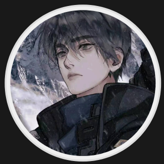
crypto 专题1：公钥密码专题

2025.7.12



肖盼 @DengFeng / 等风

专题内容

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography
- Number Theory in PKC
  - Inverse
  - Fermat's Little Theorem
  - Chinese Reminder Theorem

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography
- Number Theory in PKC
  - Inverse
  - Fermat's Little Theorem
  - Chinese Reminder Theorem

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography
- Number Theory in PKC
  - Inverse
  - Fermat's Little Theorem
  - Chinese Reminder Theorem
- RSA
  - RSA algorithm
  - Attacks on RSA

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography
- Number Theory in PKC
  - Inverse
  - Fermat's Little Theorem
  - Chinese Reminder Theorem
- RSA
  - RSA algorithm
  - Attacks on RSA

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography
- Number Theory in PKC
  - Inverse
  - Fermat's Little Theorem
  - Chinese Reminder Theorem
- RSA
  - RSA algorithm
  - Attacks on RSA
- DLP
  - Discrete Log Problem
  - Attacks on DLP

专题内容

- Introduction to PublicKey Cryptography
- Number Theory in PKC
  - Inverse
  - Fermat's Little Theorem
  - Chinese Reminder Theorem
- RSA
  - RSA algorithm
  - Attacks on RSA
- DLP
  - Discrete Log Problem
  - Attacks on DLP

Part.1 Introduction to PublicKey Cryptography

Warmup

31 * 29 = ?

Warmup

$$31 * 29 = ?$$

$$323 = a * b,\ a = ?,\ b = ?$$

Warmup

$$31 * 29 = ?$$

$$323 = a * b,\ a = ?,\ b = ?$$

$$31 * 29 = 899$$

Warmup

$$31 * 29 = ?$$

$$323 = a * b,\ a = ?,\ b = ?$$

$$31 * 29 = 899$$

$$323 = 17 * 19$$

看起来你已经学会了，现在来试试这个吧!

72912889069765945023770184295619215460421040513161535547312857520896198932502
376919024090246128319826729116198999836517307638976367280120002322233026058721
*
1002030297155153072252995228637029376954336724666687199955710004001842798439126
10965454261314618534473359333460851668496205141709946962263505555242091342529
= ?

看起来你已经学会了，现在来试试这个吧!

72912889069765945023770184295619215460421040513161535547312857520896198932502
37691902409024612831982672911619899983651730763897636728012000232233026058721

*

10020302971551530722529952286370293769543367246668719995571000400184279843912 6
10965454261314618534473359333460851668496205141709946962263505555242091342529

= ?

14255610257503508547774824680899948392643627054117771389934343401865737220450 6
92490525293757242513189483450422908752753515924532599600351657791179144800752 9
18729353498263770152559874531320040337518123911424517779463346329616525760896 6
00998083690901462265758733129821969053266939181297195230321755414625920224 3

= a * b, a = ?, b = ?

看起来你已经学会了，现在来试试这个吧！

72912889069765945023770184295619215460421040513161535547312857520896198932502
37691902409024612831982672911619899983651730763897636728012000232233026058721
*
100203029715515307225299522863702937695433672466687199955710004001842798439126
10965454261314618534473359333460851668496205141709946962263505555242091342529
= ?

142556102575035085477748246808999483926436270541177713899343434018657372204506
924905252937572425131894834504229087527535159245325996003516577911791448007529
187293534982637701525598745313200403375181239114245177794633463296165257608966
00998083690901462265758733129821969053266939181297195230321755414625920224
= a * b, a = ?, b = ?

72912889069765945023770184295619215460421040513161535547312857520896198932502
37691902409024612831982672911619899983651730763897636728012000232233026058721
*
100203029715515307225299522863702937695433672466687199955710004001842798439126
10965454261314618534473359333460851668496205141709946962263505555242091342529
=
73060923901018282358670131561696910846162035752220736756525862773280224230810
25299878963109420224101652626314527438068812811931031967898210944202786255672
94839218412485343697983354106232673842082684710330769835624336998454631445335
38823811037916034120391708747373483179075179186263933978692753283008478645409

看起来你已经学会了，现在来试试这个吧！

729128890697659450237701842956192154604210405131615355473128575208961989325023769190240902461283198267291161989998365173076389763672801200023222330260587 21

*

1002030297155153072252995228637029376954336724666871999557100040018427984391261096545426131461853447335933346085166849620514170994696226350555524209134252 9

= ?

14255610257503508547774824680899948392643627054117771389934343401865737220450692490525293757242513189483450422908752753515924532599600351657791179144800752918729353498263770152559874531320040337518123911424517779463346329616525760896600998083690901462265758733129821969053266939181297195230321755414625920224 3

= $a * b$, a = ?, b = ?

729128890697659450237701842956192154604210405131615355473128575208961989325023769190240902461283198267291161989998365173076389763672801200023222330260587 21

*

1002030297155153072252995228637029376954336724666871999557100040018427984391261096545426131461853447335933346085166849620514170994696226350555524209134252 9

=

7306092390101828235867013156169691084616203575222073675652586277328022423081025299878963109420224101652626314527438068812811931031967898210944202786255672948392184124853436979833541062326738420826847103307698356243369984546314453353882381103791603412039170874737348317907517918626393397869275328300847864540 9

无法求解

Trapdoor

Trapdoor

- Trapdoor? Backdoor?
- Trapdoor——陷门，Backdoor——后门

Trapdoor

- Trapdoor? Backdoor?
- Trapdoor——陷门，Backdoor——后门

Trapdoor

- Trapdoor? Backdoor?
- Trapdoor——陷门，Backdoor——后门

- 密码学中的Trapdoor和backdoor有一定相似之处但不同
- Trapdoor:
  - 定义映射$f: X- > Y$
  - 单向性:
    - 已知x，计算$y = f(x)$容易；
    - 已知$y = f(x)$，计算x难；
  - 存在陷门:
    - 已知x，计算$y = f(x)$容易；
    - 已知$y = f(x)$，计算x难；
    - 已知秘密信息t和$y = f(x)$，计算x容易；

Trapdoor

- Trapdoor? Backdoor?
- Trapdoor——陷门，Backdoor——后门

- 密码学中的Trapdoor和backdoor有一定相似之处但不同
- Trapdoor:
  - 定义映射$f: X -> Y$
  - 单向性:
    - 已知x，计算$y = f(x)$容易；
    - 已知$y = f(x)$，计算x难；
  - 存在陷门:
    - 已知x，计算$y = f(x)$容易；
    - 已知$y = f(x)$，计算x难；
    - 已知秘密信息t和$y = f(x)$，计算x容易；

Trapdoor

Trapdoor

- 陷门是一个抽象的概念，在现代密码学中一般具体为**困难问题**

Trapdoor

- 陷门是一个抽象的概念，在现代密码学中一般具体为**困难问题**

Trapdoor

- 陷门是一个抽象的概念，在现代密码学中一般具体为**困难问题**

- 什么是困难问题?
  - 做不出来的数学题（✗）
  - **在目前没有能在多项式复杂度的时间内解决的问题（✓）**

Trapdoor

- 陷门是一个抽象的概念，在现代密码学中一般具体为**困难问题**
- 什么是困难问题？
  - 做不出来的数学题（✗）
  - **在目前没有能在多项式复杂度的时间内解决的问题（✓）**

