten Kostenfunktion der CLR-Instanz.

Bemerkung 2.1. Im Gegensatz zu den hier verwendeten *harten Fabrikkapazitäten* gibt es auch Varianten von CLR mit *weichen Fabrikkapazitäten*. Dies bedeutet, dass die Fabriken zwar beschränkte Kapazität haben, jedoch mehrfach eröffnet werden dürfen, wodurch die Kapazität (aber natürlich auch die Eröffnungskosten) entsprechend vervielfacht werden (siehe z.B. [CC09]).

CLRhFC kann auch als Mixed Integer Program (MIP) beschrieben werden. Dabei gibt es

- für jede Fabrik eine Variable o_f , welche bestimmt, ob die entsprechende Fabrik geöffnet (1) ist oder nicht (0),
- sowie für jede mögliche Tour T eine Variabel y_T , welche bestimmt, wie oft die entsprechende Tour genutzt wird,
- und für jeden auf T liegenden Kunden v eine Variable x_{vT} , welche besagt, wie viele Einheiten durch Tour T insgesamt an den Kunden v geliefert werden.

Das MIP sieht dann wie folgt aus:

<p style="text-align: center;">minimiere</p> $\sum_{f \in \mathcal{F}} o_f \phi(f) + \sum_{T \in \mathcal{T}} y_T c(T)$ <p style="text-align: center;">unter den Nebenbedingungen:</p> <p>(1) $\sum_{v \in T \setminus \mathcal{F}} x_{vT} \leq u y_T, \quad T \in \mathcal{T}$</p> <p>(2) $\sum_{T \in \mathcal{T}_f} \sum_{v \in T \setminus \mathcal{F}} x_{vT} \leq o_f l(f), \quad f \in \mathcal{F}$</p> <p>(3) $\sum_{T \in \mathcal{T}, v \in T} x_{vT} \geq d(v), \quad v \in \mathcal{C}$</p> <p style="text-align: center;">wobei</p> $o_f \in \{0, 1\}, \quad y_T \in \mathbb{N}_0, \quad x_{vT} \geq 0$	<p>Die (zu minimierenden) Gesamtkosten ergeben sich als Summe der Eröffnungskosten $\phi(f)$ und der Tourkosten $c(T)$.</p> <p>(1) Die Fahrzeugkapazität u wird eingehalten. D.h. wird eine Tour y_T-mal genutzt, so können durch sie höchstens $y_T u$ Einheiten an die auf ihr liegenden Kunden geliefert werden.</p> <p>(2) Die Fabrikkapazitäten l werden eingehalten. Alle bei eine Fabrik f beginnenden Touren (\mathcal{T}_f) können zusammen höchstens so viele Einheiten ausliefern, wie die Fabrikkapazität $l(f)$ zulässt.</p> <p>(3) Die Bedarfe der Kunden d werden erfüllt. Dies ist der Fall, wenn alle Touren, auf denen ein Kunde v liegt, zusammen mindestens so viel an ihn liefern, wie sein Bedarf $d(v)$ ist.</p>
---	---

Beobachtung 2.2. Die Menge aller denkbaren Touren \mathcal{T} wächst exponentiell in der Zahl der Kunden der CLRhFC-Instanz. Dementsprechend schnell steigt auch die Zahl

der Variablen und der Nebenbedingungen an, sodass das Problem nur für sehr kleine Eingabeinstanzen exakt gelöst werden kann.

2.2 Lösungsansätze

Um überhaupt zulässige Lösungen für CLRhFC zu finden, muss der bestehende Algorithmus an wenigstens zwei Stellen angepasst werden: Beim Erstellen der Touren muss nun zusätzlich darauf geachtet werden, dass die Kapazität der ausgewählten Fabrik nicht überschritten wird. Und allgemein muss immer gewährleistet sein, dass überhaupt offene Fabriken mit freier Kapazität verfügbar sind.

Ersteres lässt sich sicherstellen, indem Touren gegebenenfalls noch weiter in Teiltouren aufgespalten werden, die jeweils klein genug sind, um von einer einzelnen offenen Fabrik vollständig beliefert zu werden.

Für Letzteres gibt es zwei naheliegende Ansätze: Entweder man passt die UFL- und/oder MST-Phase so an, dass bereits hier die Fabrikkapazitäten berücksichtigt und dementsprechend viele Fabriken geöffnet werden. Oder man erlaubt dem Algorithmus zusätzlich noch in der Large-Demand- bzw. Merge-Phase bei Bedarf weitere Fabriken zu eröffnen.

Der erste Ansatz ließe sich beispielsweise dadurch verwirklichen, dass statt einer UFL-Instanz eine Instanz des *nonuniform Capacitated Facility Location Problems* erstellt und (approximativ) gelöst wird. Ein entsprechender auf lokaler Suche basierender Approximationsalgorithmus wird in [PTW01] beschrieben. Alternativ (oder auch zusätzlich) könnte man versuchen beim Erstellen des Spannbaumes die Fabrikkapazitäten zu berücksichtigen. Allerdings ist nicht klar, wie eine entsprechende Anpassung dieser Phase aussehen könnte.

Der zweite Ansatz - neue Fabriken bei Bedarf eröffnen - ist dagegen deutlich leichter zu implementieren und ist daher auch der, der in diesem Programmierprojekt weiterverfolgt wurde. Er hat allerdings den Nachteil, dass dadurch der Zusammenhang zwischen den Kosten der in UFL- und MST-Phase gefundenen Lösungen und denen der letztendlich bestimmten Lösung der CLRhFC-Instanz verloren gehen (siehe dazu Abschnitt 2.4.1).

