



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
**Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií**



MATLB: přednáška 4

Numerické a analytické výpočty

Jaroslav Čmejla

Část I

Numerické vyhodnocování výrazů

Numerický výpočet sum

■ Suma - zkrácený zápis součtu

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `sum`
- Příklad: pro $x = 5$ a $n = 10$ vypočtete sumu

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{x^i}{i^2}$$

```
>> sum((-5).^(1:10)./(1:10).^2)
ans =
    7.8388e+004
```

Numerický výpočet sum

- Suma - zkrácený zápis součtu

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `sum`

- Příklad: pro $x = 5$ a $n = 10$ vypočtete sumu

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{x^i}{i^2}$$

```
>> sum((-5).^(1:10)./(1:10).^2)
ans =
    7.8388e+004
```

Numerický výpočet sum

- Suma - zkrácený zápis součtu

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `sum`
- Příklad: pro $x = 5$ a $n = 10$ vypočtěte sumu

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{x^i}{i^2}$$

```
>> sum((-5).^(1:10)./(1:10).^2)
ans =
    7.8388e+004
```

Numerický výpočet produktů

■ Produkt - zkrácený zápis součinu

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `prod`
- Příklad: pro $x = 1.4$ a $n = 8$ vypočtete produkt

$$\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi x}{i}\right)$$

```
>> prod(sin(pi*1.4./(1:8)))  
ans =  
-0.1080
```

Numerický výpočet produktů

- Produkt - zkrácený zápis součinu

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `prod`

- Příklad: pro $x = 1.4$ a $n = 8$ vypočtete produkt

$$\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi x}{i}\right)$$

```
>> prod(sin(pi*1.4./(1:8)))  
ans =  
-0.1080
```

Numerický výpočet produktů

- Produkt - zkrácený zápis součinu

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `prod`
- Příklad: pro $x = 1.4$ a $n = 8$ vypočtete produkt

$$\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi x}{i}\right)$$

```
>> prod(sin(pi*1.4./(1:8)))  
ans =  
-0.1080
```


Numerický výpočet integrálu

- Numerický výpočet integrálu je pouze přibližný

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_i f(x_i) \Delta x$$

- Aproximace integrálu: např. obdélníková metoda

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x\right) \Delta x \quad N = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Numerický výpočet integrálu

- Numerický výpočet integrálu je pouze přibližný

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_i f(x_i) \Delta x$$

- Aproximace integrálu: např. obdélníková metoda

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x\right) \Delta x \quad N = \frac{b - a}{\Delta x}$$

Numerický výpočet integrálu

■ Příklad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

```
>> krok=0.01;  
>> rozdeleni=0:krok:1-krok;  
>> sum(1./(1+(rozdeleni+krok/2).^2)*krok)
```

```
ans =
```

```
0.7854
```

Lineární algebra: soustava lineárních rovnic

■ Příklad soustavy pro 3 neznámé s parametrem α

$$3\xi_1 + 9\xi_2 - 7\xi_3 = 9$$

$$3\xi_1 + \alpha^2\xi_2 - 7\xi_3 = 6$$

$$\alpha\xi_1 + 9\xi_2 - 7\xi_3 = 1$$

■ Řešení pro $\alpha = 4$

```
>> A=[3 9 -7; 3 16 -7; 4 9 -7];
```

```
>> b=[9 6 1]';
```

```
>> inv(A)*b % též A\b
```

Lineární algebra: soustava lineárních rovnic

- Příklad soustavy pro 3 neznámé s parametrem α

$$3\xi_1 + 9\xi_2 - 7\xi_3 = 9$$

$$3\xi_1 + \alpha^2\xi_2 - 7\xi_3 = 6$$

$$\alpha\xi_1 + 9\xi_2 - 7\xi_3 = 1$$

- Řešení pro $\alpha = 4$

```
>> A=[3 9 -7; 3 16 -7; 4 9 -7];
```

```
>> b=[9 6 1]';
```

```
>> inv(A)*b % též A\b
```

Lineární algebra: soustava lineárních rovnic

■ Pro $\alpha = 3$ řešení evidentně neexistuje

```
>> A=[3 9 -7; 3 9 -7; 3 9 -7];
```

```
>> A\b
```

Warning: Matrix is singular to working precision.

```
ans =
```

```
NaN
```

```
NaN
```

```
-Inf
```

Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (1)

