Урок 10

2) Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\dots+\frac{1000^n}{n!}+\dots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1000^n}{n!}$$

Признак д'Аламбера

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1000^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,1000^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1000}{n+1}=0$$

$q<1$, ряд сходится

3) $$\frac{2\cdot1!}{1}+\frac{2^2\cdot2!}{2^2}+\dots+\frac{2^n\cdot n!}{n^n}+\dots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$$

Признак д'Аламбера

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot2^n n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=$$

$$=2\lim_{n\to+\infty}e^{n(\ln(n)-\ln(n+1))}=2\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln(n)-\ln(n+1)}{n^{-1}}}$$

Правило Лопиталя

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln(n)-\ln(n+1))'}{(n^{-1})'}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{-n^{-2}}=$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=-1$$

Следовательно, $2\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n)-\ln(n+1)}{n-1}} =$

$= 2e^{-1} = \frac{2}{e}$

$\frac{2}{e} < 1$ следовательно ряд сходится.

3) Исследовать сходимость функции

$$-\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ldots + \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$$

1) знакопостоянный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

расходится по второму признаку сходимости $(O(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}) \to p < 1)$

2) Рассмотрим предел модуля главного члена. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$ т.к. корень в числителе стремится медленнее к бесконечности чем знаменатель следовательно, знакопеременный ряд сходится.