

影像處理作業報告

HW1

Power-law transformation, Histogram Equalization, and Image Sharpening

授課教授：柳金章教授

學 生：沈冠恩

學 號：612410125

Due date：2023/11/03

Handed in date：2023/11/01

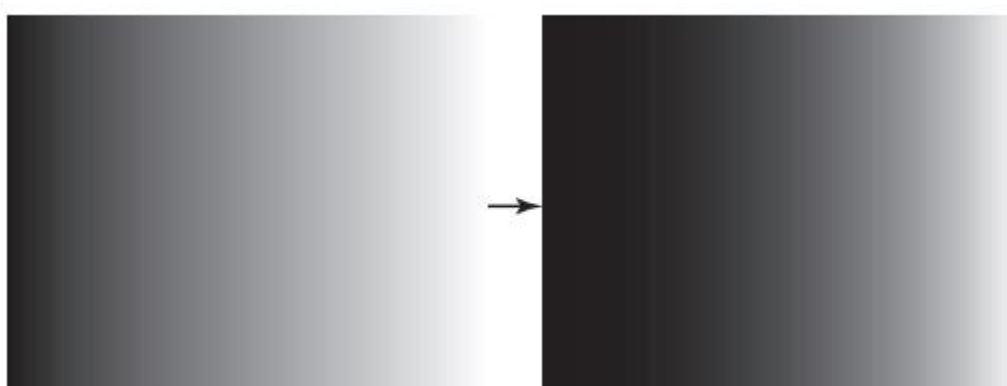
目錄

Technical description	3
Experimental results	11
Discussions	19
References and Appendix	21

