1 Обобщённые координаты

$\vec{r}$ – радиус-вектор

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – ускорение

$\vec{r} = (x, y, z)$ – координатная форма для радиус-вектора

$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – координатная форма для скорости

$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ – координатная форма для ускорения

Координаты для системы точек:

$\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$

$\ldots$

$\vec{r_n} = (x_n, y_n, z_n)$

Таким образом для задания системы из n точек необходимо $3n$ координат. Тогда почему бы не перейти от строго порядка к нестрогому и задавать систему просто $3n$ координат:

$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) \to (q_1, q_2, \ldots, q_{3n})$

$q = (q_1, q_2, \ldots q_{3n})$ – физики ленивые. Очень.

$\dot{q} = (\dot{q_1}, \dot{q_2}, \ldots, \dot{q_{3n}})$

$\ddot{q} = (\ddot{q_1}, \ddot{q_2}, \ldots, \ddot{q_{3n}})$

$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t)$ – закон мира(оно работает, попытка избежать этого закона провальна)

2 Принцип наименьшего действия

2.1 Формулировка

$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$, где S – действие

Механическая система двигается так, чтобы до S было минимальным

2.2 Объяснение необходимости

(По Ландау) Пусть A и B – начальная и конечная точки движения с q_1, t_1 и q_2, t_2, тогда существуют какие-то возможные траектории движения $S, S', \ldots, S^{(n)}$

$\bar{S} = min(S, S', \ldots, S^{(n)})$ где $\bar{S}$ является идеальным действием для данной системы

(По Фейману) Пусть каждый путь из A в B определяется не S, а $e^{i\frac{S}{\hbar}}$. ($\hbar$ – постоянная Планка) Тогда $\rho = |\sum e^{i\frac{S}{\hbar}}|^2$

$e^{i\frac{S}{\hbar}} = \cos(\frac{S}{\hbar}) + i\sin(\frac{S}{\hbar})$

Таким образом, каждая из наших функций при больших S при сложении гасят друг друга.

Рассмотрим функцию $y = x^2$: заметим, что при достаточно больших x $\Delta y \sim \Delta x$, а при малых x $\Delta y \sim (\Delta x)^2$.

Тогда S влияющие на ρ это такие S, что $|S - S_m in| < \varepsilon$, где величина ε показывает уровень квантовости мира.

2.3 Вариационное исчисление

$$y(x) : I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x)dx$$

Представим функциональное одномерное пространство такое, что $\forall\varepsilon\ \exists y(x)$ и $\exists\bar{y}(x)$ для $\varepsilon = 0$

$$y(x) = \bar{y}(x) + \psi(x)\cdot\varepsilon$$

ε – искомое отклонение

$$F(y(x)) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(\bar{y}(x) + \psi(x)\cdot\varepsilon, \bar{y}'(x) + \psi'(x)\cdot\varepsilon, x)dx$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int\limits_{x_1}^{x_2} (\frac{\partial F}{\partial y}\psi(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\psi'(x))dx$$

x_1 и x_2 – начальная и конечная точки
$y(x_1) = y_1$
$y(x_2) = y_2$
$\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}}_{u} \underbrace{\psi'(x)dx}_{dv} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}\psi(x)|_{x_1}^{x_2}}_{a} - \int\limits_{x_1}^{x^2} \psi(x)\frac{dF}{dx}dx = // \int u\cdot dv = u\cdot v - \int du\cdot v$$

$$\psi|_{x_1}^{x_2} = 0 \to a = 0$$

$$= \int\limits_{x^1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\psi - \psi\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \psi \right) dx = 0$$

$$\to \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(G\left(x\right) \psi\left(x\right) \right) dx = 0 \to G \equiv 0 \text{ – основная лемма вариационного исчисления}$$

Теорема 1 (Основная лемма вариационного исчисления) Пусть

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(G\left(x\right) \psi\left(x\right) \right) dx = 0, \text{ где } \psi(x)\, \forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

, тогда

$$G \equiv 0$$

Доказательство 1 Известно, что $\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0$.
Тогда зададим $\psi(x)$ так, что $\forall x \in ((x1, x2)/(x_* - \delta, x_* + \delta)) = 0$
Получаем, что

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(G(x)\psi(x) \right) dx = \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} \left(G(x)\psi(x) \right) dx =$$

По теореме о среднем $\exists x_{**} \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$ такое, что

$$= G(x_**) \int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} \psi(x) dx$$

Следовательно при $\delta \to 0,\ x_{**} = x_*$ и $G(x_*) = 0$
Это верно для любого $x \in (x_1, x_2)$

