

影像處理作業報告

HW2

Laplacian operator, unsharp
masking, and high-boost
filtering

授課教授：柳金章教授

學 生：沈冠恩

學 號：612410125

Due date：2023/11/28

Handed in date：2023/11/26

目錄

Technical description	3
Experimental results	8
Discussions	15
References and Appendix	18

Technical description

A. Laplacian operator

1. Filtering in spatial domain

欲將較模糊的影像變為較為清晰，或者是欲將影像中的細節進行標記時，則影像進行一次或二次微分即可達成目的，由於進行微分將使得影像的邊緣以及不連續的部分被強化，且影像中 intensity 變化較慢，也就是較為模糊的部分將被減弱，使得影像變得清晰且細節較為明顯。

利用離散函數的二階微分可知：

可得：

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ &= f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\ &\quad + f(x, y-1) - 4 * f(x, y).\end{aligned}$$

對影像做二次微分，相當於下方 mask：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖(1) 最基本的 Laplacian mask

將上方求得的 $\nabla^2 f(x, y)$ 和原影像 $f(x, y)$ 相減或相加後，可得

sharpening 的影像 $g(x, y)$ ：

$$\begin{aligned}g(x, y) &= f(x, y) - \nabla^2 f(x, y), \\ &= f(x, y) \\ &\quad - [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\ &\quad + f(x, y-1) - 4 * f(x, y)],\end{aligned}$$

$$= 5 * f(x, y) - [f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1)].$$

對影像做 image sharpening，相當於下方 mask：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖(2) 最基本的 image sharpening mask，可直接計算影像經 sharpening 的結果。

2. Filtering in frequency domain

因為：

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] &= (j2\pi u)^n F(u), \\ \mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\right] &= (j2\pi u)^2 F(u, v) + (j2\pi v)^2 F(u, v), \\ &= -4\pi^2(u^2 + v^2)F(u, v). \end{aligned}$$

可得：

$$\mathfrak{F}[\nabla^2 f(x, y)] = -4\pi^2(u^2 + v^2)F(u, v).$$

即：

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2).$$

此外，由於 filter 也要將 original 移至 center $\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$ ，故：

$$H(u, v) = -4\pi^2\left[\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2\right].$$

所以 Laplacian 對應的 Fourier pair 如下：

$$\nabla^2 f(x, y) \Leftrightarrow -4\pi^2\left[\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2\right] F(u, v).$$

B. unsharp masking

1. Filtering in spatial domain

將原影像和原影像對應的模糊化影像進行減法運算，可得原影像對應的 unsharp mask，即：

$$f_s(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y),$$

其中， $f_s(x, y)$ 表示 unsharp mask， $\bar{f}(x, y)$ 表示原影像

$f(x, y)$ 對應的模糊化影像。

原影像對應的模糊化影像可藉由和下列 averaging filter 進行 spatial convolution：

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

圖(3) 最基本的 averaging filter

最後，將 unsharp mask 和原影像相加，即為影像經 unsharp masking 處理後的結果 $g(x, y)$ ：

$$g(x, y) = f(x, y) + f_s(x, y).$$

2. Filtering in frequency domain

將原影像和原影像對應的模糊化影像進行減法運算，可得原影像對應的 unsharp mask，即：

$$f_{hp}(x, y) = f(x, y) - f_{lp}(x, y),$$

其中， $f_{hp}(x, y)$ 表示 unsharp mask， $f_{lp}(x, y)$ 表示原影像 $f(x, y)$ 對應的模糊化影像。

模糊化影像可以藉由將原影像和 Ideal lowpass filter、Butterworth lowpass filter 以及 Gaussian lowpass filter 擇一在 frequency domain 上相乘後，再使用 Inverse Fourier transform 求得。