- Je-li λ vlastní číslo matice \mathbf{A} a \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor, pak

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

takže $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ je singulární, tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

- Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & -9 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vektory

```
>> [V D]=eig(A);
```

Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (1)

- Je-li λ vlastní číslo matice \mathbf{A} a \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor, pak

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

takže $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je singulární, tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

- Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & -9 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vektory

```
>> [V D]=eig(A);
```


Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (1)

- Je-li λ vlastní číslo matice \mathbf{A} a \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor, pak

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

takže $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ je singulární, tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

- Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & -9 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vektory

```
>> [V D]=eig(A);
```

Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (2)

■ Jelikož $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, musí platit, že $\mathbf{AV} = \mathbf{VD}$.

■ Součin vlastních čísel je roven determinantu \mathbf{A} . Ověření:

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```
293
```

```
>> prod(diag(D))
```

```
ans =
```

```
293.0000
```

■ Ověření singularity $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$

```
>> det(A-D(1,1)*eye(3))
```

```
ans =
```

```
-2.6114e-013
```

Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (2)

- Jelikož $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, musí platit, že $\mathbf{AV} = \mathbf{VD}$.
- Součin vlastních čísel je roven determinantu \mathbf{A} . Ověření:

```
>> det(A)  
ans =
```

```
293  
>> prod(diag(D))  
ans =
```

```
293.0000
```

- Ověření singularity $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$

```
>> det(A-D(1,1)*eye(3))  
ans =
```

```
-2.6114e-013
```

Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (2)

- Jelikož $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, musí platit, že $\mathbf{AV} = \mathbf{VD}$.
- Součin vlastních čísel je roven determinantu \mathbf{A} . Ověření:

```
>> det(A)  
ans =
```

```
293  
>> prod(diag(D))  
ans =
```

```
293.0000
```

- Ověření singularity $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$

```
>> det(A-D(1,1)*eye(3))  
ans =
```

```
-2.6114e-013
```

Polynomy

- Příkaz `poly` vrací koeficienty polynomu se zvolenými kořeny.

- Příklad:

```
>> poly([2 3 4])
```

```
ans =
```

```
1 -9 26 -24
```

znamená, že polynom $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ má kořeny 2, 3 a 4.

- Kořeny polynomu

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

spočteme numericky pomocí příkazu `roots`.

Polynomy

- Příkaz `poly` vrací koeficienty polynomu se zvolenými kořeny.

- **Příklad:**

```
>> poly([2 3 4])
```

```
ans =
```

```
1    -9    26   -24
```

znamená, že polynom $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ má kořeny 2, 3 a 4.

- Kořeny polynomu

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

spočteme numericky pomocí příkazu `roots`.

Polynomy

- Příkaz `poly` vrací koeficienty polynomu se zvolenými kořeny.
- Příklad:

```
>> poly([2 3 4])
```

```
ans =
```

```
1    -9    26   -24
```

znamená, že polynom $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ má kořeny 2, 3 a 4.

- Kořeny polynomu

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

spočteme numericky pomocí příkazu `roots`.

Polynomy

■ Příklad $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

```
>> roots([1 -9 26 -24])
```

```
ans =
```

```
4.0000
```

```
3.0000
```

```
2.0000
```


Část II

Symbolické výpočty v Matlabu

Symbolické výpočty v Matlabu

- **Potřebujeme Symbolic Math Toolbox**
- Založeno na jádru (engine) MuPAD (původně Maple)
- Ovládat lze přímo přes konzoli MuPADu (příkaz `mupad`) nebo skrze konzoli Matlabu
- Zaměříme se na ovládání z Matlabu
- Pozor na změny (některé významné) přicházející s novými verzemi Matlabu (zde pro R2017a)

Symbolické výpočty v Matlabu

- Potřebujeme Symbolic Math Toolbox
- Založeno na jádru (engine) MuPAD (původně Maple)
- Ovládat lze přímo přes konzoli MuPADu (příkaz `mupad`) nebo skrze konzoli Matlabu
- Zaměříme se na ovládání z Matlabu
- Pozor na změny (některé významné) přicházející s novými verzemi Matlabu (zde pro R2017a)

Symbolické výpočty v Matlabu

- Potřebujeme Symbolic Math Toolbox
- Založeno na jádru (engine) MuPAD (původně Maple)
- Ovládat lze přímo přes konzoli MuPADu (příkaz `mupad`)
nebo skrze konzoli Matlabu
- Zaměříme se na ovládání z Matlabu
- Pozor na změny (některé významné) přicházející s novými verzemi Matlabu (zde pro R2017a)

Symbolické výpočty v Matlabu

- Potřebujeme Symbolic Math Toolbox
- Založeno na jádru (engine) MuPAD (původně Maple)
- Ovládat lze přímo přes konzoli MuPADu (příkaz `mupad`) nebo skrze konzoli Matlabu
- **Zaměříme se na ovládání z Matlabu**
- Pozor na změny (některé významné) přicházející s novými verzemi Matlabu (zde pro R2017a)

Symbolické výpočty v Matlabu

- Potřebujeme Symbolic Math Toolbox
- Založeno na jádru (engine) MuPAD (původně Maple)
- Ovládat lze přímo přes konzoli MuPADu (příkaz `mupad`) nebo skrze konzoli Matlabu
- Zaměříme se na ovládání z Matlabu
- Pozor na změny (některé významné) přicházející s novými verzemi Matlabu (zde pro R2017a)

Symbolické proměnné

- Příkazem `syms` vytvoříme proměnnou typu `sym`