2.3 Der Algorithmus und seine Implementierung

Die Implementierung des angepassten Algorithmus erfolgt im Wesentlichen durch eine von der originalen `Solver`-Klasse abgeleiteten Klasse `SolverCap` (bzw. eine wiederum davon abgeleitete Klasse `SolverCapIt`). Dadurch kann die `main`-Funktion weitgehend gleich bleiben und es muss lediglich zu Beginn entschieden werden, welche Variante der `Solver`-Klasse (und damit welche Variante des Algorithmus) verwendet werden soll. Innerhalb der abgeleiteten `Solver`-Klassen werden dann die anzupassenden Funktionen überschrieben, während die restlichen Funktionen unverändert bleiben.

```
Solver* s;  
if(inst.is_depot_cap_relevant()) {
```

```

        if(itCapAlgorithm) s = new SolverCapIt(inst, tspPostOpt);
        else               s = new SolverCap(inst, tspPostOpt);
    } else                 s = new Solver(inst, tspPostOpt);
    ...
    Solution sol = s->solve();

```

Listing 1: *Der weitere Ablauf des Programms kann unabhängig von der verwendeten Version des Solvers beschrieben werden*

Zusätzlich zur neuen `Solver`-Klasse musste außerdem in der Klasse `Solution` eine neue Funktion `isFeasible2()` zur Zulässigkeitsprüfung erstellt werden. Denn um die Zulässigkeit von Lösungen der CLR-Instanz schnell prüfen zu können, wurden einige Eigenschaften dieser Lösungen genutzt, die bei Lösungen einer CLRhFC nicht mehr garantiert werden können - nämlich die *single assignment*-Eigenschaft (jeder Kunde wird von genau einer Fabrik beliefert) und die *single tour*-Eigenschaft für Kunden mit kleinem Bedarf. Außerdem sollte bei CLRhFC-Lösungen noch geprüft werden, ob auch die Fabrikkapazitäten eingehalten werden.

In der folgenden Beschreibung bezeichnen $\tilde{d} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\tilde{l} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ den zum jeweiligen Zeitpunkt verbleibenden Bedarf der Kunden bzw. die verbleibende Kapazität der Fabriken.

2.3.1 Toursplitting

Wann immer im ursprünglichen Algorithmus während der Merge-Phase eine neue Tour erstellt wird (aus einem Relieve-Tree in der Funktion `relieveSubtree` oder als Remaining-Tour in der Funktion `mergePhase`), so wird jetzt zusätzlich noch eine neue Funktion `splitTour` aufgerufen. Diese zerteilt die übergebene Tour in kleinere Teiltouren (entsprechend den verfügbaren Fabrikkapazitäten) und verbindet sie mit passenden Fabriken. Im Falle der Relieve-Trees wird dafür die eigene Partitionierung in Touren mit Bedarf zwischen $u/2$ und u weggelassen und dafür die Fahrzeugkapazitäten in der Zerteilung in Teiltouren mitberücksichtigt.

Sei dazu T die zu zerlegende Tour (oBdA bestehe diese nur aus Kunden mit verbleibendem Bedarf > 0). Unter den offenen Fabriken mit noch verfügbarer Kapazität wählen wir nun die „am besten“ zu den Kunden in T passende Fabrik f aus. Diese Fabrik wird dann mit dem ihr am nächsten liegenden Kunden aus T verbunden und von diesem aus T soweit durchlaufen wie die Kapazität von f (und die Fahrzeugkapazität) reicht. Die dadurch vollständig versorgten Kunden werden nun aus T entfernt, beim letzten Kunden der Tour wird der Bedarf entsprechend der gelieferten Menge reduziert und die Kapazität von f wird verringert. Dann suchen wir erneut eine „beste Fabrik“ für die in T verbliebenen Kunden (sofern T noch nicht leer ist).

Zu klären bleibt damit noch, wie die „beste Fabrik“ zu einer gegebenen Menge M an Kunden bestimmt wird. Dies geschieht in der Funktion `findBestFacility`. Dazu wird

zunächst der momentane Gesamtbedarf der übergebenen Menge $\tilde{d}(M)$ bestimmt und dann jeder offenen Fabrik f wie folgt ein Wert zugeordnet:

$$\text{Wert}(f) := \frac{\min\{\tilde{l}(f), \tilde{d}(M)\}}{2c(f, M)}$$

Dabei bezeichnet $c(f, M)$ den Abstand von f zu dem nächstliegenden Kunden aus M . Der Wert einer Fabrik ist also umso höher je mehr nutzbare Kapazität sie hat und je näher an den zu versorgenden Kunden sie liegt (bzw. zumindest einem von diesen). Die Fabrik mit dem höchsten Wert wird schlussendlich ausgewählt.

Hat keine der offenen Fabriken mehr übrige Kapazität, so entscheidet die Funktion `findBestFacility` darüber, welche Fabrik nun zusätzlich eröffnet werden soll. Für diese Entscheidung wurden zwei verschiedene Ansätze implementiert, die in den folgenden beiden Abschnitten beschrieben werden.