最後，將 unsharp mask 和原影像相加，即為影像經 unsharp masking 處理後的結果 $g(x, y)$ ：

$$g(x, y) = f(x, y) + f_{hp}(x, y).$$

C. high-boost filtering

1. Filtering in spatial domain

將原影像乘上某常數 A 後，和原影像對應的 unsharp mask 進行減法運算，可得原影像的 high-boost filtering 結果，即：

$$f_{hb}(x, y) = A \cdot f(x, y) - \bar{f}(x, y).$$

由 $\bar{f}(x, y)$ 的定義，可整理上式得：

$$\begin{aligned} f_{hb}(x, y) &= A \cdot f(x, y) - \bar{f}(x, y), \\ &= (A - 1) \cdot f(x, y) + f(x, y) - \bar{f}(x, y), \\ &= (A - 1) \cdot f(x, y) + f_{hp}(x, y). \end{aligned}$$

2. Filtering in frequency domain

將原影像乘上某常數 A 後，和原影像對應的 unsharp mask 進行減法運算，可得原影像的 high-boost filtering 結果，即：

$$f_{hb}(x, y) = A \cdot f(x, y) - f_{hp}(x, y).$$

由 $f_{hp}(x, y)$ 的定義，可整理上式得：

$$\begin{aligned} f_{hb}(x, y) &= (A - 1) \cdot f(x, y) + f(x, y) - f_{lp}(x, y) \\ &= (A - 1) \cdot f(x, y) + f_{hp}(x, y) \end{aligned}$$

Experimental results

本次實驗欲測試如下兩張影像檔案：



圖(4) 由左至右分別為 blurry_moon.tif 以及 skeleton_orig.bmp。

A. Laplacian operator

本次實驗使用此 mask：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

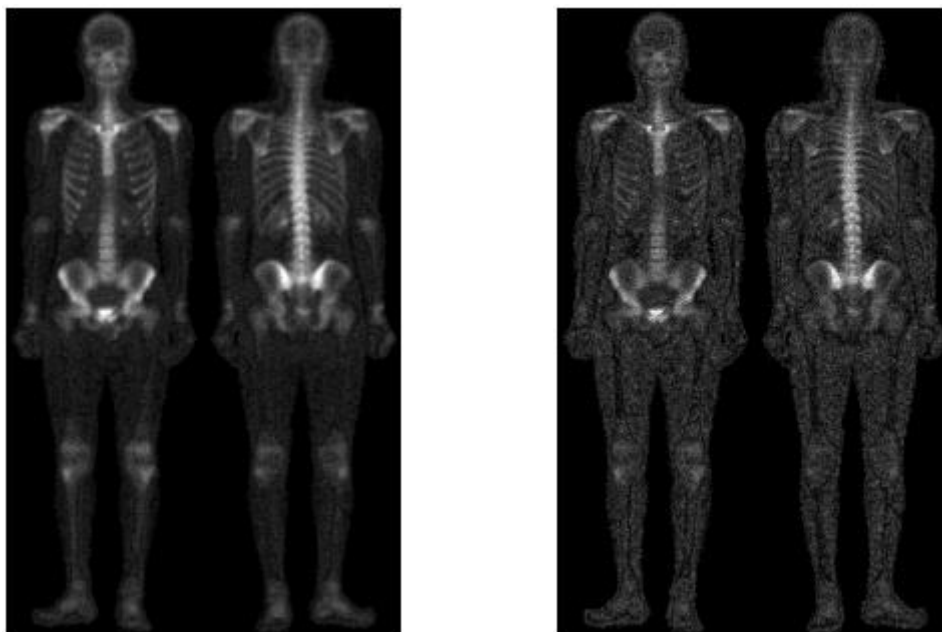
圖(5) 本次實驗使用的 mask。

blurry_moon.tif 影像經 Laplacian operator 分別在 spatial and frequency domain 上處理後結果如下：



圖(6) 由左至右分別為 blurry_moon.tif 經 spatial 和 frequency domain 上對應的 Laplacian filter 處理後的結果。

