

## Übungsblatt 7 zur Algebraischen Zahlentheorie

### Aufgabe 1. Dichtigkeit ganzzahliger Linearkombinationen

Sei  $x$  eine irrationale reelle Zahl. Zeige:  $\text{span}_{\mathbb{Z}}(1, x)$  liegt dicht in  $\mathbb{R}$ .

### Aufgabe 2. Auf den Spuren Fermats

Sei  $K$  ein Zahlkörper.

- Sei  $m \geq 0$  eine zur Klassenzahl  $h_K$  teilerfremde Zahl. Sei  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$  ein Ideal. Zeige: Ist  $\mathfrak{a}^m$  ein Hauptideal, so ist auch  $\mathfrak{a}$  ein Hauptideal.
- Gelte in  $\mathcal{O}_K$  die Identität  $z^p = x_1 \cdots x_n$ , wobei die  $x_i$  paarweise teilerfremd sind. Zeige: Ist  $h_K = 1$ , so sind die  $x_i$  bis auf Einheiten  $p$ -te Potenzen.  
*Hinweis.* Die Behauptung gilt in allgemeinen faktoriellen Ringen.
- Zeige dieselbe Behauptung wie in c) unter der schwächeren Voraussetzung  $p \nmid h_K$ .
- Zeige: Um Fermats großen Satz zu beweisen, genügt es, ihn für primzahlige Exponenten und für den Exponent 4 zu beweisen.

### Aufgabe 3. Verzweigung von Primidealen

Sei  $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ . Es ist  $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2)$  eine Ganzheitsbasis von  $\mathcal{O}_K$ . Bestimme das Verzweigungsverhalten der Primzahlen 2, 3, 5 und 11 in  $\mathcal{O}_K$ .

### Aufgabe 4. Mumfords Schatzkarte

Die unten stehende Skizze visualisiert die Primideale von  $\mathbb{Z}[X]$ . Was möchte sie dir mitteilen? Untersuche folgende Fragen:

- Welche Primideale sind jeweils zu vertikalen Linien gruppiert? Wieso?
- Was hat die mit „ $[(X^2 + 1)]$ “ beschriftete Kurve mit dem Verzweigungsverhalten von Primzahlen in  $\mathbb{Z}[i]$  zu tun?
- Kannst du auf analoge Art und Weise die Primideale von  $\mathcal{O}_K$  aus Aufgabe 2 visualisieren? Deine Skizze sollte aus zwei übereinander liegenden Kurven bestehen, wobei die untere Kurve einfach die gerade Linie der Primideale von  $\mathbb{Z}$  sein sollte.

