25.6.2015 Lukas Graf

Parameterschätzung für die Verallgemeinerte Extremwertverteilung

(Teil II)

Modelling Extremal Events (Kapitel 6.4.2 – Methoden 1 und 2)

DEF (GEV): Die Verallgemeinerte Extremwertverteilung ist gegeben durch

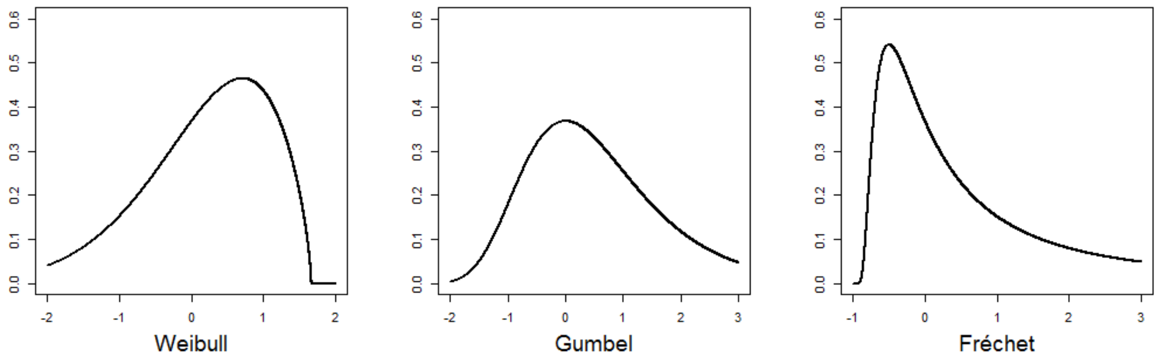
$$H_{\xi;\mu,\psi}(x) = \exp\left\{-\left(1+\xi\,\frac{x-\mu}{\psi}\right)^{-1/\xi}\right\}, \qquad x > \mu - \frac{\psi}{\xi}$$

mit Lageparameter μ, Skalierungsparameter ψ und Formparameter ξ.

- Weibullverteilung Ψ_α, $\alpha := -\frac{1}{\xi}$ für $\xi < 0$

  Verteilungen mit endlichem rechtem Endpunkt
- Gumbelverteilung Λ für $\xi = 0$
- Frèchetverteilung Φ_α, $\alpha := \frac{1}{\xi}$ für $\xi > 0$

  Verteilungen mit schwerem Tail



DEF: Sind $Z_1, Z_2, \ldots$ uiv $\sim G$. Dann gehört G zum *maximalen Anziehungsbereich* der Verteilungsfunktion H (d.h. $G \in MDA(H)$), wenn es $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{1}{c_n}\left(\max_{i\le n} Z_i - d_n\right) \xrightarrow{d} H$$

THEOREM (FISHER-TIPPETT): $H_{\xi;\mu,\psi}$ sind die einzigen nicht-degenerierten Verteilungen, die einen maximalen Anziehungsbereich besitzen.

ZIEL: Aus einer Stichprobe (von Maxima) wollen wir den Formparameter ξ schätzen.

Methode 1: Pickands-Schätzer

GEGEBEN: $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängig identisch verteilt gemäß $F \in MDA(H_\xi)$

GESUCHT: Schätzer für Formparameter ξ

MOTIVATION: Charakterisierung von Verteilungen in $F \in MDA(H_\xi)$ durch Theorem 3.4.5:

$$F \in MDA(H_\xi) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)-U(t)}{U(ty)-U(t)} = \begin{cases} \dfrac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & ,\xi \neq 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} & ,\xi = 0 \end{cases} \quad \text{f. a. } \; x, y > 0$$

DEF: Sei $X_1, X_2, \dots, X_n$ uiv. $\sim F \in MDA(H_\xi)$ und $X_{n,n}, \dots, X_{1,n}$ die entsprechende geordnete Stichprobe. Dann ist

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \;:=\; \log_2 \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}$$

der *Pickands-Schätzer* für den Formparameter ξ.

THEOREM: Sei $(k) := (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann hat der Pickands-Schätzer $\hat{\xi}_{k,n}^{(P)}$ die folgenden Eigenschaften:

1) Für $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt: $\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi$ (schwache Konsistenz)
2) Für $\frac{k}{\ln\ln n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt: $\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \xi$ (starke Konsistenz)
3) Für zusätzliche Bedingungen an k und F gilt:

$$\sqrt{k}\left(\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} - \xi\right) \xrightarrow{d} N(0, v(\xi))$$

(asymptotische Normalität)

Methode 2: Hill-Schätzer

GEGEBEN: $X_1, X_2, \dots, X_n$ (unabhängig) identisch verteilt gemäß $F \in MDA(\Phi_\alpha)$

GESUCHT: Schätzer für Formparameter α $(= \xi^{-1})$

MOTIVATION: Charakterisierung von Verteilungen in $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ durch Theorem 3.3.7:

$$F \in MDA(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x), \text{ mit } L \text{ langsam variierend}$$

und Erinnerung an Kapitel 3.3.1:

Funktionen aus $MDA(\Phi_\alpha)$ sind „Pareto-ähnlich“, d.h.:

$$\overline{F}(x) \sim Cx^{-\alpha}, \quad \text{für } x \to \infty$$

Dann finde MLE für C und α.