```
>> syms x y
```

- S proměnnými pracujeme "normálně", Matlab posílá příkazy automaticky na MuPAD a vypisuje výsledek
- Např.

```
>> (x+y)*(x+y)+x-1
```

se ve skutečnosti zpracuje v MuPADu.

- Předpoklady o proměnné např.

```
>> syms x real
```

```
>> syms y positive
```

Symbolické proměnné

- Příkazem `syms` vytvoříme proměnnou typu `sym`

```
>> syms x y
```

- S proměnnými pracujeme "normálně", Matlab posílá příkazy automaticky na MuPAD a vypisuje výsledek

- Např.

```
>> (x+y)*(x+y)+x-1
```

se ve skutečnosti zpracuje v MuPADu.

- Předpoklady o proměnné např.

```
>> syms x real
```

```
>> syms y positive
```


Symbolické proměnné

- Příkazem `syms` vytvoříme proměnnou typu `sym`

```
>> syms x y
```

- S proměnnými pracujeme "normálně", Matlab posílá příkazy automaticky na MuPAD a vypisuje výsledek

- Např.

```
>> (x+y)*(x+y)+x-1
```

se ve skutečnosti zpracuje v MuPADu.

- Předpoklady o proměnné např.

```
>> syms x real
```

```
>> syms y positive
```

Symbolické proměnné

- Příkazem `syms` vytvoříme proměnnou typu `sym`

```
>> syms x y
```

- S proměnnými pracujeme "normálně", Matlab posílá příkazy automaticky na MuPAD a vypisuje výsledek

- Např.

```
>> (x+y)*(x+y)+x-1
```

se ve skutečnosti zpracuje v MuPADu.

- Předpoklady o proměnné např.

```
>> syms x real
```

```
>> syms y positive
```

Symbolická čísla

- Je třeba chápat rozdíl mezi tím, kdy je výraz chápán jako numerický a kdy jako symbolický. Není to úplně jednoznačné, protože existují výjimky.
- Např. vytvoření symbolického čísla 2

```
>> a=str2sym('2') % jelikož je parametr řetězec, není nutný  
                    % převod numerické hodnoty na symbolickou  
>> a=sym(2) % zde k převodu teoreticky dochází, protože  
              % výraz v závorce je numerická dvojka (double)  
              % ve skutečnosti je to ale výjimka
```

- Sledujte rozdíly

```
>> str2sym('sqrt(2)')  
>> sym(sqrt(2))  
>> sym(2^(1/2))  
>> sym(2^(1/3)) % nevznikne symbolická třetí odmocnina ze 2  
>> sym(str2sym('2^(1/3)')) % takto ano
```

Symbolická čísla

- Je třeba chápat rozdíl mezi tím, kdy je výraz chápán jako numerický a kdy jako symbolický. Není to úplně jednoznačné, protože existují výjimky.
- Např. vytvoření symbolického čísla 2

```
>> a=str2sym('2') % jelikož je parametr řetězec, není nutný  
                    % převod numerické hodnoty na symbolickou  
>> a=sym(2) % zde k převodu teoreticky dochází, protože  
              % výraz v závorce je numerická dvojka (double)  
              % ve skutečnosti je to ale výjimka
```

- Sledujte rozdíly

