Représentation surfaciques, polyèdres et quadriques

Gilles Gesquière

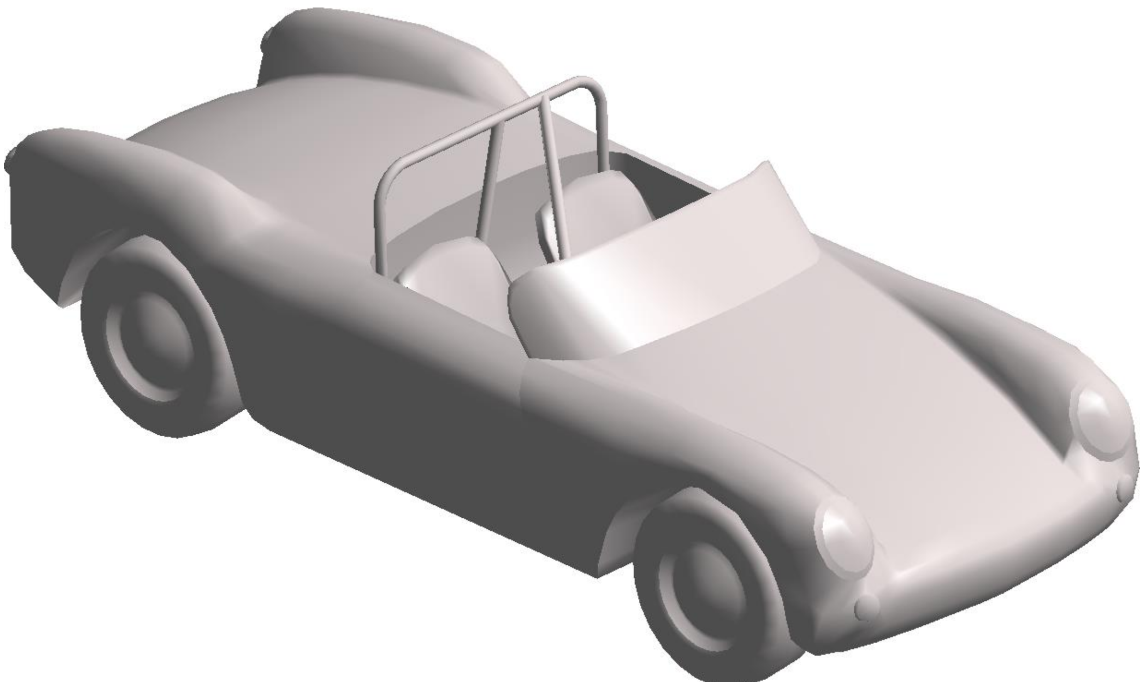
Plan

- Introduction
- Rappel de trigonométrie
- Représentation polyédrique ≠ continue
- Quadriques
- Rappel OpenGL

Introduction

- Représentation surfacique :

➡ le modèle est défini par sa surface extérieure



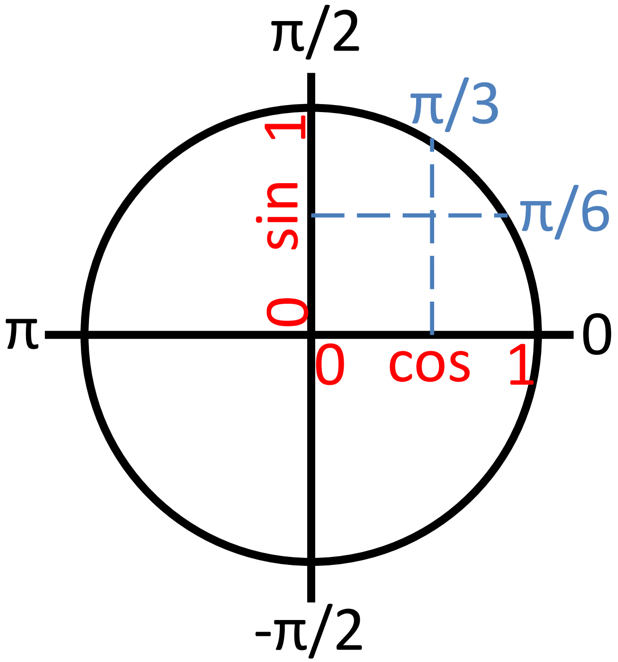
➡ Comment représenter la surface d'un objet ??