Trapdoor

- 陷门是一个抽象的概念，在现代密码学中一般具体为**困难问题**

- 什么是困难问题？
  - 做不出来的数学题（✗）
  - **在目前没有能在多项式复杂度的时间内解决的问题（✓）**

- 常见的困难问题
  - 大整数分解困难问题
    - 已知$n = p * q$，p、q为大素数，求p、q
  - 离散对数困难问题
    - 已知 $y = g^x \bmod p$，g、p为公开的参数且p为大素数，求x
  - 格中难题
    - 最短向量问题（SVP）、最近向量问题（CVP）

Trapdoor

- 陷门是一个抽象的概念，在现代密码学中一般具体为**困难问题**

- 什么是困难问题？
  - 做不出来的数学题（✗）
  - **在目前没有能在多项式复杂度的时间内解决的问题（✓）**

- 常见的困难问题
  - 大整数分解困难问题
    - 已知$n = p * q$，p、q为大素数，求p、q
  - 离散对数困难问题
    - 已知 $y = g^x \bmod p$，g、p为公开的参数且p为大素数，求x
  - 格中难题
    - 最短向量问题（SVP）、最近向量问题（CVP）

Definition of PKC

Definition of PKC

- 对称密码体制
  - 通信双方同时持有密钥，加密密钥和解密密钥一致（或者加解密密钥能够相互推出
  - 只有拥有密钥的人才可以进行加密和解密
- 公钥密码体制（非对称密码体制）
  - 在公开的信道里，每个人拥有一对密钥，称为公钥和私钥，公钥用于加密，私钥用于解密，将公钥公开，保存私钥
  - 任何人都可以加密消息发给私钥持有者，但只有私钥持有者才可以解密

Definition of PKC

- 对称密码体制
  - 通信双方同时持有密钥，加密密钥和解密密钥一致（或者加解密密钥能够相互推出
  - 只有拥有密钥的人才可以进行加密和解密
- 公钥密码体制（非对称密码体制）
  - 在公开的信道里，每个人拥有一对密钥，称为公钥和私钥，公钥用于加密，私钥用于解密，将公钥公开，保存私钥
  - 任何人都可以加密消息发给私钥持有者，但只有私钥持有者才可以解密

Definition of PKC

- 对称密码体制
  - 通信双方同时持有密钥，加密密钥和解密密钥一致（或者加解密密钥能够相互推出
  - 只有拥有密钥的人才可以进行加密和解密
- 公钥密码体制（非对称密码体制）
  - 在公开的信道里，每个人拥有一对密钥，称为公钥和私钥，公钥用于加密，私钥用于解密，将公钥公开，保存私钥
  - 任何人都可以加密消息发给私钥持有者，但只有私钥持有者才可以解密

- 思考：有n个人想要在不安全的信道下完成两两通信，如果使用对称密码体制和公钥密码体制，分别需要多少对密钥？

Definition of PKC

- 对称密码体制
  - 通信双方同时持有密钥，加密密钥和解密密钥一致（或者加解密密钥能够相互推出
  - 只有拥有密钥的人才可以进行加密和解密
- 公钥密码体制（非对称密码体制）
  - 在公开的信道里，每个人拥有一对密钥，称为公钥和私钥，公钥用于加密，私钥用于解密，将公钥公开，保存私钥
  - 任何人都可以加密消息发给私钥持有者，但只有私钥持有者才可以解密

- 思考：有n个人想要在不安全的信道下完成两两通信，如果使用对称密码体制和公钥密码体制，分别需要多少对密钥？

Definition of PKC

- 对称密码体制
  - 通信双方同时持有密钥，加密密钥和解密密钥一致（或者加解密密钥能够相互推出
  - 只有拥有密钥的人才可以进行加密和解密
- 公钥密码体制（非对称密码体制）
  - 在公开的信道里，每个人拥有一对密钥，称为公钥和私钥，公钥用于加密，私钥用于解密，将公钥公开，保存私钥
  - 任何人都可以加密消息发给私钥持有者，但只有私钥持有者才可以解密

- 思考：有n个人想要在不安全的信道下完成两两通信，如果使用对称密码体制和公钥密码体制，分别需要多少对密钥？

- 对称密码体制 vs 公钥密码体制
  - 两两一对密钥，密钥数为$\frac{n*(n-1)}{2}$ vs 每个人一对公私钥，密钥数为n

Definition of PKC

- 对称密码体制
  - 通信双方同时持有密钥，加密密钥和解密密钥一致（或者加解密密钥能够相互推出
  - 只有拥有密钥的人才可以进行加密和解密
- 公钥密码体制（非对称密码体制）
  - 在公开的信道里，每个人拥有一对密钥，称为公钥和私钥，公钥用于加密，私钥用于解密，将公钥公开，保存私钥
  - 任何人都可以加密消息发给私钥持有者，但只有私钥持有者才可以解密

- 思考：有n个人想要在不安全的信道下完成两两通信，如果使用对称密码体制和公钥密码体制，分别需要多少对密钥？

- 对称密码体制 vs 公钥密码体制
  - 两两一对密钥，密钥数为$\frac{n*(n-1)}{2}$ vs 每个人一对公私钥，密钥数为n

Construction of PKC

如何构造公钥密码算法?

Construction of PKC

如何构造公钥密码算法?

- 使用陷门构造公钥密码算法
  - 定义域X -> 明文空间，值域Y -> 密文空间
  - 映射f -> 加密， f所需的参数 -> 公钥
  - 陷门t -> 私钥

Construction of PKC

如何构造公钥密码算法?

- 使用陷门构造公钥密码算法
  - 定义域X -> 明文空间，值域Y -> 密文空间
  - 映射f -> 加密， f所需的参数 -> 公钥
  - 陷门t -> 私钥

如何构造公钥签名算法? （签名算法保证只有签名者能对消息签名，其他任何人都可以验签）

Construction of PKC

如何构造公钥密码算法?

- 使用陷门构造公钥密码算法
  - 定义域X -> 明文空间，值域Y -> 密文空间
  - 映射f -> 加密， f所需的参数 -> 公钥
  - 陷门t -> 私钥

如何构造公钥签名算法? （签名算法保证只有签名者能对消息签名，其他任何人都可以验签）

- 使用陷门构造公钥签名算法
  - 定义域X -> 签名空间，值域Y -> 明文空间
  - 映射f -> 验签， f所需的参数 -> 验签密钥
  - 陷门t -> 签名密钥

Construction of PKC

如何构造公钥密码算法?