Technical description

A. power-law transformations

在螢幕上的顯示或影印機列印文件時，由於裝置預期顯示出的結果和實際顯示出的結果不同，可能會出現亮度不同的情況，如下圖(1)所示：



圖(1) 左圖為螢幕或影印機預期顯示或列印出的結果，但實際上的結果為右圖，顯然地，黑色的部分增加，白色的部分被移除[1]。

這是由於在顯示或列印結果的時候，影像中的每一個 pixels 對應的 intensity value 會進行 power transformation：

$$f'(x, y) = f(x, y)^\gamma,$$

其中 γ 為任意常數， $f'(x, y)$ 為結果影像， $f(x, y)$ 為輸入影像。

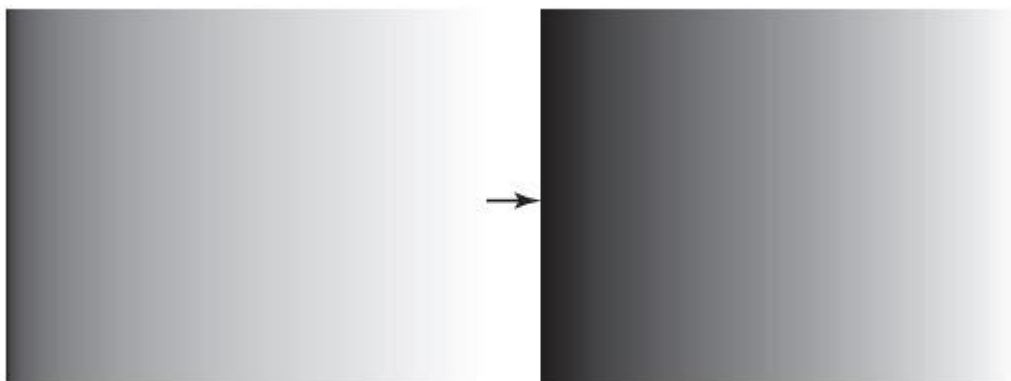
因此可以利用 gamma correction，也就是 gamma-law

transformation 將原影像先進行一次下式之 power transformation：

$$s = cr^\gamma$$

其中 s 為經轉換的 gray level， c 和 γ 皆為一任意常數， r 為轉換前的 gray level。

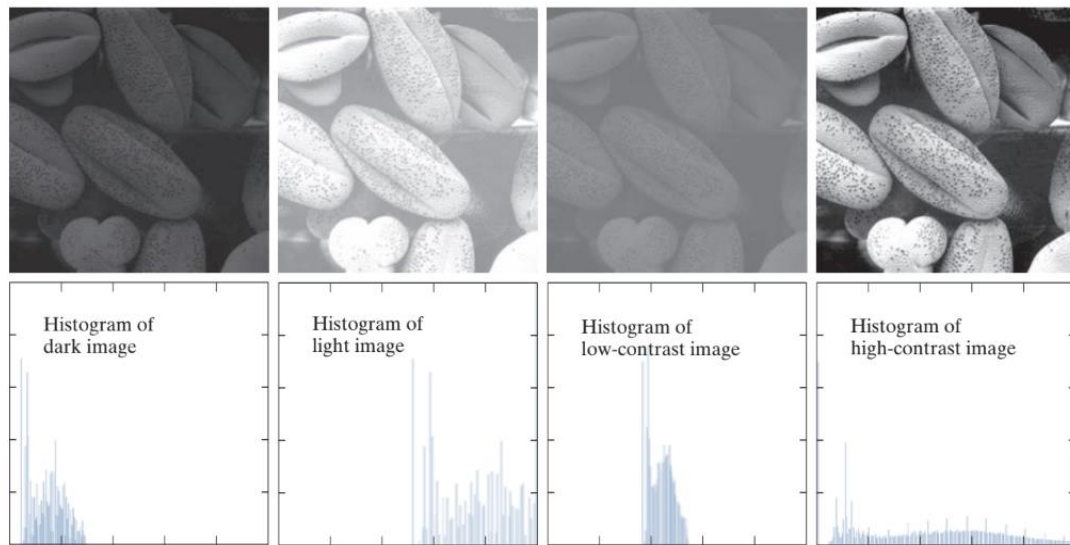
將經轉換後的影像利用螢幕或列印出來之後，即為預期的結果：



圖(2) 左圖為圖(1)左圖經 gamma-law transformation 的結果，右圖為左圖經螢幕或影印機預期顯示或列印出的結果，顯然地，結果已經和預期相差不遠[1]。

B. histogram equalization

在影像中，若影像亮度較亮、較暗或低對比時，則此類型的影像對應的 histogram 的 gray level 分布較偏向暗處、亮處或分布不均，如下圖(3)所示：



圖(3) 由左至右分別為 underexposure image、overexposure image、低對比度影像以及高對比度影像對應的 histogram[1]。

這些類型的影像在肉眼上並不適合判斷以及分析影像，因此可以利用 histogram equalization 將每個 gray level 的分布由較集中，變為平均分布在全部的 gray level，使得經 histogram equalization 的影像可視性更高。

由於所有的影像皆可以用 probability mass function 表示此影像的每一個 gray level 分布情形，故我們採用離散的方法進行 histogram equalization，以下是進行 histogram equalization 的步

驟：

- I. 求得影像中每一個 gray level 在影像中每一個 pixel 出現的次數 $p_r(r_k)$ ：

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN} \quad k = [0, L - 1] \quad (1)$$

其中 MN 、 r_k 、和 n_k 分別代表影像 pixel 數目、在影像中 gray level 為 k 的機率和影像中有多少個 pixel 具 gray level 為 r_k 。

- II. 令 T 為一個 linear transformation，則 pixel k 經 histogram equalization 後的 gray level 為 s_k ：

$$\begin{aligned} s_k &= T(r_k) \\ &= (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \quad k = [0, L - 1] \end{aligned} \quad (2)$$

- III. 根據步驟 II 可得 T 轉換的對應 table，將影像中的每一個 pixel 上的 gray level 根據此 table 轉換即為 histogram equalization 的結果。