Rappel trigonométrie

- **Propriétés du triangle rectangle :**
  - Triangle ABC rectangle en A
  - BC est l'hypoténuse
  - Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$
  - Pour l'angle $\widehat{ABC}$, entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:
    - Cos(ABC) = BA/BC : adjacent/hypoténuse
    - Sin(ABC) = AC/BC : opposé/hypoténuse
    - Tan(ABC) = AC/BA : opposé/adjacent

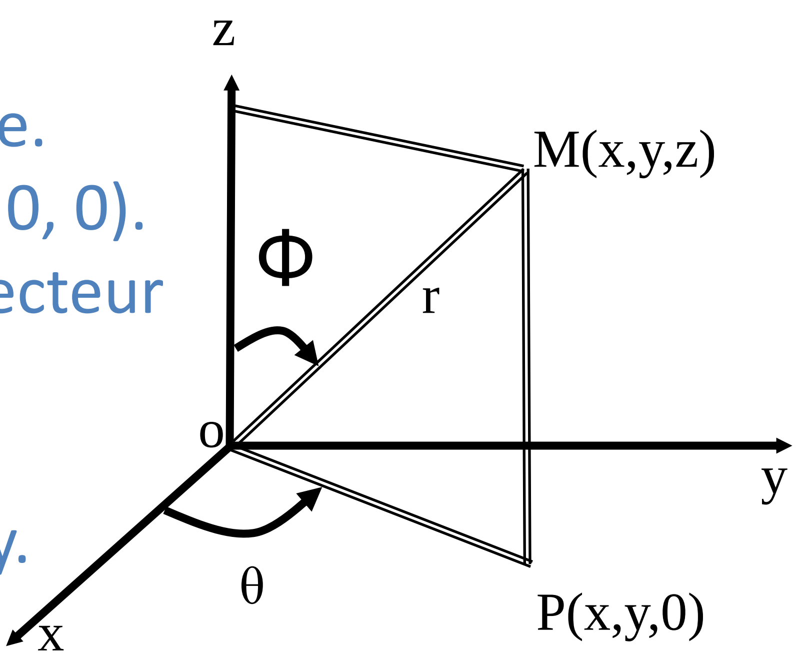
Rappel trigonométrie

- **Angles et cercle trigonométrique :**
  - Cos (0) = 1 Cos(π) = -1
  - Cos(π/2) = 0 Cos(π/3) = 1/2
  - Sin (π/2) = 1 Sin(-π/2) = -1
  - Sin(0) = 0 Sin(π/6) = ½



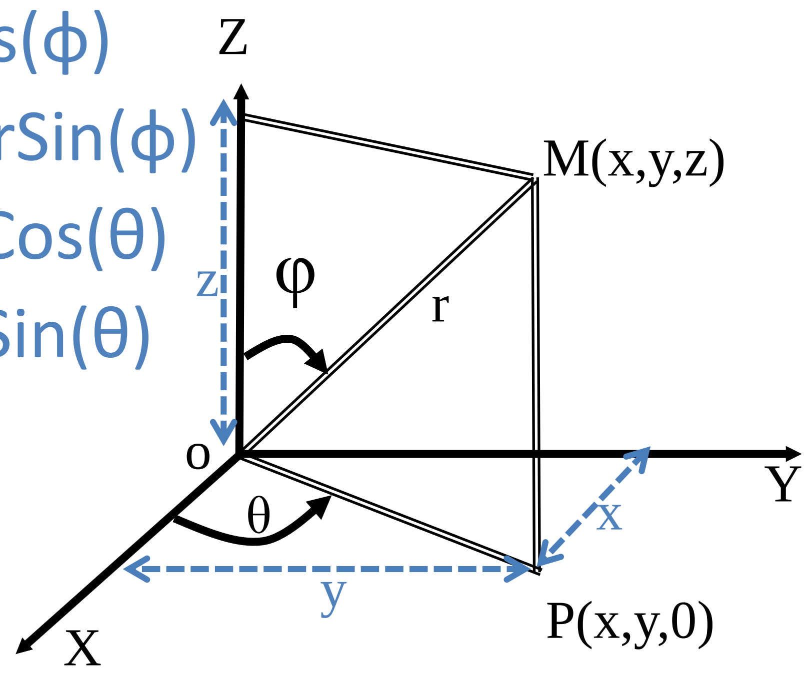
Rappel trigonométrie

- **Coordonnées sphériques :**
  - Soit M(x, y, z) un point de l'espace.
  - Soit r la distance entre M et O(0, 0, 0).
  - Soit ϕ l'angle entre l'axe Z et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui est compris entre 0 et π.
  - Soit P(x, y, 0) la projection orthogonale de M sur le plan xOy.
  - Soit θ l'angle entre l'axe X et le vecteur $\overrightarrow{OP}$ qui est compris entre 0 et 2π.
  - Le triplet (r, θ, ϕ) constitue les *coordonnées sphériques* de M.