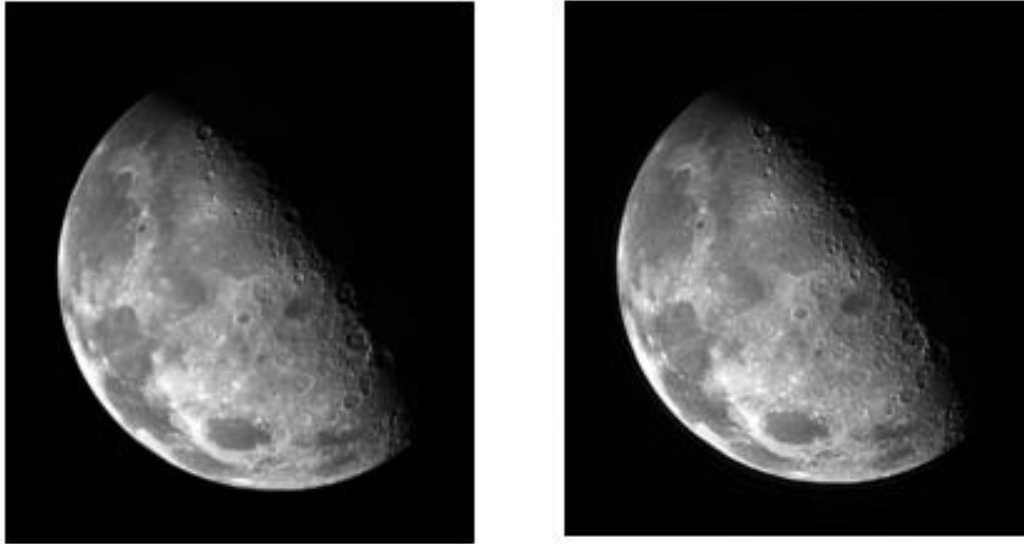
skeleton_orig.bmp 影像經 Laplacian operator 在 spatial and frequency domain 上處理後結果如下：



圖(7) 由左至右分別為 skeleton_orig.bmp 經 spatial 和 frequency domain 上對應的 Laplacian filter 處理後的結果。

B. unsharp masking

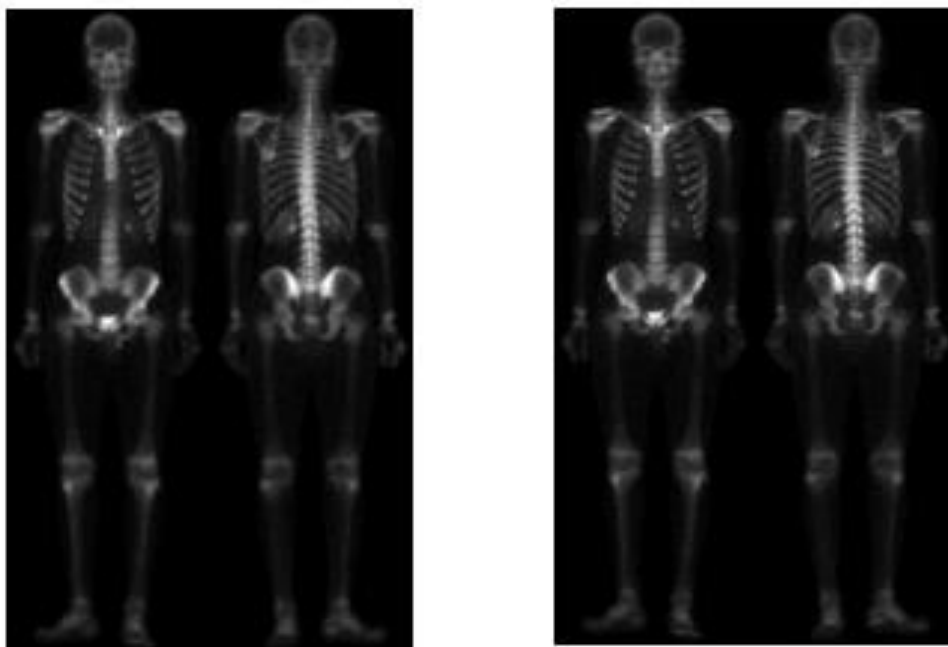
blurry_moon.tif 影像經 unsharp masking 分別在 spatial and frequency domain 上處理後結果如下：