```
>> str2sym('sqrt(2)')  
>> sym(sqrt(2))  
>> sym(2^(1/2))  
>> sym(2^(1/3)) % nevznikne symbolická třetí odmocnina ze 2  
>> sym(str2sym('2^(1/3)')) % takto ano
```

Symbolická čísla

- Je třeba chápat rozdíl mezi tím, kdy je výraz chápán jako numerický a kdy jako symbolický. Není to úplně jednoznačné, protože existují výjimky.
- Např. vytvoření symbolického čísla 2

```
>> a=str2sym('2') % jelikož je parametr řetězec, není nutný  
                    % převod numerické hodnoty na symbolickou  
>> a=sym(2) % zde k převodu teoreticky dochází, protože  
              % výraz v závorce je numerická dvojka (double)  
              % ve skutečnosti je to ale výjimka
```

- Sledujte rozdíly

```
>> str2sym('sqrt(2)')  
>> sym(sqrt(2))  
>> sym(2^(1/2))  
>> sym(2^(1/3)) % nevznikne symbolická třetí odmocnina ze 2  
>> sym(str2sym('2^(1/3)')) % takto ano
```

Zlomky

- Pro symbolické počítání zlomků stačí, aby jedna z proměnných byla typu sym. Např

```
>> sym(3)/5+12/15  
ans =
```

7/5

- Pomocí příkazu sym lze převádět numerický formát na racionální (symbolické) číslo

```
>> sym(log10(5), 'r')  
ans =
```

24592820711491/35184372088832

Zlomky

- Pro symbolické počítání zlomků stačí, aby jedna z proměnných byla typu sym. Např

```
>> sym(3)/5+12/15
```

```
ans =
```

```
7/5
```

- Pomocí příkazu sym lze převádět numerický formát na racionální (symbolické) číslo

```
>> sym(log10(5), 'r')
```

```
ans =
```

```
24592820711491/35184372088832
```

Převod symbolické veličiny na numerickou

■ Příkaz vpa (Variable Precision Arithmetic)

```
>> vpa(str2sym('sin(sqrt(2))'),40)
```

```
ans =
```

```
0.9877659459927355270691340720789426559068
```

■ Pozor na rozdíl:

```
>> vpa(sin(sqrt(2)),40)
```

```
ans =
```

```
0.9877659459927355944941496090905275195837
```

■ Příkazem digits nastavujeme standardní přesnost

```
>> digits(20)
```


Převod symbolické veličiny na numerickou

■ Příkaz vpa (Variable Precision Arithmetic)

```
>> vpa(str2sym('sin(sqrt(2))'),40)
```

```
ans =
```

```
0.9877659459927355270691340720789426559068
```

■ Pozor na rozdíl:

```
>> vpa(sin(sqrt(2)),40)
```

```
ans =
```

```
0.9877659459927355944941496090905275195837
```

■ Příkazem digits nastavujeme standardní přesnost

```
>> digits(20)
```

Převod symbolické veličiny na numerickou

■ Příkaz vpa (Variable Precision Arithmetic)

```
>> vpa(str2sym('sin(sqrt(2))'),40)
```

```
ans =
```

```
0.9877659459927355270691340720789426559068
```

■ Pozor na rozdíl:

```
>> vpa(sin(sqrt(2)),40)
```

```
ans =
```

```
0.9877659459927355944941496090905275195837
```

■ Příkazem `digits` nastavujeme standardní přesnost

```
>> digits(20)
```

Matice a vektory

■ Deklarujeme stejně jako normální matice a vektory

```
>> A=[1 2 3; 4 x 5;-7 8 x]
```

```
A =
```

```
[ 1, 2, 3]
```

```
[ 4, x, 5]
```

```
[-7, 8, x]
```

■ Používáme standardní operace a příkazy, Matlab volá MuPAD. Např.

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```
x^2 + 13*x - 14
```

Matice a vektory

- Deklarujeme stejně jako normální matice a vektory

```
>> A=[1 2 3; 4 x 5;-7 8 x]
```

```
A =
```

```
[ 1, 2, 3]
```

```
[ 4, x, 5]
```

```
[-7, 8, x]
```

- Používáme standardní operace a příkazy, Matlab volá MuPAD. Např.