2.3.2 Greedy Fabrikeröffnung

In der Klasse `SolverCap` wird bei der Auswahl der neu zu eröffnenden Fabrik eine Art Greedy-Ansatz verfolgt: Es wird jeder geschlossenen Fabrik f ein Wert

$$\text{Wert}(f) := \frac{\min\{\tilde{l}(f), \tilde{d}(M)\}}{2c(f, M) + \phi(f)}$$

zu gewiesen und dann die Fabrik mit dem höchsten Wert zusätzlich eröffnet.

```

class SolverCap: public Solver {
public:
    SolverCap(const Instance& in, bool tsp) : Solver(in, false) {
        demandsRemaining = vector<double> (n);
        for(int i=0; i<n; i++)
            demandsRemaining.at(i) = inst.demand(i);
        facCapacitiesRemaining = vector<double> (m);
        for(int i=0; i<m; i++)
            facCapacitiesRemaining.at(i) = inst.facCapacity(i+n);
    };

protected:
    vector<double> demandsRemaining;
    vector<double> facCapacitiesRemaining;

    virtual bool mergePhase(const Tree& tree);
    virtual double relieveSubtree(const Tree& t, int root,
        const vector<int>& children ,
        vector<pair<int, double> >& stDemands);
    virtual bool largeDemandPhase();
    virtual double handleSubtree(const Tree& t, int root);

```

```

list<list<int> > splitTour(list<int> tour);
int closestOpenFacility(int client);
virtual int findBestFacility(list<int> subset);
int findClosestClient(int fac, list<int> subset);

double demandRemaining(int client) {
    return demandsRemaining.at(client);};
bool reduceRemainingDemand(int client, double reduction);

double facCapacityRemaining(int facility) {
    return facCapacitiesRemaining.at(facility-n);};
bool reduceRemainingFacCapacity (int facility, double reduction);
};

```

Listing 2: *Die Klasse SolverCap*

2.3.3 Fabrikeröffnung durch wiederholte UFL/MST-Phasen

In der Klasse `SolverCapIt` werden die neu zu eröffnenden Fabriken dagegen mit Hilfe einer neuen UFL- und MST-Phase bestimmt. Dazu wird eine temporäre CLR-Instanz erstellt, welche nur die Kunden mit noch zu erfüllendem Bedarf und die (derzeit geschlossenen) Fabriken mit übriger Kapazität enthält. Auf dieser Instanz wird dann die übliche UFL- und MST-Phase durchgeführt und alle dabei geöffneten Fabriken werden nun auch in der ursprünglichen CLRhFC-Instanz zusätzlich geöffnet.

Nachdem dies geschehen ist, werden alle bisher gefundenen Touren gelöscht und die Tourenfindungsphase (Large Demand und Merge) neu gestartet. Dies wird so oft wiederholt bis ausreichend Fabriken geöffnet sind, um alle Kunden vollständig zu versorgen.

Implementiert ist dieses Vorgehen in der Klasse `SolverCapIt`, welche von der Klasse `SolverCap` abgeleitet ist und ausschließlich deren Funktion zum Finden der „besten“ Fabrik `findBestFacility` sowie die Funktion `solve` überschreibt. Zur Durchführung der zusätzlichen UFL- und MST-Phasen auf den temporären Instanzen gibt es zudem eine von der Klasse `Solver` abgeleitete Klasse `SolverRed`, die im Vergleich zu dieser die Möglichkeit bietet UFL- und MST-Phase eigenständig durchzuführen und anschließend die Menge der geöffneten Fabriken auszulesen.

```

class SolverCapIt: public SolverCap {
public:
    SolverCapIt(const Instance& in, bool tsp) :
        SolverCap(in, false) {};
    virtual Solution solve();

private:
    virtual int findBestFacility (list<int> subset);
};

```

Listing 3: Die Klasse *SolverCapIt*

```
class SolverRed: Solver {
public:
    SolverRed(const Instance& in, bool tsp) :
        Solver(in, false) {create_drawings = false;};
    vector<bool> getOpenFacs() {return facOpen;};
    double uflPhase() {return Solver::uflPhase();};
    const Tree treePhase() {return Solver::treePhase();};
};
```

Listing 4: Die Klasse *SolverRed*

2.3.4 Zulässigkeitsprüfung

Vor dem Ausgeben der Lösung bietet die Klasse *Solution* die Möglichkeit die gefundene Lösung auf Zulässigkeit zu prüfen, d.h. ob durch die gefundenen Touren die Bedarfe aller Kunden erfüllt werden können ohne die Fahrzeug- oder Fabrikkapazitäten zu überschreiten. Hierzu wird ein maximaler Fluss auf folgendem gerichteten Graphen H (siehe auch Abb. 3) bestimmt:

- H besitzt je einen Knoten für jede Fabrik, jede Tour und jeden Kunden, sowie zusätzlich eine Quelle und eine Senke.
- Von der Quelle gibt es jeweils eine Kante zu jeder offenen Fabrik mit der Kapazität der Fabrik als Kantenkapazität.
- Jede Tour hat eine eingehende Kante mit Kapazität u von ihrer Startfabrik und ausgehende (unbeschränkte) Kanten zu jedem Kunden, der auf dieser Tour liegt.
- Von jedem Kunden aus führt eine Kante zur Senke mit dem Bedarf des Kunden als Kantenkapazität.

Lemma 2.3. *Der Graph H besitzt genau dann einen (maximalen) Fluss mit Flusswert gleich der Summe aller Bedarfe, wenn die gefundene Lösung zulässig ist.*

Beweis. Ein Fluss in diesem Graphen entspricht gerade einer Zuteilung von Produktion der Fabriken über die bestehenden Touren zu den Kunden. Die Einhaltung der Kantenkapazitäten zwischen Quelle und Fabriken bzw. Fabriken und Touren stellt die Einhaltung der Fabrik- bzw. Fahrzeugkapazitäten sicher und umgekehrt. Und schließlich schließlich sorgen die Kapazitäten der Kanten von den Kunden zur Senke dafür, dass kein Kunde mehr bekommt als seinem Bedarf ist. Somit entspricht ein Flusswert gleich der Summe aller Bedarfe gerade einer Verteilung bei der alle Bedarfe genau erfüllt werden. \square