圖(8) 由左至右分別為 blurry_moon.tif 經 spatial 和 frequency domain 上對應的 unsharp masking 運算後的結果。

skeleton_orig.bmp 影像經 unsharp masking 在 spatial and frequency

domain 上處理後結果如下：



圖(9) 由左至右分別為 skeleton_orig.bmp 經 spatial 和 frequency domain 上對應的 unsharp masking 運算後的結果。

C. high-boost filtering

本次實驗常數 A 值採用 1.7。

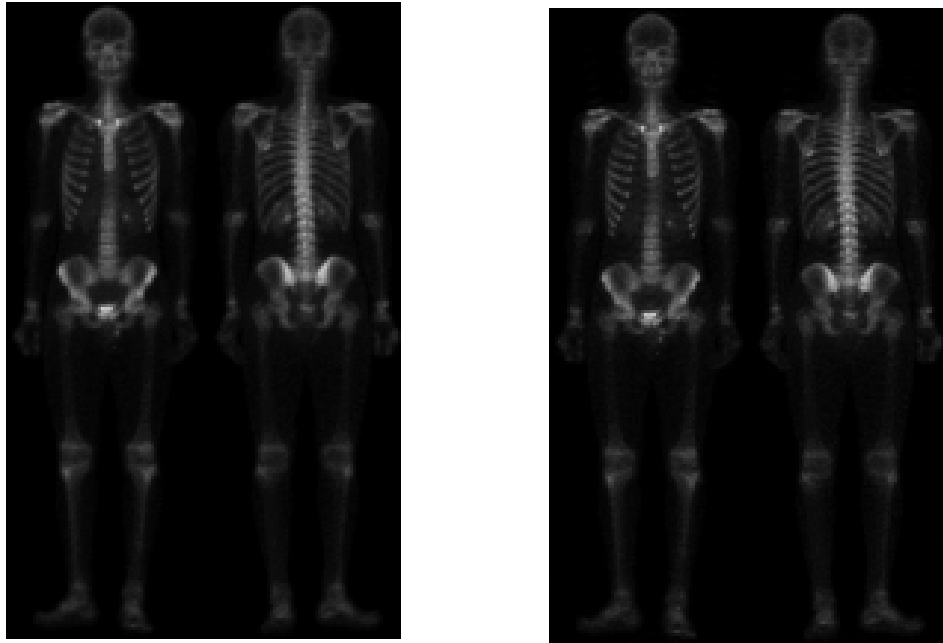
blurry_moon.tif 影像分別在 spatial and frequency domain 上經

high-boost filtering 處理後結果如下：



圖(10) 由左至右分別為 blurry_moon.tif 經 spatial 和 frequency domain 上對應的 high-boost filtering 處理後的結果。

skeleton_orig.bmp 影像分別在 spatial and frequency domain 上經 high-boost filtering 處理後結果如下：



圖(11) 由左至右分別為 skeleton_orig.bmp 經 spatial 和 frequency domain 上對應的 high-boost filtering 處理後的結果。

