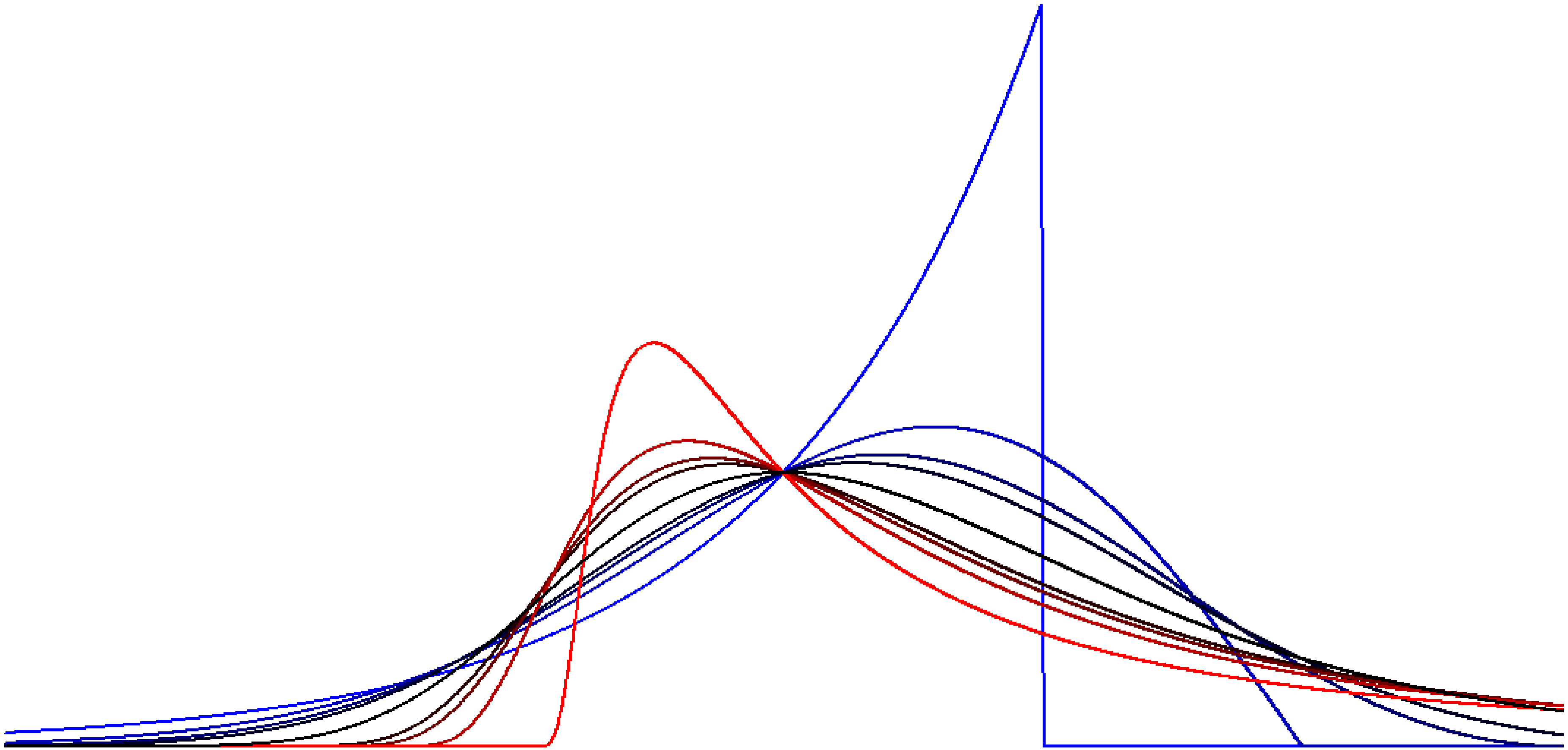
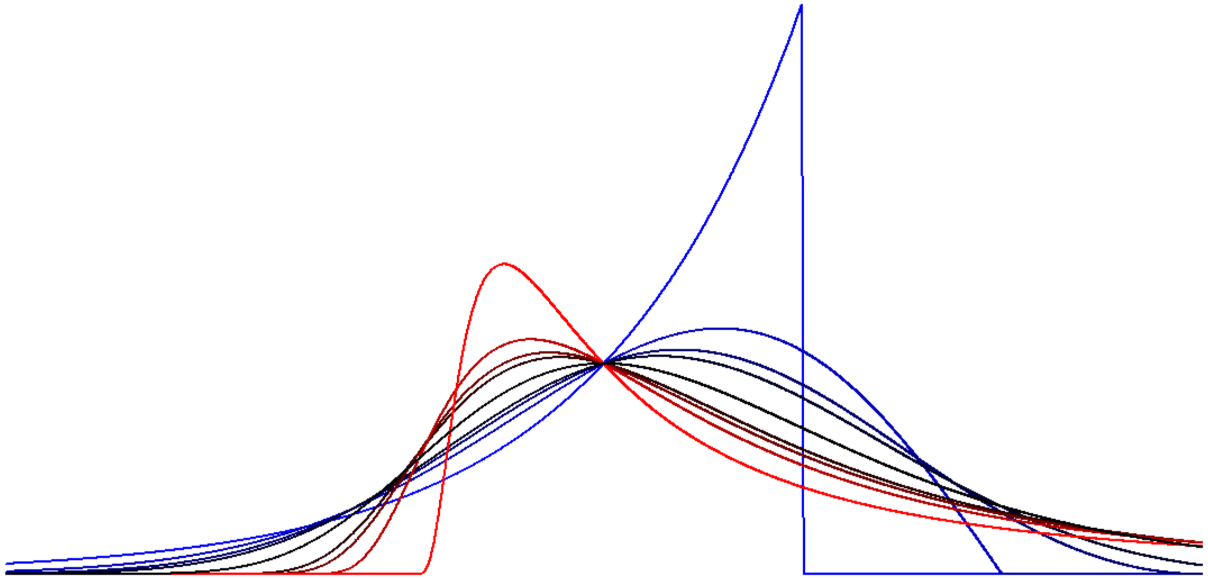


Schätzer für den Formparameter ξ

basierend auf „Modelling Extremal Events“ von P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch

Die Extremwertverteilung (GEV)

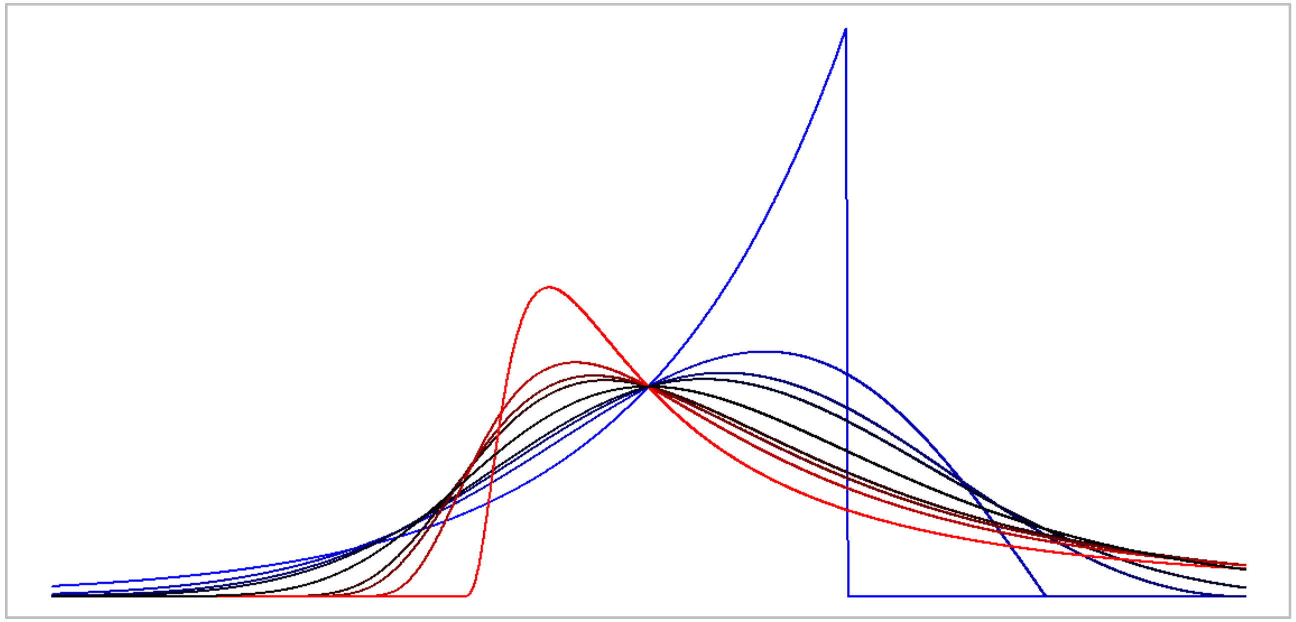


Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

Dichte:



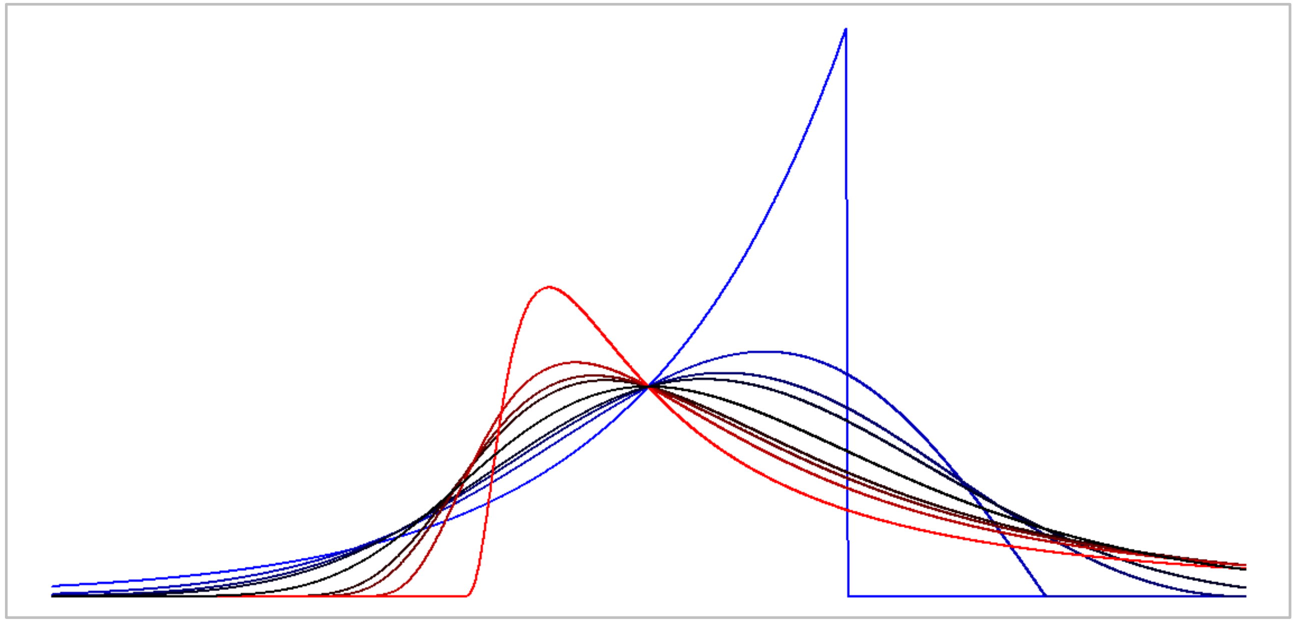
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ

Dichte:



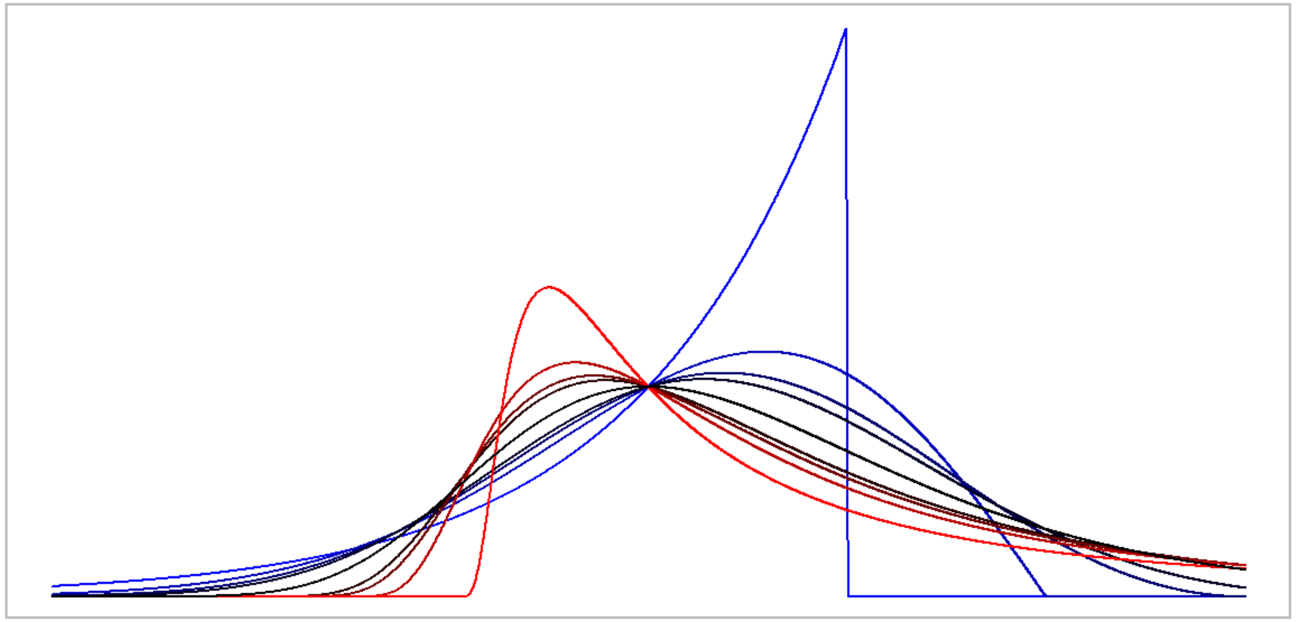
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ

Dichte:



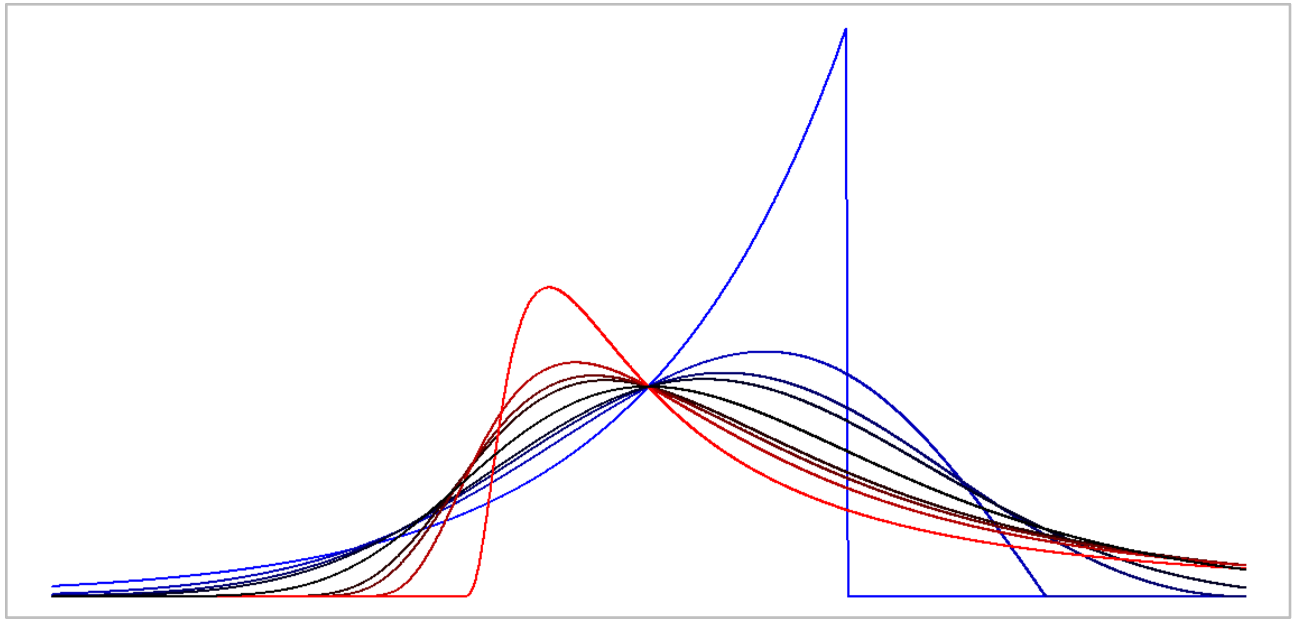
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ

Dichte:



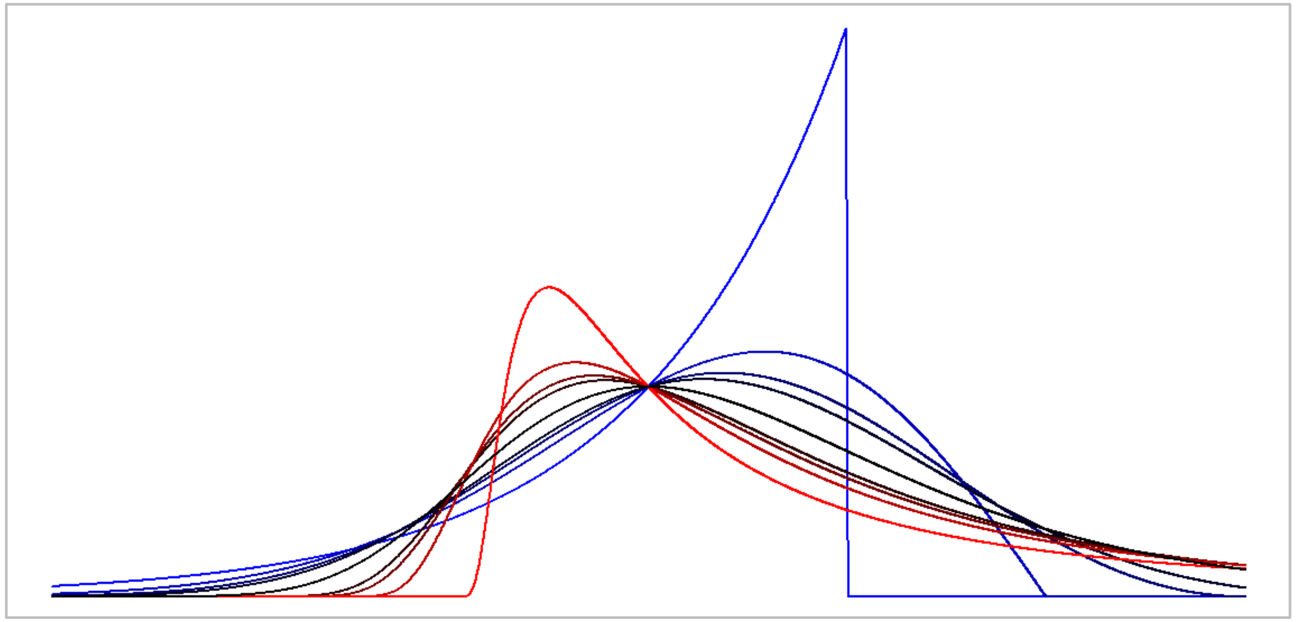
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. $\Psi_\alpha,\ \alpha := -\frac{1}{\xi}$

Dichte:



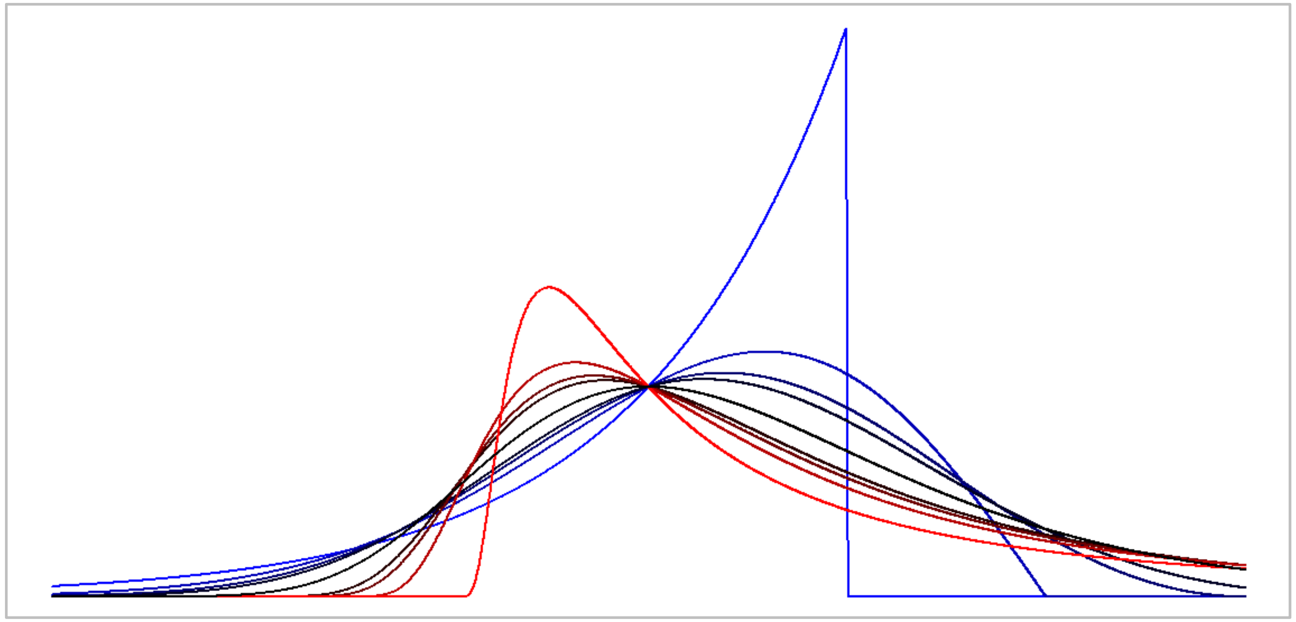
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. $\Psi_\alpha,\ \alpha := -\frac{1}{\xi}$ (endlicher rechter Rand)

Dichte:



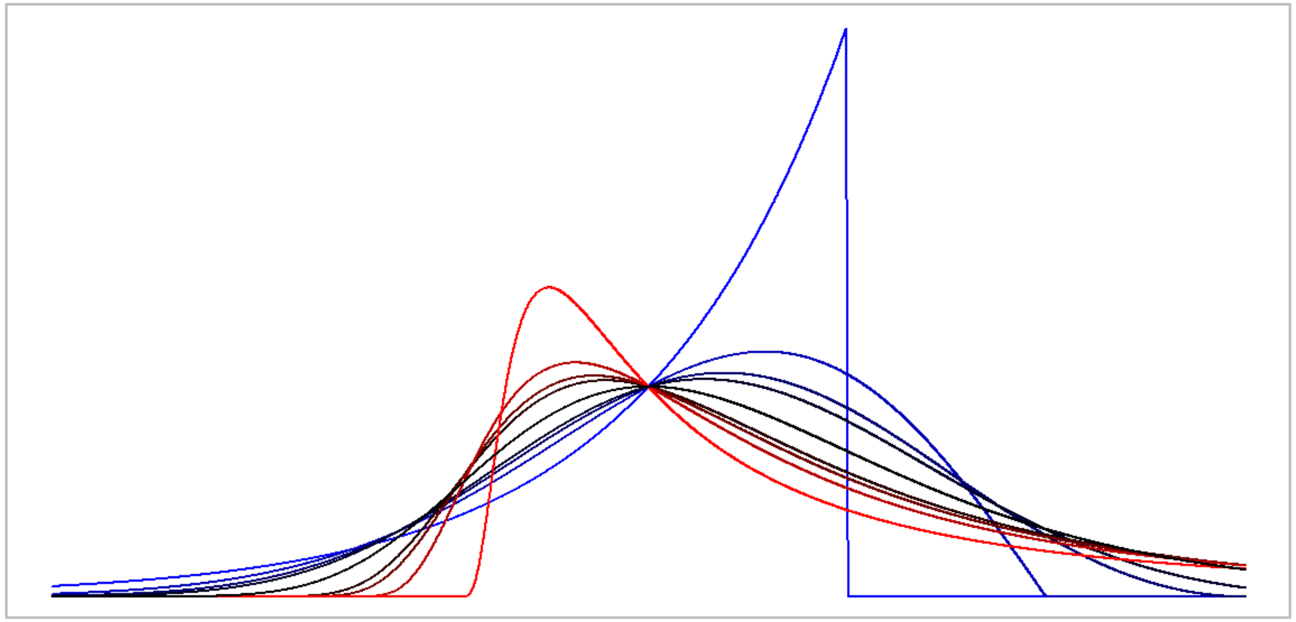
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. $\Psi_\alpha,\ \alpha := -\frac{1}{\xi}$ (endlicher rechter Rand)
  - $\xi = 0$: Gumbelvtlg. Λ

Dichte:



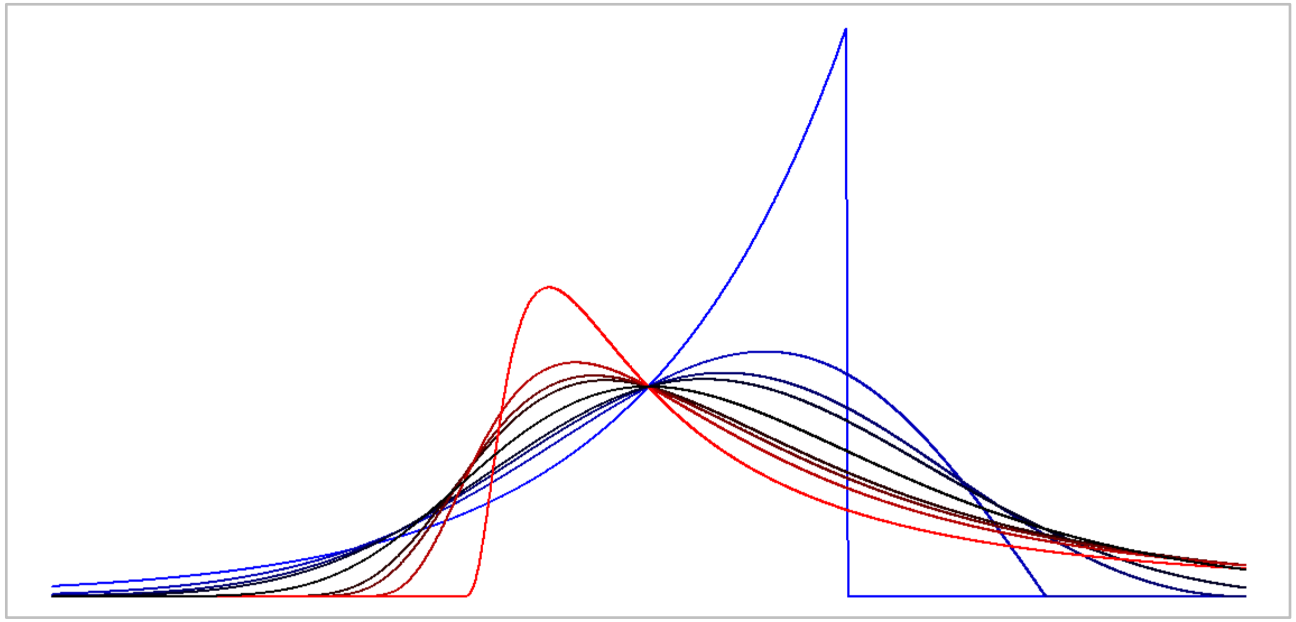
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. $\Psi_\alpha,\ \alpha := -\frac{1}{\xi}$ (endlicher rechter Rand)
  - $\xi = 0$: Gumbelvtlg. Λ (unbeschränkter Träger)

