

## Übungsblatt 9 zur Algebraischen Zahlentheorie

### Aufgabe 1. Beispiele für interessantes Verzweigungsverhalten

Finde Beispiele für Galoiserweiterungen  $L|K$  von Zahlkörpern und Primideale  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$  mit  $\mathfrak{p} \neq (0)$ , für die

- in der Primidealzerlegung von  $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$  mindestens zwei Ideale vorkommen („ $r \geq 2$ “),
- die Primfaktoren mindestens Verzweigungsindex zwei haben („ $e \geq 2$ “),
- der gemeinsame Trägheitsgrad der Primfaktoren mindestens zwei ist („ $f \geq 2$ “).

*Präzisierung.* Finde drei einzelne Beispiele oder Beispiele, die mehrere der Wünsche erfüllen. Ganz wie du willst.

### Aufgabe 2. Faktorisierung in Zerlegungskörper und Trägheitskörper

Sei  $L|K$  eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern. Sei  $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_L$  ein Primideal mit  $\mathfrak{P} \neq (0)$ . Sei  $e := e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$  und  $f := f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$ . Zeige, dass wir den nebenstehenden Körperturm haben.

- Wieso liegt  $Z_{\mathfrak{P}}$  in  $T_{\mathfrak{P}}$ ?
- Wieso ist  $[L : Z_{\mathfrak{P}}] = ef$ ?
- Wieso ist  $T_{\mathfrak{P}}$  über  $Z_{\mathfrak{P}}$  normal und wieso ist  $\text{Gal}(T_{\mathfrak{P}}|Z_{\mathfrak{P}}) \cong \text{Gal}(\kappa(\mathfrak{P})|\kappa(\mathfrak{p}))$ ?
- Wieso ist  $[L : T_{\mathfrak{P}}] = e$  und wieso ist  $[T_{\mathfrak{P}} : Z_{\mathfrak{P}}] = f$ ?
- ♥ Sei  $\mathfrak{r} := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{T_{\mathfrak{P}}}$ . Sei  $\mathfrak{q} := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{Z_{\mathfrak{P}}}$ . Zeige  $\kappa(\mathfrak{r}) = \kappa(\mathfrak{P})$  und folgere:

$$e(\mathfrak{P}|\mathfrak{r}) = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}), \quad f(\mathfrak{P}|\mathfrak{r}) = 1, \quad e(\mathfrak{P}|\mathfrak{q}) = 1, \quad f(\mathfrak{P}|\mathfrak{q}) = f.$$

$$\begin{array}{c} L \\ \downarrow e \\ T_{\mathfrak{P}} \\ \downarrow f \\ Z_{\mathfrak{P}} \\ \downarrow r \\ K \end{array}$$

### Aufgabe 3. Ein Geheimnis der Zahl 5

- Sei  $x \in \mathbb{Z}$ . Sei  $p$  eine Primzahl. Zeige:  $\left(\frac{x}{p}\right) \equiv x^{(p-1)/2} \pmod{p}$ .
- Sei  $p$  eine Primzahl. Sei  $F_p$  die  $p$ -te Fibonaccizahl. Zeige:  $F_p \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \pmod{p}$ .

*Tipp.* Verwende die bekannte Formel  $F_n = (\Phi^n - \Psi^n)/(\Phi - \Psi)$ , wobei  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$  und  $\Psi = (1 - \sqrt{5})/2$ . Zwei ganze Zahlen teilen einander genau dann, wenn sie es in  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$  tun (wieso?).