

## Übungsblatt 2 zur Zahlentheorie

### Aufgabe 1. *Zu erwartende und überraschende Ganzheit*

- a) Zeige, dass  $\sqrt{2}$  ganz über  $\mathbb{Z}$  ist.
- b) Zeige, dass  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  nicht ganz über  $\mathbb{Z}$  ist.
- c) Zeige, dass  $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$  ganz über  $\mathbb{Z}$  ist.

### Aufgabe 2. *Erste Schritte mit Norm und Spur*

Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle des Polynoms  $f(X) := X^3 - 2X + 5$ . Sei  $K := \mathbb{Q}[\alpha]$ . Berechne Norm und Spur des Elements  $2\alpha - 1 \in K$ .

### Aufgabe 3.

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $\zeta \in \mathbb{C}$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel (also  $\zeta^p = 1$  und  $\zeta \neq 1$ ). Sei  $K := \mathbb{Q}[\zeta]$ .

- a) Was ist die Norm von  $1 - \zeta \in K$ ?

*Hinweis.* Das Minimalpolynom von  $\zeta$  ist  $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ .

- b) Zeige, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Zahl  $\gamma_k := \frac{1 - \zeta^k}{1 - \zeta} \in K$  in  $\mathcal{O}_K$  liegt.
- c) Seien nun  $k$  und  $p$  zueinander teilerfremd. Zeige, dass  $\gamma_k$  sogar in  $\mathcal{O}_K^\times$  liegt.

Zwei weitere Aufgaben folgen gleich.