Dichte:



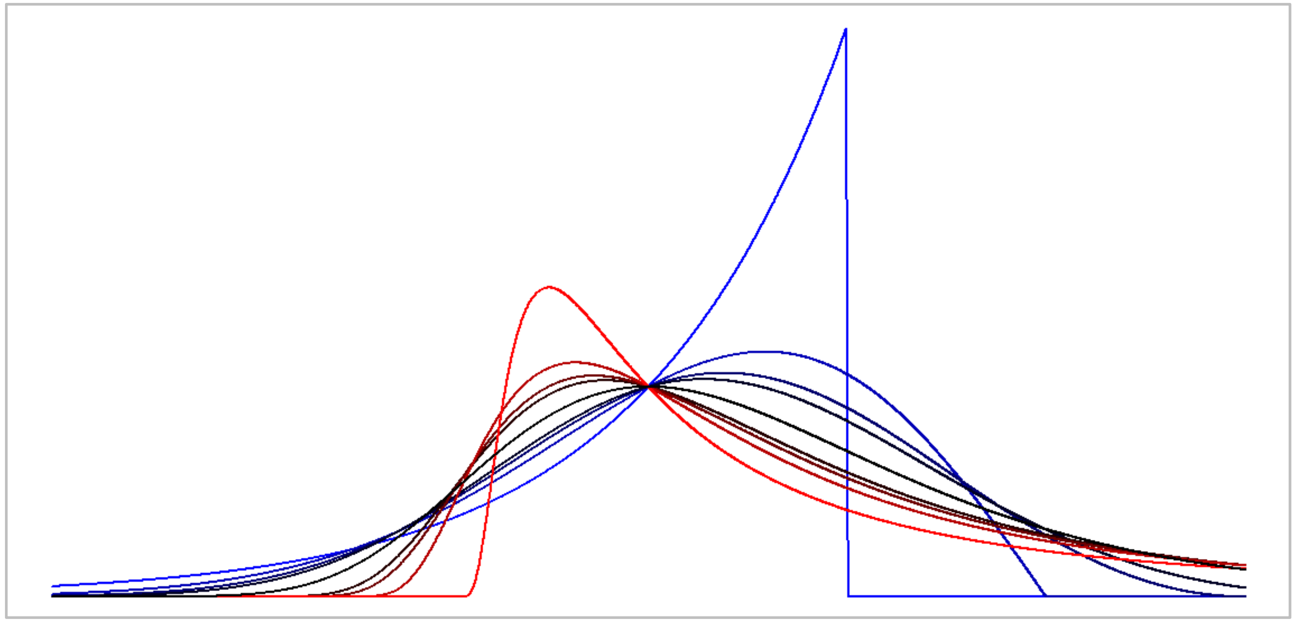
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. $\Psi_\alpha,\ \alpha := -\frac{1}{\xi}$ (endlicher rechter Rand)
  - $\xi = 0$: Gumbelvtlg. Λ (unbeschränkter Träger)
  - $\xi > 0$: Fréchetvtlg. $\Phi_\alpha,\ \alpha := \frac{1}{\xi}$

Dichte:



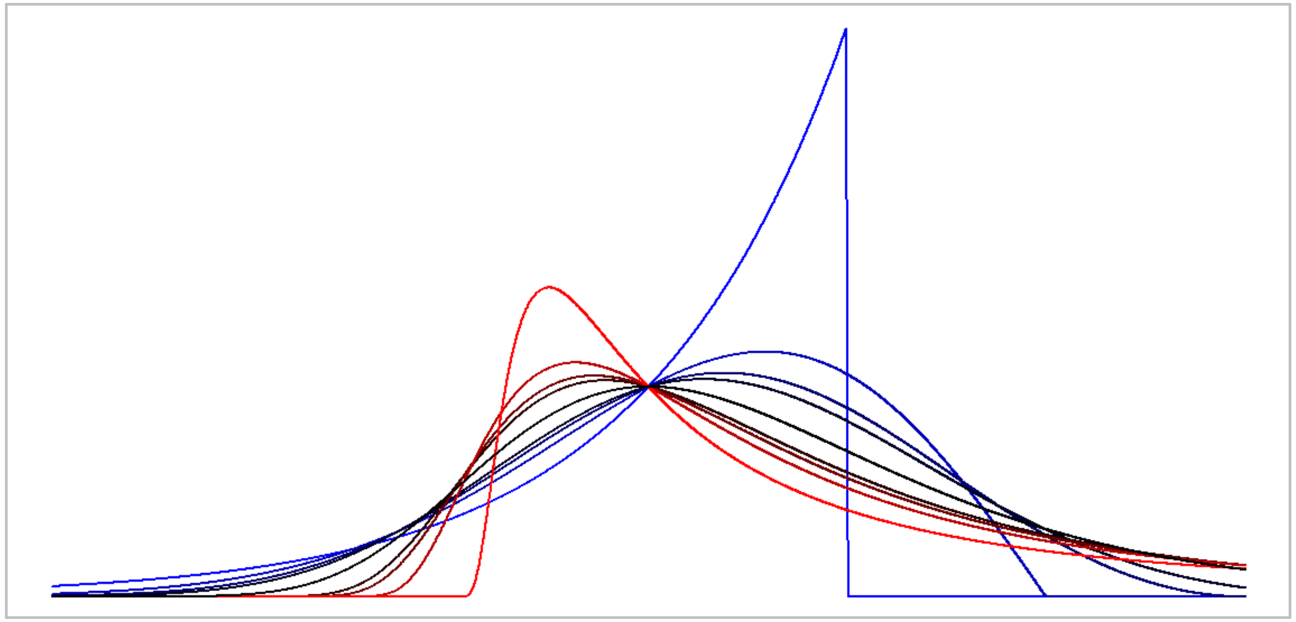
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. $\Psi_\alpha,\ \alpha := -\frac{1}{\xi}$ (endlicher rechter Rand)
  - $\xi = 0$: Gumbelvtlg. Λ (unbeschränkter Träger)
  - $\xi > 0$: Fréchetvtlg. $\Phi_\alpha,\ \alpha := \frac{1}{\xi}$ (schwerer Tail)

Dichte:



Pickands-Schätzer

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}\left(H_\xi\right)$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Theorem 3.4.5 (Charakterisierung von MDA(H_ξ)):

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Theorem 3.4.5 (Charakterisierung von MDA(H_ξ)):

$$F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \begin{cases} \dfrac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & ,\xi \neq 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} & ,\xi = 0 \end{cases} \quad \text{f. a. } x, y > 0$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Theorem 3.4.5 (Charakterisierung von MDA(H_ξ)):

$$F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \begin{cases} \dfrac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & ,\xi \neq 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} & ,\xi = 0 \end{cases} \quad \text{f.a. } x, y > 0$$

wobei $U\ t \coloneqq \coloneqq F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

