1 Обобщённые координаты

$\vec{r}$ – радиус-вектор

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – ускорение

$\vec{r} = (x, y, z)$ – координатная форма для радиус-вектора

$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – координатная форма для скорости

$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ – координатная форма для ускорения

Координаты для системы точек:

$\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$

$\ldots$

$\vec{r_n} = (x_n, y_n, z_n)$

Таким образом для задания системы из n точек необходимо $3n$ координат. Тогда почему бы не перейти от строго порядка к нестрогому и задавать систему просто $3n$ координат:

$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) \to (q_1, q_2, \ldots, q_{3n})$

$q = (q_1, q_2, \ldots q_{3n})$ – физики ленивые. Очень.

$\dot{q} = (\dot{q_1}, \dot{q_2}, \ldots, \dot{q_{3n}})$

$\ddot{q} = (\ddot{q_1}, \ddot{q_2}, \ldots, \ddot{q_{3n}})$

$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t)$ – закон мира(оно работает, попытка избежать этого закона провальна)

2 Принцип наименьшего действия

2.1 Формулировка

$S = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$, где S – действие

Механическая система двигается так, чтобы до S было минимальным

2.2 Объяснение необходимости

(По Ландау) Пусть A и B – начальная и конечная точки движения с q_1, t_1 и q_2, t_2, тогда существуют какие-то возможные траектории движения $S, S', \dots, S^{(n)}$

$\bar{S} = min(S, S', \dots, S^{(n)})$ где $\bar{S}$ является идеальным действием для данной системы

(По Фейману) Пусть каждый путь из A в B определяется не S, а $e^{i\frac{S}{\hbar}}$. ($\hbar$ – постоянная Планка)
Тогда $\rho = |\sum e^{i\frac{S}{\hbar}}|^2$

$$e^{i\frac{S}{\hbar}} = \cos(\tfrac{S}{\hbar}) + i\sin(\tfrac{S}{\hbar})$$

Таким образом, каждая из наших функций при больших S при сложении гасят друг друга.

Рассмотрим функцию $y = x^2$: заметим, что при достаточно больших x $\Delta y \sim \Delta x$, а при малых x $\Delta y \sim (\Delta x)^2$.

Тогда S влияющие на ρ это такие S, что $|S - S_min| < \varepsilon$, где величина ε показывает уровень квантовости мира.

2.3 Вариационное исчисление

$$y(x): \, I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x)dx$$

Представим функциональное одномерное пространство такое, что $\forall\varepsilon\ \exists y(x)$ и $\exists\bar{y}(x)$ для $\varepsilon = 0$

$$y(x) = \bar{y}(x) + \psi(x)\cdot\varepsilon$$

ε – искомое отклонение

$$F(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(\bar{y}(x) + \psi(x)\cdot\varepsilon, \bar{y}'(x) + \psi'(x)\cdot\varepsilon, x)dx$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} (\frac{\partial F}{\partial y}\psi(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\psi'(x))dx$$

x_1 и x_2 – начальная и конечная точки
$y(x_1) = y_1$
$y(x_2) = y_2$
$\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0$

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}}_{u} \underbrace{\psi'(x)dx}_{dv} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}\psi(x)|_{x_1}^{x_2}}_{a} - \int_{x_1}^{x^2} \psi(x)\frac{dF}{dx}dx = // \int u\cdot dv = u\cdot v - \int du\cdot v$$

$$\psi|_{x_1}^{x_2} = 0 \to a = 0$$

$$= \int_{x^1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\psi - \psi\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}$$

3 Принцип относительности Галилея

4 Функция Лангранжа свободной материальной точки