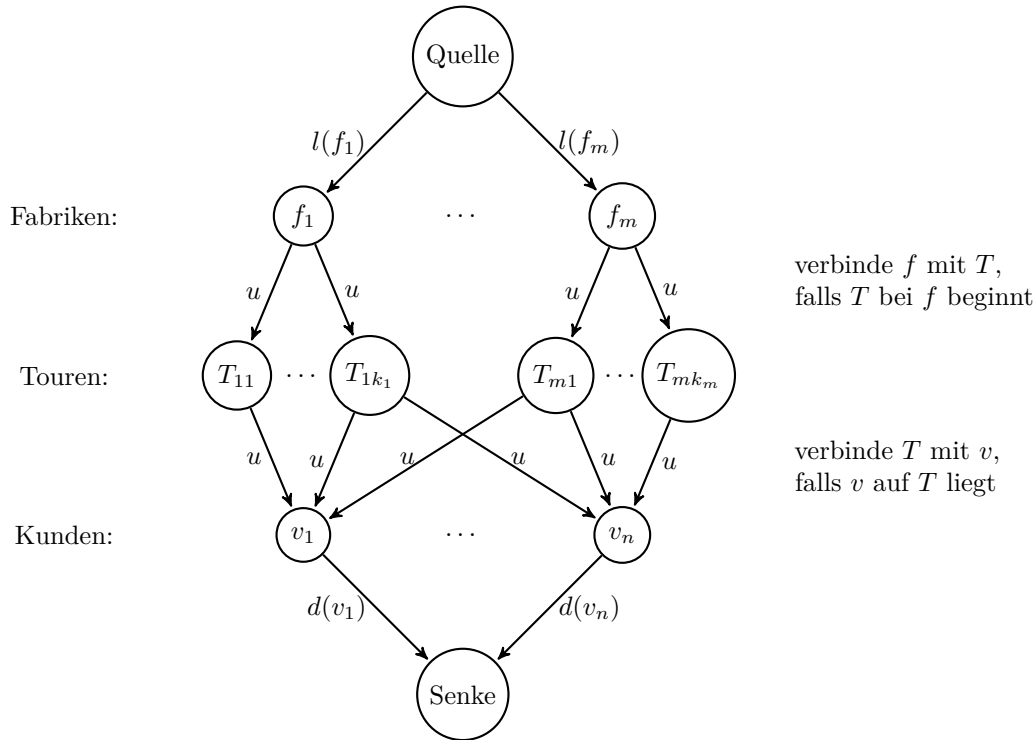


Abbildung 3: Die Max-Fluss-Instanz zur Überprüfung der Zulässigkeit einer gefundenen Lösung

Um also die Zulässigkeit einer gefundenen Lösung zu überprüfen erstellt die Funktion `isFeasible2` zunächst wie oben beschrieben eine Instanz für ein Max-Fluss-Problem. Dann wird mit Hilfe einer leicht vereinfachten Implementierung des Edmonds-Karp-Algorithmus (in der in [Dis15] beschrieben Form) ein maximaler Fluss in diesem Graphen bestimmt und schließlich dessen Flusswert mit der Summe aller Bedarfe verglichen.

Dazu gibt es neben der Funktion `EdmondsKarp` selbst eine Hilfsfunktion `shortestSTPath`, welche mit Hilfe einer Breitensuche einen kürzesten augmentierenden Pfad von der Quelle zur Senke bestimmt.

2.4 Analyse der Algorithmen

Zum Abschluss wollen wir uns nun noch über die Qualität des oben beschriebenen Algorithmus Gedanken machen. Dazu werden wir zunächst einige allgemeine Überlegungen, insbesondere zu für den Algorithmus besonders problematische Konstellationen, anstellen und dann den Algorithmus auf einigen zufällig erzeugten Instanzen testen.

2.4.1 Theoretische Betrachtungen

Beobachtung 2.4. Die Laufzeit des Algorithmus ist (in beiden Varianten) weiterhin polynomiell.

In [HKM13] werden zwei untere Schranken für die Kosten der optimalen CLR-Lösung gezeigt: Die Kosten der optimalen Lösungen der im Algorithmus verwendeten UFL-Instanz sowie die der MST-Instanz. Da jede Lösung einer CLRhFC-Instanz insbesondere auch eine zulässige Lösung der zugrunde liegenden CLR-Instanz ist, gelten diese Schranken weiterhin.

Während jedoch im Fall der CLR-Problem aus den beiden Werten zusammen auch eine obere Schranke für die Kosten der optimalen CLR-Lösung bestimmt werden kann (auf diese Weise wird ja gerade die Approximationsgüte des Algorithmus bewiesen), ist dies für das CLRhFC-Problem nicht mehr der Fall. Insbesondere können diese beiden unteren Schranken hier also beliebig weit von den Kosten der optimalen CLRhFC-Lösung entfernt liegen.

Ein einfaches Beispiel hierfür erhält man bereits durch eine Instanz mit einem Kunden und zwei Fabrikstandorten (Abb. 4). Wählt man Bedarf und Fabrikkapazitäten so, dass nur beide Standorte zusammen den Kunden versorgen können, so müssen in der CLRhFC-Lösung beide Fabriken eröffnet und genutzt werden, während sowohl für UFL als auch für MST eine der beiden genügt. Macht man nun einen der beiden Standorte billig (nahe am Kunden und geringe Eröffnungskosten) und den anderen sehr viel teurer, so können die Kosten für die optimale CLRhFC-Lösung beliebig weit von den Kosten der UFL- und MST-Lösungen entfernt werden.

