

Übungsblatt 6 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. Klassenzahlberechnungen

- Zeige, dass die quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ für $d \in \{-7, -3, -2, -1, 2, 3, 5\}$ die Klassenzahl 1 besitzen.
- Zeige, dass auch $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ die Klassenzahl 1 besitzt.
- Was ist die Klassenzahl von $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$?

Aufgabe 2. Eine Schranke für die Diskriminante

- Sei K ein Zahlkörper vom Grad n . Sei d_K die Diskriminante einer Ganzheitsbasis. Zeige:

$$|d_K| \geq (n^n/n!)^2 \cdot (\pi/4)^n.$$

- Zeige: Bis auf \mathbb{Q} selbst gibt es keinen Zahlkörper mit $|d_K| = 1$.

Aufgabe 3. Verzweigung von Primidealen

- Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Es ist $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2)$ eine Ganzheitsbasis von \mathcal{O}_K . Bestimme das Verzweigungsverhalten der Primzahlen 2, 3, 5 und 11 in \mathcal{O}_K .
- Was möchte dir *Mumfords Schatzkarte* mitteilen? Analysiere sie so gut wie möglich!