- 使用陷门构造公钥密码算法
  - 定义域X -> 明文空间，值域Y -> 密文空间
  - 映射f -> 加密， f所需的参数 -> 公钥
  - 陷门t -> 私钥

如何构造公钥签名算法? （签名算法保证只有签名者能对消息签名，其他任何人都可以验签）

- 使用陷门构造公钥签名算法
  - 定义域X -> 签名空间，值域Y -> 明文空间
  - 映射f -> 验签， f所需的参数 -> 验签密钥
  - 陷门t -> 签名密钥

Part.2 Number Theory in PKC

Modulo Operations

- 模运算的性质

Modulo Operations

- 模运算的性质
  - $m \mid (a - b) \iff a \equiv b \bmod$
  - a \equiv b \bmod m, c \equiv d \bmod m \rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \bmod m
  - a \equiv b \bmod m, c \equiv d \bmod m \rightarrow a * c \equiv b * d \bmod m
  - a \equiv b \bmod m \rightarrow a * c \equiv b * c \bmod m
  - a * c \equiv b * c \bmod m, gcd(c, m) = 1 \rightarrow a \equiv b \bmod m
  - a \equiv b \bmod m, n \in \mathbb{N} \rightarrow a^n \equiv b^n \bmod m

Modulo Operations

- 模运算的性质
  - $m | (a - b) \iff a \equiv b \bmod$
  - a \equiv b \bmod m, c \equiv d \bmod m \rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \bmod m
  - a \equiv b \bmod m, c \equiv d \bmod m \rightarrow a * c \equiv b * d \bmod m
  - a \equiv b \bmod m \rightarrow a * c \equiv b * c \bmod m
  - a * c \equiv b * c \bmod m, gcd(c, m) = 1 \rightarrow a \equiv b \bmod m
  - a \equiv b \bmod m, n \in \mathbb{N} \rightarrow a^n \equiv b^n \bmod m

Inverse

Inverse

- 逆元
  - 若$a*b \equiv 1 \bmod p$，则称a和b在模p下互为逆元
  - a在模p下存在逆元$\iff gcd(a, p) = 1$

Inverse

- 逆元
    - 若$a*b \equiv 1 \bmod p$，则称a和b在模p下互为逆元
    - a在模p下存在逆元$\iff gcd(a, p) = 1$

Inverse

- 逆元
  - 若$a*b \equiv 1 \bmod p$，则称a和b在模p下互为逆元
  - a在模p下存在逆元$\iff \gcd(a, p) = 1$

- 裴蜀定理
  - 设a,b为不全为零的整数，对于任意整数x,y满足$\gcd(a,b) | (ax+by)$，并且存在整数x',y'满足$ax'+by'=\gcd(a.b)$
  - 若$\gcd(a,b)=1$，则存在x,y满足$ax+by=1$，此时$ax \equiv 1 \bmod b$，即x为a模b的逆元
  - 裴蜀定理可以证明a在模p下存在逆元的充要条件是$\gcd(a,p)=1$
  - 求逆元可以用扩展**欧几里得算法**

Inverse

- 逆元
  - 若$a*b \equiv 1 \bmod p$，则称a和b在模p下互为逆元
  - a在模p下存在逆元$\iff gcd(a, p) = 1$
- 裴蜀定理
  - 设a,b为不全为零的整数，对于任意整数x,y满足$gcd(a,b)|(ax+by)$，并且存在整数x',y'满足$ax'+by'=gcd(a.b)$
  - 若$gcd(a,b)=1$，则存在x,y满足$ax+by=1$，此时$ax \equiv 1 \bmod b$，即x为a模b的逆元
  - 裴蜀定理可以证明a在模p下存在逆元的充要条件是$gcd(a,p)=1$
  - 求逆元可以用扩展**欧几里得算法**

Fermat's Little Theorem

小学奥数题

Fermat's Little Theorem

小学奥数题

- 今天是星期一，3^{1999}天之后是星期几?
  - 问题等价于求3^{1999}模7的余数是多少，即求$3^{1999} \bmod 7$
  - 注意到$3^6 \equiv 1 \bmod 7$，因此$3^{1999} \bmod 7 \equiv 3^{3*666+1} \bmod 7 \equiv (3^6)^{333}*3 \bmod 7 \equiv 3$
  - 因此3^{1999}天后是**星期四**

Fermat's Little Theorem

小学奥数题

- 今天是星期一，3^{1999}天之后是星期几?
  - 问题等价于求3^{1999}模7的余数是多少，即求$3^{1999} \bmod 7$
  - 注意到$3^6 \equiv 1 \bmod 7$，因此$3^{1999} \bmod 7 \equiv 3^{3*666+1} \bmod 7 \equiv (3^6)^{333}*3 \bmod 7 \equiv 3$
  - 因此3^{1999}天后是**星期四**

Fermat's Little Theorem

小学奥数题

- 今天是星期一，3^{1999}天之后是星期几?
  - 问题等价于求3^{1999}模7的余数是多少，即求$3^{1999} \bmod 7$
  - 注意到$3^6 \equiv 1 \bmod 7$，因此$3^{1999} \bmod 7 \equiv 3^{3*666+1} \bmod 7 \equiv (3^6)^{333}*3 \bmod 7 \equiv 3$
  - 因此3^{1999}天后是**星期四**
- 上述问题关键在于观察到$3^6 \equiv 1 \bmod 7$，不过这真是巧合吗?
  - 直觉：在进行若干次乘法后结果必定循环——结果的空间是有限的，最多只有7种结果，在$3^i \equiv 3^j \bmod 7$时，后续计算必定循环
  - 数学性质：费马小定理
    - 假设$gcd(a, p) = 1$，p为素数，则$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

Fermat's Little Theorem

小学奥数题

- 今天是星期一，3^{1999}天之后是星期几?
  - 问题等价于求3^{1999}模7的余数是多少，即求$3^{1999} \bmod 7$
  - 注意到$3^6 \equiv 1 \bmod 7$，因此$3^{1999} \bmod 7 \equiv 3^{3*666+1} \bmod 7 \equiv (3^6)^{333}*3 \bmod 7 \equiv 3$
  - 因此3^{1999}天后是**星期四**
- 上述问题关键在于观察到$3^6 \equiv 1 \bmod 7$，不过这真是巧合吗?
  - 直觉：在进行若干次乘法后结果必定循环——结果的空间是有限的，最多只有7种结果，在$3^i \equiv 3^j \bmod 7$时，后续计算必定循环
  - 数学性质：费马小定理
    - 假设$gcd(a, p) = 1$，p为素数，则$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

Euler's Theorem

费马小定理的推广——欧拉定理

- 费马小定理只对于p是素数的情况下才成立，欧拉定理将其推广到了任意正整数
- 欧拉函数
  - 欧拉函数$\phi(n)$定义为小于等于n且与n互素的正整数的个数，其计算公式为 $\phi(n) = n * \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$（可用**容斥原理**证明）
  - 欧拉函数具有积性：若$gcd(a, b) = 1$，则$\phi(ab) = \phi(a) * \phi(b)$
  - $\phi(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n - 1, & n \text{ 为 素 数} \\ p^k - p^{k-1}, & n = p^k \text{ 且 } p \text{ 为 素 数} \end{cases}$
  - 结合积性和上面的公式可计算任意数的欧拉函数（先分解成素数幂再计算上面的公式）

Chinese Reminder Theorem

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？ ——《孙子算经》

翻译：有一个数除三余二，除五余三，除七余二，问这个数是多少？

Chinese Reminder Theorem

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？ ——《孙子算经》

翻译：有一个数除三余二，除五余三，除七余二，问这个数是多少？

- 问题公式化为： $\begin{cases}x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases} \rightarrow x = ?$

Chinese Reminder Theorem

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？——《孙子算经》

翻译：有一个数除三余二，除五余三，除七余二，问这个数是多少？

- 问题公式化为： $\begin{cases}x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases} \rightarrow x = ?$

Chinese Reminder Theorem

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？ ——《孙子算经》

翻译：有一个数除三余二，除五余三，除七余二，问这个数是多少？

- 问题公式化为： $\begin{cases}x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases} \rightarrow x = ?$