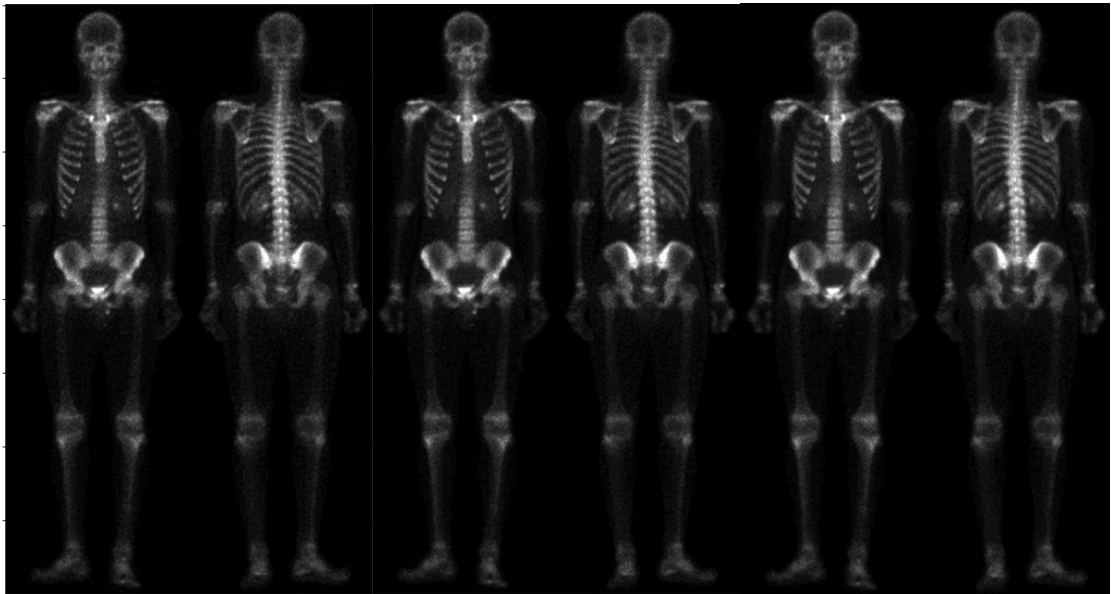
Discussions

A. 使用不同的 low pass filter 進行 unsharp masking 的比較

filter 在半徑 $D_0 = 50$ 之下，分別使用 ILPF、BLPF 以及 GLPF 進行 unsharp masking 的結果如下所示：



圖(12) 由左至右分別為 blurry_moon.tif 在 frequency domain 上分別經 ILPF、BLPF 以及 GLPF 處理後的結果。



圖(13) 由左至右分別為 skeleton_orig.bmp 在 frequency domain 上分別經 ILPF、BLPF 以及 GLPF 處理後的結果。

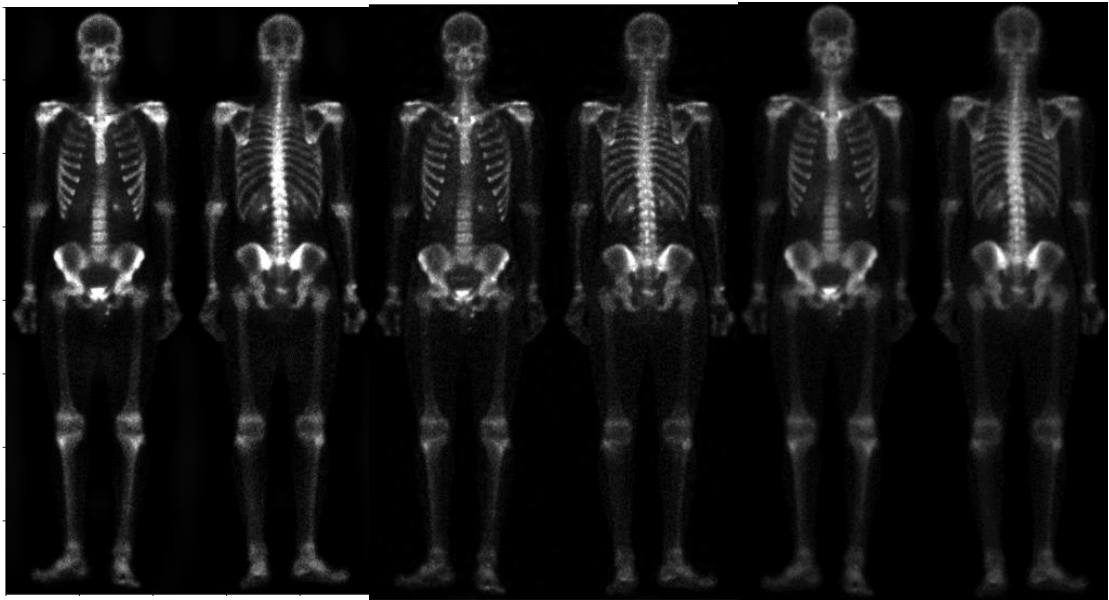
B. 使用不同的半徑值 D_0 造成 unsharp masking 結果的變化