利用以上步驟將影像 A 執行 histogram equalization :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 100 \\ 125 & 150 & 200 \end{bmatrix}$$

圖(4) 欲進行 histogram equalization 的模擬影像 A

I. 計算 $p_r(r_k)$: ($MN = 3*3 = 9$)

表(1) 利用(1)式計算影像的 intensity 分布

k	r_k	n_k	$p_r(r_k)$
1	1/9	1	1/9
2	1/9	1	1/9
3	1/9	1	1/9
4	1/9	1	1/9
5	1/9	1	1/9
100	1/9	1	1/9
125	1/9	1	1/9
150	1/9	1	1/9
200	1/9	1	1/9

II. 計算 s_k : ($L = 2^8 = 256$)

表(2) 利用(2)式計算新影像的 intensity 分布

j	k	$p_r(r_k)$	$\sum_{j=0}^k p_r(r_j)$	$s_k = (L - 1)T(r_k)$
[0, 1]	1	1/9	1/9	Round($255 * 1/9, 0$) = 28
[0, 2]	2	1/9	$2 * 1/9 = 2/9$	Round($255 * 2/9, 0$) = 57
[0, 3]	3	1/9	$3 * 1/9 = 3/9$	Round($255 * 3/9, 0$) = 85
[0, 4]	4	1/9	$4 * 1/9 = 4/9$	Round($255 * 4/9, 0$) = 113
[0, 5]	5	1/9	$5 * 1/9 = 5/9$	Round($255 * 5/9, 0$) = 142
[0, 100]	100	1/9	$6 * 1/9 = 6/9$	Round($255 * 6/9, 0$) = 170
[0, 125]	125	1/9	$7 * 1/9 = 7/9$	Round($255 * 7/9, 0$) = 198
[0, 150]	150	1/9	$8 * 1/9 = 8/9$	Round($255 * 8/9, 0$) = 227
[0, 200]	200	1/9	$9 * 1/9 = 1$	Round($255 * 1, 0$) = 255

可得 T 轉換對應的 table：

表(3) 利用表(2)求得的轉換前後的對應 table

Old gray level	New gray level
1	28
2	57
3	85
4	113
5	142
100	170
125	198
150	227
200	255

III. 利用 T 轉換對應的 table，將原影像轉換為 A' ，即為所求：

$$A' = \begin{bmatrix} 28 & 57 & 85 \\ 113 & 142 & 170 \\ 198 & 227 & 255 \end{bmatrix}$$

圖(4) 模擬影像 A 經 histogram equalization 的影像 A'

C. image sharpening using the Laplacian operator

欲將較模糊的影像變為較為清晰，或者是欲將影像中的細節進行標記時，則影像進行一次或二次微分即可達成目的，由於進行微分將使得影像的邊緣以及不連續的部分被強化，且影像中 intensity 變化較慢，也就是較為模糊的部分將被減弱，使得影像變得清晰且細節較為明顯。

利用離散函數的二階微分可知：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\left[\frac{f(x+1, y) - f(x, y)}{1} - \frac{f(x, y) - f(x-1, y)}{1} \right]}{1} \\ &= f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2 * f(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\left[\frac{f(x, y+1) - f(x, y)}{1} - \frac{f(x, y) - f(x, y-1)}{1} \right]}{1} \\ &= f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2 * f(x, y)\end{aligned}$$

可得：

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) \\ &\quad - 4 * f(x, y)\end{aligned}$$

對影像做二次微分，相當於下方 mask：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖(5) 最基本的 Laplacian mask

將上方求得的 $\nabla^2 f(x, y)$ 和原影像 $f(x, y)$ 相減或相加後，可得

sharpening 的影像 $g(x, y)$ ：

$$\begin{aligned}g(x, y) &= f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) \\ &= f(x, y) \\ &\quad - [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\ &\quad + f(x, y-1) - 4 * f(x, y)] \\ &= 5 * f(x, y) \\ &\quad - [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\ &\quad + f(x, y-1)]\end{aligned}$$