Rappel trigonométrie

- Coordonnées sphériques :
  - $\cos(\phi) = PM/OM \Rightarrow z = r\cos(\phi)$
  - $\cos(90-\phi) = OP/OM \Rightarrow OP = r\sin(\phi)$
  - $x/OP = \cos(\theta) \Rightarrow x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$
  - $y/OP = \sin(\theta) \Rightarrow y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$



- $x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$
- $y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$
- $z = r\cos(\phi)$

Polyèdre ≠ Surface continue

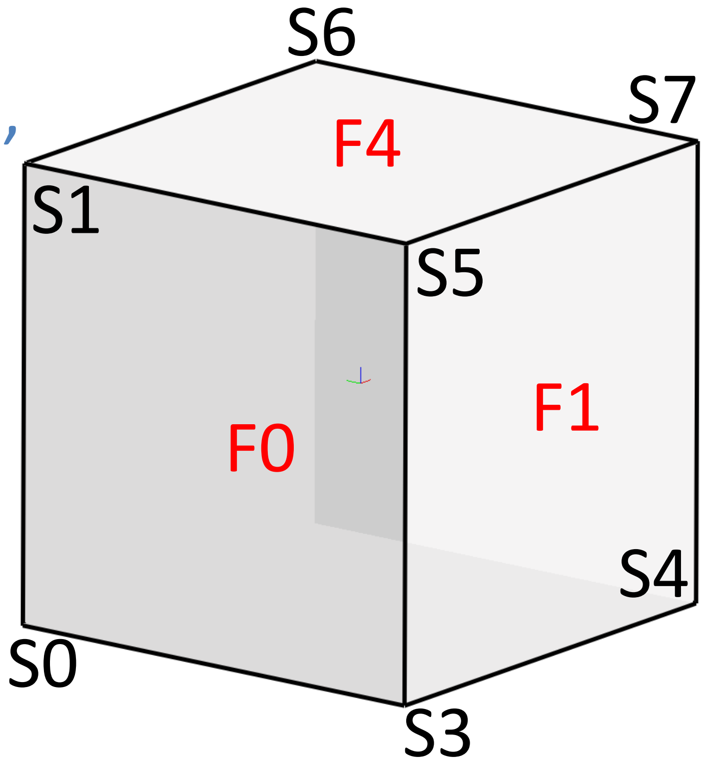
- **Définir une surface de manière finie.**
- **Un polyèdre est défini par :**
  - Par un ensemble de points de IR^3 appelés sommets du polyèdres.
  - Par un ensemble de faces définies chacune par une suite de sommets.

Polyèdre ≠ Surface continue

- **Exemple du cube :**
  - L'ensemble de sommet :

    {S0(-5,-5,-5); S1(-5,-5,5); S2(-5,5,-5), S3(5,-5,-5); S4(5,5,-5); S5(5,-5,5) S6(-5,5,5); S7(5,5,5)}
  - L'ensemble de face :

    {F0(S0,S1,S5,S3); F1(S5,S7,S4,S3); F2(S7,S4,S2,S6); F3(S6,S2,S0,S1); F4(S1,S5,S7,S6); F5(S0,S3,S4,S2) }



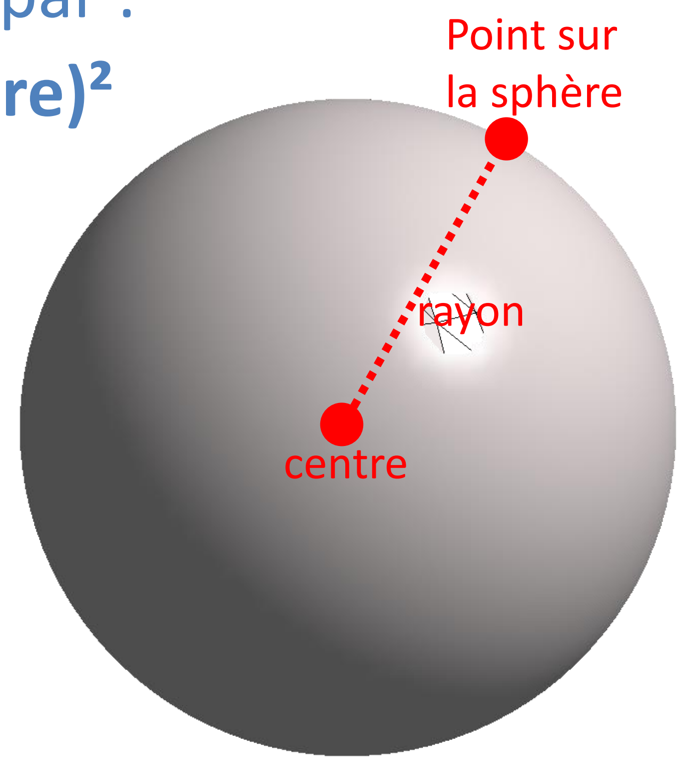
Polyèdre ≠ Surface continue

- **Définir une surface de manière continue :**
  - La surface est décrite par une équation
  - Exemple : une sphère est définie par :

$(X-Xcentre)^2+(Y-Ycentre)^2+(Z-Zcentre)^2 = Rayon^2$

  - On peut ainsi définir la surface par autant de point que l'on veut et n'importe où sur la surface

