<u>Exercice 1</u> : (sur papier) : Option

Soit r un nombre strictement positif. On considère la surface paramétrée suivante :

$$\begin{cases} \sigma : [0,1]x[0,1] \rightarrow \Re^3 \\ (s,t) \mapsto \sigma(s,t) = (r\sin(\pi t)\cos(2\pi s), r\sin(\pi t)\sin(2\pi s), r\cos(\pi t)) \end{cases}$$

a- Quelle est la nature géométrique de la surface σ (indication : on pourra calculer la distance de σ(s,t) par rapport à l'origine O=(0,0,0)).

b- Calculer les dérivées partielles de σ, puis un vecteur normal à σ. Normaliser ce vecteur.

<u>Solution</u>

a) $$d(\sigma(s,t), O) = \sqrt{r^2\sin^2(\pi t)\cos^2(2\pi s) + r^2\sin^2(\pi t)\sin^2(2\pi s) + r^2\cos^2(\pi t)}$$

$$= r\sqrt{\sin^2(\pi t)\big(\underbrace{\cos^2(2\pi s) + \sin^2(2\pi s)}_{=1}\big) + \cos^2(\pi t)}$$

$$= r\sqrt{\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)}$$

$$= r$$

La distance de σ(s,t) à O est constante et égale à r, la surface σ est donc une sphère de centre O et de rayon r.

$\cos'(at) = -a\sin(at)$

b) $\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t) = r\left(-2\pi\sin(\pi t)\sin(2\pi s),\ 2\pi\sin(\pi t)\cos(2\pi s),\ 0\right)$

$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t) = r\left(\pi\cos(\pi t)\cos(2\pi s),\ \pi\cos(\pi t)\sin(2\pi s),\ -\pi\sin(\pi t)\right)$

$$\vec{N} = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t)$$

$$= -2\pi^2 r^2 \sin(\pi t).\left(\sin(\pi t)\cos(2\pi s),\ \sin(\pi t)\sin(2\pi s),\ \cos(\pi t)\left(\sin^2(2\pi s) + \cos^2(2\pi s)\right)\right)$$

$$= -2\pi^2 r^2 \sin(\pi t).\left(\sin(\pi t)\cos(2\pi s),\ \sin(\pi t)\sin(2\pi s),\ \cos(\pi t)\right)$$

La norme de $\vec{N}$ est égale a $2\pi^2 r^2 \sin(\pi t)$

(on a $\sin(\pi t) \geq 0$ avec $t \geq 0$)

Un vecteur normal unitaire est

$\vec{N'} = (\sin(\pi t)\cos(2\pi s),\ \sin(\pi t)\sin(2\pi s),\ \cos(\pi t))$

Norme du vecteur $\vec{N}$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{(-2\pi r^2 \sin(\pi t))^2 \left(\sin^2(\pi t) \underbrace{\cos^2(\pi s) + \sin^2(\pi t)\sin^2(\pi s)}_{=1} + \cos^2(\pi t)\right)}$$

$$= \sqrt{4\pi^4 r^4 \sin^2(\pi t)\left(\underbrace{\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)}_{=1}\right)}$$

$$\boxed{\|\vec{N}\| = 2\pi^2 r^2 \sin(\pi t)}$$

Fin Exercice I

<u>Exercice II</u> : Surface de Bézier construite par l'algorithme de Casteljau (option)

1- Découverte de l'algorithme (sur papier)

Soient les points de contrôles suivants :

$P_{0,0}$=(0,0,0), $P_{0,1}$=(0,1,0), $P_{0,2}$=(0,2,0)
$P_{1,0}$=(1,0,0), $P_{1,1}$=(1,1,1), $P_{1,2}$=(1,2,1)
$P_{2,0}$=(2,0,0), $P_{2,1}$=(2,1,1), $P_{2,2}$=(2,2,1)
$P_{3,0}$=(3,0,0), $P_{3,1}$=(3,1,0), $P_{3,2}$=(3,2,0)