- 因此得名孙子定理或者中国剩余定理

Chinese Reminder Theorem

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？ ——《孙子算经》

翻译：有一个数除三余二，除五余三，除七余二，问这个数是多少？

- 问题公式化为： $\begin{cases}x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases} \rightarrow x = ?$

- 因此得名孙子定理或者中国剩余定理

Chinese Reminder Theorem

Chinese Reminder Theorem:

- 设$m_1, m_2, ..., m_r$两两互素，则以下同余方程组:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \bmod m_1 \\ x \equiv a_2 \bmod m_2 \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_r \bmod m_r \end{cases}$$

在模$M = \prod_{i=1}^{r} m_i$下有唯一解$x = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot M_i \cdot (M_i^{-1} \bmod m_i) \bmod M$，其中$M_i = \frac{M}{m_i}$

Chinese Reminder Theorem

推导：考虑如下构造：

$$
\begin{cases}
x_i \equiv 0 \bmod m_1 \\
x_i \equiv 0 \bmod m_2 \\
\quad \vdots \\
x_i \equiv 1 \bmod m_i \\
\quad \vdots \\
x_i \equiv 0 \bmod m_r
\end{cases}
$$

令$x = \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot a_i \bmod M$即可

易知$x = M_i \cdot (M_i^{-1} \bmod m_i)$

Part.3 RSA

RSA算法回顾

RSA算法回顾

- 密钥生成:
  - 选择两个大素数 p 和 q
  - 计算 $n = p * q$
  - 计算 $\phi(n) = (p-1) * (q-1)$
  - 选择公钥 e，使得 $1 < e < \phi(n)$ 且 $gcd(e, \phi(n)) = 1$
  - 计算私钥 d，使得 $d \equiv e^{-1} \bmod \phi(n)$
- 公钥 (n, e) 和私钥 (n, d)
- 加密：$c \equiv m^e \bmod n$
- 解密：$m \equiv c^d \bmod n$
- 正确性:
  - $(m^e)^d \bmod n \equiv m^{e*d} \bmod n \equiv m^{1 + k * \phi(n)} \bmod n \equiv m \bmod n$

RSA算法回顾

- 密钥生成：
  - 选择两个大素数 p 和 q
  - 计算 $n = p * q$
  - 计算 $\phi(n) = (p-1) * (q-1)$
  - 选择公钥 e，使得 $1 < e < \phi(n)$ 且 $gcd(e, \phi(n)) = 1$
  - 计算私钥 d，使得 $d \equiv e^{-1} \bmod \phi(n)$
- 公钥 (n, e) 和私钥 (n, d)
- 加密：$c \equiv m^e \bmod n$
- 解密：$m \equiv c^d \bmod n$
- 正确性：
  - $(m^e)^d \bmod n \equiv m^{e*d} \bmod n \equiv m^{1 + k * \phi(n)} \bmod n \equiv m \bmod n$

RSA相关攻击

- 公钥密码相关分析需要关注**困难问题**，困难问题几乎是不可解的，因此要么是参数不安全，要么是有额外的信息

RSA相关攻击

- 公钥密码相关分析需要关注**困难问题**，困难问题几乎是不可解的，因此要么是参数不安全，要么是有额外的信息

- RSA常见攻击
  - 分解攻击
  - 共模攻击
  - 小公钥指数攻击
  - 小私钥指数攻击
  - dp、dq泄露攻击
  - 相关消息攻击
  - 数论变换
  - 高/低位泄露攻击

RSA相关攻击

- 公钥密码相关分析需要关注**困难问题**，困难问题几乎是不可解的，因此要么是参数不安全，要么是有额外的信息

- RSA常见攻击
  - 分解攻击
  - 共模攻击
  - 小公钥指数攻击
  - 小私钥指数攻击
  - dp、dq泄露攻击
  - 相关消息攻击
  - 数论变换
  - 高/低位泄露攻击

分解攻击

RSA的困难性在于大整数分解问题，如果模数n的分解能够得知，那么RSA便可轻易破解

分解攻击

RSA的困难性在于大整数分解问题，如果模数n的分解能够得知，那么RSA便可轻易破解

- 分解方法
  - factordb在线查询（一般只用于查询已知分解的n）
  - 工具分解（yafu等，小于128bits的n都可以快速分解）
  - 费马分解
  - Pollard p-1分解
  - William p+1分解
  - Pollard rho分解

分解攻击

RSA的困难性在于大整数分解问题，如果模数n的分解能够得知，那么RSA便可轻易破解

- 分解方法
  - factordb在线查询（一般只用于查询已知分解的n）
  - 工具分解（yafu等，小于128bits的n都可以快速分解）
  - 费马分解
  - Pollard p-1分解
  - William p+1分解
  - Pollard rho分解

分解攻击

费马分解

分解攻击

费马分解

- 假设n=p*q，且p和q非常接近
  - |p-q|很小
  - 枚举|p-q|，利用等式(p+q)^2-(p-q)^2=4pq=4n，对4n+(p-q)^2进行开根（整数开根可用gmpy2库的iroot函数）
  - 开根成功即说明|p-q|正确
  - 得到p+q和pq后构造方程x^2-(p+q)*x+pq=0（韦达定理）
  - 求解方程的两个根得到p、q

分解攻击

费马分解

- 假设$n=p*q$，且p和q非常接近
  - $|p-q|$很小
  - 枚举$|p-q|$，利用等式$(p+q)^2-(p-q)^2=4pq=4n$，对$4n+(p-q)^2$进行开根（整数开根可用gmpy2库的iroot函数）
  - 开根成功即说明$|p-q|$正确
  - 得到$p+q$和pq后构造方程$x^2-(p+q)*x+pq=0$（韦达定理）
  - 求解方程的两个根得到p、q

分解攻击

Pollard p-1分解

分解攻击

Pollard p-1分解

- 假设$n=p*q$，其中$p-1$是光滑的，即$p-1$是一堆小素数的乘积
  - 假设$p-1=\prod_{i=1}^k p_i$且$max(p_i) \leq B$
  - 枚举小于等于B的所有素数，并计算他们的乘积记为x
  - 显然有$p-1|x$，根据费马小定理有$a^x \equiv 1 \bmod p$
  - 因此随机选取a计算$a^x-1=kp$
  - 计算$gcd(a^x-1,n)$即可分解n

分解攻击

Pollard p-1分解

- 假设n=p*q，其中p-1是光滑的，即p-1是一堆小素数的乘积
  - 假设p-1=\prod_{i=1}^k p_i且max(p_i) \leq B
  - 枚举小于等于B的所有素数，并计算他们的乘积记为x
  - 显然有p-1|x，根据费马小定理有a^x \equiv 1 \bmod p
  - 因此随机选取a计算a^x-1=kp
  - 计算gcd(a^x-1,n)即可分解n

小公钥指数攻击

在RSA系统中，使用的公钥指数e很小（如3、5），同时消息m也较小，产生的一系列攻击称为小公钥指数攻击

小公钥指数攻击

在RSA系统中，使用的公钥指数e很小（如3、5），同时消息m也较小，产生的一系列攻击称为小公钥指数攻击

- 假设$m^e \equiv c \bmod n$且e很小,m也较小
  - 若$m^e < n$，则加密过程没取模，则$m^e = c$，直接对c开e次方根即可
  - 若$m^e = c+kn$且k较小，则可以枚举k并尝试对$c+kn$开e次方根