DEF: (X_n) strikt stationär mit Randverteilung $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ und $X_{n,n}, \dots, X_{1,n}$ die entsprechende geordnete Stichprobe. Dann ist

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} := \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}$$

der *Hill-Schätzer* für den Formparameter α.

THEOREM: Sei $(k) := (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann hat der Hill-Schätzer $\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$ die folgenden Eigenschaften:

1) Für (X_n) schwach abhängig, linearer Prozess oder unabhängig identisch verteilt und $k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha \qquad \text{(schwache Konsistenz)}$$

2) Für (X_n) unabhängig identisch verteilt und $\frac{k}{\ln \ln n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

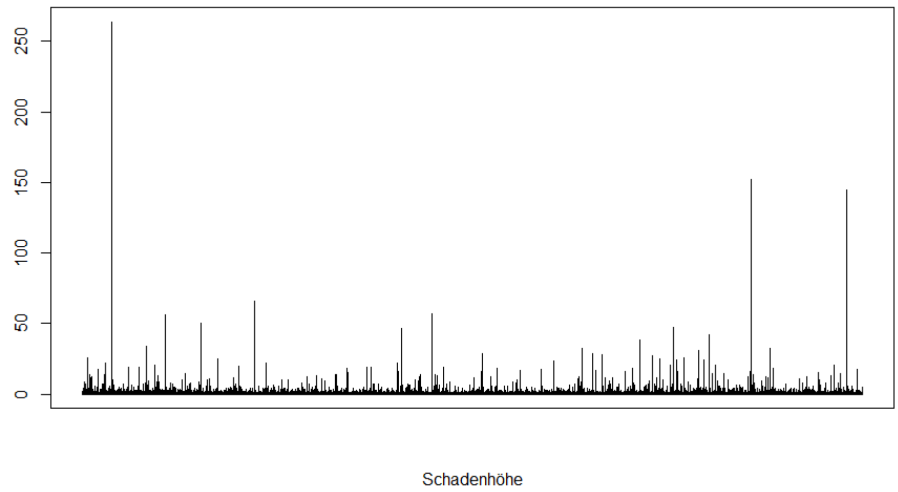
$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \alpha \qquad \text{(starke Konsistenz)}$$

3) Für zusätzliche Bedingungen an k und F gilt:

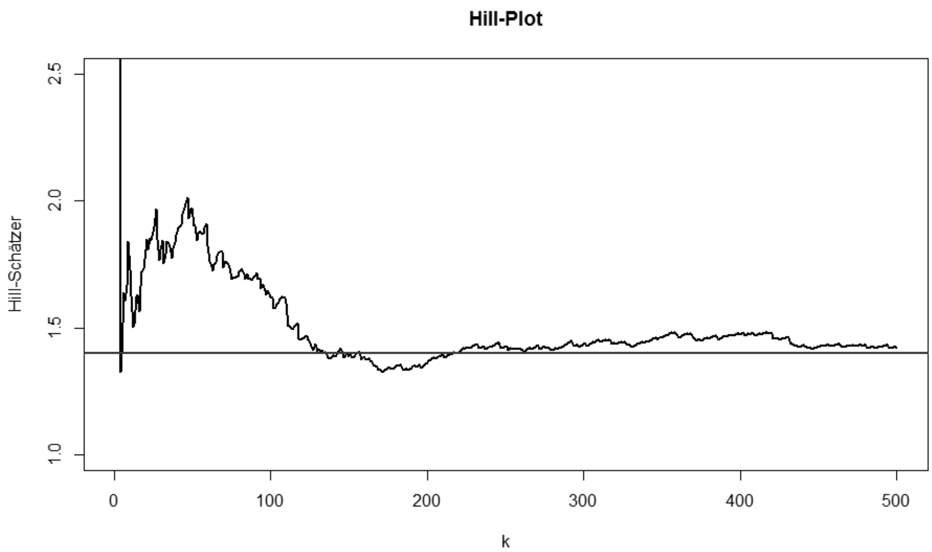
$$\sqrt{k}\left(\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} - \alpha\right) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2) \qquad \text{(asymptotische Normalität)}$$

Anwendung (Dänische Feuerschäden)

DATEN: ca. 2100 Schäden über 1 Million dänische Kronen in den Jahren 1980-1990 (http://www.macs.hw.ac.uk/~mcneil/ftp/DanishData.txt)



ANALYSE: Berechne Hill-Schätzer $\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$ für verschiedene k und erstelle *Hill-Plot*:



Wähle $\hat{\alpha}$ aus möglichst „stabilem" Bereich.

Ausführlichere Analyse dieser Daten in: http://www.macs.hw.ac.uk/~mcneil/ftp/astin.pdf