Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Schnee-im-April-Semester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 5 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Dedekindringe mit nur endlich vielen Primidealen*

Sei A ein Dedekindring, der nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \neq (0)$ hat. Begründe kurz:

a) Es gibt ein Element $\pi \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_1^2$.

b) Es gibt ein Element $x \in A$ mit $x \equiv \pi \mod \mathfrak{p}_1$ und $x \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_k$ für $k \geq 2$.

c) Für dieses Element gilt $\mathfrak{p}_1 = (x)$.

d) Alle Ideale von A sind Hauptideale.

Aufgabe 2. *Ideale und Faktorringe von Dedekindringen*

Sei A ein Dedekindring.

a) Sei $\mathfrak{p} \in A$ ein Primideal. Sei $m \geq 0$. Zeige, dass $A/\mathfrak{p}^m$ ein Hauptidealring ist.

b) Sei $\mathfrak{a} \in A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \neq (0)$. Zeige, dass $A/\mathfrak{a}$ ein Hauptidealring ist.

c) Sei $\mathfrak{a} \in A$ ein Ideal. Sei $x \in \mathfrak{a}$ mit $x \neq 0$. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ von zwei Elementen erzeugt werden kann, von denen eines x ist.

Hinweis. In einem Faktorring $A/\mathfrak{b}$ gibt es genau so viele Primideale, wie es Primideale in A gibt, welche $\mathfrak{b}$ umfassen. Erinnere dich an den chinesischen Restsatz.

Aufgabe 3. *Beispiel für eine Volumenberechnung*

Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$. Sei $\mathfrak{p} := (3, 1 + 2\sqrt{-5}) \subseteq \mathcal{O}_K$. Bestimme das Volumen des vollständigen Gitters $j[\mathfrak{p}] \subseteq K_\mathbb{R}$, wobei $j : K \hookrightarrow K_\mathbb{R}$ die Einbettung in den Minkowskiraum ist.

Bemerkung. Es gibt eine Formel für das Volumen, die sofort den Wert $6\sqrt{5}$ liefert. Aber es ist spannender, das Volumen per Hand zu berechnen.

Aufgabe 4. *Charakterisierung von Gittern*

a) Zeige, dass eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gitter ist, wenn sie diskret ist (wenn jeder Punkt $\gamma \in \Gamma$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $U \cap \Gamma = \{\gamma\}$ besitzt).

Hinweis. Wähle für die Rückrichtung eine maximale über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Familie $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ von Vektoren aus Γ; setze $\Gamma_0 := \operatorname{span}_\mathbb{Z}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$; zeige, dass $q := |\Gamma/\Gamma_0|$ endlich ist (überlege dir dazu, wie die Äquivalenzklassen in Γ/Γ_0 aussehen); folgere, dass $q\Gamma \subseteq \Gamma_0$; und zeige damit die Behauptung.

b) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Zahlkörper vom Grad ≥ 3. Folgere, dass es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein Element $a \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ gibt, dessen komplexer Betrag kleiner als ε ist.

♡ **Aufgabe 5.** *Dedekindringe mit Klassenzahl 1*

Zeige, dass ein Dedekindring genau dann faktoriell ist, wenn er ein Hauptidealbereich ist.

Hinweis. Zeige für die Hinrichtung, dass jedes von Null verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist. Fixiere dazu ein Element $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ und zerlege zum einen das Ideal (π) in Primideale (welches Ideal kommt dabei sicher vor?) und zum anderen das Element π in Primfaktoren.

♡ **Aufgabe 6.** *Geradenbündel über dem Spektrum von Ganzheitsringen*

Sei K ein Zahlkörper. Zeige: Die gebrochenen Ideale von K sind als $\mathcal{O}_K$-Moduln projektiv.