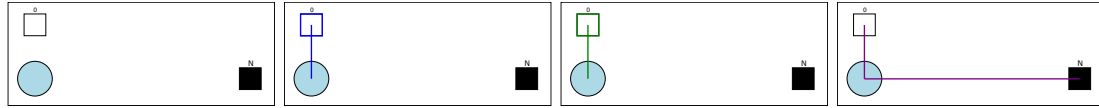


Abbildung 4: Eine Instanz mit billigen UFL- und MST-Lösungen, aber teurer CLRhFC-Lösung

Es sind allerdings nicht nur die in UFL- und MST-Phase ermittelten Kosten nicht mehr zwangsläufig eine gute Abschätzung für die tatsächlichen Kosten, es kann auch passieren, dass die in diesen Phasen getroffene Entscheidung über die zu eröffnenden Fabriken keinen Nutzen mehr bringen. Nämlich dann, wenn hierbei lediglich Fabriken mit sehr geringer Kapazität eröffnet werden. Diese sind dann für die tatsächliche Lösung nicht hilfreich bzw. im schlimmsten Fall sogar schädlich, da erst eine Tour angelegt wird um deren Kapazität zu nutzen und dann eine weitere Tour von einer zusätzlich eröffneten Fabrik notwendig ist, die jedoch alleine schon alles hätte übernehmen können (siehe Abb. 5).

Beachte allerdings, dass diese beiden Problem ihre volle Wirkung nur in der Greedy-Variante entfalten. In der iterativen Variante dagegen wird das UFL/MST-Verfahren ja auch für die zusätzlich zu eröffnenden Fabriken verwendet und sobald genügend Fabriken

geöffnet sind, wird die Tourfindungsphase komplett neu gestartet, sodass die Gefahr geringer ist, dass kleine Fabriken zu unnötigen Touren führen.

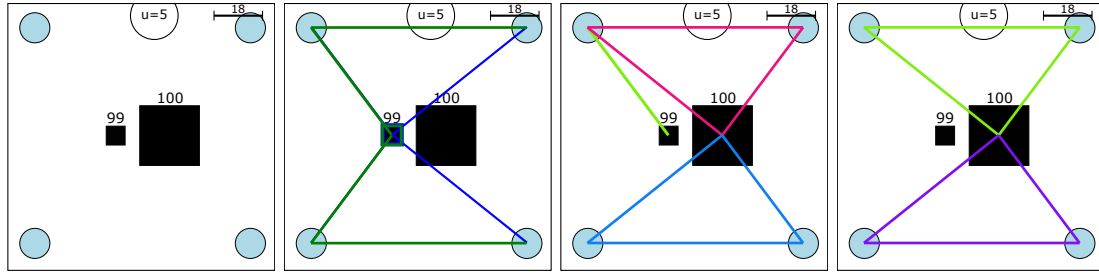


Abbildung 5: Eine Instanz, in der die UFL- und MST-Lösung nicht hilfreich ist (Instanz, UFL- und MST-Lsg, von Greedy gefundene Lsg, von Iterativ gefundene Lsg (optimal!))

Ein noch größeres Problem ist jedoch, dass Fabriken mit geringer Kapazität auch den minimalen Spannbaum unnütz machen können. Gibt es in einer Instanz viele billige Fabrikstandorte mit geringer Kapazität, so zerfällt der Spannbaum in viele Komponenten. Da dieser Baum aber in der Tourenfindungsphase zur sinnvollen Gruppierung der Kunden genutzt wird, führt dies dazu, dass nun für jeden Kunden eine eigene Tour erstellt wird, obwohl diese evtl. mit einer einzigen Tour versorgt werden könnten (vgl. Abb. 6).

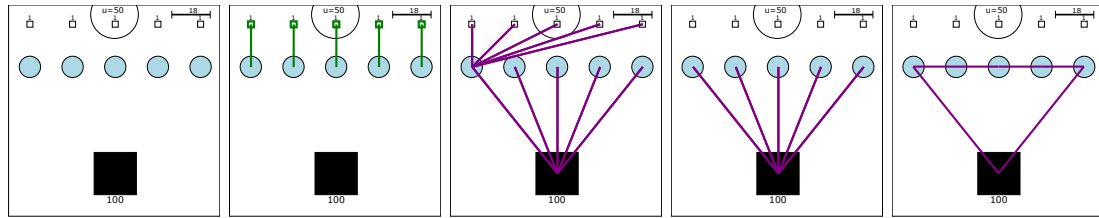


Abbildung 6: Eine Instanz, mit schlechten MST (Instanz, MST-Lsg, Greedy-Lsg, iterative Lsg, optimale Lsg.)

Diese Erkenntnis führt uns schließlich auch zu einem negativen Resultat über die Approximationsgüte des CLRhFC-Algorithmus:

Satz 2.5. *Der Algorithmus für CLRhFC ist bereits in der euklidischen Ebene höchstens $\mathcal{O}(N)$ -approximativ, wobei N die Größe der Eingabeinstanz beschreibt.*

Beweis. Zu $N \in \mathbb{N}$ betrachte folgende Eingabeinstanz, wobei die Positionen der Kunden und Fabriken durch komplexe Zahlen beschrieben werden und die übliche euklidische Metrik auf \mathbb{C} verwendet wird:

- N Kunden an den Orten $e^{2\pi \frac{k}{N}}$, für $k = 1, \dots, N$, jeweils mit Bedarf $N + 1$
- N Fabriken an den Orten $e^{2\pi \frac{k}{N}}$ mit Eröffnungskosten 0 und Kapazität 1 und eine weitere Fabrik mit Eröffnungskosten 0 und Kapazität $N(N + 1)$ bei 0
- Fahrzeugkapazität $N(N + 1)$

