

NOIP2021 模拟赛 题解

ywy_c_asm

1. 矩阵极限

本题是思维题。

首先不要被题目中的式子吓到！仔细读题便会发现水题的本质！

结论：若 $B_{1,1} = 1$ ，则矩阵 A 永远不会变，否则 A 最终一定会收敛到全 0 矩阵。

这个不难通过打表发现，证明也很简单。如果 $B_{1,1} \neq 1$ ，由于 B 中所有元素非负且和为 1 ，那么 B 中所有元素都小于 1 。从边界出发，考虑 $A_{n,n}$ ，每次变换会让它乘小于 1 的 $B_{1,1}$ ，显然最终会收敛到 0 。而与其相邻的 $A_{n-1,n}$ 和 $A_{n,n-1}$ 每次的变换都是形如 $x = ax + by$ ($a, b < 1$, y 趋于 0) 的形式，显然它们也会收敛到 0 。这样归纳下去会发现 A 的所有元素都会逐渐收敛到 0 。

2. 黄金星球

本题是基于离线扫描线套路的数据结构题。

我们发现 $n \leq 2000$ ，所有子区间是可枚举的，而我们要找的就是子区间，所以不妨把它们全都作为元素搞出来。然后还要限制子区间被框在一个大区间 $[1, r]$ 内，那么可以套路的用扫描线处理，把询问存在 r 处，离线自左而右地在右端点处理子区间和询问，这样保证了所有子区间都在每个询问的 r 左侧。

对每个询问我们二分答案，看所有和 $\geq \text{ans}$ 的子区间中，是否有左端点 ≥ 1 的，就是找最大值。于是我们预先将所有子区间按和从小到大排序，线段树维护区间内的子区间的最大的左端点即可。时间复杂度 $O(n^2 \log n + q \log^2 n)$ 。

这题的一个坑点是区间和可能会爆 `long long`，但 w 是 `long long` 范围的，超过 w 的子区间和是没用的，那么可以在求和时与 $10^{18} + 1$ 取 `min`，保证安全。

3. 挑战 NPC

本题是折半状压题。

我相信很多人的想法是爆搜乱搞骗分之类包括我自己第一次在比赛中遇到这个后都直接用丧心病狂的卡时剪枝爆搜水了过去，不过这题是真的有正经做法的。

首先这个 $n \leq 45$ 的数据范围就已经给了暗示， $O(2^n)$ 不行，但是 $O(2^{\frac{n}{2}})$ 是可以的，启发

我们从折半的套路考虑。考虑 $1 \sim \frac{n}{2}$ 的所有“左边点”，在这里枚举所有团，那么我希望在 $\frac{n}{2} + 1 \sim n$ 的“右边点”中找一个最大的团，使得两边的团都互相有边相连，这样两边的团就构成一个大团。我们可以搞出左团每个点与之有边相连的右边点集合，取个交集 S 便是与左团都有边相连的所有右边点，那么要找的右团必然是 S 的子集。

于是就可以套路的在右边点中进行子集 `dp` 了，即搞出 $f[S]$ 表示 S 的子集中的最大团。

时间复杂度 $O(n2^{\frac{n}{2}})$ 。其实可以略微优化一下，因为对左边点的处理只需 $O(2^{\frac{n}{2}})$ 枚举子集，瓶颈在于右边点，所以可以将右边点适当减少一些平衡复杂度。

4. 小编

本题是需要观察性质的 `dp` 题。

我们发现较为棘手的操作是交换相邻两项，这样会改变字符位置。但是尽管如此，第 i 次操作一定不会影响到 $[1, i-3]$ 以及 $[i+2, n]$ 的字符，那么我们可以在进行这次操作之前，先让 $[1, i-3]$ 前缀的字典序最小。现在要进行状态设计，使得能够知道字符 i 在哪里。在操作之前，它只可能被移动到了 $i-1$ ，或者还在 i ，那么 $f[i][0/1]$ 表示进行完了 i 次操作，已经使得 $[1, i-3]$ 字典序最小，能够得到的字典序最小的 $[i-2, i+1]$ 这个串（它仅有 4 个字符，可以二进制压位成一个数，用数的大小反映串的字典序大小），并且字符 $i+1$ 是否在 i 位置，dp 即可。