24.1

小公钥指数攻击

在RSA系统中，使用的公钥指数e很小（如3、5），同时消息m也较小，产生的一系列攻击称为小公钥指数攻击

- 假设$m^e \equiv c \bmod n$且e很小,m也较小
  - 若$m^e < n$，则加密过程没取模，则$m^e = c$，直接对c开e次方根即可
  - 若$m^e = c+kn$且k较小，则可以枚举k并尝试对$c+kn$开e次方根

小公钥指数攻击

在RSA系统中，使用的公钥指数e很小（如3、5），同时消息m也较小，产生的一系列攻击称为小公钥指数攻击

- 假设$m^e \equiv c \bmod n$且e很小,m也较小
  - 若$m^e < n$，则加密过程没取模，则$m^e = c$，直接对c开e次方根即可
  - 若$m^e = c+kn$且k较小，则可以枚举k并尝试对c+kn开e次方根

```
from Crypto.Util.number import *
from gmpy2 import *
p, q = getPrime(512), getPrime(512)
n = p * q
m = bytes_to_long(b'this_is_a_sample_flag')
e = 3
c = pow(m, e, n)
print(f"n = {n}")
print(f"e = {e}")
print(f"c = {c}")
print(long_to_bytes(iroot(c, 3)[0]))
```

小公钥指数攻击

在RSA系统中，使用的公钥指数e很小（如3、5），同时消息m也较小，产生的一系列攻击称为小公钥指数攻击

- 假设$m^e \equiv c \bmod n$且e很小,m也较小
  - 若$m^e < n$，则加密过程没取模，则$m^e = c$，直接对c开e次方根即可
  - 若$m^e = c+kn$且k较小，则可以枚举k并尝试对$c+kn$开e次方根

```python
from Crypto.Util.number import *
from gmpy2 import *
p, q = getPrime(512), getPrime(512)
n = p * q
m = bytes_to_long(b'this_is_a_sample_flag')
e = 3
c = pow(m, e, n)
print(f"n = {n}")
print(f"e = {e}")
print(f"c = {c}")
print(long_to_bytes(iroot(c, 3)[0]))
```

24.4

小公钥指数攻击

在小公钥指数攻击中，如果提供了相同明文和公钥指数e但模数n不同的多个密文，产生的攻击称为广播攻击

小公钥指数攻击

在小公钥指数攻击中，如果提供了相同明文和公钥指数e但模数n不同的多个密文，产生的攻击称为广播攻击

- 假设有 $\begin{cases} m^e \equiv c_1 \bmod n_1 \\ m^e \equiv c_2 \bmod n_2 \\ \vdots \\ m^e \equiv c_k \bmod n_k \end{cases}$
  - 可使用CRT计算得到$m^e \equiv C \bmod N$，其中$N=\prod_{i=1}^k n_i$
  - 此时相当于小公钥指数攻击中的n变大了，因此更容易受到攻击
  - 即使m不小，只要提供e组式子，CRT之后m^e大概率小于N

小公钥指数攻击

在小公钥指数攻击中，如果提供了相同明文和公钥指数e但模数n不同的多个密文，产生的攻击称为广播攻击

- 假设有 $\begin{cases} m^e \equiv c_1 \bmod n_1 \\ m^e \equiv c_2 \bmod n_2 \\ \vdots \\ m^e \equiv c_k \bmod n_k \end{cases}$
  - 可使用CRT计算得到$m^e \equiv C \bmod N$，其中$N=\prod_{i=1}^k n_i$
  - 此时相当于小公钥指数攻击中的n变大了，因此更容易受到攻击
  - 即使m不小，只要提供e组式子，CRT之后m^e大概率小于N

小私钥指数攻击

在RSA系统中，使用的私钥指数d较小，产生的攻击称为小私钥指数攻击

小私钥指数攻击

在RSA系统中，使用的私钥指数d较小，产生的攻击称为小私钥指数攻击

- 小私钥指数攻击
  - Wiener攻击，私钥指数d满足$d < \frac{1}{3} n^{\frac{1}{4}}$
  - Boneh Durfee攻击，私钥指数d满足$d < n^{0.292}$
- 连分数
  - 连分数是一种特殊的分数表示
  - 对于任何有理数a，我们都可将其写成如下形式： $a=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{...+\frac{1}{a_n}}}}$
  - 记$[a_0,a_1,...,a_n]$为a的连分数表示

小私钥指数攻击

在RSA系统中，使用的私钥指数d较小，产生的攻击称为小私钥指数攻击

- 小私钥指数攻击
  - Wiener攻击，私钥指数d满足$d < \frac{1}{3} n^{\frac{1}{4}}$
  - Boneh Durfee攻击，私钥指数d满足$d < n^{0.292}$
- 连分数
  - 连分数是一种特殊的分数表示
  - 对于任何有理数a，我们都可将其写成如下形式： $a=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{...+\frac{1}{a_n}}}}$
  - 记$[a_0,a_1,...,a_n]$为a的连分数表示

Wiener Attack

维纳攻击

Wiener Attack

维纳攻击

- Legendre's Lemma
  - 若$|x-\frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$且$gcd(a, b)=1$，则$\frac{a}{b}$必为$x$的一个收敛分数（收敛分数指的是连分数的前几项）
- 攻击方法
  - $ed-k\phi(n)=1$
  - $|\frac{e}{\phi(n)}-\frac{k}{d}=\frac{1}{d\phi(n)}|$
  - 由于$\phi(n)$和n非常相近，因此近似可用n替代$\phi(n)$
  - 上式可表示为$|\frac{e}{n}-\frac{k}{d}=\frac{1}{d\phi(n)}|$
  - Wiener利用Legendre引理证明了$\frac{k}{d}$为$\frac{e}{n}$的一个收敛分数，即可通过求$\frac{e}{n}$的连分数得到k、d

Wiener Attack

维纳攻击

- Legendre's Lemma
  - 若$|x-\frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$且$gcd(a, b)=1$，则$\frac{a}{b}$必为$x$的一个收敛分数（收敛分数指的是连分数的前几项）
- 攻击方法
  - $ed-k\phi(n)=1$
  - $|\frac{e}{\phi(n)}-\frac{k}{d}=\frac{1}{d\phi(n)}|$
  - 由于$\phi(n)$和n非常相近，因此近似可用n替代$\phi(n)$
  - 上式可表示为$|\frac{e}{n}-\frac{k}{d}=\frac{1}{d\phi(n)}|$
  - Wiener利用Legendre引理证明了$\frac{k}{d}$为$\frac{e}{n}$的一个收敛分数，即可通过求$\frac{e}{n}$的连分数得到k、d

Boneh Durfee Attack

Boneh Durfee攻击

Boneh Durfee Attack

Boneh Durfee攻击

- Wiener攻击能够适用于$d < \frac{1}{3} n^{\frac{1}{4}}$
- Boneh Durfee攻击提供了一个更好的界$d < n^{0.292}$
- 攻击方法
  - $ed-k\phi(n)=1$
  - $ed-k(p-1)(q-1)=1$
  - $ed-k(n+1-p-q)=1 \rightarrow -k(n+1-p-q) \equiv 1 \bmod e$
  - 令$A=n+1,s=p+q$，上式等价于$k(s-A) \equiv 1 \bmod e$
  - 再使用Coppersmith方法求上述方程的小值根求出k、s
- Coppersmith方法是密码学中常用的攻击方法，主要可用于求方程的小值根（后续专题会专门介绍）

