Математика (базовый уровень)
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Расчетно-графическая работа по теме

«Кривые второго порядка»

Вариант 409829

Подготовили:
Носов Георгий Р3132
Черемисова Мария Р3110

Преподаватель:
Гилев Павел Андреевич

Санкт-Петербург
nn ноября 2023

1.1 Задание

Рассмотрим кривую второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Выберите коэффициенты при помощи коэффициентов:

$$A = (31 + x)^{(10^9+7)}\%100 + 17$$

$$C = (43 + x)^{(10^9+7)}\%100 + 19$$

$$D = (17 + x)^{(10^9+7)}\%100 + 37$$

$$E = (7 + x)^{(10^9+7)}\%100 + 97$$

$$F = (11 + x)^{(10^9+7)}\%100 + 59$$

Задания:

1. Найти в аналитическом виде формулу числового эксцентриситета фигуры в виде функции, зависящей от B: $\varepsilon(B)$
2. От вас требуется построить график зависимости числового эксцентриситета от парметра B, который может быть в целом произвольным числом, но существенный интерес это B принадлежащий от -200 до 200. График нужно построить в любой из систем для построение графиков начиная от вольфрама и заканчивая вольфрамом (можно конечно и десмос использовать и геогебру)

1.2 Решение

Рассчитаем коэффициенты из данного уравнения кривой.
A = (409860)^(10^9+7)%100 + 17 = 17
C = (409872)^(10^9+7)%100 + 19 = 107
D = (409846)^(10^9+7)%100 + 37 = 53
E = (409836)^(10^9+7)%100 + 97 = 193
F = (409840)^(10^9+7)%100 + 59 = 59

В итоге получается такое уравнение: $17x^2 + Bxy + 107y^2 + 53x + 193y + 59 = 0$
Рассчитаем инварианты: S, σ, Δ

$$S = A + C = A_1 + C_1 = 124$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} = A_1C_1 = \begin{bmatrix} 17 & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & 107 \end{bmatrix} = 1819 - \frac{B^2}{4}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & \frac{B}{2} & 26{,}5 \\ \frac{B}{2} & 107 & 96{,}5 \\ 26{,}5 & 96{,}5 & 59 \end{bmatrix} = 17\begin{bmatrix} 107 & 96.5 \\ 96{,}5 & 59 \end{bmatrix} - \frac{B}{2}\begin{bmatrix} \frac{B}{2} & 96{,}5 \\ 26{,}5 & 59 \end{bmatrix} +$$

$$+26{,}5\begin{bmatrix} \frac{B}{2} & 107 \\ 26{,}5 & 96{,}5 \end{bmatrix} = -50987{,}25 + 26{,}5(-107 \cdot 26{,}5) + 26{,}5\left(\frac{B}{2} \cdot 96{,}5\right) - \frac{59B^2}{4} -$$

$$-\frac{2557{,}25B}{2} = -126128 + 2557{,}25B - \frac{59B^2}{4}$$

Проведём сложные вычисления:

$$\begin{cases} A_1 + C_1 = 124 \\ A_1C_1 = 1819 - \frac{B^2}{4} \\ A_1C_1F_1 = -126128 + 2557{,}25B - \frac{59B^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 62 \pm \frac{\sqrt{B^2 + 8100}}{2} \\ C_1 = 62 \pm \frac{\sqrt{\mathrm{B}^2 + 8100}}{2} \\ F_1 = \dfrac{-\frac{59\mathrm{B}^2}{4} + 2557{,}25\mathrm{B} - 126128}{\left(62 - \frac{\sqrt{\mathrm{B}^2 + 8100}}{2}\right)\left(62 + \frac{\sqrt{\mathrm{B}^2 + 8100}}{2}\right)} \end{cases}$$

При этом если в A_1 минус, то в C_1, будет плюс и наоборот.

Найдём каноническое уравнение кривой: Из найденных нами коэффициентов получится такое уравнение

$$\mathrm{A}_1\tilde{\mathrm{x}}^2 + \mathrm{C}_1\tilde{\mathrm{y}}^2 + \mathrm{F}_1 = 0$$

$$\mathrm{A}_1\tilde{\mathrm{x}}^2 + \mathrm{C}_1\tilde{\mathrm{y}}^2 = -\mathrm{F}_1 | : -F_1$$

$$\frac{\mathrm{A}_1\tilde{\mathrm{x}}^2}{-F_1} + \frac{\mathrm{C}_1\tilde{\mathrm{y}}^2}{-F_1} = 1$$

$$\frac{\tilde{\mathrm{x}}^2}{-\frac{F_1}{\mathrm{A}_1}} + \frac{\tilde{\mathrm{y}}^2}{-\frac{F_1}{\mathrm{C}_1}} = 1$$