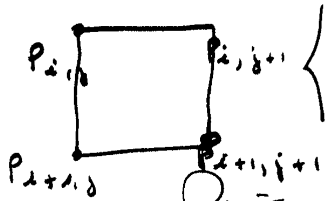
Soit σ la surface de Bézier ayant les points de contrôles $P_{i,,j}$ Pour i=0,1,2,3 et j=0,1,2.

a- Calculer σ (1/4, ½) par l'algorithme de Casteljau.

b- Soit Q_0 la courbe de Bézier ayant $P_{0,0,}$ $P_{0,1}$ et $P_{0,2}$ pour points de contrôles. Soit Q_1 la courbe de Bézier ayant $P_{1,0,}$ $P_{1,1}$ et $P_{1,2}$ pour points de contrôles. Soit Q_2 la courbe de Bézier ayant $P_{2,0,}$ $P_{2,1}$ et $P_{2,2}$ pour points de contrôles. Soit Q_3 la courbe de Bézier ayant $P_{3,0,}$ $P_{3,1}$ et $P_{3,2}$ pour points de contrôles. En utilisant à chaque fois l'algorithme de Casteljau pour les courbes, calculer Q_0(1/2), Q_1(1/2), Q_2(1/2), Q_3(1/2). En déduire la position de σ (1/4, ½).

Rappel : Interpolation bilinéaire et algo de Casteljau

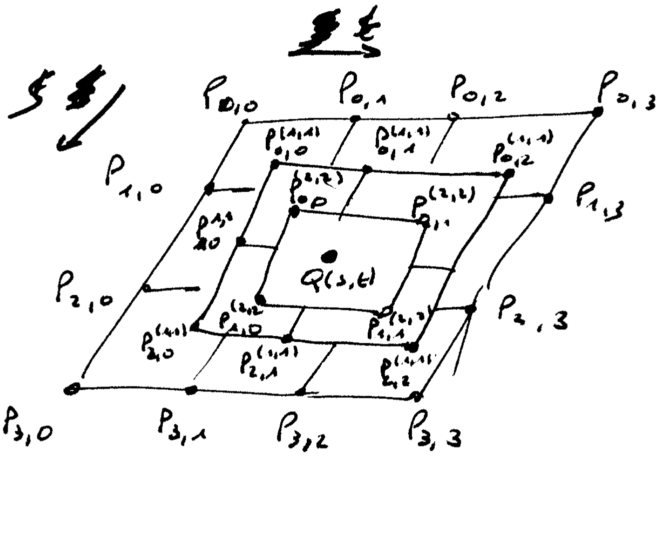
Lors de l'étude de l'algo de Casteljau pour les courbes, nous avons considéré, étant donné 2 points de contrôle P_i et P_{i+1}, le point $P_i^{(1)} = (1-t)P_i + tP_{i+1}$.
Cela revient à dire que nous avons considéré la courbe la plus simple passant par P_i et P_{i+1} : le segment de droite.
Dans le cas des surfaces, les points de contrôle forment un réseau $P_{i,j}$, pour $i=0,\dots,m-1$ et $j=0,\dots,n-1$.
Nous allons cette fois considérer la surface la plus simple qui passe par $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ et $P_{i+1,j+1}$: la surface réglée. Pour cela, on considère les points intermédiaires :



$$\begin{cases} P_{i,j}^{(0,1)} = (1-t)P_{i,j} + tP_{i,j+1} \\ P_{i,j}^{(1,0)} = (1-t)P_{i+1,j} + tP_{i+1,j+1} \end{cases}$$

Puis on pose

$$P_{i,j}^{(1,1)}(s,t) = (1-s)P_{i,j}^{(0,1)} + sP_{i,j}^{(1,0)} = \begin{bmatrix}1-s & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{i,j} & P_{i,j+1}\\ P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-t\\ t\end{bmatrix}$$



Pour $s=0$ et $t=0$, on a $P_{i,j}^{(1,1)}(s,t) = P_{i,j}$

Pour $s=0$ et $t=1$, on a $P_{i,j}^{(1,1)}(s,t) = P_{i,j+1}$

Pour $s=1$ et $t=0$, on a $P_{i,j}^{(1,1)}(s,t) = P_{i+1,j}$

Pour $s=1$ et $t=1$, on a $P_{i,j}^{(1,1)}(s,t) = P_{i+1,j+1}$

Par conséquent, lorsque s et t varient entre 0 et 1, $P_{i,j}^{(1,1)}(s,t)$ décrit une surface interpolant les 4 coins $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ et $P_{i+1,j+1}$. C'est un analogue 2D de l'algo de Casteljau pour les courbes.

