

Structures

Martin ANDRIEUX

1 Groupes

Définition

Soit $H \subset G$, H est un *sous-groupe* de G si :

- $H \neq \emptyset$
- H est stable par \cdot
- $1 \in H$
- $\forall a \in H, a^{-1} \in H$

Théorèmes

- Les sous-groupes de \mathbb{Z} sont de la forme $n\mathbb{Z}$
- Tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_n
- L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe.

Définition

Pour $A \subset G$, il existe un plus petit sous-groupe de G contenant A , c'est le sous-groupe *engendré* par A , noté $\langle A \rangle$.

Théorème de Lagrange

Le cardinal de tout sous-groupe divise le cardinal du groupe.

En particulier, pour x dans G , le cardinal de $\langle x \rangle$, aussi appelé *ordre* de x , divise le cardinal de G .

2 Anneaux

Définition

Soit $B \subset A$, B est un *sous-anneau* de A si :

- $B \neq \emptyset$
- B est stable par \cdot et $+$
- $1 \in B$

Définition

Un *corps* est un anneau dans lequel tous les éléments non nuls sont inversibles.

Soit A un anneau, on note A^* l'ensemble des éléments inversibles de A . A^* est un groupe pour la loi \cdot .

Définition

Soit A un anneau, on dit que x et y sont des *diviseurs de 0* si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $xy = 0$.

Si A ne possède pas de diviseur de 0, il est dit *intègre*.