Урок 1

1) $U = x^3 + 3xy + z^2 - 39x - 36y - 2z + 26$

$U'_x = 3x^2 + 3y^2 - 39$

$U'_y = 6xy - 36$

$U'_z = 2z + 2$

$U''_{xx} = 6x$

$U''_{xy} = 6y$

$U_{xz} = 0$

$U''_{yy} = 6x$

$U''_{yx} = 6y$

$U''_{yz} = 0$

$U''_{zz} = 2$

$U''_{zx} = 0$

$U''_{zy} = 0$

2)

$$V = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$$

$$V'_x = -\frac{256}{x^2} + \frac{2x}{y}$$

$$V'_y = \frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{z}$$

$$V'_z = \frac{-y^2}{z^2} + 2z$$

$$V''_{xx} = \frac{512}{x^3} + \frac{2}{y}$$

$$V''_{xy} = -\frac{2x}{y^2}$$

$$V''_{xz} = 0$$

$$V''_{yy} = \frac{2x^2}{y^3} + \frac{2}{z}$$

$$V''_{yx} = -\frac{2x}{y^2}$$

$$V''_{yz} = -\frac{2y}{z^2}$$

$$V''_{zz} = \frac{2y^3}{z^3} + 2$$

$$V''_{zx} = 0$$

$$V''_{zy} = -\frac{2y}{z^2}$$

3) Найдите производную функции

$U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению $\vec{c}(-9, 8, -12)$

в точке $M(8, -12, 9)$

Находим модуль вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} =$

$\sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} = \sqrt{289} = 17$

Единичный вектор равен:

$\vec{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right)$

Найдем градиент в точке M:

$U'_x = 2x, \ U'_y = 2y, \ U'_z = 2z$

$\operatorname{grad} U = (16, -24, 18)$

Значение производной

$U'_c = -\frac{9}{17} \cdot 16 + \frac{8}{17} \cdot (-24) - \frac{12}{17} \cdot 18 = \frac{-144 - 192 - 216}{17} =$

$= \frac{552}{17}$

4) Найти производную функции $V = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{c}(4, -13, -16)$ в точке $L(-16, 4, -13)$

Находим длину вектора

$\vec{c} : |\vec{c}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{4^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{441}$

$= 21$

Единичный вектор $= \vec{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right)$

Найдем градиент в точке L:

$V'_x = 2x \cdot e^{x^2+y^2+z^2}, V'_y = 2y \cdot e^{x^2+y^2+z^2}, V'_z =$

$= 2z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$\operatorname{grad} V = (-32 \cdot e^{441}, 8 \cdot e^{441}, -26 \cdot e^{441})$

Значение производной:

$V'_{\vec{c}} = \frac{4}{21} \cdot (-32 \cdot e^{441}) - \frac{13}{21} \cdot (8 \cdot e^{441}) - \frac{16}{21} \cdot (-26 \cdot e^{441}) =$

$= e^{441} \times \frac{-128 - 104 + 416}{21} = \frac{184}{21} e^{441}$

5) $V = \log_{21}(x^2+y^2+z^2)$ в точке $F(-19, 8, -4)$

$$V = \log_{21}(x^2+y^2+z^2) = \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{\ln 21}$$

Самое быстрое направление это направление градиента. Производная по направлению градиента равна норме градиента.

Найдем градиент в точке F

$$V'_x = \frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)\cdot\ln 21}, \quad V'_y = \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)\cdot\ln 21},$$

$$V'_z = \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)\ln 21}$$

Норма градиента:

$$|grad V| = \sqrt{(V'_x)^2+(V'_y)^2+(V'_z)^2} = \frac{2}{(x^2+y^2+x^2)\cdot\ln 21}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\ln 21} = \frac{2}{\sqrt{(-19)^2+8^2+(-4)^2}\cdot\ln 21} =$$

$$= \frac{2}{21\cdot\ln 21} = V'_{grad}$$