Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Schnee-im-April-Semester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 3 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Beispiel für ein Primelement in einem Ganzheitsring*

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel (also etwa $\zeta = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$). Sei $K := \mathbb{Q}[\zeta]$.

a) Zeige: $\mathcal{O}_K^\times = \{\pm 1, \pm\zeta, \pm\zeta^2\}$.

b) Zeige, dass $\lambda := 1 - \zeta \in \mathcal{O}_K$ in $\mathcal{O}_K$ prim ist.

c) Zeige, dass 3 und λ^2 in $\mathcal{O}_K$ zueinander assoziiert sind.

Aufgabe 2. *Beispiel zur Diskriminantenberechnung*

Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. Berechne die Diskriminante der $\mathbb{Q}$-Basis $(1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}^2)$ von K.

Aufgabe 3. *Eine allgemeine Formel für die Diskriminante*

a) Sei $K = \mathbb{Q}[\vartheta]$ ein Zahlkörper vom Grad n. Sei $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von ϑ. Zeige:

$$d(1, \vartheta, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot N_{K|\mathbb{Q}}(p'(\vartheta)).$$

b) Sei p eine Primzahl und sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel. Folgere:

$$d(1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2}) = (-1)^{(p-1)(p-2)/2} \cdot p^{p-2}.$$

Aufgabe 4. *Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen einer Ganzheitsbasis*

Sei K ein Zahlkörper. Sei B eine $\mathbb{Q}$-Basis von K, deren Elemente schon in $\mathcal{O}_K$ liegen; damit ist ihre Diskriminante d ganzzahlig. Zeige: Ist d quadratfrei, so ist B eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 5. *Ein erster Ausblick auf Verzweigung von Primidealen*

Ist das Ideal $(3, 1 + 2\sqrt{-5})$ von $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]}$ prim? Ist es sogar maximal?