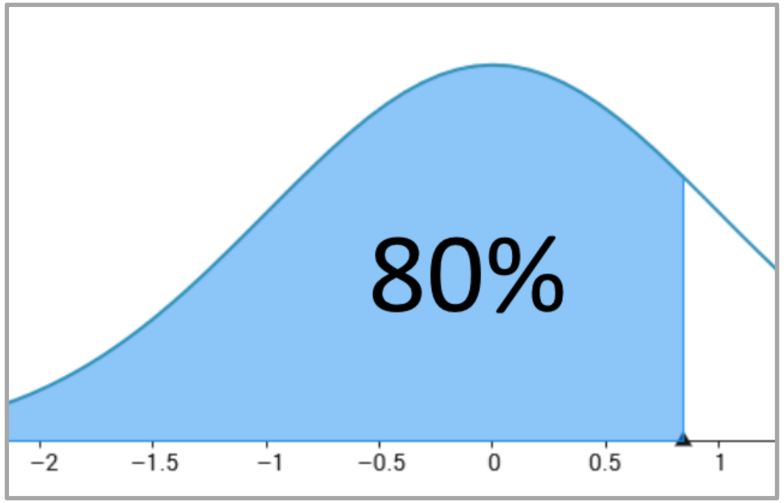
Theorem 3.4.5 (Charakterisierung von MDA(H_ξ)):

$$F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)-U(t)}{U(ty)-U(t)} = \begin{cases} \dfrac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & ,\xi \neq 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} & ,\xi = 0 \end{cases} \quad \text{f. a. } x, y > 0$$

wobei $U\ t := := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$

Quantil



Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

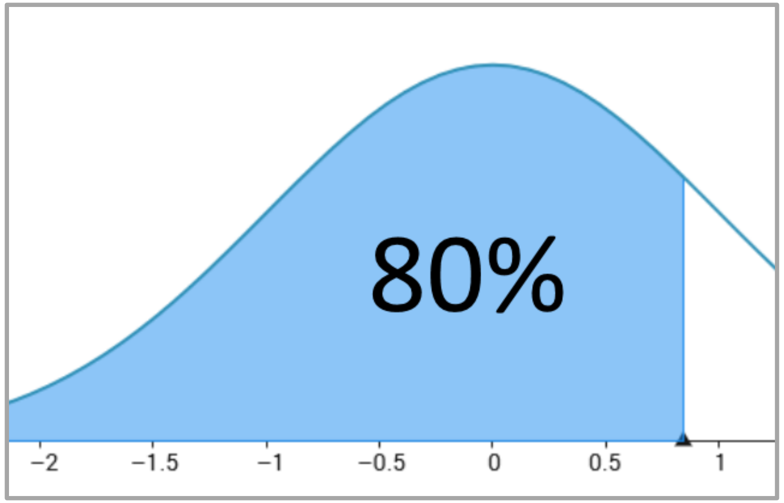
Theorem 3.4.5 (Charakterisierung von MDA(H_ξ)):

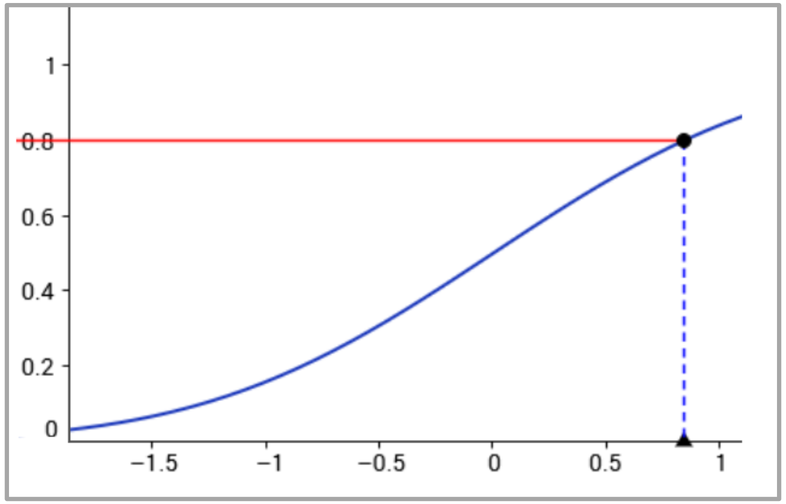
$$F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \begin{cases} \dfrac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & ,\xi \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\ln x}{\ln y} & ,\xi = 0 \end{cases} \quad \text{f.a. } x, y > 0$$

wobei $U\ t :=\ := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$

Quantil





Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Baukasten

Theorem 3.4.5 (Charakterisierung von MDA(H_ξ)):

$$F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \begin{cases} \dfrac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & ,\xi \neq 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} & ,\xi = 0 \end{cases} \quad \text{f.a. } x, y > 0$$

wobei $U\ t := := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Theorem 3.4.5 (Charakterisierung von MDA(H_ξ)):

$$F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \begin{cases} \dfrac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & ,\xi \neq 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} & ,\xi = 0 \end{cases} \quad \text{f.a. } x, y > 0$$

wobei $U\ t \coloneqq \coloneqq F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$

Baukasten

1) $U(t) \coloneqq F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - \quad U(t)}{U(t) \quad -U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}\!/_{t}),$

$$c(t) \xrightarrow{n \to \infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Lemma 4.1.9 (Quantiltransformation):

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Lemma 4.1.9 (Quantiltransformation):

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ui gleichverteilt auf $(0,1)$, dann gelten:

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Lemma 4.1.9 (Quantiltransformation):

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ui gleichverteilt auf $(0,1)$, dann gelten:

a) $F^-(U_1) \overset{d}{=} X_1$

Baukasten

1) $U(t) \coloneqq F^-(1 - {}^1\!/_t)$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Lemma 4.1.9 (Quantiltransformation):

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ui gleichverteilt auf $(0,1)$, dann gelten:

a) $F^-(U_1) \overset{d}{=} X_1$

b) $\left(X_{n,n}, \dots, X_{1,n}\right) \overset{d}{=} \left(F^-(U_{n,n}), \dots, F^-(U_{1,n})\right)$

Baukasten

1) $U(t) := F^-(1 - {}^1\!/_t)$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - \quad U(t)}{U(t) \quad -U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Lemma 4.1.9 (Quantiltransformation):

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ui gleichverteilt auf $(0,1)$, dann gelten:

a) $F^-(U_1) \overset{d}{=} X_1$

b) $(X_{n,n}, \dots, X_{1,n}) \overset{d}{=} \left(F^-(U_{n,n}), \dots, F^-(U_{1,n})\right)$

$Y \sim G$ stetig

Baukasten

1) $U(t) := F^-(1 - {}^1\!/_t)$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Lemma 4.1.9 (Quantiltransformation):

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ui gleichverteilt auf $(0,1)$, dann gelten:

a) $F^-(U_1) \overset{d}{=} X_1$

b) $(X_{n,n}, \ldots, X_{1,n}) \overset{d}{=} \left(F^-(U_{n,n}), \ldots, F^-(U_{1,n})\right)$

$Y \sim G$ stetig

c) so ist $G(Y)$ gleichverteilt.

Baukasten

1) $U(t) := F^-(1 - {}^1/_t)$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - \quad U(t)}{U(t) \quad - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Baukasten

1) $U(t) := F^-(1 - {}^1/_t)$,

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

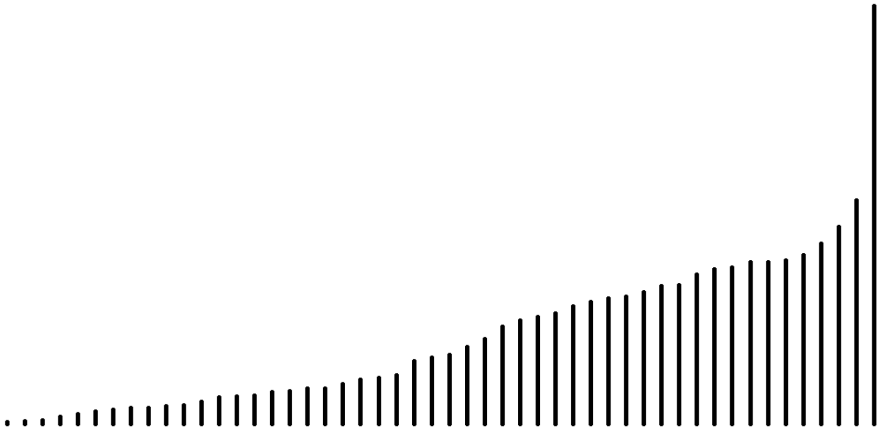
2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$



Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$$c(t) \xrightarrow{n \to \infty} 2:$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(c(t) \cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)} \cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

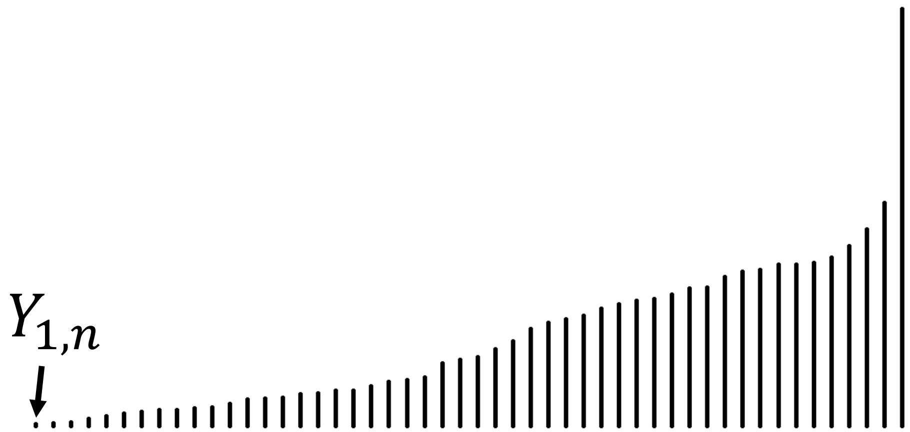
2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$



