

## Übungsblatt 5 zur Algebraischen Zahlentheorie

### Aufgabe 1. Dedekindringe mit nur endlich vielen Primidealen

Sei  $A$  ein Dedekindring, der nur endlich viele Primideale  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  besitzt. Begründe kurz:

- Es gibt ein Element  $\pi \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_1^2$ .
- Es gibt ein Element  $x \in A$  mit  $x \equiv \pi \pmod{\mathfrak{p}_1}$  und  $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_k}$  für  $k \geq 2$ .
- Für dieses Element gilt  $\mathfrak{p}_1 = (x)$ .
- Alle Ideale von  $A$  sind Hauptideale.

### Aufgabe 2. Ideale und Faktorringer von Dedekindringen

Sei  $A$  ein Dedekindring.

- Sei  $\mathfrak{p} \in A$  ein Primideal. Sei  $m \geq 0$ . Zeige, dass  $A/\mathfrak{p}^m$  ein Hauptidealring ist.
- Sei  $\mathfrak{a} \in A$  ein Ideal mit  $\mathfrak{a} \neq (0)$ . Zeige, dass  $A/\mathfrak{a}$  ein Hauptidealring ist.
- Sei  $\mathfrak{a} \in A$  ein Ideal. Sei  $x \in \mathfrak{a}$  mit  $x \neq 0$ . Zeige, dass  $\mathfrak{a}$  von zwei Elementen erzeugt werden kann, von denen eines  $x$  ist.

*Hinweis.* In einem Faktoring  $A/\mathfrak{b}$  gibt es genau so viele Primideale, wie es Primideale in  $A$  gibt, welche  $\mathfrak{b}$  umfassen. Erwähne dich an den chinesischen Restsatz.

### Aufgabe 3. Beispiel für eine Volumenberechnung

Sei  $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ . Sei  $\mathfrak{p} := (3, 1 + 2\sqrt{-5}) \subseteq \mathcal{O}_K$ . Bestimme das Volumen des vollständigen Gitters  $j[\mathfrak{p}] \subseteq K_{\mathbb{R}}$ , wobei  $j : K \hookrightarrow K_{\mathbb{R}}$  die Einbettung in den Minkowskiraum ist.

*Bemerkung.* Es gibt eine Formel für das Volumen, die sofort den Wert  $6\sqrt{5}$  liefert. Aber es ist spannender, das Volumen per Hand zu berechnen.

### Aufgabe 4. Charakterisierung von Gittern

- Zeige, dass eine Untergruppe  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  genau dann ein Gitter ist, wenn sie diskret ist (wenn jeder Punkt  $\gamma \in \Gamma$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $U \cap \Gamma = \{\gamma\}$  besitzt).

*Hinweis.* Wähle für die Rückrichtung eine maximale über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige Familie  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  von Vektoren aus  $\Gamma$ ; setze  $\Gamma_0 := \text{span}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ; zeige, dass  $q := |\Gamma/\Gamma_0|$  endlich ist (überlege dir dazu, wie die Äquivalenzklassen in  $\Gamma/\Gamma_0$  aussehen); folgere, dass  $q\Gamma \subseteq \Gamma_0$ ; und zeige damit die Behauptung.

- Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  ein Zahlkörper vom Grad  $\geq 3$ . Folgere, dass es zu jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  ein Element  $a \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$  gibt, dessen komplexer Betrag kleiner als  $\varepsilon$  ist.

### ♥ Aufgabe 5. Dedekindringe mit Klassenzahl 1

Zeige, dass ein Dedekindring genau dann faktoriell ist, wenn er ein Hauptidealbereich ist.

*Hinweis.* Zeige für die Hinrichtung, dass jedes von Null verschiedene Primideal  $\mathfrak{p}$  ein Hauptideal ist. Fixiere dazu ein Element  $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$  und zerlege zum einen das Ideal  $(\pi)$  in Primideale (welches Ideal kommt dabei sicher vor?) und zum anderen das Element  $\pi$  in Primfaktoren.

### ♥ Aufgabe 6. Geradenbündel über dem Spektrum von Ganzheitsringen

Sei  $K$  ein Zahlkörper. Zeige: Die gebrochenen Ideale von  $K$  sind als  $\mathcal{O}_K$ -Moduln projektiv.