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```
x^2 + 13*x - 14
```

Substitute

■ Dosazování a substitute pomocí příkazu `subs`

```
>> f=x^4+sin(x)
```

```
f =
```

```
sin(x) + x^4
```

```
>> subs(f,x,2)
```

```
ans =
```

```
16.9093
```

```
>> subs(f,x,'2')
```

```
ans =
```

```
sin(2) + 16
```

```
>> subs(f,x,x^4)
```

```
ans =
```

```
sin(x^4) + x^16
```

Zjednodušování výrazů

■ Multifunkční příkaz `simplify`

```
>> (x-1)*(x+1)  
ans =  
(x - 1)*(x + 1)
```

```
>> simplify((x-1)*(x+1))  
ans =  
x^2 - 1
```

■ Příkazy `expand`, `factor`, `collect`, ...

■ Příkaz `pretty` dává formátovaný textový výpis výrazu

```
>> pretty((x-1)/(x+1))
```

```
  x - 1  
-----  
  x + 1
```

Zjednodušování výrazů

■ Multifunkční příkaz `simplify`

```
>> (x-1)*(x+1)  
ans =  
(x - 1)*(x + 1)
```

```
>> simplify((x-1)*(x+1))  
ans =  
x^2 - 1
```

■ Příkazy `expand`, `factor`, `collect`, ...

■ Příkaz `pretty` dává formátovaný textový výpis výrazu

```
>> pretty((x-1)/(x+1))  
  
x - 1  
-----  
x + 1
```

Zjednodušování výrazů

- Multifunkční příkaz `simplify`

```
>> (x-1)*(x+1)  
ans =  
(x - 1)*(x + 1)
```

```
>> simplify((x-1)*(x+1))  
ans =  
x^2 - 1
```

- Příkazy `expand`, `factor`, `collect`, ...

- Příkaz `pretty` dává formátovaný textový výpis výrazu

```
>> pretty((x-1)/(x+1))  
  
x - 1  
----  
x + 1
```


Derivace

■ Derivujeme pomocí příkazu `diff`

■ Např. první parciální derivace podle x

$$\frac{\partial}{\partial x}(y + x^4 + \sin x) = \cos x + 4x^3$$

```
>> f=y+x^4+sin(x);  
>> diff(f,x)  
ans =
```

```
cos(x) + 4*x^3
```

■ Vyšší derivace

```
>> diff(f,x,2) % druhá parc. derivace podle x  
ans =
```

```
12*x^2 - sin(x)
```

Derivace

- Derivujeme pomocí příkazu `diff`
- Např. první parciální derivace podle x

$$\frac{\partial}{\partial x}(y + x^4 + \sin x) = \cos x + 4x^3$$

```
>> f=y+x^4+sin(x);  
>> diff(f,x)  
ans =
```

```
cos(x) + 4*x^3
```

- Vyšší derivace

```
>> diff(f,x,2) % druhá parc. derivace podle x  
ans =
```

```
12*x^2 - sin(x)
```

Derivace

- Derivujeme pomocí příkazu `diff`
- Např. první parciální derivace podle x

$$\frac{\partial}{\partial x}(y + x^4 + \sin x) = \cos x + 4x^3$$

```
>> f=y+x^4+sin(x);  
>> diff(f,x)  
ans =
```

```
cos(x) + 4*x^3
```

■ Vyšší derivace

```
>> diff(f,x,2) % druhá parc. derivace podle x  
ans =
```

```
12*x^2 - sin(x)
```

Integrály

■ Integrujeme pomocí příkazu `int`

■ Např. neurčitý integrál podle x

$$\int (y + x^4 + \sin(x)) dx$$

```
>> f=y+x^4+sin(x);
```

```
>> int(f,x)
```

```
ans =
```

```
x*y - cos(x) + x^5/5
```

Integrály

- Integrujeme pomocí příkazu `int`
- Např. neurčitý integrál podle x

$$\int (y + x^4 + \sin(x)) dx$$

```
>> f=y+x^4+sin(x);  
>> int(f,x)
```

```
ans =
```

```
x*y - cos(x) + x^5/5
```

Integrály

■ Určitý integrál

$$\int_0^{\pi} (y + x^4 + \sin(x)) dx$$

```
>> int(f,x,0,pi)
```

```
ans =
```

```
pi*y + pi^5/5 + 2
```

Limity

■ Limity počítá příkaz `limit`

■ Např.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,0)  
ans =
```