Boneh Durfee Attack

Boneh Durfee攻击

- Wiener攻击能够适用于$d < \frac{1}{3} n^{\frac{1}{4}}$
- Boneh Durfee攻击提供了一个更好的界$d < n^{0.292}$
- 攻击方法
  - $ed-k\phi(n)=1$
  - $ed-k(p-1)(q-1)=1$
  - $ed-k(n+1-p-q)=1 \rightarrow -k(n+1-p-q) \equiv 1 \bmod e$
  - 令$A=n+1,s=p+q$，上式等价于$k(s-A) \equiv 1 \bmod e$
  - 再使用Coppersmith方法求上述方程的小值根求出k、s
- Coppersmith方法是密码学中常用的攻击方法，主要可用于求方程的小值根（后续专题会专门介绍）

共模攻击

在RSA系统中，使用了同一个模数n和不同的公钥指数e进行加密，导致可以直接使用扩展欧几里得算法求出明文的攻击称为共模攻击

共模攻击

在RSA系统中，使用了同一个模数n和不同的公钥指数e进行加密，导致可以直接使用扩展欧几里得算法求出明文的攻击称为共模攻击

- 假设$m^{e_1} \equiv c_1 \bmod n$，$m^{e_2} \equiv c_2 \bmod n$
  - 若e_1和e_2互素，则对e_1和e_2使用扩展欧几里得算法计算出s_1、s_2满足$e_1s_1+e_2s_2=1$
    - 计算$c_1^{s_1} * c_2^{s_2} \equiv m^{e_1 * s_1+e_2 * s_2} \equiv 1 \bmod n$
  - 若e_1和e_2不互素，则对e_1和e_2使用扩展欧几里得算法计算出s_1、s_2满足$e_1s_1+e_2s_2=gcd(e_1,e_2)$
    - 计算$c_1^{s_1} * c_2^{s_2} \equiv m^{e_1 * s_1+e_2 * s_2} \equiv m^{gcd(e_1,e_2)} \bmod n$
    - 由于通常$gcd(e_1,e_2)$很小，因此可化归为小公钥指数攻击

共模攻击

在RSA系统中，使用了同一个模数n和不同的公钥指数e进行加密，导致可以直接使用扩展欧几里得算法求出明文的攻击称为共模攻击

- 假设$m^{e_1} \equiv c_1 \bmod n$，$m^{e_2} \equiv c_2 \bmod n$
  - 若e_1和e_2互素，则对e_1和e_2使用扩展欧几里得算法计算出s_1、s_2满足$e_1s_1+e_2s_2=1$
    - 计算$c_1^{s_1} * c_2^{s_2} \equiv m^{e_1 * s_1+e_2 * s_2} \equiv 1 \bmod n$
  - 若e_1和e_2不互素，则对e_1和e_2使用扩展欧几里得算法计算出s_1、s_2满足$e_1s_1+e_2s_2=gcd(e_1,e_2)$
    - 计算$c_1^{s_1} * c_2^{s_2} \equiv m^{e_1 * s_1+e_2 * s_2} \equiv m^{gcd(e_1,e_2)} \bmod n$
    - 由于通常$gcd(e_1,e_2)$很小，因此可化归为小公钥指数攻击

dp、dq泄露攻击

在RSA中，为了加解密的效率，通常会引入私钥d的CRT表示，记
$dp = d \bmod p-1, dq = d \bmod q-1$，$dp$、$dq$泄露或者部分泄露产生的攻击称为
dp、dq泄露攻击

dp、dq泄露攻击

在RSA中，为了加解密的效率，通常会引入私钥d的CRT表示，记$dp = d \bmod p-1, dq = d \bmod q-1$，dp、dq泄露或者部分泄露产生的攻击称为dp、dq泄露攻击

- 假设$ed \equiv 1 \bmod \phi(n)$且$dp = d \bmod p-1, dq = d \bmod q-1$
  - 若dp或dq泄露（不妨设dp泄露），有$ed \equiv 1 \bmod p-1$
  - 即$e * dp \equiv 1 \bmod p-1 \rightarrow e * dp - 1 = k(p-1)$
  - 由于dp和p差不多大，因此k和e差不多大，而e通常不大（如65537），因此可以枚举k
  - dp已知，枚举k得到p即可分解

dp、dq泄露攻击

在RSA中，为了加解密的效率，通常会引入私钥d的CRT表示，记$dp = d \bmod p-1, dq = d \bmod q-1$，dp、dq泄露或者部分泄露产生的攻击称为dp、dq泄露攻击

- 假设$ed \equiv 1 \bmod \phi(n)$且$dp = d \bmod p-1, dq = d \bmod q-1$
  - 若dp或dq泄露（不妨设dp泄露），有$ed \equiv 1 \bmod p-1$
  - 即$e * dp \equiv 1 \bmod p-1 \rightarrow e * dp - 1 = k(p-1)$
  - 由于dp和p差不多大，因此k和e差不多大，而e通常不大（如65537），因此可以枚举k
  - dp已知，枚举k得到p即可分解

相关消息攻击

在RSA系统中，如果加密的多条消息具有线性相关性，产生的攻击称为相关消息攻击

相关消息攻击

在RSA系统中，如果加密的多条消息具有线性相关性，产生的攻击称为相关消息攻击

- 假设$m^e \equiv c_1 \bmod n,(m+t)^e \equiv c_2 \bmod n$且$t$已知
  - 定义模n下的多项式$f_1 = x^e - c_1, f_2 = (x+t)^e - c_2$
  - 易知m为f_1和f_2的根
  - 即f_1和f_2有公因式$x-m$
  - 因此可以对上述两个多项式求最大公因式$gcd(f_1,f_2)=x-m$即可得到m

相关消息攻击

在RSA系统中，如果加密的多条消息具有线性相关性，产生的攻击称为相关消息攻击

- 假设$m^e \equiv c_1 \bmod n,(m+t)^e \equiv c_2 \bmod n$且$t$已知
  - 定义模n下的多项式$f_1 = x^e - c_1, f_2 = (x+t)^e - c_2$
  - 易知m为f_1和f_2的根
  - 即f_1和f_2有公因式$x-m$
  - 因此可以对上述两个多项式求最大公因式$gcd(f_1,f_2)=x-m$即可得到m

相关消息攻击

Attack Script

相关消息攻击

Attack Script

```
def related_message_attack(c1, c2, diff, e, n):
    PRx.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
    g1 = x^e - c1
    g2 = (x+diff)^e - c2

    def gcd(g1, g2):
        while g2:
            g1, g2 = g2, g1 % g2
        return g1.monic()

    return -gcd(g1, g2)[0]
```

相关消息攻击

Attack Script

```
def related_message_attack(c1, c2, diff, e, n):
    PRx.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
    g1 = x^e - c1
    g2 = (x+diff)^e - c2

    def gcd(g1, g2):
        while g2:
            g1, g2 = g2, g1 % g2
        return g1.monic()

    return -gcd(g1, g2)[0]
```

