Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Schnee-im-April-Semester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 5 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Ideale und Faktorringe von Dedekindringen*

Sei A ein Dedekindring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

a) Zeige: Der Faktorring $A/\mathfrak{a}$ ist ein Hauptidealring, falls $\mathfrak{a} \neq (0)$.

b) Zeige: Das Ideal $\mathfrak{a}$ lässt sich durch zwei Elemente erzeugen.

Aufgabe 2. *Beispiel für eine Volumenberechnung*

Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$. Sei $\mathfrak{p} := (3, 1 + 2\sqrt{-5}) \subseteq \mathcal{O}_K$. Bestimme das Volumen des vollständigen Gitters $j[\mathfrak{p}] \subseteq K_\mathbb{R}$, wobei $j : K \hookrightarrow K_\mathbb{R}$ die Einbettung in den Minkowskiraum ist.

Aufgabe 3. *Charakterisierung von Gittern*

Zeige, dass eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gitter ist, wenn sie diskret ist (wenn also zu jedem Punkt $\gamma \in \Gamma$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von γ mit $U \cap \Gamma = \{\gamma\}$ existiert).

Aufgabe 4. *Undiskretheit von Ganzheitsringen*

Sei K ein Zahlkörper vom Grad ≥ 3. Zeige, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element $a \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ existiert, dessen komplexer Betrag kleiner als ε ist.

♡ **Aufgabe 5.** *Geradenbündel über dem Spektrum von Ganzheitsringen*

Sei A ein Dedekindring. Zeige: Die gebrochenen Ideale von K sind als A-Moduln projektiv.