Найдём отсюда $\boldsymbol{e}$:

$$e(B) = \frac{\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}}{\mathrm{a}} = \frac{\sqrt{-\frac{F_1}{\mathrm{A}_1} + \frac{F_1}{\mathrm{C}_1}}}{\sqrt{-\frac{F_1}{\mathrm{A}_1}}} = \sqrt{\frac{-\frac{F_1}{\mathrm{A}_1} + \frac{F_1}{\mathrm{C}_1}}{-\frac{F_1}{\mathrm{A}_1}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathrm{A}_1} - \frac{1}{\mathrm{C}_1}}{\frac{1}{\mathrm{A}_1}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}_1(\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1)}{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}} = \sqrt{\frac{\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1}{\mathrm{C}_1}}$$

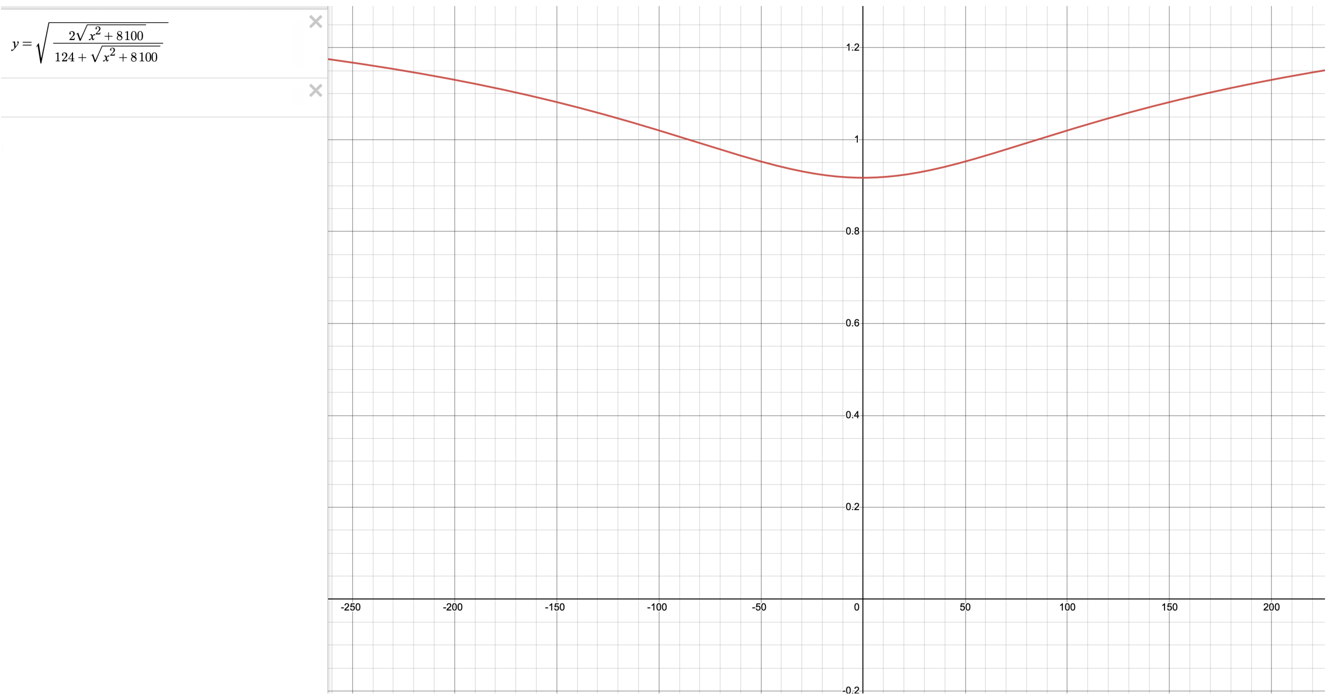
$$e(B)=\sqrt{\frac{62+\frac{\sqrt{B^2+8100}}{2}-\left(62-\frac{\sqrt{B^2+8100}}{2}\right)}{62+\frac{\sqrt{B^2+8100}}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{B^2+8100}}{1}}{\frac{124}{2}+\frac{\sqrt{B^2+8100}}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{B^2+8100}}{124+\sqrt{B^2+8100}}}$$

У нас получилась формула зависимости эксцентриситета от B:

$$e(B)=\sqrt{\frac{2\sqrt{B^2+8100}}{124+\sqrt{B^2+8100}}}$$

Визуализация(график) зависимости:



Так же рассмотрим вариант, когда $\mathrm{I}_2=\sigma=0$:

$$\sigma=\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & 107 \end{bmatrix}=1819-\frac{B^2}{4}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{B}^2}{4}=1819$$

$$B=2\sqrt{1819}$$

$$\Delta=-126128+2557{,}25\cdot 2\sqrt{1819}-\frac{59(2\sqrt{1819})^2}{4}=-233449+5114{,}5\sqrt{1819}$$

Исходя из значений инвариантов, мы понимаем, что при таком значении B мы имеем параболу, т.е. $17x^2+\sqrt{1819}xy+107y^2+53x+193y+59=0$ – парабола.