相关消息攻击

Attack Script

```
def related_message_attack(c1, c2, diff, e, n):
    PRx.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
    g1 = x^e - c1
    g2 = (x+diff)^e - c2

    def gcd(g1, g2):
        while g2:
            g1, g2 = g2, g1 % g2
        return g1.monic()

    return -gcd(g1, g2)[0]
```

上面的代码适用于e比较小的情况，对于多项式次数较高的情况，可使用Half-GCD算法

相关消息攻击

Attack Script

```
def related_message_attack(c1, c2, diff, e, n):
    PRx.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
    g1 = x^e - c1
    g2 = (x+diff)^e - c2

    def gcd(g1, g2):
        while g2:
            g1, g2 = g2, g1 % g2
        return g1.monic()

    return -gcd(g1, g2)[0]
```

上面的代码适用于e比较小的情况，对于多项式次数较高的情况，可使用Half-GCD算法

数论变换

在CTF的RSA题目中，有时候会给出信息的一些关系，需要利用信息进行变换求解

数论变换

在CTF的RSA题目中，有时候会给出信息的一些关系，需要利用信息进行变换求解

- 假如$m^e \equiv c \bmod n$，同时已知$hint = (a*p + b)^q \bmod n$且$a,b,hint$已知
  - 对$hint = (a*p + b)^q \bmod n$模$p$分析（$p|n$因此模$n$成立模$p$自然也成立）
  - $hint \equiv b^q \bmod p \rightarrow hint^p \equiv b^{pq} \bmod p$（两边作$p$次方）
  - $hint^p \equiv hint \equiv b^n \bmod p$（费马小定理）
  - 计算$gcd(hint-b^n, n)$即可分解n

数论变换

在CTF的RSA题目中，有时候会给出信息的一些关系，需要利用信息进行变换求解

- 假如$m^e \equiv c \bmod n$，同时已知$hint = (a*p + b)^q \bmod n$且$a,b,hint$已知
  - 对$hint = (a*p + b)^q \bmod n$模$p$分析（$p|n$因此模$n$成立模$p$自然也成立）
  - $hint \equiv b^q \bmod p \rightarrow hint^p \equiv b^{pq} \bmod p$（两边作$p$次方）
  - $hint^p \equiv hint \equiv b^n \bmod p$（费马小定理）
  - 计算$gcd(hint-b^n, n)$即可分解n

高/低位泄露攻击

在RSA系统中，如果明文、私钥中的某一部分（高/低位）泄露，产生的攻击称为高/低位泄露攻击

高/低位泄露攻击

在RSA系统中，如果明文、私钥中的某一部分（高/低位）泄露，产生的攻击称为高/低位泄露攻击

- Coppersmith引理：
    - 对于模N下度数为d的首一多项式f，若n是N的因子且满足$n \geq N^{\beta}, 0 < \beta \leq 1$，则可以在多项式时间内求出模$n$意义下满足$|x_0| < N^{\frac{\beta^2}{d}}$的根
    - 对于$n=N$的情况，可求出模N下满足$|x_0| < N^{\frac{1}{d}}$的根
    - 在RSA中，$p \approx N^{\frac{1}{2}}$，可求出模$p$下满足$|x_0| < N^{\frac{1}{4d}}$的根

高/低位泄露攻击

在RSA系统中，如果明文、私钥中的某一部分（高/低位）泄露，产生的攻击称为高/低位泄露攻击

- Coppersmith引理：
  - 对于模N下度数为d的首一多项式f，若n是N的因子且满足$n \geq N^{\beta}$，$0 < \beta \leq 1$，则可以在多项式时间内求出模n意义下满足$|x_0| < N^{\frac{\beta^2}{d}}$的根
  - 对于$n=N$的情况，可求出模N下满足$|x_0| < N^{\frac{1}{d}}$的根
  - 在RSA中，$p \approx N^{\frac{1}{2}}$，可求出模$p$下满足$|x_0| < N^{\frac{1}{4d}}$的根

高/低位泄露攻击

明文高位泄露

高/低位泄露攻击

明文高位泄露

- 假如$m^e \equiv c \bmod n$且已知m的高位m_0满足$m=m_0 * 2^h + m_1$
  - 构造多项式$f=(m_0 * 2^h + x)^e - c \bmod n$
  - 若满足Coppersmith引理，即$|m_1| < n^{\frac{1}{e}}$，即可通过Coppersmith方法求出小值根m_1
  - 低位泄露也是类似的方法，不过此时构造的多项式不是首一多项式，可通过乘逆元的方法化为首一多项式

高/低位泄露攻击

明文高位泄露

- 假如$m^e \equiv c \bmod n$且已知m的高位m_0满足$m=m_0 * 2^h + m_1$
  - 构造多项式$f=(m_0 * 2^h + x)^e - c \bmod n$
  - 若满足Coppersmith引理，即$|m_1| < n^{\frac{1}{e}}$，即可通过Coppersmith方法求出小值根m_1
  - 低位泄露也是类似的方法，不过此时构造的多项式不是首一多项式，可通过乘逆元的方法化为首一多项式

高/低位泄露攻击

Attack Script

高/低位泄露攻击

Attack Script

```
from Crypto.Util.number import *
from random import randint

p, q = getPrime(512), getPrime(512)
n, e = p * q, 3
m = randint(0, n)
c = pow(m ,e, n)
m_high = m >> 300

P.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
f = (m_high * 2^300 + x)^e - c
mm = f.small_roots(X = 2^300, beta = 0.4, epsilon = 0.01)[0] + m_high * 2^300
assert mm == m
```

高/低位泄露攻击

Attack Script

```
from Crypto.Util.number import *
from random import randint

p, q = getPrime(512), getPrime(512)
n, e = p * q, 3
m = randint(0, n)
c = pow(m ,e, n)
m_high = m >> 300

P.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
f = (m_high * 2^300 + x)^e - c
mm = f.small_roots(X = 2^300, beta = 0.4, epsilon = 0.01)[0] + m_high * 2^300
assert mm == m
```

高/低位泄露攻击

p、 q高位泄露

高/低位泄露攻击

p、q高位泄露

- 假如$n=p * q$且已知p的高位p_0满足$p=p_0 * 2^h + p_1$
  - 构造多项式$f=(p_0 * 2^h + x) \bmod p$
  - 若满足Coppersmith引理，即$|p_1| < n^{\frac{1}{4}}$，即可通过Coppersmith方法求出小值根p_1

高/低位泄露攻击

p、q高位泄露

- 假如$n=p * q$且已知p的高位p_0满足$p=p_0 * 2^h + p_1$
  - 构造多项式$f=(p_0 * 2^h + x) \bmod p$
  - 若满足Coppersmith引理，即$|p_1| < n^{\frac{1}{4}}$，即可通过Coppersmith方法求出小值根p_1

高/低位泄露攻击

p、q高位泄露

- 假如$n=p * q$且已知p的高位p_0满足$p=p_0 * 2^h + p_1$
  - 构造多项式$f=(p_0 * 2^h + x) \bmod p$
  - 若满足Coppersmith引理，即$|p_1| < n^{\frac{1}{4}}$，即可通过Coppersmith方法求出小值根p_1

```
from Crypto.Util.number import *

p, q = getPrime(512), getPrime(512)
n = p * q
p_high = p >> 100
P.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
f = x + p_high*2^100
pp = ZZ(f.small_roots(X = 2^100, beta = 0.4)[0] + p_high*2^100)
assert pp == p
```