對影像做 image sharpening，相當於下方 mask

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖(6) 最基本的 image sharpening mask，
可直接計算影像經 sharpening 的結果。

Experimental results

本次實驗欲測試如下四張.bmp 格式之影像檔案：



圖(7) 由左上至右下分別為 Cameraman.bmp、Lake.bmp、jetplane.bmp 以及 Peppers.bmp。

A. power-law transformations

本次實驗使用下列 power function：

$$S = cr^{\gamma}$$

其中 γ 取 0.25, 1.5 以及 3 三個參數進行測試， $c = 1$ 。

Cameraman.bmp 影像經 gamma-law transformation 結果如下：



圖(8) 由左至右分別為原影像經 $\gamma = 0.25, 1.5, 3.0$ 的 power-law transformations 結果。

jetplane.bmp 影像經 gamma-law transformation 結果如下：



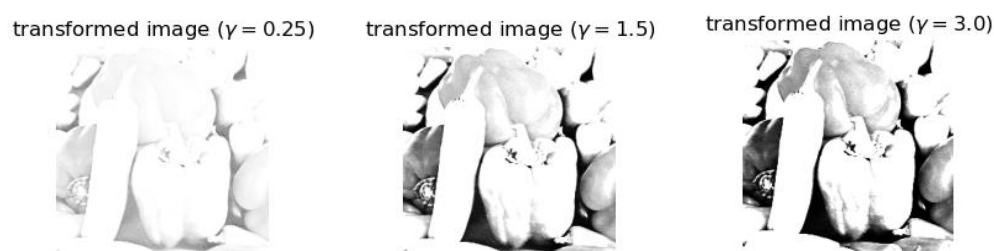
圖(9) 由左至右分別為原影像經 $\gamma = 0.25, 1.5, 3.0$ 的 power-law transformations 結果。

Lake.bmp 影像經 gamma-law transformation 結果如下：



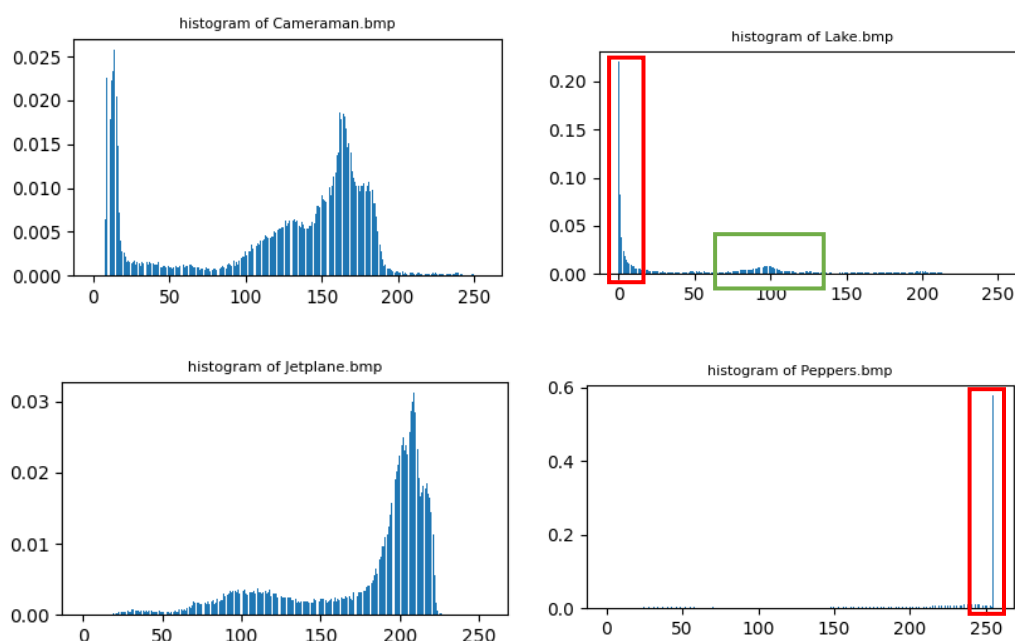
圖(10) 由左至右分別為原影像經 $\gamma = 0.25, 1.5, 3.0$ 的 power-law transformations 結果。