Baukasten

1) $U(t) \coloneqq F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

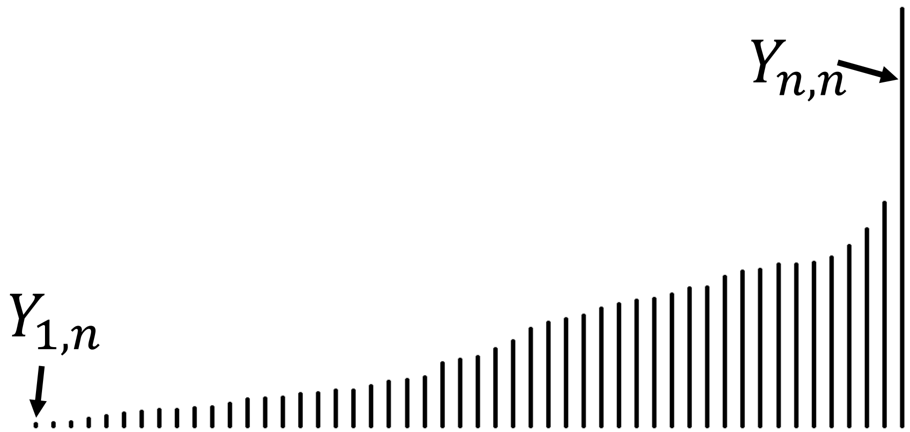
2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$



Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

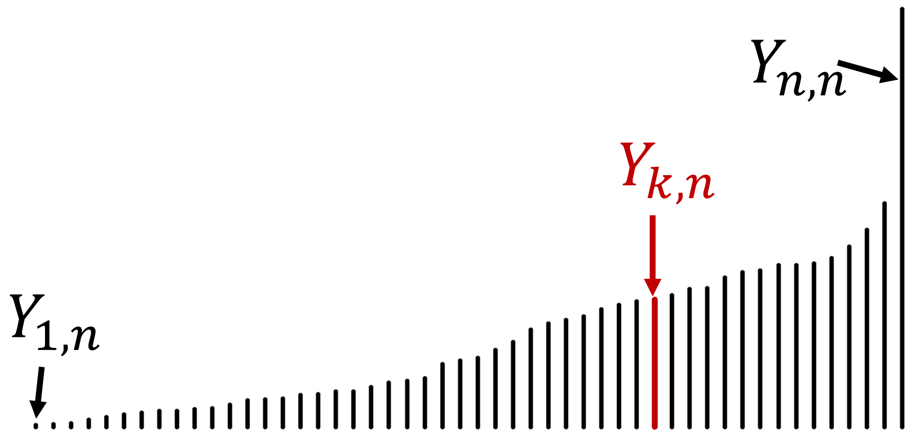
2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$



Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

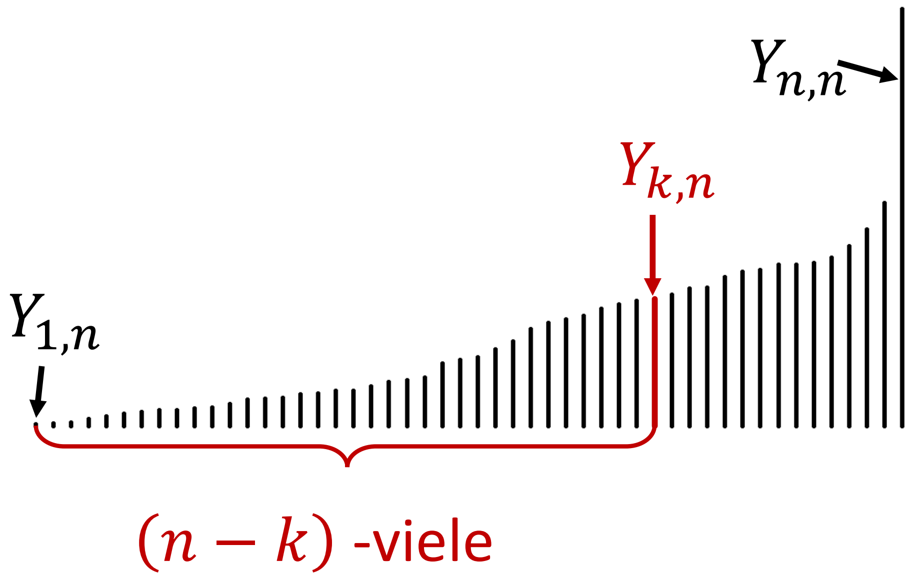
2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$



Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

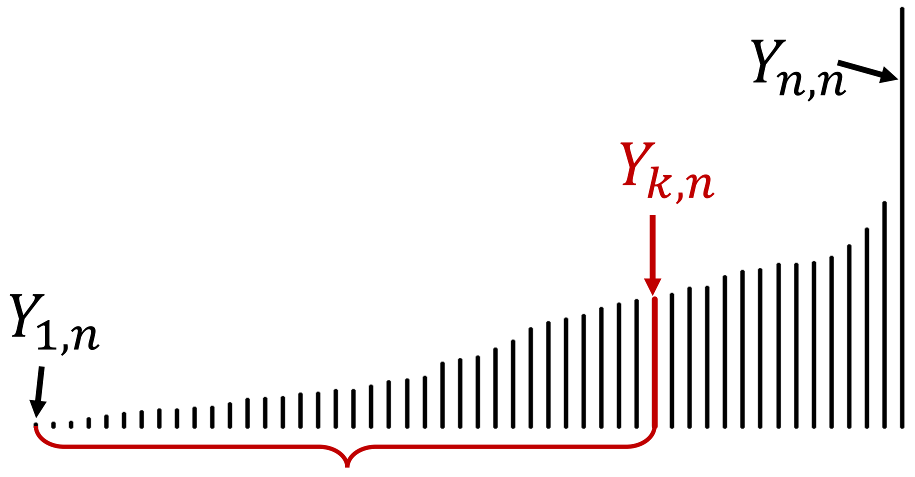
2) $Y_i \sim$ Pareto:

$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$



$(n-k)$ -viele $\rightsquigarrow$ emp. $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ -Quantil

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t}),$

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

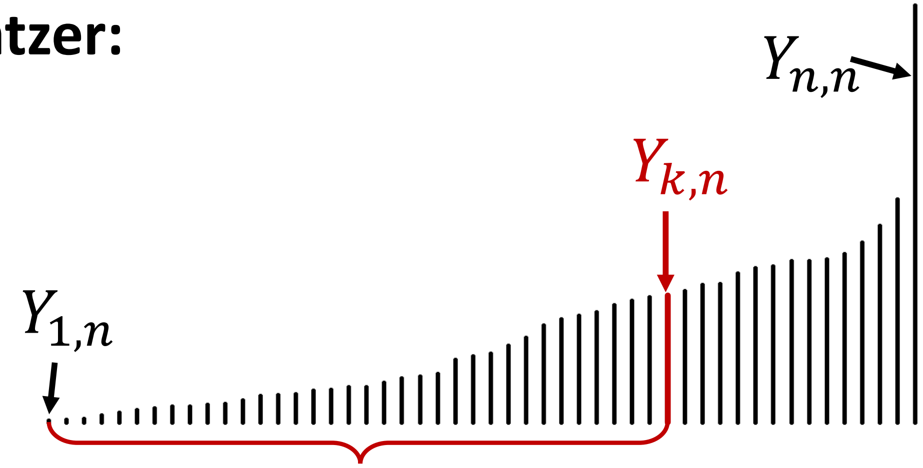
$$U(Y_{k,n}) \stackrel{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Quantilschätzer:



$(n-k)$ -viele $\rightsquigarrow$ emp. $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ -Quantil

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^1/_t)$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

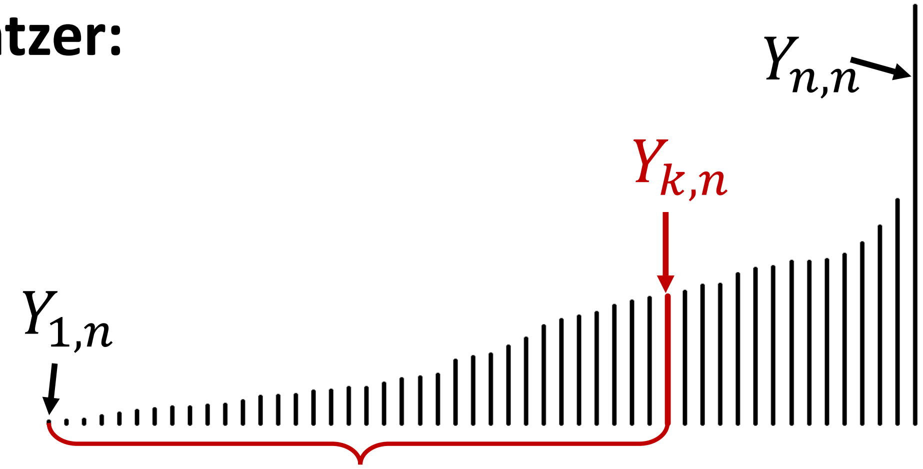
$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Quantilschätzer:



