

Übungsblatt 6 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. Klassenzahlberechnungen

- a) Zeige, dass die quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ für $d \in \{-7, -3, -2, -1, 2, 3, 5\}$ die Klassenzahl 1 besitzen.
- b) Zeige, dass auch $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ die Klassenzahl 1 besitzt.
- c) Was ist die Klassenzahl von $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$?

Aufgabe 2. Eine Schranke für die Diskriminante

- a) Sei K ein Zahlkörper vom Grad n . Sei d_K die Diskriminante einer Ganzheitsbasis. Zeige:

$$|d_K| \geq (n^n/n!)^2 \cdot (\pi/4)^n.$$

- b) Zeige: Bis auf \mathbb{Q} selbst gibt es keinen Zahlkörper mit $|d_K| = 1$.

Aufgabe 3. Wir mögen Hauptideale

- a) Sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Ideal. Sei $\mathfrak{a}^m = (\alpha)$ für ein $\alpha \in \mathcal{O}_K$ und eine Zahl $m \geq 0$. Sei $L := K(\sqrt[m]{\alpha})$. Zeige, dass das Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ von \mathcal{O}_L ein Hauptideal ist.

Hinweis. Nur um Missverständnissen vorzubeugen, das Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ besteht aus allen \mathcal{O}_L -Linearkombinationen von Elementen aus \mathfrak{a} .

- b) Sei K ein Zahlkörper. Finde eine endliche Erweiterung L von K , sodass jedes Ideal von \mathcal{O}_K in \mathcal{O}_L zu einem Hauptideal wird (im gleichen Sinn wie in a)).

Hinweis. Versuche, „die Klassengruppe zu töten“.