Peppers.bmp 影像經 gamma-law transformation 結果如下：



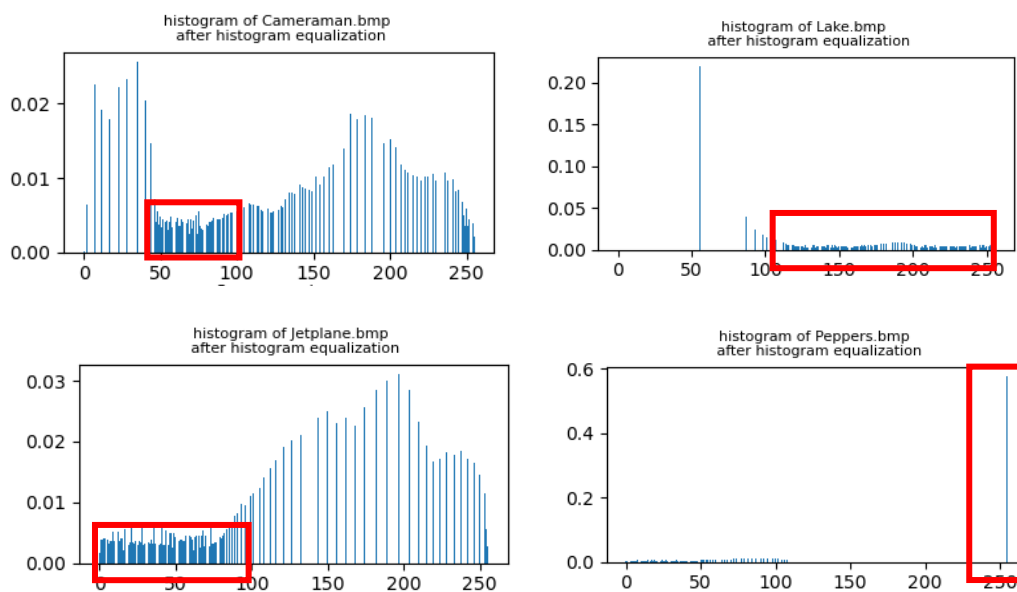
圖(11) 由左至右分別為原影像經 $\gamma = 0.25, 1.5, 3.0$ 的 power-law transformations 結果。

B. histogram equalization



圖(12) 由左上至右下分別為 Cameraman.bmp、Lake.bmp、jetplane.bmp 以及 Peppers.bmp 對應的 histograms。

由上圖四個 histograms 可知，Cameraman 和 jetplane 兩張影像原本的 gray level 分布較為平均，但 Lake 和 Pepper 兩張影像分布的情形較偏向於較暗處或較亮處，如上圖紅框所示。



圖(13) 由左上至右下分別為 Cameraman.bmp、Lake.bmp、jetplane.bmp 以及 Peppers.bmp 經 histogram equalization 後結果對應的 histograms。

由上圖四個 histograms 可知，Cameraman 和 jetplane 兩張影像經 histogram equalization 後，部分的 gray level 原先只有少許的分布，分布的情形上升，如兩圖紅框所示。

而 Lake 影像由於在圖(12)綠框中在 gray level 中段有部分的分布在此段，故經 histogram equalization 後，紅框處也開始有分布。

但 Pepper 影像由於分布的情形極為偏向於較亮處，因此經 histogram equalization 後，大多數分布仍是在 gray level 較高的部分(紅框處)，少數部分在 gray level 較低的部分有增加。

