б)

$$U = 3 - 8x + 6y$$

если

$$x^2 + y^2 = 36$$

Функция Лагранжа

$$L = (x, y, \lambda) = 3 - 8x + 6y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36)$$

Система уравнений из частных 1 пор.

$$\begin{cases} L'_x = -8 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 6 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

Виразим из первого уравнения x, из второго y и подставим в третье

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \frac{25}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cancel{x = \quad y = -3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{25}{36} \end{cases}$$

Точки $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$ и $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$

Вторые частные производные

$$L''_{xx} = 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 2\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y$$

Матрица Гесса

$$\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Определитель в общем виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = (-2x) \cdot 4x\lambda + 2y \cdot (-4y\lambda) =$$

$= -8\lambda \cdot 36 = -288\lambda$

При λ $\frac{5}{6}$ $\Delta < 0$, т.е. $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$

точка минимума. При $\lambda = -\frac{5}{6}$ $\Delta > 0$,

т.е. $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$ - точка максимума

2)

$$U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$$

если

$$x^2 + 16y^2 = 64$$

Функция Лагранжа

$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda \cdot (x^2 + 16y^2 - 64)$

Система уравнений частных производных

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 12x + 64y + \lambda \cdot 32y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

Выразим из 2-го уравнения y и подставим

$$\begin{cases} 4x - \frac{12 \cdot 3x}{8(2+\lambda)} + 2\lambda x = 0 \\ y = -\frac{3x}{8(2+\lambda)}, \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 4\lambda + 7 = 0 \\ y = -\frac{3x}{8(2+\lambda)} \\ \lambda^2 + 16y - 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ y = -\frac{3x}{8(2+\lambda)} \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

Значения x и y удовлет. этим условиям, когда $x = \pm 4\sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}$ (есть другие значения x и y для такого λ, но они не являются решениями изначальной системы уравнений)

При $\lambda = -\frac{7}{2}$ получаем две точки $(4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{7}{2})$ и $(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{7}{2})$

При $\lambda = -\frac{1}{2}$ получаем две точки $(4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ и $(-4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2})$

Вторые производные:

$$L''_{xx} = 4 + 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 64 + 32\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 12$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 32y$$

Матрица Гессе

$$\begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{pmatrix}$$

определитель в общем виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{vmatrix} = -2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda \end{vmatrix} + 2y$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda \\ 32y & 12 \end{vmatrix} = -2x(2x(64+32\lambda) - 12 \cdot 32y) +$$

$$+ 32y(2 \cdot 12x - 32y(4+2\lambda)) = 4 \cdot 64(6xy - 32\lambda - 64$$

при $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\Delta < 0$ т.к. $(4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ и $(-4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ - min

при $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\Delta > 0$, т.е. $(4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ и $(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ - min