

## Übungsblatt 13 zur Algebraischen Zahlentheorie

### Aufgabe 1. *Triviales zu Bewertungen*

Sei  $|\cdot|$  eine Bewertung auf einem Körper  $K$ .

- a) Zeige, dass  $|\cdot|$  genau dann die verschärfte Dreiecksungleichung  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$  erfüllt, wenn für alle  $x \in K$  aus  $|x| \leq 1$  folgt, dass  $|x + 1| \leq 1$ .

Gelte von nun an die verschärfte Dreiecksungleichung.

- b) Seien  $x, y \in K$  mit  $|x| \neq |y|$ . Zeige, dass  $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$ .  
c) Zeige, dass alle Dreiecke in  $K$  gleichschenkelig sind.

*Tipp.* Dividiere durch  $|x|$  oder  $|y|$ . Schreibe sowas wie „ $|x + (y - x)|$ “.

### Aufgabe 2. *Triviale Bewertungen*

Sei  $L|K$  eine algebraische Körpererweiterung. Sei  $w$  eine Exponentialbewertung auf  $L$ , welche auf  $K$  trivial ist (d. h.  $w(x) = 0$  für alle  $x \in K^\times$ ). Zeige, dass  $w$  auf  $L$  trivial ist.

### Aufgabe 3. *Charakterisierung nichtarchimedischer Bewertungen*

Sei  $|\cdot|$  eine nichtarchimedische Bewertung auf einem Zahlkörper  $K$ .

- a) Sei zunächst  $K = \mathbb{Q}$ . Zeige, dass es eine Primzahl  $p$  mit  $|\cdot| = |\cdot|_p$  gibt.  
b) Zeige, dass es ein Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$  mit  $\mathfrak{p} \neq (0)$  und  $|\cdot| = |\cdot|_{\mathfrak{p}}$  gibt.

*Hinweis.* Die Bewertung erfüllt die verschärfte Dreiecksungleichung. Zeige zunächst, dass  $|x| \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{Z}$ . Zeige dann, dass  $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$  ein nichttriviales Primideal von  $\mathbb{Z}$  ist. Es ist also von der Form  $(p)$  für eine Primzahl  $p$ . Für diese Primzahl  $p$  kannst die Behauptung nachweisen. Der Beweis im allgemeinen Fall verläuft analog, mit  $\mathcal{O}_K$  statt  $\mathbb{Z}$ .

### Aufgabe 4. *Bewertung irreduzibler Polynome*

Sei  $K$  ein vollständig diskret bewerteter Körper. Sei  $\mathcal{O} := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$  sein Bewertungsring. Sei  $f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in K[X]$  ein irreduzibles Polynom.

- a) Zeige, dass  $|f(X)| = \max\{|a_0|, |a_n|\}$ .

*Hinweis.* Nach Definition ist  $|f(X)| = \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}$ . Verwende Hensels Lemma in seiner allgemeinen Formulierung.

- b) Folgere: Ist  $f(X)$  normiert und  $a_0 \in \mathcal{O}$ , so gilt schon  $f(X) \in \mathcal{O}[X]$ .

### Aufgabe 5. *Fortsetzung von Bewertungen*

Sei  $K$  ein vollständig diskret bewerteter Körper  $K$ . Sei  $L|K$  eine Erweiterung vom Grad  $n$ . Zeige, dass die Setzung  $|x| := \sqrt[n]{|N_{L|K}(x)|}$  für  $x \in L$  eine Bewertung auf  $L$  definiert, welche die gegebene Bewertung auf  $K$  fortsetzt.

*Tipp.* Zeige zunächst, dass der ganze Abschluss des Bewertungsringes  $\mathcal{O}_K$  von  $K$  in  $L$  gleich  $\{x \in L \mid N_{L|K}(x) \in \mathcal{O}_K\}$  ist. Verwende dazu die bekannte Formel, die Norm und den konstanten Koeffizienten des Minimalpolynoms miteinander in Beziehung setzt. Die Inklusion „ $\subseteq$ “ wurde schon vor langer Zeit behandelt. Nutze für die andere Inklusion die Folgerung aus der vorherigen Teilaufgabe.