$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ..... když konverguje → $\sum a_n$ konverguje absolutně ($\Rightarrow \sum a_n$ konverguje)

— " — nekonverguje → $\sum a_n$ nekonverguje — " —

podílové kritérium ← kladné členy → odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

$L =$
- > 1 ... $\sum a_n$ diverguje
- < 1 ... $\sum a_n$ konverguje
- $= 1$ ... nevíme ?

př.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \overset{\text{pod. krit.}}{\Rightarrow} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{1}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e > 1$$

$\Downarrow$ diverguje

př.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{\text{odm. krit.}}{\Rightarrow} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3+\frac{1}{n}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

< 1

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1}\left(\frac{n}{3n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+1}}$$

konverguje - jelikož kladné členy, tak ještě konverguje absolutně

MAT2 - cv02

29.2.2024

posloupnost čísel zasebou

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1; a_2; \dots\}$$

řada: - součet členů posloupnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

může:

konvergovat - sečte se na konečné číslo

divergují - součet jde do ∞

oscilují - pohybují se mezi $+\infty$ a $-\infty$

<u>geometrická řada:</u>

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots$$

$$= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q \cdot q + \dots$$

$q \in \mathbb{R}$

je řada geometrická?

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\cancel{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}; q = \frac{1}{5}$$

pokud:

$q \in (-1; 1)$

$|q| < 1$ → geomet. řada konverguje

nutná podmínka konvergence

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

postačující podmínka divergence

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

1 SQUARE = bygus dickus

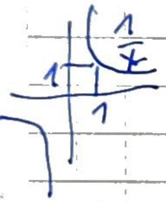
- integrální kritérium – když neumím podle podíl. a odmoc. kritéria
– kladné členy

př.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\qquad a_n \to f \qquad$ f ... $\underbrace{\text{spojitá, rostoucí, nezáporná}}_{\text{na } \langle 1; \infty)}$

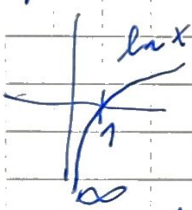
$f(n) = a_n$

$f(n) = \frac{1}{n}$

př.: $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ < konverguje → [a_n konverguje] ; diverguje → [a_n diverguje]



$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty$ → diverguje



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ ⇒ pod. krit.: $= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = 1$ → podíl. krit. nepomůže

integrální krit.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = -\frac{1}{t} \to \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

na $\langle 1; \infty)$

spojitá ✓

kladná ✓

nerostoucí ✓

konverguje

1 SQUARE =

Leibnizovo kritérium

1) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

řada $\{v_n$ konverguje$\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} =$$