Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 13 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Triviales zu Bewertungen*

Sei $|\cdot|$ eine Bewertung auf einem Körper K.

a) Zeige, dass $|\cdot|$ genau dann die verschärfte Dreiecksungleichung $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ erfüllt, wenn für alle $x \in K$ aus $|x| \leq 1$ folgt, dass $|x+1| \leq 1$.

Gelte von nun an die verschärfte Dreiecksungleichung.

b) Seien $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$. Zeige, dass $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$.

c) Zeige, dass alle Dreiecke in K gleichschenklig sind.

Tipp. Dividiere durch $|x|$ oder $|y|$. Schreibe sowas wie „$|x + (y - x)|$".

Aufgabe 2. *Triviale Bewertungen*

Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung. Sei w eine Exponentialbewertung auf L, welche auf K trivial ist (d. h. $w(x) = 0$ für alle $x \in K^\times$). Zeige, dass w auf L trivial ist.

Aufgabe 3. *Charakterisierung nichtarchimedischer Bewertungen*

Sei $|\cdot|$ eine nichtarchimedische Bewertung auf einem Zahlkörper K.

a) Sei zunächst $K = \mathbb{Q}$. Zeige, dass es eine Primzahl p mit $|\cdot| = |\cdot|_p$ gibt.

b) Zeige, dass es ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $\mathfrak{p} \neq (0)$ und $|\cdot| = |\cdot|_\mathfrak{p}$ gibt.

Hinweis. Die Bewertung erfüllt die verschärfte Dreiecksungleichung. Zeige zunächst, dass $|x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Zeige dann, dass $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$ ein nichttriviales Primideal von $\mathbb{Z}$ ist. Es ist also von der Form (p) für eine Primzahl p. Für diese Primzahl p kannst die Behauptung nachweisen. Der Beweis im allgemeinen Fall verläuft analog, mit $\mathcal{O}_K$ statt $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. *Bewertung irreduzibler Polynome*

Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper. Sei $\mathcal{O} := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ sein Bewertungsring. Sei $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom.

a) Zeige, dass $|f(X)| = \max\{|a_0|, |a_n|\}$.

Hinweis. Nach Definition ist $|f(X)| = \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\}$. Verwende Hensels Lemma in seiner allgemeinen Formulierung.

b) Folgere: Ist $f(X)$ normiert und $a_0 \in \mathcal{O}$, so gilt schon $f(X) \in \mathcal{O}[X]$.

Aufgabe 5. *Fortsetzung von Bewertungen*

Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper K. Sei $L|K$ eine Erweiterung vom Grad n. Zeige, dass die Setzung $|x| := \sqrt[n]{|N_{L|K}(x)|}$ für $x \in L$ eine Bewertung auf L definiert, welche die gegebene Bewertung auf K fortsetzt.

Tipp. Zeige zunächst, dass der ganze Abschluss des Bewertungsrings $\mathcal{O}_K$ von K in L gleich $\{x \in L \mid N_{L|K}(x) \in \mathcal{O}_K\}$ ist. Verwende dazu die bekannte Formel, die Norm und den konstanten Koeffizienten des Minimalpolynoms miteinander in Beziehung setzt. Die Inklusion „$\subseteq$" wurde schon vor langer Zeit behandelt. Nutze für die andere Inklusion die Folgerung aus der vorherigen Teilaufgabe.