1

■ Limita v nekonečnu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,+inf)  
ans =
```

0

Limity

- Limity počítá příkaz `limit`

- Např.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,0)  
ans =
```

1

- Limita v nekonečnu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,+inf)  
ans =
```

0

Limity

- Limity počítá příkaz `limit`
- Např.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,0)  
ans =
```

1

- Limita v nekonečnu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,+inf)  
ans =
```

0

Limity

■ Limity zleva nebo zprava

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{x}{|x|}$$

```
>> limit(y/abs(y),y,0,'left')
```

```
ans =
```

```
-1
```

```
>> limit(y/abs(y),y,0,'right')
```

```
ans =
```

```
1
```

Limity

- Pokud limita neexistuje, výsledek je NaN.

```
>> limit(x/abs(x),x,0)
```

```
ans =
```

```
NaN
```

Řešení algebraických rovnic - příkaz solve

■ Příklad řešení rovnice $x^2 - 1 = 0$

```
>> solve(x^2-1) % pravá strana je 0  
ans =  
-1  
1
```

■ Příklad řešení rovnice $x^2 - 1 = x$

```
>> solve(str2sym('x^2-1=x')) % pravá strana je x  
ans =  
1/2 - 5^(1/2)/2  
5^(1/2)/2 + 1/2
```

```
>> solve(x^2-1-x) % alternativně převedením pravé strany
```

```
>> solve(x^2-1=x) % špatně - syntakticky nedává smysl
```

Řešení algebraických rovnic - příkaz solve

■ Příklad řešení rovnice $x^2 - 1 = 0$

```
>> solve(x^2-1) % pravá strana je 0  
ans =  
-1  
1
```

■ Příklad řešení rovnice $x^2 - 1 = x$

```
>> solve(str2sym('x^2-1=x')) % pravá strana je x  
ans =  
1/2 - 5^(1/2)/2  
5^(1/2)/2 + 1/2
```

```
>> solve(x^2-1-x) % alternativně převedením pravé strany
```

```
>> solve(x^2-1=x) % špatně - syntakticky nedává smysl
```

Řešení algebraických rovnic - příkaz `solve`

- Řešení $ax^2 - 1 = x$ v proměnné a

```
>> solve(a*x^2-1-x,a)
```

```
ans =
```

```
(x + 1)/x^2
```

Řešení soustav algebraických rovnic - příkaz `solve`

■ Příklad řešení soustavy

$$x^2 + xy + y = 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

```
>> [x,y] = solve(str2sym('x^2+x*y+y=3'),...  
str2sym('x^2-4*x+3=0'))
```

x =

1

3

y =

1

-3/2

Analytický výpočet sumy - příkaz `symsum`

■ Příklad: součet aritmetické posloupnosti

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

```
>> symsum(k,1,n)
```

```
ans =
```

```
(n*(n + 1))/2
```


Analytický výpočet sumy - příkaz `symsum`

■ Příklad: součet geometrické posloupnosti

$$\sum_{k=1}^n q^k = \begin{cases} n & q = 1 \\ \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} & q \neq 1 \end{cases}$$