$(n-k)$ -viele $\rightsquigarrow$ emp. $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ -Quantil

Quantil der Pareto-Vtlg:

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

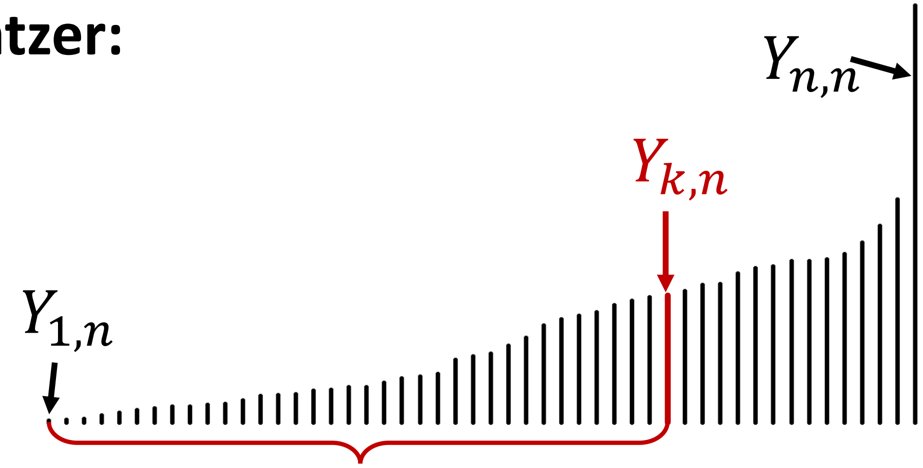
$U(Y_{k,n}) \stackrel{d}{=} X_{k,n}$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Quantilschätzer:



$(n-k)$ -viele $\rightsquigarrow$ emp. $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ -Quantil

Quantil der Pareto-Vtlg:

$$G^{-}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n}{k}$$

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2:$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

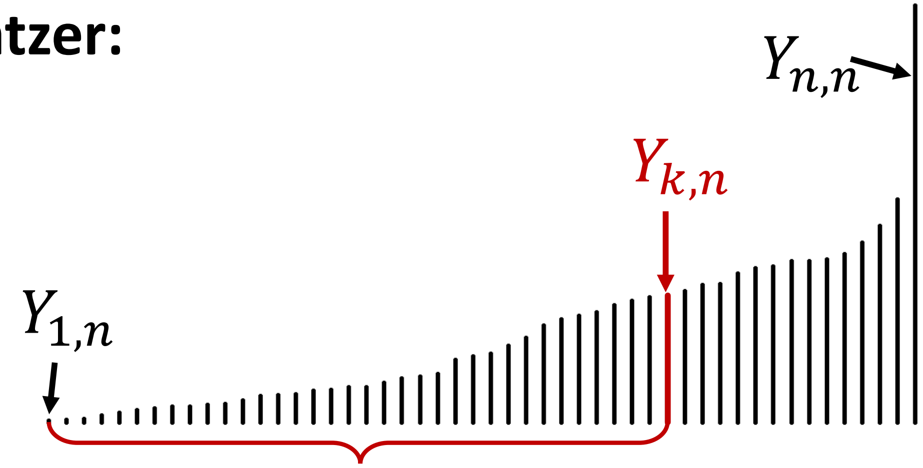
$$U(Y_{k,n}) \stackrel{d}{=} X_{k,n}$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Quantilschätzer:



$(n-k)$ -viele $\rightsquigarrow$ emp. $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ -Quantil

Quantil der Pareto-Vtlg:

$$G^{-}\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{k}$$

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

3) $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$:

$$\frac{k}{n} Y_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^1/_t)$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^\xi$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$$

3) $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$:

$$\frac{k}{n} Y_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$$

Pickands-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

Ziel: Schätzer für $\xi \in \mathbb{R}$

Pickands-Schätzer:

$$\hat{\xi}^{(P)}_{k,n} := \log_2 \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}$$

mit $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty,\ \frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Baukasten

1) $U(t) := F^{-}(1 - {}^{1}/_{t})$,

$c(t) \xrightarrow{n\to\infty} 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(c(t)\cdot t) - U(t)}{U(t) - U\left(\frac{1}{c(t)}\cdot t\right)} = 2^{\xi}$$

2) $Y_i \sim$ Pareto:

$U(Y_{k,n}) \overset{d}{=} X_{k,n}$

3) $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty,\ \frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$:

$\frac{k}{n} Y_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$

Pickands-Schätzer (Eigenschaften)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}\left(H_\xi\right)$

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \coloneqq \log_2 \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}$$

Pickands-Schätzer (Eigenschaften)

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ uiv gemäß } F \in \mathrm{MDA}\left(H_\xi\right)$$

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \;\coloneqq\; \log_2 \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}$$

Schwache Konsistenz

Für $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi$$

Pickands-Schätzer (Eigenschaften)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} := \log_2 \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}$$

Schwache Konsistenz

Für $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi$$

Starke Konsistenz

Für $\frac{k}{\ln \ln n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \xi$$

Pickands-Schätzer (Eigenschaften)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}\left(H_\xi\right)$

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} := \log_2 \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}$$

Schwache Konsistenz

Für $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty,\ \frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi$$

Starke Konsistenz

Für $\frac{k}{\ln \ln n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty,\ \frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \xi$$

Asymptotische Normalität:

mit zusätzlichen Bedingungen an U und k gilt:

$$\sqrt{k}\left(\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} - \xi\right) \xrightarrow{d} N\left(0, v(\xi)\right)$$

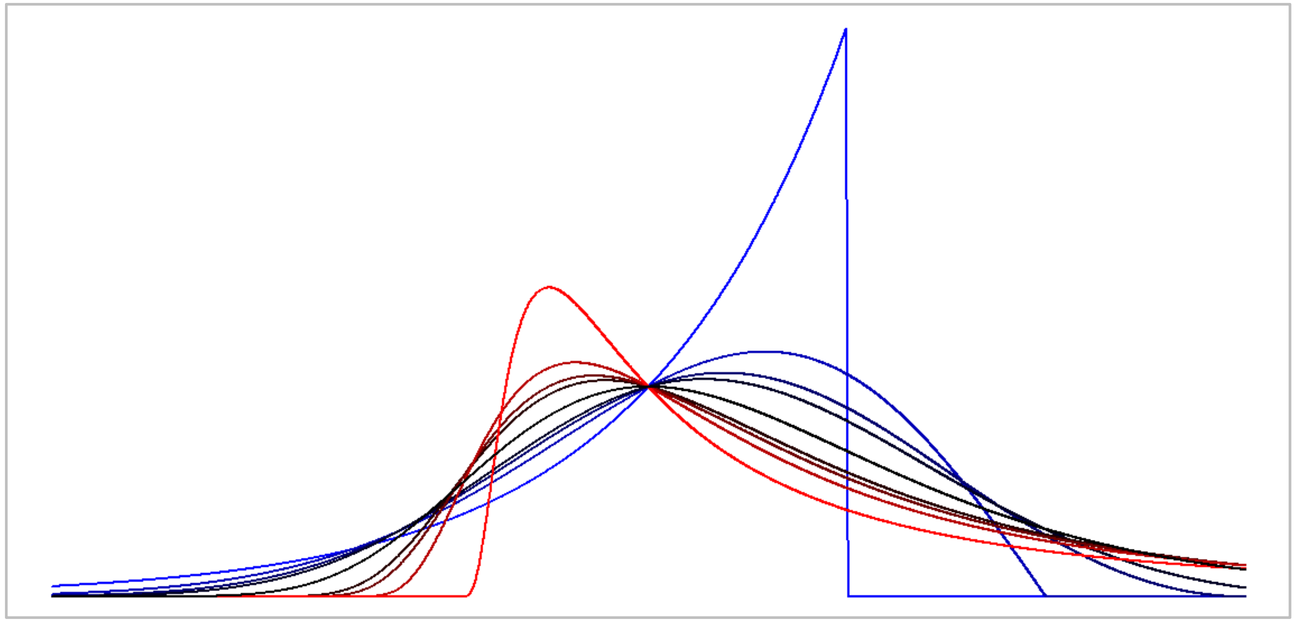
Die Extremwertverteilung (GEV)

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. Ψ_α, $\alpha := -\frac{1}{\xi}$ (endlicher rechter Rand)
  - $\xi = 0$: Gumbelvtlg. Λ (unbeschränkter Träger)
  - $\xi > 0$: Fréchetvtlg. Φ_α, $\alpha := \frac{1}{\xi}$ (schwerer Tail)

Dichte:



