

## 题目 4. Newton-Raphson 迭代法计算隐含波动率

### 问题背景

Newton-Raphson 迭代法是一种利用一阶导数求根的算法，现被广泛应用于隐含波动率计算。我们以欧式看涨期权为例，应用 Newton-Raphson 计算隐含波动率，并探究迭代起点对结果的影响。当临近行权期时，在  $\sigma \rightarrow 0^+$  附近的导数非常小，Newton-Raphson 在什么时候收敛？通过机器学习模型猜测期权定价，能有更好的表现吗？请对此展开探究。

### 数据集和资料

数据集 [https://github.com/cloudy-sfu/Newton-Raphson-IMPLIED-VOLATILITY/blob/python/call\\_options.pkl](https://github.com/cloudy-sfu/Newton-Raphson-IMPLIED-VOLATILITY/blob/python/call_options.pkl)  
 隐含波动率计算主要使用 Black-Scholes 公式，看涨期权的价格就是公式 1 的零点。

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= s\Phi(d_1) - ke^{-rt}\Phi(d_2) - c = 0 \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{s}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{t} \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

其中， $s$  期权对应的现货价格， $k$  是行权时合约价格，当时的无风险利率  $r = 0.02433$ ， $c$  是期权的售价， $t$  是现在距离行权日期的日数（单位：年）。

$g(\sigma)$  的导数函数如公式 2 所示， $g''(\sigma) = 0$  的解是  $\lambda = \sqrt{\frac{2}{t}|\ln \frac{s}{k} + rt|}$ ，所以 Newton-Raphson 在  $[0, \lambda]$  上收敛。

$$\begin{aligned} g'(\sigma) &= s\sqrt{\frac{t}{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} > 0 \\ g''(\sigma) &= s\sqrt{\frac{t}{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{d_1d_2}{\sigma} \end{aligned} \quad (2)$$

### 研究任务

**问题 4-1.** 使用矩阵运算，批量求解  $\lambda$  然后用 Newton-Raphson 求解  $\sigma$ ，将结果代回到方程中，求得  $\hat{c}$ 。使用 bootstrap 方法估计  $Var(\hat{c})$ ， $\hat{\bar{c}}$ ，阐述这种方法是不是无偏估计。

**问题 4-2.** 将样本拆分为 80% 的训练集，20% 的测试集，不需要使用交叉验证，使用 bootstrap 随机抽样。训练一个机器学习回归模型，猜测  $\sigma$ ，将结果代回到方程中，求得  $\hat{c}$ 。在测试集上重复问题 4-2，比较机器学习与 Newton-Raphson 的结果。

**问题 4-3.** 有什么办法能提高模型的无偏性，减小模型的方差？绘制  $\hat{c} - c$  的残差分布直方图与核密度估计曲线，参考论文 <https://arxiv.org/abs/2007.14313> 评价机器学习与传统迭代法在低频和低频数据上的表现。