➡ contrairement au polyèdre



Quadriques

- La classe de surfaces quadriques contient les cylindres, les cônes, les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes, les hyperbolïdes …
- Une quadrique a une équation implicite de

degré 2 de la forme $F(x,y,z)=0$ avec : $F(x,y,z)=$
$Ax^2+2Bxy+2Cxz+2Dx+Ey^2+2Fyz+2Gy+Hz^2+2Iz+J$

Sphère ➡ $(X-Xc)^2 + (Y-Yc)^2 + (Z-Zc)^2 = \text{rayon}^2$

➡ $X^2-2XXC+Y^2-2YYC+Z^2-2ZZc + Xc^2+Yc^2+Zc^2-r^2 = 0$

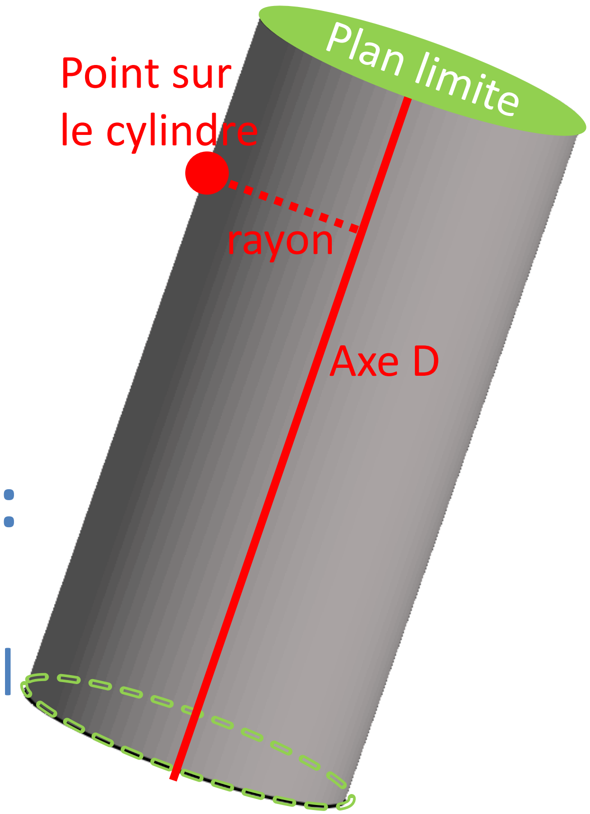
➡ On retrouve $F(x,y,z)$ avec $A=1$, $E=1$, $H=1$,

$D=Xc$, $G=Yc$, $I=Zc$

et $J = Xc^2+Yc^2+Zc^2-r^2$

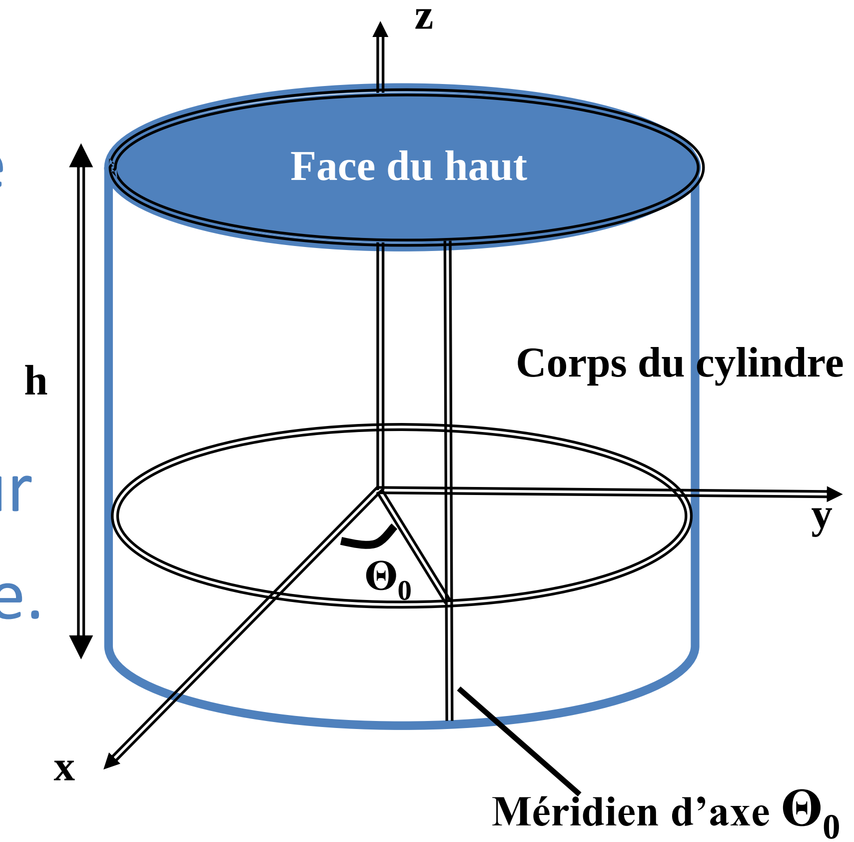
Quadriques : cylindres

- **Un cylindre est défini:**
  - par une droite et un rayon,
  - le cylindre de révolution d'axe D et de rayon r est constitué de l'ensemble des points de IR^3 qui sont situés à distance r de la droite D.
- **Le cylindre qui coïncide avec l'axe Oz :**
  - a pour équation $x^2 + y^2 = r^2$
  - sa hauteur est défini par un nombre réel positif : ***h***,
  - *h* permet de définir les deux plans limites du cylindres à –h/2 et h/2.



