

## Übungsblatt 3 zur Algebraischen Zahlentheorie

### Aufgabe 1. Beispiel für ein Primelement in einem Ganzheitsring

Sei  $\zeta \in \mathbb{C}$  eine primitive dritte Einheitswurzel (also etwa  $\zeta = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ ). Sei  $K := \mathbb{Q}[\zeta]$ .

- a) Zeige:  $\mathcal{O}_K^\times = \{\pm 1, \pm \zeta, \pm \zeta^2\}$ .
- b) Zeige, dass  $\lambda := 1 - \zeta \in \mathcal{O}_K$  in  $\mathcal{O}_K$  prim ist.
- c) Zeige, dass 3 und  $\lambda^2$  in  $\mathcal{O}_K$  zueinander assoziiert sind.

### Aufgabe 2. Beispiele zur Diskriminantenberechnung

- a) Sei  $K := \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ . Berechne die Diskriminante der  $\mathbb{Q}$ -Basis  $(1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}^2)$  von  $K$ .
- b) Sei  $d \in \mathbb{Z}$  quadratfrei. Bestimme die Diskriminante der Basis  $(1, \sqrt{d})$  bzw.  $(1, \frac{1+\sqrt{d}}{2})$  von  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  (je nach Fall).

### Aufgabe 3. Eine allgemeine Formel für die Diskriminante

- a) Sei  $K = \mathbb{Q}[\vartheta]$  ein Zahlkörper vom Grad  $n$ . Sei  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$  das Minimalpolynom von  $\vartheta$ . Zeige:

$$d(1, \vartheta, \vartheta^2, \dots, \vartheta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot N_{K|\mathbb{Q}}(p'(\vartheta)).$$

- b) Sei  $p$  eine Primzahl und sei  $\zeta$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel. Folgere:

$$d(1, \zeta, \dots, \zeta^{p-2}) = (-1)^{(p-1)(p-2)/2} \cdot p^{p-2}.$$

### Aufgabe 4. Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen einer Ganzheitsbasis

Sei  $K$  ein Zahlkörper. Sei  $B$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $K$ , deren Elemente schon in  $\mathcal{O}_K$  liegen; damit ist ihre Diskriminante  $d$  ganzzahlig. Zeige: Ist  $d$  quadratfrei, so ist  $B$  eine Ganzheitsbasis von  $\mathcal{O}_K$ .

### Aufgabe 5. Ein erster Ausblick auf Verzweigung von Primidealen

Ist das Ideal  $(3, 1 + 2\sqrt{-5})$  von  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]}$  prim? Ist es sogar maximal?