Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 10 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Das inverse galoissche Problem im abelschen Fall*

a) Sei $n \geq 1$. Finde eine galoissche Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(n)$.

Hinweis. Finde nach Dirichlets Satz eine Primzahl p mit $p \equiv 1$ modulo n und konstruiere K als geeigneten Fixkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ über $\mathbb{Q}$.

b) Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Finde eine galoissche Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong A$.

Hinweis. Wir können $A \cong \mathbb{Z}/(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_r)$ schreiben und nach Dirichlets Satz *verschiedene* Primzahlen p_i mit $p_i \equiv 1$ modulo n_i finden. Wir können dann die gesuchte Erweiterung K als den Fixkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_{p_1} \cdots \zeta_{p_r})|\mathbb{Q}$ bezüglich einer geeigneten Untergruppe seiner Galoisgruppe finden. Diese ist unkanonisch isomorph zu $\mathbb{Z}/(p_1 - 1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_r - 1)$.

c) Löse Teilaufgabe b) für nichtkommutative endliche Gruppen.

Aufgabe 2. *Für Matthias S.*

Seien p und q Primzahlen mit $p \neq q$. Seien ζ_p und ζ_q entsprechende primitive Einheitswurzeln.

♡ a) Erinnere dich, wie man für $n \geq 1$ zeigt, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/(n))^\times$.

a) Zeige: $\mathbb{Q}(\zeta_p, \zeta_q) = \mathbb{Q}(\zeta_{pq})$.

Hinweis. Dein Beweis zeigt allgemeiner, dass $\mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{kgV}(n,m)})$.

b) Zeige: $\mathbb{Q}(\zeta_p) \cap \mathbb{Q}(\zeta_q) = \mathbb{Q}$.

Hinweis. Auch diese Behauptung gilt allgemeiner (mit ggT statt kgV), ist dann aber etwas komplizierter zu beweisen. Es gibt mehrere Beweise der spezialisierten Behauptung. Interessant ist zum Beispiel folgender: Erinnere dich, dass sich p in $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ mit $r = f = 1$ zerlegt. Zeige, dass sich p in $\mathbb{Q}(\zeta_q)$ mit $e = 1$ zerlegt. Folgere, dass sich p in $\mathbb{Q}(\zeta_p) \cap \mathbb{Q}(\zeta_q)$ mit $r = e = f = 1$ zerlegt. Wieso genügt das?

♡ **Aufgabe 3.** *Eine Knobelaufgabe vom Erfinders des Blogs*

Für welche Primzahlen p ist $1/p$ ein Dezimalbruch mit Periodenlänge 10?