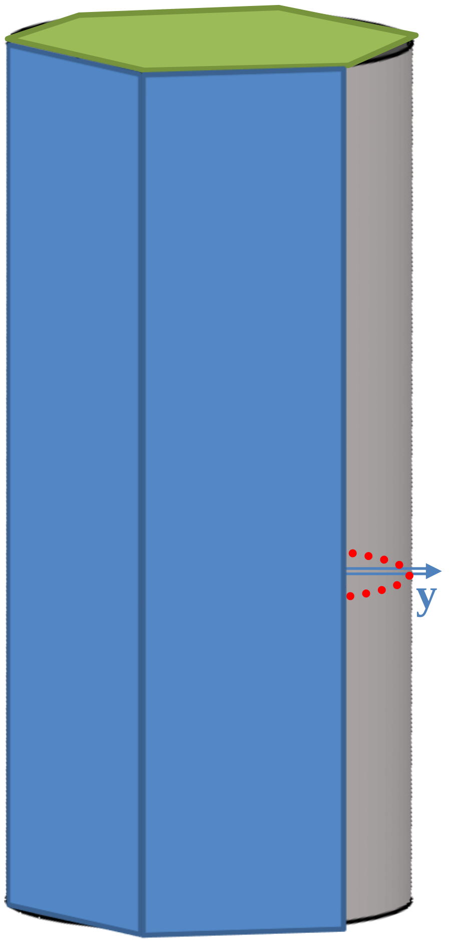
Quadriques : cylindres

- **Méridiens d'un cylindre :**
  - Les *méridiens* sur un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h sont les segments de droites contenus dans le corps du cylindre, de longueur h, parallèles à l'axe du cylindre.



Quadriques : cylindres

- **Facettisation d'un cylindre :**
  - Etant donné un nombre de méridien m, nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i ,pour i=0,…,m régulièrement disposé sur le corps du cylindre.
  - Construire ensuite des facettes rectangulaires entre les méridiens M_i et M_{i+1}, pour i=0, … m-1.
  - Construire ensuite deux facettes pour les faces du haut et du bas du cylindre.



Quadriques : cylindres

- **Création du polyèdre correspondant (sommets):**
  - Il contient 2m: 2 sommets par méridien utilisés chacun 3 fois :   2 fois pour les faces issues des méridiens et 1 fois pour les plans limites.
  - Pour les construire : on étudie chaque méridien dont les angles varient entre 0 et 2π tel que $\theta_i = 2\pi\ i/m$ avec i=0, ….,m-1.

    Soit M_i le méridien d'angle θ_i : on définit deux sommets :

    Coordonnées cartésiennes de P_i (en –h/2)

    - $x = r\text{Cos}(\theta_i)$
    - $y = r\text{Sin}(\theta_i)$
    - $z = -h/2$

    Coordonnées cartésiennes de P'_i(en h/2)

    - $x = r\text{Cos}(\theta_i)$
    - $y = r\text{Sin}(\theta_i)$
    - $z = h/2$

Quadriques : cylindres

- **Création du polyèdre correspondant (facettes):**
  - Facettes entre les méridiens:

    Pour i=0….,m-1 la facette numéro i est composée des 2 sommets du méridien M_i et de ceux du méridien M_{i+1} Facette i = P_i ,P'_i ,P'_{i+1} ,P_{i+1}
  - Facette du bas :

    Une face ➡ P_0 ,P_1 , … ,P_{m-1}
  - Facette du haut :