2.4 Уравнения Эйлера и Лагранжа

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F\left(y(x), y'(x), x\right) dx$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ – уравнение Эйлера}$$

$$S = \int\limits_{x_1}^{x_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \forall i \in (1, \ldots, n) \text{ – уравнение Лагранжа(основное в лагранжевой механике)}$$

$$\bar{q}(t),\ q = \bar{q} + \delta q$$

$$\delta S = S\left(\bar{q} + \delta q\right) - S(\bar{q}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L \delta q}{\partial q} + \frac{\partial L \delta \dot{q}}{\partial \dot{q}} \right) dt$$

$$S(\bar{q}+\delta q)-S(\bar{q})=\int\limits_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}+\delta q,\dot{\bar{q}}+\delta\dot{q},t)dt-\int\limits_{t_1}^{t_2} L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)dt=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(L(\bar{q}+\delta q,\dot{\bar{q}}+\delta\dot{q},t)-L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\right)dt=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)+\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}-L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\right]dt= \text{ // по разложению в ряд Тейлора}$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\delta\dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)dt+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta q|_{t_1}^{t_2}}_{=0}$$

2.5 Разложение в ряд Тейлора ФНП

$f(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\delta x_i\delta x_j+\cdots$$

2.6 Свойства L

2.6.1 Неопределённость L

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(L(q,\dot{q},t)\right)dt$$

$$\tilde{L}=L+\frac{d}{dt}f(q,t)$$

$$\tilde{S}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(L+\frac{d}{dt}f(q,t)\right)=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}Ldt+\delta f(q,t)|_{t_1}^{t_2}$$

$$\delta f(q,t)|_{t_1}^{t_2}=0$$

Докажем это:

$$\delta f|_{t_1}^{t_2}=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q|_{t_1}^{t_2}=0$$

Тогда,

$$\delta\tilde{S}=\delta S=0$$

Так как

$$\delta S \text{ -- уравнение движения и } \delta f(q,t)|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Запишем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} //(1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} //(2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (\tilde{L} - L)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial (\tilde{L} - L)}{\partial q} //(2) - (1)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}$$

2.6.2 Аддитивность функции Лагранжа

Допустим существует множества A и B. Каждое из них образует некую механическую систему. Тогда если множество A никак не влияет на множество B и множество B никак не влияет на множества, то будет верно следующее равенство:

$$L_{AB} = L(q_A, q_B, \dot{q}_A, \dot{q}_B, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_B(q_B, \dot{q}_B, t)$$

$$L_{AB} = L_A + L_B$$

Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{AB}}{\partial \dot{q}_A} = \frac{\partial L_{AB}}{\partial q_A}$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{AB}}{\partial \dot{q}_B} = \frac{\partial L_{AB}}{\partial q_B}$$

$$\frac{\partial L_{AB}}{\partial \dot{q}_A} = \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_A} + \frac{\partial L_B}{\partial \dot{q}_B} = \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_A}$$

$$\frac{\partial L_{AB}}{\partial \dot{q}_B} = \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_B} + \frac{\partial L_B}{\partial \dot{q}_B} = \frac{\partial L_B}{\partial \dot{q}_B}$$

3 Принцип относительности Галилея

$\exists$системы отсчёта, в которых пространство однородно и изотропно, а время — однородно. Такие системы отсчёта называются инерциальными
Постулаты:

1. Однородное пространство — пространство, в котором все точки пространства равноправны

2. Изотропность пространства — повороты пространства не меняют законов

3. Пространство с однородностью времени — пространство, в котором все моменты времени равноправны

Рассмотрим материальную точку.
Для неё существует соответсвующая функция Лагранжа $L(q.\dot{q},t)$ или $L(\vec{r},\vec{v},t)$
Тогда зависимость от времени пропадает из-за однородности времени, зависимость от координаты пропадает из-за однородности пространства, а зависимость от $\vec{v}$ преобразуется в зависимость от $|\vec{v}|$
Получаем $L(\vec{r},\vec{v},t) \to L(|\vec{v}|)$
Тогда давайте рассматривать зависимость не от $|\vec{v}|$, а от v^2
Таким образом, в случае материальной точки функция Лагранжа зависит только от модуля скорости

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = (\frac{\partial L}{\partial r_1},\ldots,\frac{\partial L}{\partial r_n})$$

Для материальной точки:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(v^2)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L(v^2)}{\partial \vec{r}} = 0 // \text{ т.к. L не зависит от } \vec{r}$$