Cameraman.bmp
after histogram equalization



Lake.bmp
after histogram equalization



Jetplane.bmp
after histogram equalization



Peppers.bmp
after histogram equalization



圖(14) 由左上至右下分別為 Cameraman.bmp、Lake.bmp、jetplane.bmp 以及 Peppers.bmp 經 histogram equalization 後的結果。

由上圖可知，Camera、jetplane 以及 Lake 三張影像的對比度相對於執行 histogram equalization 前的影像有變高，使得可視性變高，但 Peppers 影像由其對應的 histogram 可知，原本的 gray level 分布極為不平均，導致經 histogram equalization 之後對比度仍不如預期。

C. image sharpening using the Laplacian operator

本次實驗使用此 mask：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖(15) 本次實驗使用的 mask。

Cameraman.bmp 影像經 image sharpening 結果如下：

Cameraman.bmp
after Laplaction operator



Cameraman.bmp
after shapening



圖(16) 左圖為 Cameraman.bmp 經 Laplacian operator 運算後的結果，
右圖為左圖和原影像進行加法運算的結果。

jetplane.bmp 影像經 image sharpening 結果如下：

Jetplane.bmp
after Laplaction operator



Jetplane.bmp
after shapening



圖(17) 左圖為 jetplane.bmp 經 Laplacian operator 運算後的結果，
右圖為左圖和原影像進行加法運算的結果。

Lake.bmp 影像經 image sharpening 結果如下：

Lake.bmp
after Laplaction operator



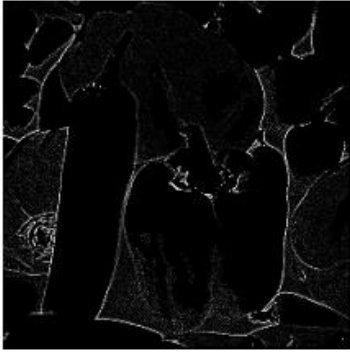
Lake.bmp
after shapening



圖(18) 左圖為 Lake.bmp 經 Laplacian operator 運算後的結果，
右圖為左圖和原影像進行加法運算的結果。

Peppers.bmp 影像經 image sharpening 結果如下：

Peppers.bmp
after Laplaction operator



Peppers.bmp
after shapening



圖(19) 左圖為 Peppers.bmp 經 Laplacian operator 運算後的結果，
右圖為左圖和原影像進行加法運算的結果。

Discussions

A. power-law transformations

在 γ 值不同下，gamma-law transformation 有一些特性：

表(4) gamma-law transformation 的特性表

γ	轉換後整體 gray level	變化較大的 pixel 位於何處	變化較小的 pixel 位於何處
$\gamma > 1$	變暗	亮處	亮處
$0 \leq \gamma < 1$	變亮	暗處	暗處



圖(20) 由左至右為 Cameraman.bmp 分別經 $\gamma = 0.25, 1, 3$ 的 gamma-law transformation 的結果。

由圖(20)可知，中間圖的衣服區域(左圖紅框)經 $\gamma = 0.25$ 的 gamma-law transformation 後，intensity 變大的程度有比影像其他部分多許多；而圖(20)右圖的白色塔區域(右圖紅框) 經 $\gamma = 3$ 的 gamma-law transformation 後，intensity 變小的程度有比影像其他部分多許多。

B. histogram equalization

在 histogram equalization 的實驗結果可以發現，Peppers.bmp 影像由於分布偏向亮處，導致 histogram equalization 結果不如預期，因此可以利用 local histogram equalization[1]，或者 histogram matching[1]來盡量減少這種被「多數暴力」的情形。但前者需要處理的 sub image 數量會增加，後者計算複雜，且需要兩倍的記憶體空間，分別儲存由原影像及目標 histogram 轉換至 histogram equalization 結果的 histogram 的 tables。

References and Appendix

- [1] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, “Intensity Transformation and Spatial Filtering,” in *Digital Image Processing*, 4th ed. London, United Kingdom: Pearson, 2018, pp. 125-184.