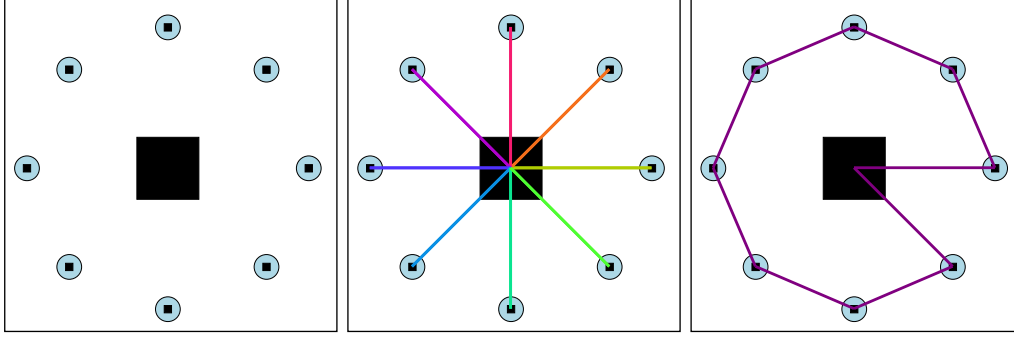


Abbildung 7: Die im Beweis von Satz 2.5 verwendete Instanz (für $N = 8$), die vom iterativen Algorithmus berechnete und die optimale Lösung

Da der in der MST-Phase gefundene Spannbaum nun für jeden Kunden eine einzelne Komponente hat, muss der Algorithmus (in beiden Varianten) für jeden Kunden eine eigene Tour erstellen. Im besten Falle verbindet er also jeden Kunden durch jeweils eine Tour der Länge 2 mit der großen Fabrik in der Mitte. Dies führt zu Gesamtkosten von $2N$.

Die optimale Lösung hingegen ist es alle Kunden mit einer einzigen Tour zu versorgen - dies führt zu Gesamtkosten $< 2 + 2\pi$. Die vom Algorithmus gefundene Lösung ist also $\frac{2N}{2+2\pi} \in \Omega(N)$ -mal so teuer wie die optimale Lösung. \square

2.4.2 Heuristische Beurteilung

Um trotz der fehlenden bewiesenen Approximationsgüte eine gewisse Einschätzung für die Qualität der gefundenen Lösungen zu bekommen sowie die beiden Varianten des Algorithmus miteinander vergleichen zu können, wurden die beiden Algorithmen auf einigen zufällig generierten Instanzen getestet.

Zu diesem Zweck habe ich das Programm um eine Funktion `writeCLRhFCMIP` ergänzt, welche zu einer Instanz von CLRhFC das passende MIP im LP-Dateiformat von CPLEX (siehe [Lpf]) erzeugt. Das so erzeugte MIP kann dann beispielsweise mit dem Solver SCIP ([Gam+16]) gelöst werden bzw. können mit diesem untere und obere Schranken für die optimale Lösung bestimmt werden.

Um das MIP zumindest ein wenig kleiner zu halten, wird dabei nicht wie in Abschnitt 2.1 beschrieben zu *jeder* möglichen Tour eine eigene Variable eingeführt, sondern zu jeder Teilmenge der Kunden und jeder Fabrik nur eine optimale Tour berücksichtigt. Dadurch reduziert sich die Zahl der Variablen in etwa um einen Faktor $n!$. Zwar muss dazu für jede solche Teilmenge ein TSP gelöst werden (dies geschieht hier in der Funktion `solveTSP` mit Hilfe einer sehr einfachen Branch-and-Bound-Heuristik), da das MIP jedoch sowieso nur für sehr kleine Instanzgrößen gelöst werden kann (bereits bei 10 Kunden und 5 Fabriken besteht das MIP aus ~ 31.000 Variablen und ~ 36.000 Bedingungen), stellt dies hier kein Hindernis dar.

Getestet wurde der Algorithmus auf je zehn Instanzen mit folgenden Parametern:

- 5 Kunden, 5 Fabriken, doppelt so viel Fabrikkapazität wie Kundenbedarf; zusätzlich wurden diese CLRhFC-Instanzen mit SCIP exakt gelöst (Instanzen 0-9, Abb. 8)
- 10 Kunden, 5 Fabriken, doppelt so viel Fabrikkapazität wie Kundenbedarf; hier wurden mit SCIP untere und obere Schranken für die optimale Lösungen gefunden (Instanzen 10-19, Abb. 9)
- 100 Kunden, 20 Fabriken, doppelt so viel Fabrikkapazität wie Kundenbedarf; hier werden die Lösungen jeweils mit den Kosten der UFL-Instanz (untere Schranke) verglichen (Instanzen 20-29, Abb. 10)
- 100 Kunden, 20 Fabriken, 10% mehr Fabrikkapazität wie Kundenbedarf; auch hier werden die Lösungen jeweils mit den Kosten der UFL-Instanz (untere Schranke) (Instanzen 30-39, Abb. 10)

Die optimalen Kosten der UFL-Instanz wurden dabei jeweils eigens mit SCIP berechnet.

#	UFL	MST	Greedy				Iterativ				optimal
0	341,22	123,02	3	7	657,00	1,34	3	7	602,08	1,23	491,19
1	350,67	126,97	4	8	1146,82	1,84	4	6	745,58	1,19	624,43
2	379,63	123,00	2	6	505,00	1,00	2	6	505,00	1,00	505,00
3	407,61	113,65	3	10	832,94	1,35	3	9	701,21	1,14	617,45
4	396,20	129,58	3	5	1077,55	1,41	3	5	1015,18	1,33	761,80
5	482,74	111,03	4	8	1050,78	1,31	4	8	1064,82	1,33	802,49
6	396,95	198,18	3	8	913,68	1,57	3	6	588,60	1,01	581,07
7	566,56	147,91	2	8	922,11	1,29	2	8	716,82	1,01	712,55
8	389,00	115,07	3	8	562,61	1,08	3	8	562,61	1,08	522,19
9	206,94	113,13	3	6	772,37	1,57	3	6	698,41	1,42	493,11