Ainsi, à partir du tableau de points de contrôle $P_{i,j}$, pour $i=0,\dots,m-1$ et $j=0,\dots,n-1$, on définit un tableau $P_{i,j}^{(1,1)}(s,t)$ pour $i=0,\dots,m-2$ et $j=0,\dots,n-2$, puis de la même façon, un tableau $P_{i,j}^{(2,2)}(s,t)$ pour $i=0,\dots,m-3$ et $j=0,\dots,n-3$.

On distingue ~~alors~~ alors 3 cas.

1) Si $n=m$. On aboutit à un unique point $Q(s,t) = P_{0,0}^{(m-1,n-1)}$

2) Si $n>m$. Pour $r=m,\dots,n-1$ et pour $j=0,\dots,n-r-1$, on pose $P_{0,j}^{(r,r)}(s,t) = (1-t)\,P_{0,j}^{(r-1,r-1)}(s,t) + t\,P_{0,j+1}^{(r-1,r-1)}(s,t)$, ce que l'on termine la séquence par l'algo de casteljau 1D

puis on pose $Q(s,t) =$ ~~[illegible]~~ $P_{0,0}^{(n-1,m-1)}$

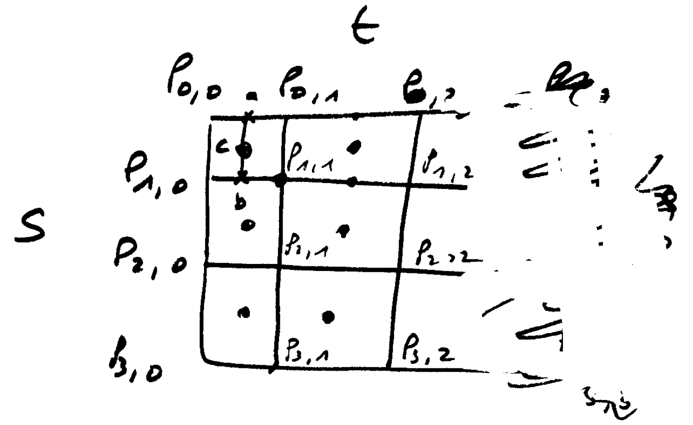
3) Si $n < m$. Pour $r = n, \dots, m-1$ et pour $i = 0, \dots, m-r-1$, on pose $P_{i,0}^{(r,r)}(s,t) = (1-s)\, P_{i,0}^{(r-1,r-1)}(s,t) +$

$s\, P_{i+1,0}^{(r-1,r-1)}(s,t)$, puis on pose

$$Q(s,t) = P_{0,0}^{(m-1,m-1)}$$

La surface ainsi définie s'appelle surface de Bezier de points de contrôle $P_{i,j}$.

Solution



On a

$$\begin{cases} P^{(0,1)}_{i,j} = (1-t)\,P_{i,j} + t\,P_{i,j+1} \\ P^{(1,0)}_{i,j} = (1-t)\,P_{i+1,j} + t\,P_{i+1,j+1} \end{cases}$$

$$P^{(1,1)}_{i,j}(s,t) = (1-s)\,P^{(0,1)}_{i,j} + (s)\,P^{(1,0)}_{i,j}$$

$$\boxed{s = 1/4 \quad t = 1/2}$$

ⓐ $$P^{(0,1)}_{0,0} = \left(\tfrac{1}{2}\right) P_{0,0} + \tfrac{1}{2} P_{0,1} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\1/2\\0\end{vmatrix}$$

ⓑ $$P^{(1,0)}_{0,0} = \left(\tfrac{1}{2}\right) P_{1,0} + \tfrac{1}{2} P_{1,1} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\1/2\\1/2\end{vmatrix}$$