    Une face ➡ P'_{m-1} , … ,P'_1 ,P'_0

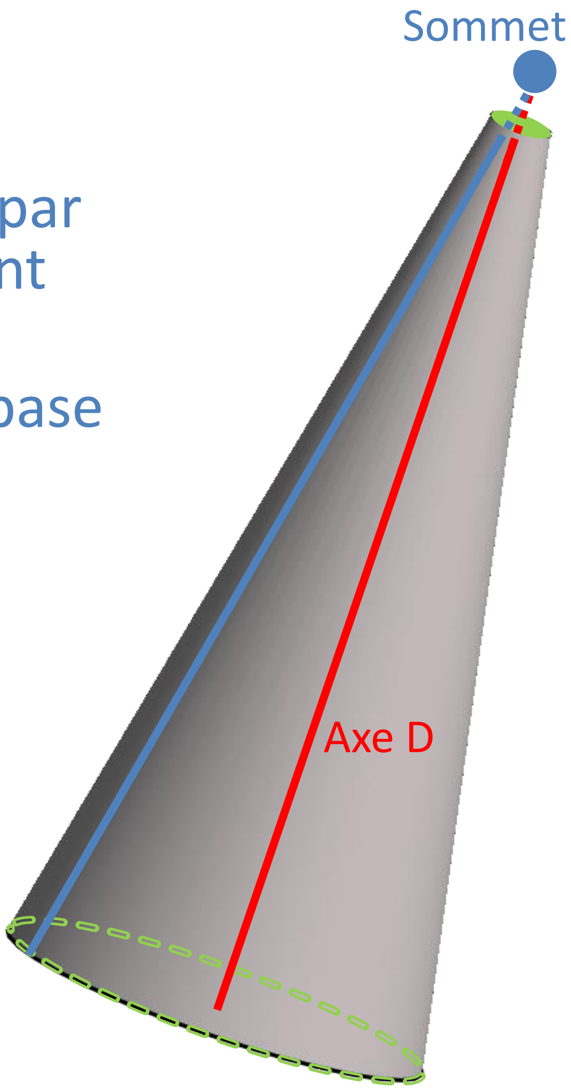
    (Ordre d'énumération inversé pour garder une orientation cohérente).

Quadriques : cônes

- **Un cône est défini:**
  - ➢ par un ensemble de droite passant toutes par un sommet (sommet du cône) et s'appuyant sur une courbe (base),
  - ➢ dans le cas d'un cylindre de révolution, la base est un cercle.
- **Equation du cône d'axe Z :**
  - ➢ le sommet S (0, 0, Zsommet),
  - ➢ le cercle de rayon r est centré en O

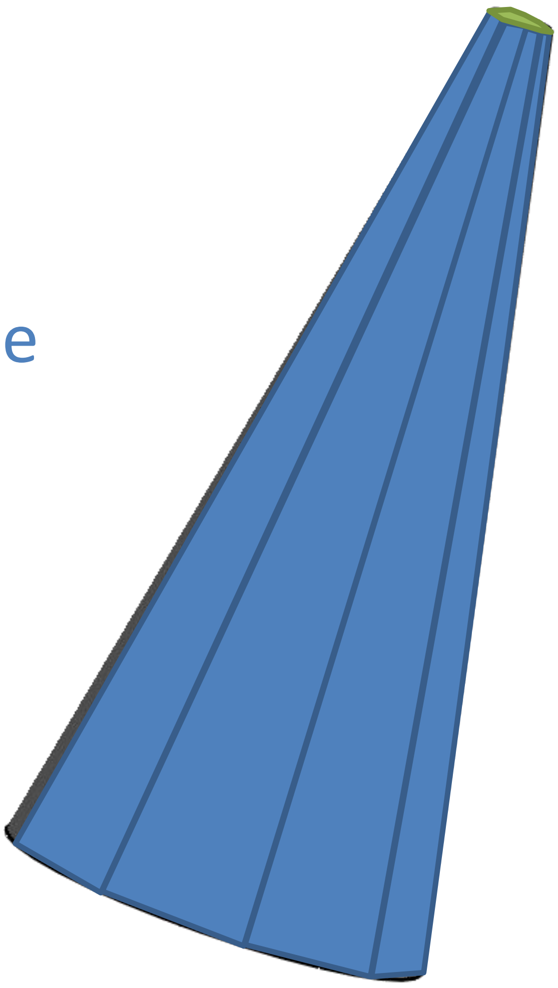
  et appartient au plan xOy,
  - ➢ il a pour équation :

