1 Функция нескольких переменных

$y = f(x) : x \in X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Определение 1.1 Функция нескольких переменных – y

2 Метрическое пространство

2.1 Определение

Определение 2.1 X – метрическое пространство, если $\exists \rho : \forall x, y \in X, X \times X \to \mathbb{R}$

ρ называется метрикой, а $\rho(x, y)$ – расстоянием

2.2 Аксиомы метрики

1. $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

2.3 Примеры метрик

1. $\mathbb{R}^1 : \rho(x, y) = |x - y|$
2. $\mathbb{R}^1 : \rho(x, y) = 2|x - y|$
3. $\mathbb{M} : \rho(x, x) = 0, \forall x \neq y \rho(x, y) = \emptyset$
4. $\mathbb{R}^2 : \rho(a, b) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$
5. $\mathbb{R}^n : \rho(a, b) = \sqrt{\sum_{\xi}^{\xi \in n} (a_\xi - b_\xi)^2}$

3 Последовательности в $\mathbb{R}^n$

3.1 Определение фундаментальной последовательности

Определение 3.1 x_n – фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N : \forall n, m \geq N,\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

3.2 Определение предела последовательности

Определение 3.2 A называется пределом последовательности x_n, если

$$A = \lim_{n \to \infty} x_n : \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N : \forall n \geq N,\ \rho(x_n, A) < \varepsilon$$

3.3 Покоординатная сходимость

Определение 3.3

$$\vec{a} \to A \leftrightarrow \forall \xi \in n, \rho(a_\xi, A_\xi) \to 0$$

4 Нормированное пространство

4.1 Определение

Определение 4.1 X называется нормированным пространством, если $\exists ||x|| : \forall x \in X, X \to \mathbb{R}$

4.2 Аксиомы нормы

1. $||x|| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$
3. $\forall x, y \in X : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

4.3 Нормы для $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^n$

1. $\mathbb{R}^1 : ||a|| = |a|$
2. $\mathbb{R}^2 : ||a|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
3. $\mathbb{R}^n : ||a|| = \sqrt{\sum_{\xi}^{\xi \in n} a_\xi^2}$

4.4 Метрика, рождённая нормой

$\rho(x, y) = ||x - y||$

5 Евклидово пространство

5.1 Определение

Определение 5.1 Линейное пространство X называется евклидовым, если в нём определена операция скалярного произведения:

$$<x, y> : x, y \in X, X \times X \to \mathbb{R}$$

5.2 Аксиомы скалярного произведения

1. $<x, x> \geq 0, <x, x> = 0 \leftrightarrow x\ 0$
2. $<x, y> = \overline{<y, x>}$
3. $<x + y, z> = <x, z> + <y, z>$
4. $<\alpha x, y> = \alpha <x, y>$

5.3 Норма, рождённая скалярным произведением

$||x|| = \sqrt{<x, x>}$