Abbildung 8: Instanzen 0-9, jeweils mit 5 Kunden und 5 Fabriken

#	UFL	MST	Greedy				Iterativ				optimal	
10	687,15	157,28	3	15	1096,58	1,32	3	15	1096,58	1,32	833,00	1027,00
11	687,92	190,59	3	14	1248,96	1,46	4	13	1192,24	1,39	856,00	879,00
12	480,02	180,59	2	13	806,66	1,35	2	13	806,66	1,35	598,00	754,00
13	1043,80	151,78	4	21	2311,70	1,61	4	19	1897,62	1,32	1439,00	1731,00
14	500,34	181,41	2	9	1043,67	1,70	2	9	1043,67	1,70	614,00	771,00
15	806,04	223,23	3	16	1502,07	1,63	3	14	1007,34	1,10	919,00	1000,00
16	504,80	140,26	3	10	1184,91	1,46	3	9	1101,00	1,36	809,00	1055,00
17	966,57	191,92	3	13	1847,71	1,66	3	15	1822,26	1,64	1111,00	1262,00
18	584,23	228,74	3	11	1374,03	1,63	3	10	1155,71	1,37	843,00	934,00
19	510,64	197,01	3	13	1252,55	1,58	4	13	1160,15	1,46	793,00	931,00

Abbildung 9: Instanzen 10-19, jeweils mit 10 Kunden und 5 Fabriken

Allgemein ist zu beobachten, dass die iterative Variante des Algorithmus fast immer die bessere Lösung findet. Der einzige Fall, in dem das Greedy-Verfahren eine (leicht) bessere Lösung findet ist Instanz 5 (Abb. 11). Die Kosten der iterativ gefunden Lösung

#	UFL	MST	Greedy				Iterativ			
20	3664,00	637,77	12	142	7376,38	2,01	11	138	6055,17	1,65
21	3343,00	663,13	10	127	9036,68	2,70	10	124	7886,90	2,36
22	3278,00	627,40	10	134	6900,57	2,11	10	133	5789,26	1,77
23	3708,00	657,93	11	145	8438,01	2,28	12	145	6876,61	1,85
24	3517,00	610,64	11	148	8449,90	2,40	10	145	6599,23	1,88
25	3674,00	611,15	12	147	13676,00	3,72	14	148	7966,28	2,17
26	3667,00	604,93	11	137	11731,00	3,20	11	134	6924,47	1,89
27	3299,00	580,00	10	138	7048,85	2,14	11	138	6356,29	1,93
28	4231,00	628,85	12	139	12500,00	2,95	12	138	7707,41	1,82
29	3896,00	653,93	10	128	9392,28	2,41	11	128	6672,22	1,71
30	3545,00	652,85	18	150	12832,60	3,62	19	148	8949,20	2,52
31	4170,00	603,77	18	136	13329,30	3,20	17	132	8082,80	1,94
32	3279,00	605,83	18	136	10169,70	3,10	20	132	7010,38	2,14
33	3754,00	615,46	19	144	13512,80	3,60	17	142	8531,30	2,27
34	3774,00	626,99	19	150	11016,50	2,92	20	147	8132,92	2,15
35	3844,00	667,64	19	125	12640,50	3,29	17	120	7330,49	1,91
36	3733,00	643,69	19	133	13099,00	3,51	18	131	8219,38	2,20
37	3593,00	637,28	19	140	11173,20	3,11	18	139	6998,50	1,95
38	3204,00	608,59	18	138	11362,70	3,55	18	135	7446,43	2,32
39	3964,00	627,60	18	144	12016,30	3,03	18	147	8410,99	2,12

Abbildung 10: Instanzen 20-39, jeweils mit 100 Kunden und 20 Fabriken

liegen für die beiden kleineren Instanzgrößen fast immer weniger als 50% über denen der Optimallösung (einzige Ausnahmen sind die Instanzen 14 (70%) und 17 (64%)).

Bei den Instanzen mit 100 Kunden liegen die Kosten der vom iterativen Verfahren gefundenen Lösungen bis zu 150% über denen der optimalen UFL-Lösung. Es ist allerdings anzunehmen, dass diese die tatsächlichen Kosten der optimalen CLRhFC-Lösung im allgemeinen deutlich unterschätzen (bei den kleineren Instanzen liegen die Kosten der optimalen CLRhFC-Lösung meisten $\sim 50\%$ höher).

Festzustellen ist auch, dass sich eine geringe Gesamtfabrikkapazität für die Greedy-Strategie stärker negativ bemerkbar zu machen scheint als für die iterative Strategie.

Erklärung
hierfür?

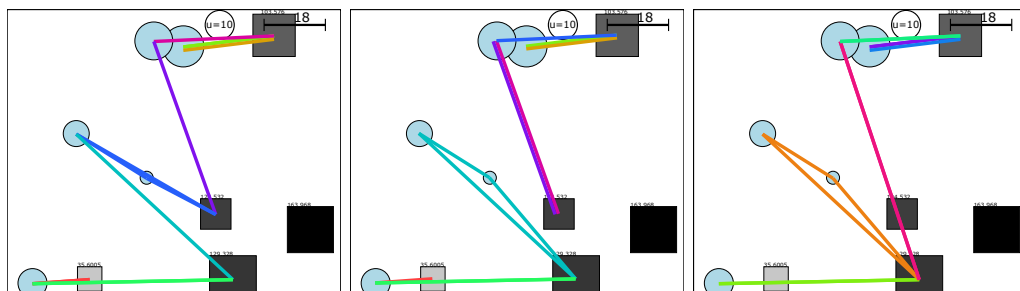


Abbildung 11: Die einzige Instanz, auf der die Greedy-Strategie die iterative schlägt (Greedy-Lsg, iterative Lsg, optimale Lsg)