Рассмотрим $\vec{A}$ такой, что

$$A_i = \frac{\partial L(v^2)}{\partial v_i}, \forall i \in (1,\ldots,n)$$

$$A_i = \frac{dL(v^2)}{d(v^2)}\frac{\partial v^2}{\partial v_i}, \forall i \in (1,\ldots,n)$$

$$A_i = 2v_i L'(v^2)$$

Материальная точка в инерциальной системе отсчёта движется с постоянной скоростью

Допустим, что существуют две системы отсчёта K и K'. При этом K движется относительно K' со скоростью $\vec{\vee}$
ВАЖНО: $|\vee| << c$
Тогда преобразования имеют вид:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{\vee}t$$

$$t = t'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + v\vec{e}e$$

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\vee}$$

Постулат принципа отностиельности: законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта
Инвариантность — величина не меняется
Ковариантность — функция не меняется(например законы механики)

4 Функция Лангранжа свободной материальной точки

4.1 Материальная точка в различных системах координат

Допустим у нас есть материальная точка, движущаяся со скоростью $\vec{v}$. Рассмотрим её движение в системе отсчёта, двигающуюся относительно инерциальной со скоростью $\vec{\varepsilon} << \vec{v}$ Тогда

$$\vec{v} = \tilde{\vec{v}} + \vec{\varepsilon}$$

$$\tilde{L} = L((\vec{v} + \vec{\varepsilon})^2) = L(v^2 + 2\vec{v}\vec{\varepsilon} + \underbrace{\varepsilon^2}_{\to 0})$$

$$\tilde{L} = L(v^2) + \underbrace{L'(v^2)2\vec{v}\vec{\varepsilon}}_{\frac{d}{dt}L\exists} =$$

$$= L(v^2) + 2\frac{d}{dt}(L(v^2)\vec{r}\vec{\varepsilon})$$

4.2 Масса

Таким образом

$L(v^2) = Av^2 + B//$ мы можем подобрать такую скорость, чтобы В $= 0$

Пусть $A = \frac{m}{2}$

Тогда

$$L(v^2) = \frac{mv^2}{2}$$

$$\tilde{L} = \frac{m\tilde{v}^2}{2} =$$

$$= \frac{m}{2}(\vec{v} + \vec{\vee})^2 =$$

$$= \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\vec{\vee} + \frac{m\vee^2}{2} =$$

$$= \frac{mv^2}{2} + m\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{\vee} + \frac{d}{dt}(\vee^2 t) =$$

$$= \frac{mv^2}{2} + \frac{d}{dt}(m\vec{r}\vec{\vee} + \frac{m}{2}\vee^2 t)$$

Получаем, что при больших $\vee$ уравнение изменяет свой вид

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i}{2}$$

ВАЖНО: $m > 0$

Пусть возможна отрицательная масса.

Тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{mv^2}{2}\right) dt$$

Тогда при существовании объектов с отрицательной массой мы не имеем минимума действия и это плохо(означает, что мы можем двигаться с большой скоростью и чем длиннее путь и больше скорость, тем выгоднее действие, что неправда)

4.3 Потенциальная энергия

$$L = \underbrace{\sum_{a=1}^{n} \frac{m_a v_a^2}{2}}_{\text{Кинетическая энергия(T)}} - \underbrace{U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)}_{\text{Потенциальная энергия(U)}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{a_i}} = \frac{\partial L}{\partial x_{a_i}}$$

$$\vec{r}_a = (x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})$$

$$v_a^2 = v_{a_1}^2 + \ldots + v_{a_n}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{a_i}} = \dot{x}_{a_i}\frac{m}{2} = m_a x_{a_i}$$

$$\frac{d}{dt}(m_a \dot{x}_{a_i}) = m_a \ddot{x}_{a_i}$$

$$m_a \ddot{x_{a_i}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_{a_i}} = -\frac{\partial U}{\partial x_{a_i}}\right)$$

$$m_a \ddot{x_{a_i}} = F_{a_i}$$

$$x_{a_i} = f_{a_i}(q_1, \ldots, q_s)$$

$$v_{a_i} = \dot{x}_{a_i} = \sum_{\kappa=1}^{s} \frac{\partial f_{a_i}}{q_\kappa}\dot{q}_\kappa$$

4.4 Общий вид кинетической энергии

$$T = \sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \frac{m_a v_{a_i}^2}{2} = //, \text{ где } p \text{ — мерность}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} \frac{m_a}{2} \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f_{a_i}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right) \times \left(\sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial f_{a_i}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \left[\sum_{a=1}^{n} m_a \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_{a_i}}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f_{a_i}}{\partial q_b}\right] \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \Xi_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \Xi_{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta - U(q_1, \ldots, q_n)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} = \frac{\partial L}{\partial q_\gamma}, \gamma \in (1, \ldots, s)$$