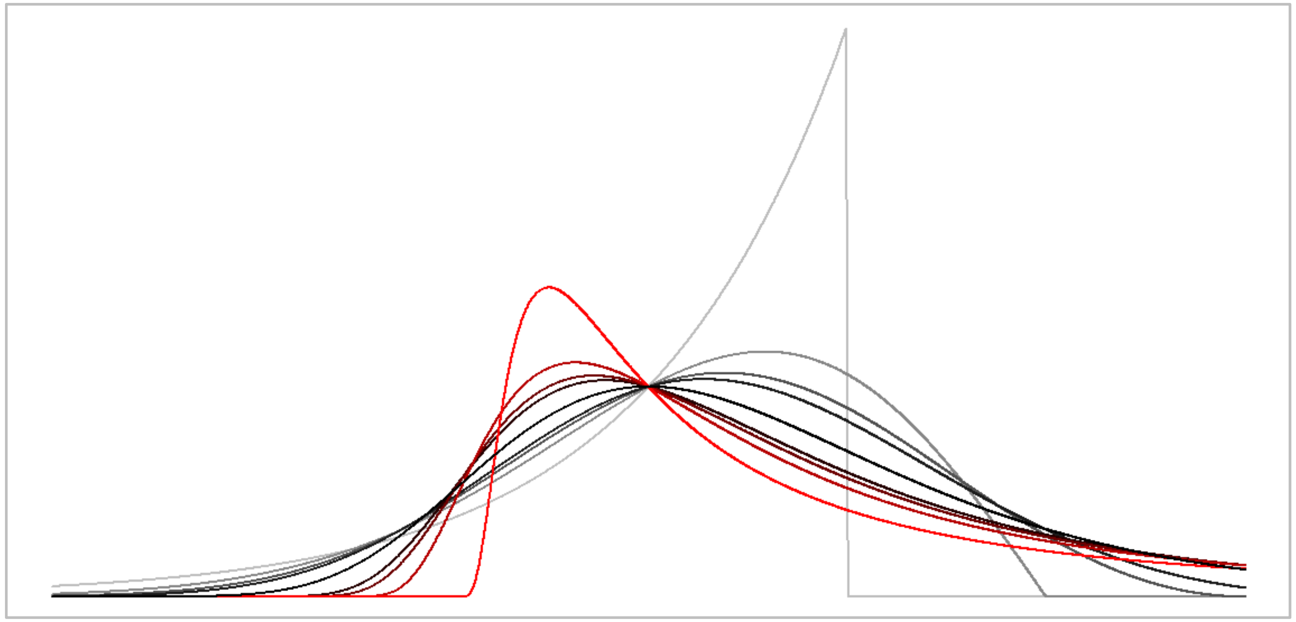
Die Fréchetverteilung

Allgemeine Extremwertverteilung (GEV) gegeben durch

$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

- Lageparameter μ
- Skalierungsparameter ψ
- Formparameter ξ
  - $\xi < 0$: Weibullvtlg. $\Psi_\alpha,\ \alpha := -\frac{1}{\xi}$ (endlicher rechter Rand)
  - $\xi = 0$: Gumbelvtlg. Λ (unbeschränkter Träger)
  - $\xi > 0$: Fréchetvtlg. $\Phi_\alpha,\ \alpha := \frac{1}{\xi}$ (schwerer Tail)

Dichte:



Hill-Schätzer

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1\ , X_2, \dots , X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Theorem 3.3.7 (Charakterisierung von MDA(Φ_α)):

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Theorem 3.3.7 (Charakterisierung von MDA(Φ_α)):

$F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$, L langsam variierend

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Theorem 3.3.7 (Charakterisierung von MDA(Φ_α)):

$$F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x), \ L \text{ langsam variierend}$$

Erinnerung (Kapitel 1.3 – Langsame Variation):

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Theorem 3.3.7 (Charakterisierung von MDA(Φ_α)):

$F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, L langsam variierend

Erinnerung (Kapitel 1.3 – Langsame Variation):

L langsam variierend $\quad :\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$ f.a. $t > 0$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Theorem 3.3.7 (Charakterisierung von MDA(Φ_α)):

$$F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha) \iff \overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x),\ L \text{ langsam variierend}$$

Erinnerung (Kapitel 1.3 – Langsame Variation):

$$L \text{ langsam variierend} \quad :\iff \quad \lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \ \text{ f.a. } \ t > 0$$

Schritte

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Theorem 3.3.7 (Charakterisierung von MDA(Φ_α)):

$$F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x),\ L \text{ langsam variierend}$$

Erinnerung (Kapitel 1.3 – Langsame Variation):

$$L \text{ langsam variierend} \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \ \text{ f.a. } t > 0$$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln X_j \right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Theorem 3.3.7 (Charakterisierung von MDA(Φ_α)):

$$F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha) \iff \overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x),\ L \text{ langsam variierend}$$

Erinnerung (Kapitel 1.3 – Langsame Variation):

$$L \text{ langsam variierend} \quad :\iff \quad \lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \ \text{ f.a. } t > 0$$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Erinnerung (Kapitel 3.3.1):

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Erinnerung (Kapitel 3.3.1):

Funktionen aus $\mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind „Pareto-ähnlich“, d.h.:

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Erinnerung (Kapitel 3.3.1):

Funktionen aus $\mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind „Pareto-ähnlich", d.h.:

$$\overline{F}(x) \sim C x^{-\alpha}, \qquad \text{für } x \to \infty$$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln X_j \right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u \right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Erinnerung (Kapitel 3.3.1):

Funktionen aus $\mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind „Pareto-ähnlich“,

d.h.:

$$\overline{F}(x) \sim C x^{-\alpha}, \qquad \text{für } x \to \infty$$

Theorem 4.1.3 (gem. Dichte v. oberen Ordnungsstat’en):

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Erinnerung (Kapitel 3.3.1):

Funktionen aus $\mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind „Pareto-ähnlich“,

d.h.:

$$\overline{F}(x) \sim Cx^{-\alpha}, \qquad \text{für } x \to \infty$$

Theorem 4.1.3 (gem. Dichte v. oberen Ordnungsstat'en):

F absolut stetig mit Dichte f, dann gilt:

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Erinnerung (Kapitel 3.3.1):

Funktionen aus $\mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind „Pareto-ähnlich“, d.h.:

$$\overline{F}(x) \sim C x^{-\alpha}, \qquad \text{für } x \to \infty$$

Theorem 4.1.3 (gem. Dichte v. oberen Ordnungsstat’en):

F absolut stetig mit Dichte f, dann gilt:

$$f_{X_{k,n},\dots,X_{1,n}}(x) = \tfrac{n!}{(n-k)!} F^{n-k}(x_k) \prod_{j=1}^{k} f(x_j), \qquad x_k < \dots < x_1$$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln X_j \right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u \right)^{-1}$$

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Erinnerung (Kapitel 3.3.1):

Funktionen aus $\mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind „Pareto-ähnlich“, d.h.:

$$\overline{F}(x) \sim C x^{-\alpha}, \qquad \text{für } x \to \infty$$

Theorem 4.1.3 (gem. Dichte v. oberen Ordnungsstat’en):

F absolut stetig mit Dichte f, dann gilt:

$$f_{X_{k,n},\dots,X_{1,n}}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} F^{n-k}(x_k) \prod_{j=1}^{k} f(x_j), \qquad x_k < \dots < x_1$$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln X_j \right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u \right)^{-1}$$

3) $\overline{F}$ wie allg. Pareto ab u

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

3) $\overline{F}$ wie allg. Pareto ab u

Hill-Schätzer

Annahmen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv gemäß $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

Ziel: Schätzer für $\alpha > 0$

Hill-Schätzer:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} := \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n}\right)^{-1}$$

mit $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Schritte

1) $L \equiv 1 \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)^{-1}$$

2) $L \equiv C = u^\alpha \Rightarrow$ MLE für α:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - \ln u\right)^{-1}$$

3) $\overline{F}$ wie allg. Pareto ab u

Hill-Schätzer (Eigenschaften)

Hill-Schätzer (Eigenschaften)

(X_n) strikt stationär mit Randverteilung $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} := \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}$$

Hill-Schätzer (Eigenschaften)

(X_n) strikt stationär mit Randverteilung $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} := \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}$$

Schwache Konsistenz

Für (X_n) uiv, schwach abh.
oder linearer Prozess

und $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha$$

Hill-Schätzer (Eigenschaften)

(X_n) strikt stationär mit Randverteilung $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} := \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}$$

Schwache Konsistenz

Für (X_n) uiv, schwach abh. oder linearer Prozess

und $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha$$

Starke Konsistenz

Für (X_n) uiv und

$\frac{k}{\ln \ln n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \alpha$$

Hill-Schätzer (Eigenschaften)

(X_n) strikt stationär mit Randverteilung $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} := \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}$$

Schwache Konsistenz

Für (X_n) uiv, schwach abh. oder linearer Prozess

und $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha$$

Starke Konsistenz

Für (X_n) uiv und

$\frac{k}{\ln \ln n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \alpha$$

Asymptotische Normalität:

Für (X_n) uiv und

mit zusätzlichen Bedingungen an F und k gilt:

$$\sqrt{k}\left(\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} - \alpha\right) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2)$$

Quelle

- **Modelling Extremal Events** (Kapitel 6.4.2)
  von P. Embrechts, C. Klüppelberg und T. Mikosch,
  erschienen 1997 im Springer-Verlag