Ausblick

Wir haben nun also gesehen wie Large Demand- und Merge-Phase des *CLR*-Algorithmus so angepasst werden können, dass dieser auch für CLRhFC-Instanzen zulässige Lösungen findet. Ferner hat die heuristische Betrachtung gezeigt, dass dabei zumindest für verhältnismäßig kleine Instanzen in der euklidischen Ebene bereits meist eine akzeptable Approximationsgüte erreicht wird. Gleichzeitig zeigt aber Satz 2.5, dass es - ebenfalls schon in der euklidischen Ebene - auch Instanzen gibt, auf denen die Approximation beliebig schlecht wird.

evtl. weglassen, wenn auch größere Instanzen geprüft wurden

Eine naheliegender nächster Schritt auf der Suche nach einem guten Approximationsalgorithmus wäre nun vielleicht auch die UFL- und MST-Phasen anzupassen, sodass die Fabrikkapazitäten bereits dort eine Rolle spielen. Zumindest für den UFL-Teil sind hierzu auch passende Approximationsalgorithmen bekannt (z.B. [PTW01]), allerdings zeigt etwa das in Abb. 6 gezeigte Beispiel, dass dies allein vermutlich nicht ausreichen wird, da auch das Finden eines guten Spannbaums eine zentrale Rolle spielt.

Zudem ergibt sich durch das Einführen von Fabrikkapazitäten noch ein neues Problem im Zusammenspiel der UFL- und MST-Lösung (selbst wenn die Kapazitäten in diesen berücksichtigt werden): Da ein Kunde in den beiden Lösungen im Allgemeinen mit verschiedenen Fabriken verbunden sein darf, kann es passieren, dass Kunden sich in der Merge-Phase gegenseitig Fabriken „wegnehmen“.

Denn: Nur weil ein Kunde bspw. in der MST-Lösung mit einer nahen Fabrik verbunden ist (was dann später zur Abschätzung der tatsächlichen Anbindungskosten dienen soll), ist noch nicht sicher gestellt, dass diese Anbindung auch noch verfügbar ist, wenn dieser Kunde in der Merge-Phase tatsächlich an die Reihe kommt. Es kann vielmehr auch passieren, dass die entsprechende Fabrik zu diesem Zeitpunkt bereits durch andere Kunden voll ausgelastet ist. Es ist anzunehmen, dass derartige Effekte die Beschränkung der Kosten der letztendlich gefundenen Lösung im Allgemeinen deutlich erschwert und evtl. macht dies noch weitere Anpassungen der Merge-Phase nötig.

Liste der noch zu erledigenden Punkte

Verweis auf Webseite/Anhang/...?	7
Klasse detaillierter beschreiben?	7
Verweis auf eigenständiges Programm zum Einlesen von Touren	7
Erklärung hierfür?	19
evtl. weglassen, wenn auch größere Instanzen geprüft wurden	20

Literatur

- [CC09] Xujin Chen und Bo Chen. „Approximation Algorithms for Soft-Capacitated Facility Location in Capacitated Network Design“. In: *Algorithmica* 53.3 (2009), S. 263–297. ISSN: 1432-0541. DOI: [10.1007/s00453-007-9032-7](https://doi.org/10.1007/s00453-007-9032-7). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00453-007-9032-7>.
- [Dis15] Yann Disser. „Vorlesungsskript zu Optimierung III“. 2015.
- [Gam+16] Gerald Gamrath u. a. *The SCIP Optimization Suite 3.2*. eng. Techn. Ber. 15-60. Takustr.7, 14195 Berlin: ZIB, 2016.
- [HKM13] Tobias Harks, Felix G. König und Jannik Matuschke. „Approximation Algorithms for Capacitated Location Routing“. In: *Transportation Science* 47.1 (2013), S. 3–22. DOI: [http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1120.0423](https://doi.org/10.1287/trsc.1120.0423). URL: <http://researchers-sbe.unimaas.nl/tobiasharks/wp-content/uploads/sites/29/2014/02/HKM-TS-2013.pdf>.
- [Jai+02] Kamal Jain u. a. „Greedy Facility Location Algorithms Analyzed using Dual Fitting with Factor-Revealing LP“. In: *CoRR* cs.DS/0207028 (2002). URL: <http://arxiv.org/abs/cs.DS/0207028>.
- [Lpf] *LP file format: algebraic representation*. IBM Knowledge Center. URL: https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SS9UKU_12.5.0/com.ibm.cplex.zos.help/FileFormats/topics/LP.html (besucht am 03.12.2016).
- [PTW01] Martin Pal, Eva Tardos und Tom Wexler. „Facility Location with Non-uniform Hard Capacities“. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science*. 2001, S. 329–338. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.16.1003>.
- [Shm00] David B. Shmoys. „Approximation Algorithms for Facility Location Problems“. In: *Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization: Third International Workshop, APPROX 2000 Saarbrücken, Germany, September 5–8, 2000 Proceedings*. Hrsg. von Klaus Jansen und Samir Khuller. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000, S. 27–32. ISBN: 978-3-540-44436-7. DOI: [10.1007/3-540-44436-X_4](https://doi.org/10.1007/3-540-44436-X_4). URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-44436-X_4.
- [Tur10] Mark Turney. *simple-svg*. Google Code Archive. simple-svg ist eine header-only C++ Library, mit deren Hilfe einfache svg-Graphiken erstellt werden können. 2010. URL: <https://code.google.com/archive/p/simple-svg/>.