Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 12 zur Algebraischen Zahlentheorie

Bei den gewöhnlichen reellen Zahlen stehen in ihrer Dezimalschreibweise vor dem Komma nur endlich viele Ziffern, hinter dem Komma aber gelegentlich unendlich viele Ziffern. Bei den 10-adischen Zahlen ist es genau umgekehrt: Vor dem Komma dürfen unendlich viele Ziffern stehen, hinter dem Komma dagegen nur endlich viele. Die Rechenverfahren zur Addition, Subtraktion und Multiplikation, wie man sie aus der Schule kennt, funktionieren weitestgehend unverändert. Die Division wird etwas komplizierter. Die p-adischen Zahlen sind wie die 10-adischen, nur dass man die Ziffern $\{0, \ldots, p-1\}$ verwendet.

Aufgabe 1. *Spiel und Spaß mit 10-adischen Zahlen I*

a) Was ist $\ldots 99999 + 1$ in $\mathbb{Z}_{10}$?

b) Schreibe $2/3$ als 10-adische Zahl.

c) Gib ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$ an, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von x bestimmen?

Aufgabe 2. *Spiel und Spaß mit p-adischen Zahlen II*

a) Sei n eine zu p teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass n in $\mathbb{Z}_p$ invertierbar ist.
Tipp. Hensels Lemma.

b) Berechne $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+p^n}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1+p^n}$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{Z}_p$.
Hinweis. Freestyle-Aufgabe! Mach dir keinen großen Kopf um formale Rechtfertigung. Es gilt $\lim_{n\to\infty} p^n = 0$ in $\mathbb{Z}_p$.

c) Seien x und y ganze Zahlen. Finde eine Folge p-adischer Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen x und in $\mathbb{Z}_p$ gegen y konvergiert.

d) Gibt es in $\mathbb{Z}_{13}$ eine Quadratwurzel aus -1?

Aufgabe 3. *Eine einfache Form von Hensels Lemma*

Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom, das modulo p eine einfache Nullstelle besitzt: ein Element $x_1 \in \mathbb{Z}$ mit $f(x_1) \equiv 0$ modulo p, sodass es ein Element $y \in \mathbb{Z}$ mit $f'(x_1)y \equiv 1$ modulo p gibt. Wir definieren für $n \geq 1$: $x_{n+1} := x_n - yf(x_n)$.

a) Zeige für $n \geq 1$, dass $x_n \equiv x_m \pmod{p^m}$ für $m < n$ und dass $f(x_n) \equiv 0 \pmod{p^n}$.
Tipp. Induktion und Taylorentwicklung.

b) Verwende die Folge $(x_n)_n$, um eine Nullstelle von f in $\mathbb{Z}_p$ zu konstruieren.

c) Unter welchem Namen ist das Konstruktionsverfahren für die x_n bekannt? Bewundere die Einheit der Mathematik.