Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Schnee-im-April-Semester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 4 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Ein zweiter Ausblick auf Verzweigung von Primidealen*

Sei $\mathfrak{q} := (11) \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$.

a) Zeige, dass $\mathfrak{q}$ ein Primideal ist.

b) Berechne den Grad $[\mathcal{O}_K/\mathfrak{q} : \mathbb{Z}/(11)]$.

Aufgabe 2. *Ein Kriterium für die Trägheit eines Primideals*

Sei p eine Primzahl. Sei d quadratfrei und $K := \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

a) Zeige: Wenn die Kongruenz $x^2 \equiv d \mod p$ unlösbar ist, dann ist $(p) \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Primideal.

b) Zeige, dass auch die Umkehrung der Aussage aus a) gilt, falls p ungerade ist.

Hinweis. Ist $f \in \mathbb{F}_p[X]$ ein quadratisches Polynom, so ist der Ring $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ genau dann ein Integritätsbereich, wenn f keine Nullstelle modulo p besitzt.

Aufgabe 3. *Eine Einschränkung an Diskriminanten von Zahlkörpern*

Sei d die Diskrimante einer Ganzheitsbasis eines beliebigen Zahlkörpers. Zeige, dass d modulo 4 gleich 0 oder 1 ist.

Aufgabe 4. *Ein Konstruktionsverfahren für Ganzheitsbasen*

Sei $K := \mathbb{Q}[\vartheta]$ ein Zahlkörper vom Grad n und d die Diskriminante der Basis $(1, \vartheta, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^{n-1})$. Für $i = 0, \ldots, n-1$ wählen wir aus der endlichen Menge

$$B_i := \{x \in \mathcal{O}_K \,|\, x = \tfrac{1}{d}(a_0 + a_1\vartheta + \cdots + a_i\vartheta^i) \text{ für gewisse } a_0, \ldots, a_i \in \mathbb{Z} \text{ mit } a_i \neq 0\}$$

ein Element x_i mit minimalem Betrag des Koeffizienten a_{i-1}. Zeige, dass $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ ist.

Aufgabe 5. *Wir suchen eine Ganzheitsbasis*

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^3 - X - 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $K := \mathbb{Q}[\alpha]$. Finde eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

Hierzu folgt noch ein Hinweis.

♡ **Aufgabe 6.** *Der mystische Körper mit einem Element*

Folgt noch und ist nur zum Spaß.