$$(z-z_{sommet})^2 = z_{sommet}{}^2/r^2*(x^2+y^2)$$



Quadriques : cônes

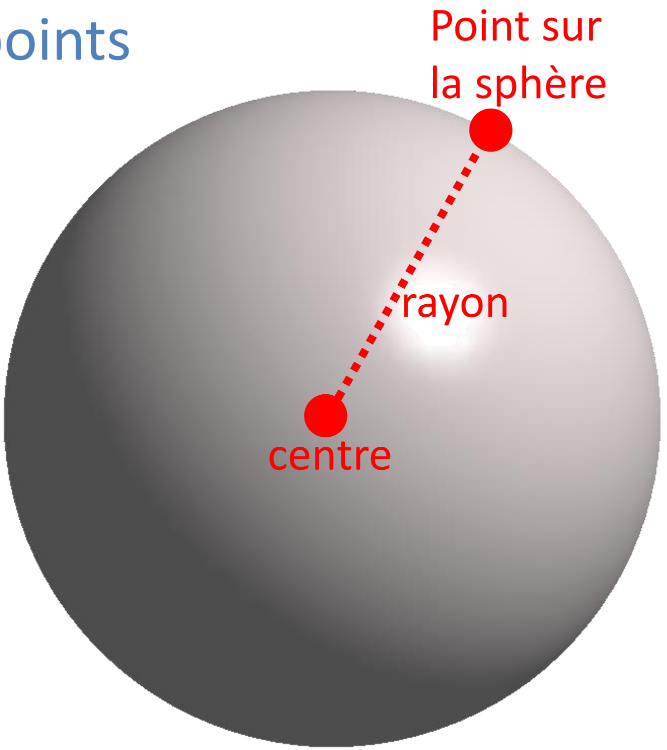
- **Facettisation d'un cône :**
  - À partir des méridiens définis par Θ_i,
  - 2m sommets sont nécessaires,
  - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,
  - on construit des faces trapézoïdales entre les méridiens,
  - construction de 2 faces pour les plans limites.



Quadriques : sphère

- **Une sphère est définie :**
  - ➢ par un centre et un rayon,
  - ➢ elle est constituée d'un ensemble de points à distance r du centre.
- **Equation de la sphère de centre O :**
  - ➢ le sommet O (0, 0, 0),
  - ➢ il s'agit de l'ensemble des points $M = (x_m, y_m, z_m)$ de l'espace, de coordonnées sphériques (r_m, ϕ_m, θ_m),
  - ➢ elle a pour équation :

