$f(x)\ x \in D \subset \mathbb{R}$

x^0 – предельная точка D

1 Определение по Коши

$$A = \lim_{x \to x^0} f(x) \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \dot{U}_\delta(x^0) \to f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

2 Определение по Гейне

$x^{(k)}$ – последовательность

$$A = \lim_{x \to x^0} f(x) \leftrightarrow \forall x^{(k)} : (x^{(k)} \neq 0) \text{ и } x^{(k)} \to x^0,\ n \to \infty$$

3 Предел на множестве

$$A = \lim_{x \to x^0,\, x \in M} f(x) \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \dot{U}_\delta(x^0) \cap M \to f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Если $\exists \lim_{x \to x^0}$, то $\forall M : \lim_{x \to x^0,\, x \in M} = \lim_{x \to x^0} f(x)$

4 Повторный предел

Определение 4.1 Пусть $f(x, y)$ определена в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ и $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ \exists \lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x)$, тогда $\exists \lim_{x \to x^0} g(x)$, называемый повторным пределом

5 Непрерывность

Определение 5.1 $f(x)$ называется непрерывной в $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если $\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$

Определение 5.2 Функция называется непрерывной на множестве M в $x^0 \in M \subset \mathbb{R}^n$, если $\lim_{x \to x^0} f(x)\ f(x^0)$

Теорема 5.1 (о непрерывности сложной функции) Пусть $y_i = \varphi_i(x), i \in (1, \ldots, n)$ определены в $U(x^0)$ и непрерывны в $x^0 \in \mathbb{R}^m$. $f(y)$ определена в $U(y^0), y^0 = \varphi(x^0)$, непрерывна в y^0
Тогда существует и непрерывна в x^0, $\phi(x^0) = f(\varphi(x))$

Доказательство 5.1 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0,\ \forall y \in \dot{U}_\sigma(y^0) : |f(y) - f(y^0)| < \varepsilon$ //т.к. f – непрерывна

$$\text{т. к. } \forall \varphi_i \text{ – непрерына по } \sigma,\ \exists \delta_i \forall x \in \dot{U}_{\delta_i}(x^0) : (y_i(x) - y_i(x^0)) < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, i \in (1, \ldots, n) \to \rho(y, y^0) < \sigma$$

$$\delta = min(\delta_i), i \in (1, \ldots, n)$$

$$\forall x \in \ldots U_\delta(x^0) \to \rho(y, y^0) < \sigma \to |f(y) - f(y^0)| < \varepsilon$$