```
>> symsum(q^k,k,1,n)
```

```
ans =
```

```
piecewise([q = 1, n], [q <> 1, -(q - q*q^n)/(q - 1)])
```

Další

- Řešení diferenciálních rovnic: `dsolve`
- Taylorovy rozvoje: `taylor`
- Automatický graf funkce: `fplot`
- Fourierova, Laplaceova a Z-transformace: `fourier`,
`laplace`, `ztrans`
- Speciální funkce: `Beta`, `erf`, `GAMMA`, `Psi`, ...
- Export symbolických výrazů do programovacích jazyků
nebo LaTeXu

Další

- Řešení diferenciálních rovnic: `dsolve`
- Taylorovy rozvoje: `taylor`
- Automatický graf funkce: `fplot`
- Fourierova, Laplaceova a Z-transformace: `fourier`,
`laplace`, `ztrans`
- Speciální funkce: `Beta`, `erf`, `GAMMA`, `Psi`, ...
- Export symbolických výrazů do programovacích jazyků
nebo `LaTeXu`

Další

- Řešení diferenciálních rovnic: `dsolve`
- Taylorovy rozvoje: `taylor`
- Automatický graf funkce: `fplot`
- Fourierova, Laplaceova a Z-transformace: `fourier`,
`laplace`, `ztrans`
- Speciální funkce: `Beta`, `erf`, `GAMMA`, `Psi`, ...
- Export symbolických výrazů do programovacích jazyků
nebo LaTeXu

Další

- Řešení diferenciálních rovnic: `dsolve`
- Taylorovy rozvoje: `taylor`
- Automatický graf funkce: `fplot`
- Fourierova, Laplaceova a Z-transformace: `fourier`,
`laplace`, `ztrans`
- Speciální funkce: `Beta`, `erf`, `GAMMA`, `Psi`, ...
- Export symbolických výrazů do programovacích jazyků
nebo LaTeXu

Další

- Řešení diferenciálních rovnic: `dsolve`
- Taylorovy rozvoje: `taylor`
- Automatický graf funkce: `fplot`
- Fourierova, Laplaceova a Z-transformace: `fourier`,
`laplace`, `ztrans`
- Speciální funkce: `Beta`, `erf`, `GAMMA`, `Psi`, ...
- Export symbolických výrazů do programovacích jazyků
nebo `LaTeXu`

Další

- Řešení diferenciálních rovnic: `dsolve`
- Taylorovy rozvoje: `taylor`
- Automatický graf funkce: `fplot`
- Fourierova, Laplaceova a Z-transformace: `fourier`,
`laplace`, `ztrans`
- Speciální funkce: Beta, erf, GAMMA, Psi, ...
- Export symbolických výrazů do programovacích jazyků
nebo LaTeXu

Část III

Příklady na analytické a numerické výpočty

Příklad 1

Spočítejte analyticky

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

a numericky pro $n = 50$. Výsledky vzájemně ověřte.

```
>> syms k n  
>> symsum(k^2,1,n)  
ans =  
(n*(2*n + 1)*(n + 1))/6
```

```
>> sum((1:50).^2)  
ans =  
42925
```

```
>> (50*(2*50+1)*(50+1))/6  
ans =  
42925
```

Příklad 2

Vypočtěte analyticky charakteristický polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & -9 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

tj. $p(x) = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{I})$, nalezněte jeho kořeny pomocí `roots` a porovnejte s vlastními čísly \mathbf{A} vypočtenými příkazem `eig`.

```
>> A=[1 -3 5; -3 -9 -4; 5 -4 2];
```

```
>> syms x
```

```
>> p=det(A-x*eye(3))
```

$p =$

```
- x^3 - 6*x^2 + 75*x + 293
```

```
>> roots([-1 -6 75 293])
```

```
>> eig(A)
```

Příklad 3

Pro které hodnoty α nemá soustava jednoznačné řešení?

$$3\xi_1 + 9\xi_2 + \alpha^2\xi_3 + \xi_4 = 9$$

$$9\xi_1 + \alpha^2\xi_2 - 7\xi_3 - \alpha\xi_4 = 6$$

$$\alpha^2\xi_1 - 7\xi_2 - 7\xi_3 + 8\xi_4 = 1$$

$$\xi_1 - \alpha\xi_2 + 8\xi_3 + \alpha^3\xi_4 = 1$$

```
>> syms a
```

```
>> A=[3 9 a^2 1; 9 a^2 -7 -a; a^2 -7 -7 8; 1 -a 8 a^3];
```

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```
-a^9 + a^6 - 147*a^5 + 16*a^4 + 550*a^3 - 164*a^2 + 462*a + 6241
```

```
>> roots([-1 0 0 1 -147 +16 +550 -164 462 6241])
```

```
>> solve(det(A)) % analytický výsledek
```

Příklad 4

Ověřte, že $\lambda = 2$ je vlastní číslo matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

```
>> A=[5 2 -3; 4 5 -4; 6 4 -4];
```

```
>> solve(det(A-x*eye(3)))
```

```
ans =
```

```
1
```

```
2
```

```
3
```

```
>> eig(A) % nebo numericky
```

```
ans =
```

```
1.0000
```

```
2.0000
```

```
3.0000
```

Příklad 5

Spočítejte analyticky

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}(x) dx$$

a odhadněte numericky obdélníkovou metodou.

```
>> syms x  
>> int(sin(x)^10,0,pi/2)  
ans =  
  
(63*pi)/512  
  
>> krok=0.0001;  
>> rozdeleni=0:krok:(pi/2-krok);  
>> sum(sin(rozdeleni+krok/2).^10*krok)  
ans =
```

0.3865

Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050

Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů,
který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.