ⓒ $$P^{(1,1)}_{0,0}(s,t) = P^{(1,1)}_{0,0}(1/4, 1/2) = \left(\tfrac{3}{4}\right) P^{(0,1)}_{0,0} + \tfrac{1}{4} P^{(1,0)}_{0,0}$$

$$= \tfrac{3}{4}\begin{vmatrix}0\\1/2\\0\end{vmatrix} + \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix}1\\1/2\\1/2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\3/8\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1/4\\1/8\\1/8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1/4\\1/2\\1/8\end{vmatrix}$$

ⓒ $\rightarrow$ $$P^{(1,1)}_{0,0}(1/4, 1/2) = \begin{vmatrix}1/4\\1/2\\1/8\end{vmatrix}$$

Il faut faire de même pour $P^{(1,1)}_{0,1}$, $\cancel{P^{(1,1)}_{0,2}}$,
$P^{(1,1)}_{1,0}$, $P^{(1,1)}_{1,1}$, $\cancel{P^{(1,1)}_{1,2}}$,
$P^{(1,1)}_{2,0}$, $P^{(1,1)}_{2,1}$, $\cancel{P^{(1,1)}_{2,2}}$

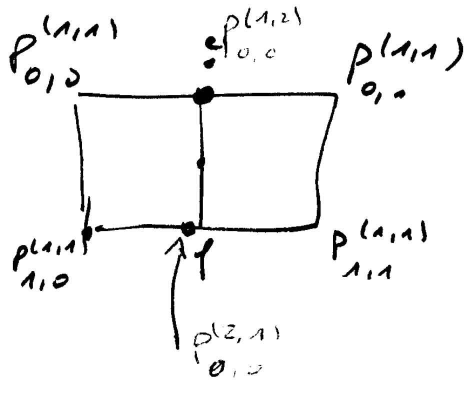
$$P^{(1,1)}_{0,1} = \left|\begin{matrix} 2/8 \\ 12/8 \\ 2/8 \end{matrix}\right. \qquad P^{(1,1)}_{1,0} = \left|\begin{matrix} 10/8 \\ 4/8 \\ 4/8 \end{matrix}\right. \qquad P^{(1,1)}_{1,1} = \left|\begin{matrix} 10/8 \\ 12/8 \\ 8/8 \end{matrix}\right.$$

$$P^{(1,1)}_{2,0} = \left(\begin{matrix} 18/8 \\ 4/8 \\ 3/8 \end{matrix}\right. \qquad P^{(1,1)}_{2,1} = \left|\begin{matrix} 18/8 \\ 12/8 \\ 6/8 \end{matrix}\right.$$

$$P^{(2,2)}_{0,0}(1/4, 1/2) = (1-s)\, P^{(1,1)}_{0,0} + s\, P^{(1,1)}_{0,1}$$

$$= \frac{3}{4}\left|\begin{matrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{matrix}\right. + \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} 2/8 \\ 12/8 \\ 2/8 \end{matrix}\right.$$

$$= \left|\begin{matrix} \cancel{12/32}\ 12/64 \\ 24/64 \\ 32/64 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 4/64 \\ 24/64 \\ 16/64 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 16/64 \\ 48/64 \\ 48/64 \end{matrix}\right.$$



(2)

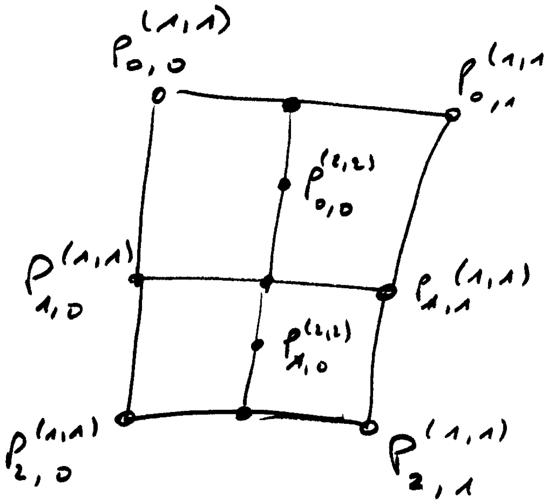
$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{matrix}\right. + \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 2/8 \\ 12/8 \\ 2/8 \end{matrix}\right.$$