filter 使用 Ideal low pass filter 之下，分別取半徑 $D_0 = 5, 30, 230$

進行 unsharp masking 的結果如下所示：



圖(14) 由左至右分別為 blurry_moon.tif 在 frequency domain 上分別取半徑為 5, 30, 230，經 unsharp masking 處理後的結果。



圖(15) 由左至右分別為 skeleton_orig.bmp 在 frequency domain 上分別取半徑為 5, 30, 230，經 unsharp masking 處理後的結果。

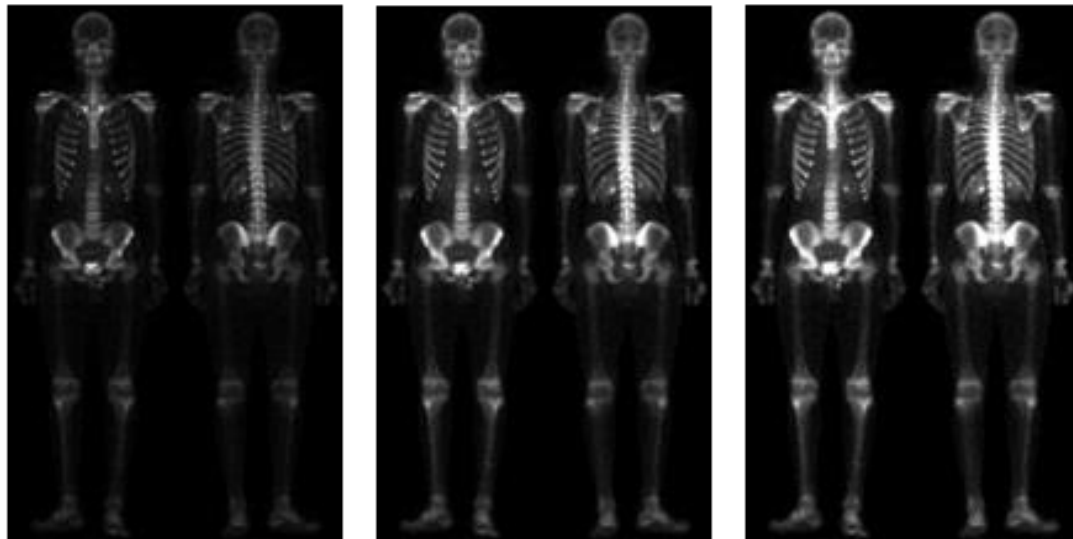
C. 使用不同的常數值 A 造成 high-boost filtering 的變化

filter 使用 Ideal low pass filter 且半徑 D_0 為 30 之下，分別取常數

$A = 1.7, 2.3, 2.7$ 來進行 high-boost filtering 的結果如下所示：



圖(16) 由左至右分別為 blurry_moon.tif 在 frequency domain 上分別取常數 A 為 1.7, 2.3, 2.7，經 high-boost filtering 處理後的結果。



圖(17) 由左至右分別為 skeleton_orig.bmp 在 frequency domain 上分別取常數 A 為 1.7, 2.3, 2.7，經 high-boost filtering 處理後的結果。

References and Appendix

- [1] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, “Intensity Transformation and Spatial Filtering,” in *Digital Image Processing*, 4th ed. London, United Kingdom: Pearson, 2018, pp. 125-184.