Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 9 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Beispiele für interessantes Verzweigungsverhalten*

Finde Beispiele für Galoiserweiterungen $L|K$ von Zahlkörpern und Primideale $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $\mathfrak{p} \neq (0)$, für die

a) in der Primidealzerlegung von $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ mindestens zwei Ideale vorkommen („$r \geq 2$“),

b) die Primfaktoren mindestens Verzweigungsindex zwei haben („$e \geq 2$“),

c) der gemeinsame Trägheitsgrad der Primfaktoren mindestens zwei ist („$f \geq 2$“).

Präzisierung. Finde drei einzelne Beispiele oder Beispiele, die mehrere der Wünsche erfüllen. Ganz wie du willst.

Aufgabe 2. *Faktorisierung in Zerlegungskörper und Trägheitskörper*

Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern. Sei $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_L$ ein Primideal mit $\mathfrak{P} \neq (0)$. Sei $e := e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$ und $f := f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$. Zeige, dass wir den nebenstehenden Körperturm haben.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "e"] \\ T_{\mathfrak{P}} \arrow[d, dash, "f"] \\ Z_{\mathfrak{P}} \arrow[d, dash, "r"] \\ K \end{tikzcd}$$

a) Wieso liegt $Z_{\mathfrak{P}}$ in $T_{\mathfrak{P}}$?

b) Wieso ist $[L : Z_{\mathfrak{P}}] = ef$?

c) Wieso ist $T_{\mathfrak{P}}$ über $Z_{\mathfrak{P}}$ normal und wieso ist $\mathrm{Gal}(T_{\mathfrak{P}}|Z_{\mathfrak{P}}) \cong \mathrm{Gal}(\kappa(\mathfrak{P})|\kappa(\mathfrak{p}))$?

d) Wieso ist $[L : T_{\mathfrak{P}}] = e$ und wieso ist $[T_{\mathfrak{P}} : Z_{\mathfrak{P}}] = f$?

♡ e) Sei $\mathfrak{r} := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{T_{\mathfrak{P}}}$. Sei $\mathfrak{q} := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{Z_{\mathfrak{P}}}$. Zeige $\kappa(\mathfrak{r}) = \kappa(\mathfrak{P})$ und folgere:

$$e(\mathfrak{P}|\mathfrak{r}) = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}), \quad f(\mathfrak{P}|\mathfrak{r}) = 1, \quad e(\mathfrak{r}|\mathfrak{q}) = 1, \quad f(\mathfrak{r}|\mathfrak{q}) = f.$$

Aufgabe 3. *Ein Spezialfall von Dirichlets Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen*

Sei n eine positive natürliche Zahl. Sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom. Seien $p_1, \ldots, p_r$ Primzahlen mit $p_i \equiv 1$ modulo n. Sei P das Produkt dieser Primzahlen.

a) Zeige, dass es eine natürliche Zahl ℓ gibt, sodass $N := \Phi_n(\ell n P)$ größer als Eins ist.

b) Zeige, dass N einen Primfaktor q enthält, welcher ungleich allen p_i ist.

Tipp. Es gilt $\Phi_n(0) = \pm 1$ (wieso?). Was ist daher N modulo den p_i?

c) Weise nach, dass $\ell n P$ modulo q invertierbar ist und in $\mathbb{F}_q^\times$ Ordnung n besitzt.

d) Zeige, dass $q \equiv 1$ modulo n.

♡ e) Extrahiere aus diesem Beweis von Dirichlets Satz eine obere Schranke für die Größe der m-ten Primzahl, welche modulo n gleich 1 ist.

Aufgabe 4. *Ein Geheimnis der Zahl 5*

a) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Sei p eine Primzahl. Zeige: $\left(\frac{x}{p}\right) \equiv x^{(p-1)/2}$ modulo p.

b) Sei p eine Primzahl. Sei F_p die p-te Fibonaccizahl. Zeige: $F_p \equiv \left(\frac{5}{p}\right)$ modulo p.

Tipp. Verwende die bekannte Formel $F_n = (\Phi^n - \Psi^n)/(\Phi - \Psi)$, wobei $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ und $\Psi = (1 - \sqrt{5})/2$. Zwei ganze Zahlen teilen einander genau dann, wenn sie es in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ tun (wieso?).