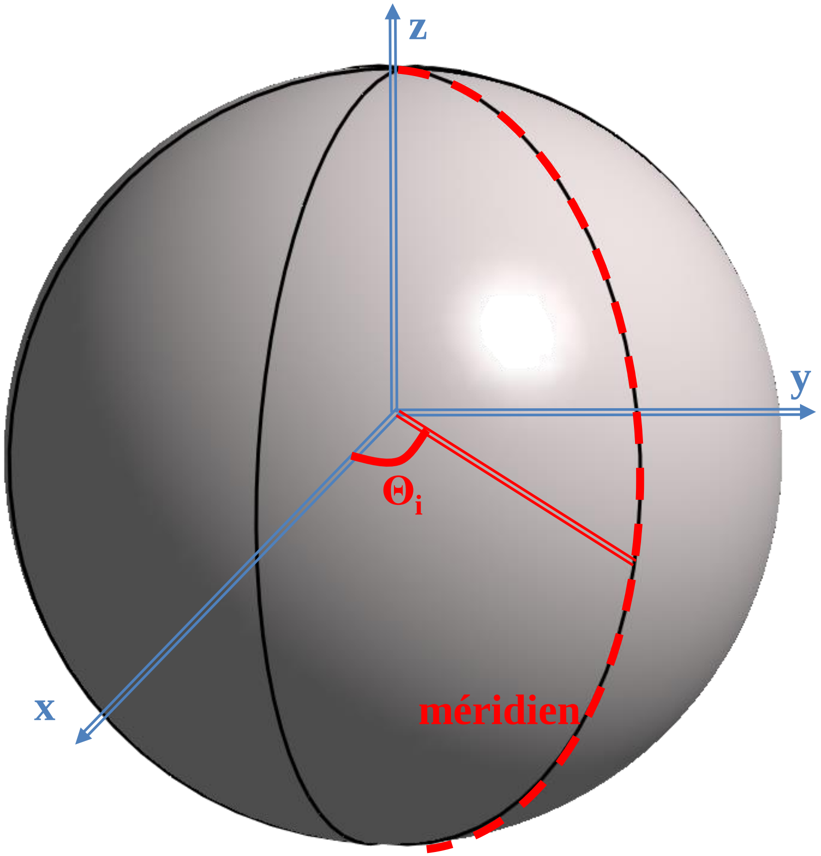
$$x_m^2+y_m^2+z_m^2 = r^2$$



Quadriques : sphère

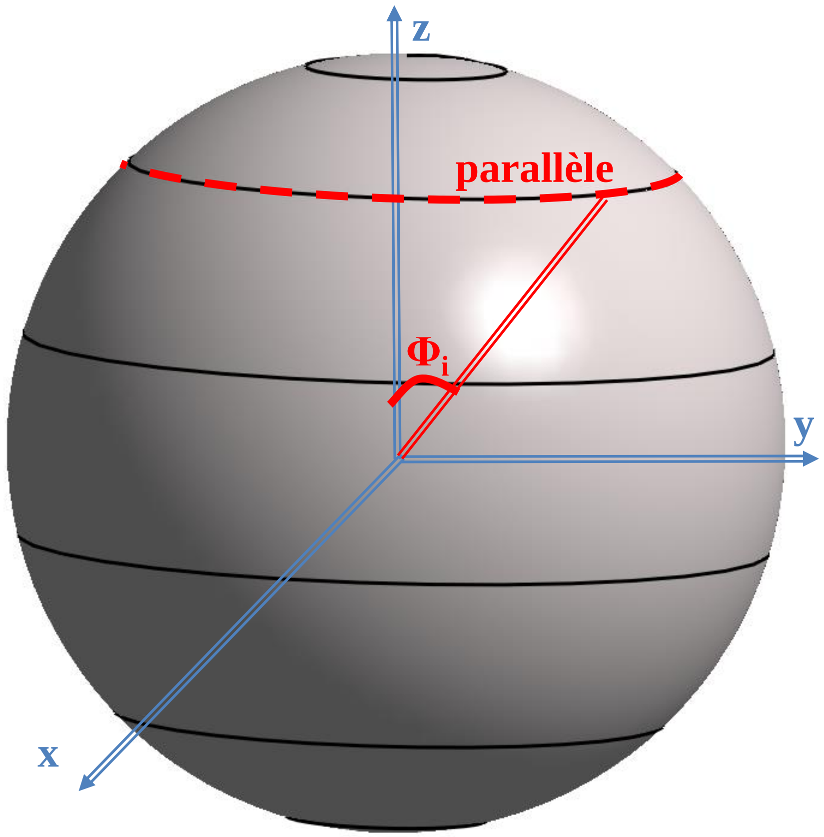
- Les méridiens :
  - Un ***méridien*** sur la sphère S_r est un demi- cercle formé de l'ensemble des points M de coordonnées sphériques

    (r, ϕ_{m}, θ_m) tels que l'angle θ_m soit fixé égal à une certaine valeur.
  - Soit $\theta_i \in [0,2\pi[$, le méridien i de S_r d'angle θ_i est constitué de l'ensemble des points M tels que $\theta_m = \theta_i$.



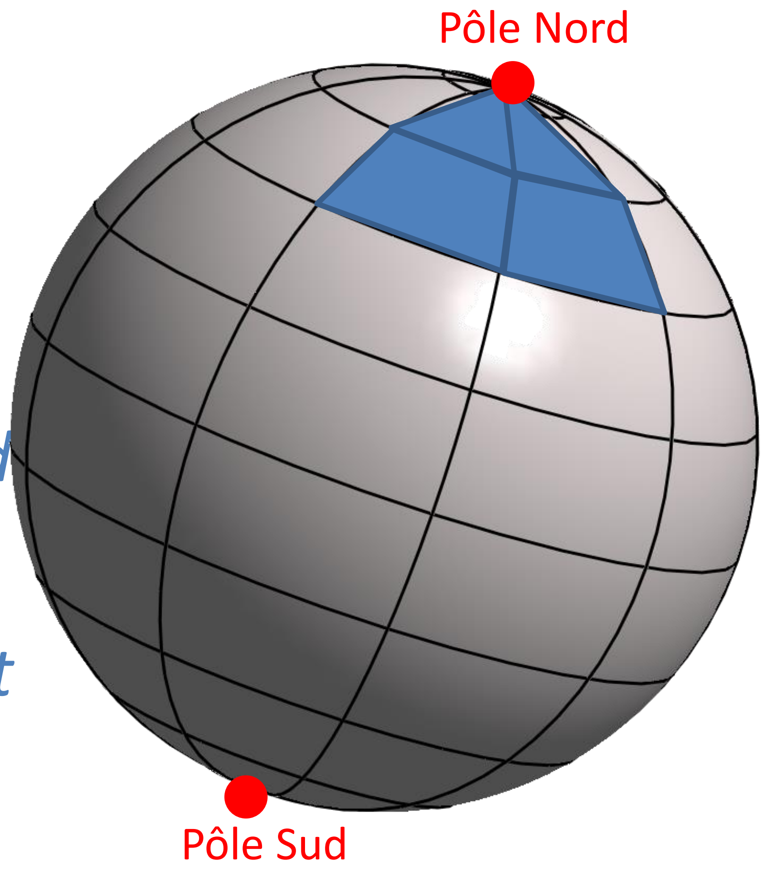
Quadriques : sphère

- **Les parallèles :**
  - Etant donné $\phi_i \in]0,\pi[$, le *parallèle* d'angle ϕ_i de la sphère S_r est le cercle constitué de l'ensemble des points $M(r, \phi_m, \theta_m)$ de S_r tels que $\phi_m = \phi_i$.



Quadriques : sphère

- **Facettisation de la sphère :**
  - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
  - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
  - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
  - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*
  - *des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.*



Conclusion

- **Représentation surfacique :**
  - soit de manière continue,
  - soit de manière polyédrique.
- **Passage continue ➡ facettisation :**
  - a partir de l’équation d’une surface, on peut construire une facettisation de la surface,
  - l’équation mathématique sous-jacente peut permettre de faire varier la résolution du modèle facettisé.