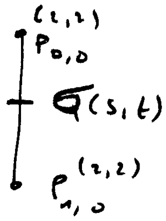
$$= \left|\begin{matrix} 2/16 \\ 4/16 \\ 1/16 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 2/16 \\ 12/16 \\ 2/16 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 4/16 \\ 16/16 \\ 3/16 \end{matrix}\right.$$

$$f = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 10/8 \\ 4/8 \\ 4/8 \end{matrix}\right. + \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 10/8 \\ 12/8 \\ 8/8 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 10/16 \\ 4/16 \\ 4/16 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 10/16 \\ 12/16 \\ 8/16 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 20/16 \\ 16/16 \\ 12/16 \end{matrix}\right.$$

$$P_{0,0}^{(2,2)} = \frac{3}{4}\left|\begin{matrix}4/16\\16/16\\3/16\end{matrix}\right. + \frac{1}{4}\left|\begin{matrix}20/16\\16/16\\12/16\end{matrix}\right.$$

$$P_{0,0}^{(2,2)} = \left|\begin{matrix}12/64\\48/64\\9/64\end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix}20/64\\16/64\\12/64\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}32/64\\64/64\\21/64\end{matrix}\right.$$





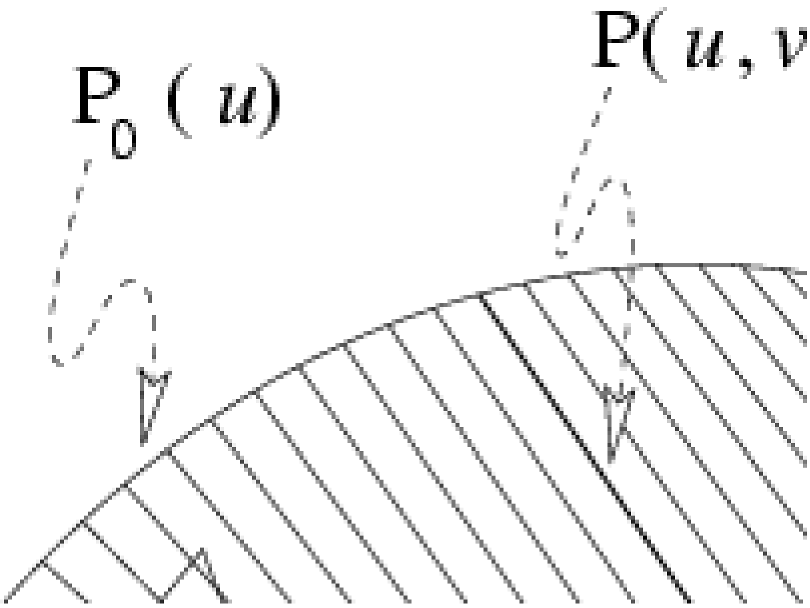
$$P_{1,0}^{(2,2)} = \left|\begin{matrix}96/64\\64/64\\45/64\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow \sigma(s,t) = (1-s)\,P_{0,0}^{(2,2)} + s\,P_{1,0}^{(2,2)} = \boxed{\left|\begin{matrix}192/256\\256/256\\108/256\end{matrix}\right. = \sigma(s,t)}$$

Fin exercice II.

2- Ecrire un programme permettant de définir un carreau paramétrique avec l'algorithme de Casteljau

Exercice III : **Surface réglée**
Reprendre le TP sur les courbes de Bézier. Tracer ensuite deux courbes paramétriques. Pour un même u, relier les points des deux courbes afin d'obtenir une surface réglée.



Exercice IV : **Surface balayée**
Vous souhaitez construire un rail de sécurité sur le bord d'une route. Vous utiliserez pour cela un ensemble de courbes de Béziers pour modéliser la génératrice et la directrice. Sur la figure ci-dessous, un courbe sert de « profil » ; les autres courbes, mises bout à bout guident ce profil (qui reste pour simplifier toujours dans un même plan.
Bien sûr, si vous utilisez le repère de Frénet, vous pouvez faire beaucoup mieux…