高/低位泄露攻击

p、q高位泄露

- 假如$n=p * q$且已知p的高位p_0满足$p=p_0 * 2^h + p_1$
  - 构造多项式$f=(p_0 * 2^h + x) \bmod p$
  - 若满足Coppersmith引理，即$|p_1| < n^{\frac{1}{4}}$，即可通过Coppersmith方法求出小值根p_1

```
from Crypto.Util.number import *

p, q = getPrime(512), getPrime(512)
n = p * q
p_high = p >> 100
P.<x> = PolynomialRing(Zmod(n))
f = x + p_high*2^100
pp = ZZ(f.small_roots(X = 2^100, beta = 0.4)[0] + p_high*2^100)
assert pp == p
```

Part.4 DLP

DLP简介

DLP简介

DLP，即离散对数问题（Discrete Log Problem），问题描述为给定$g^x \equiv y \bmod p$中的g,y,p，其中p为大素数，求解x

- 离散对数问题是困难问题，目前没有多项式复杂度时间的解决算法
- 离散对数困难问题被用于构造公钥密码学的开篇协议——Diffie-Hellman密钥交换协议
- Diffie-Hellman密钥交换协议
  - 参与方A、B，公开参数g,p
  - A、B分别生成随机数x_A、x_B
  - A、B分别计算$y_A \equiv g^{x_A} \bmod p,y_B \equiv g^{x_B} \bmod p$并发给对方
  - A、B确定协商密钥为$y_B^{x_A} \equiv y_A^{x_B} \equiv g^{x_A * x_B} \bmod p$

DLP简介

DLP，即离散对数问题（Discrete Log Problem），问题描述为给定$g^x \equiv y \bmod p$中的g,y,p，其中p为大素数，求解x

- 离散对数问题是困难问题，目前没有多项式复杂度时间的解决算法
- 离散对数困难问题被用于构造公钥密码学的开篇协议——Diffie-Hellman密钥交换协议
- Diffie-Hellman密钥交换协议
  - 参与方A、B，公开参数g,p
  - A、B分别生成随机数x_A、x_B
  - A、B分别计算$y_A \equiv g^{x_A} \bmod p,y_B \equiv g^{x_B} \bmod p$并发给对方
  - A、B确定协商密钥为$y_B^{x_A} \equiv y_A^{x_B} \equiv g^{x_A * x_B} \bmod p$

DLP攻击方法

DLP攻击方法

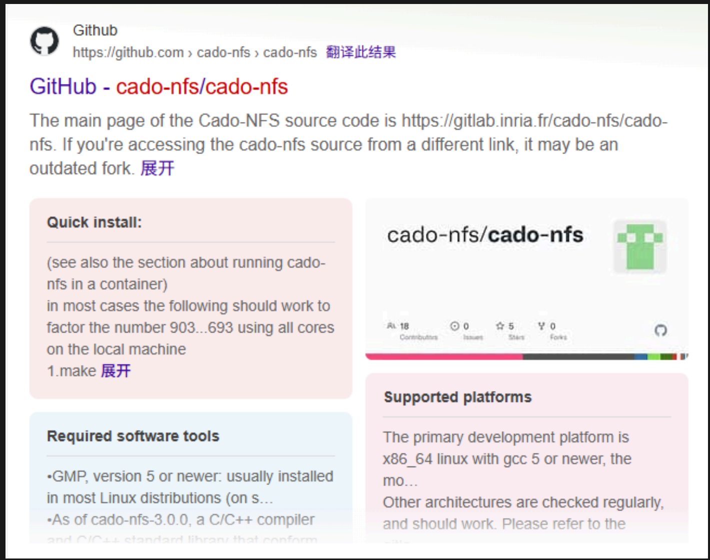
- DLP的求解方法
  - 工具求解（cado-nfs）
  - 大步小步算法（BSGS算法）
  - Pohlig-Hellman算法

DLP攻击方法

- DLP的求解方法
  - 工具求解（cado-nfs）
  - 大步小步算法（BSGS算法）
  - Pohlig-Hellman算法

DLP攻击方法

- DLP的求解方法
  - 工具求解（cado-nfs）
  - 大步小步算法（BSGS算法）
  - Pohlig-Hellman算法



BSGS算法

BSGS算法

- 大步小步算法(Baby-Step-Giant-Step Algorithm)
  - 对于$g^x \equiv y \bmod p$，其中$0 < x \leq m$的DLP问题，BSGS算法可在$O(\sqrt{m})$的时间复杂度和$O(\sqrt{m})$的空间复杂度内求解
  - 算法流程：
    - 设$x = \sqrt{m} * x_0 + x_1$，代入得$g^{\sqrt{m} * x_0 + x_1} \equiv y \bmod p$
    - 上式等价于$g^{\sqrt{m} * x_0} \equiv y * g^{-x_1} \bmod p$
    - 因此我们可以对于所有的$0 \leq x_0 \leq \sqrt{m}$预计算$g^{\sqrt{m} * x_0} \bmod p$并存起来，这需要$O(\sqrt{m})$的计算和$O(\sqrt{m})$的存储
    - 对于所有的$0 \leq x_1 < \sqrt{m}$计算$y * g^{-x_1} \bmod p$并和上面存起来的进行比较，如果有一项相等则根据对应的x_0、x_1计算出x

BSGS算法

- 大步小步算法(Baby-Step-Giant-Step Algorithm)
  - 对于$g^x \equiv y \bmod p$，其中$0 < x \leq m$的DLP问题，BSGS算法可在$O(\sqrt{m})$的时间复杂度和$O(\sqrt{m})$的空间复杂度内求解
  - 算法流程：
    - 设$x = \sqrt{m} * x_0 + x_1$，代入得$g^{\sqrt{m} * x_0 + x_1} \equiv y \bmod p$
    - 上式等价于$g^{\sqrt{m} * x_0} \equiv y * g^{-x_1} \bmod p$
    - 因此我们可以对于所有的$0 \leq x_0 \leq \sqrt{m}$预计算$g^{\sqrt{m} * x_0} \bmod p$并存起来，这需要$O(\sqrt{m})$的计算和$O(\sqrt{m})$的存储
    - 对于所有的$0 \leq x_1 < \sqrt{m}$计算$y * g^{-x_1} \bmod p$并和上面存起来的进行比较，如果有一项相等则根据对应的x_0、x_1计算出x

Pohlig-Hellman算法

Pohlig-Hellman算法

Pohlig Hellman算法常用于DLP的求解，其要求$p-1$是光滑的，即$p-1=p_1^{\alpha_1} * p_2^{\alpha_2} * ... * p_k^{\alpha_k}$且$p_i$都很小

- Pohlig Hellman算法流程：
  - 假如$g^x \equiv y \bmod p$，对于p_i设$x = \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} x_j * p_i^j \bmod p_i^{\alpha_i}$
  - $g^x \equiv y \bmod p \rightarrow g^{\frac{p-1}{p_i^t} * x} \equiv b^{\frac{p-1}{p_i^t}} \bmod p$
  - 令$A = g^{\frac{p-1}{p_i^t}},B = b^{\frac{p-1}{p_i^t}}$，即$A^x \equiv B \bmod p$
  - 由于$A^{p_i^t} \equiv 1 \bmod p$，因此$A^{\sum_{j=0}^{t-1} x_j * p_i^j} \equiv B \bmod p$
  - 从$t=1$开始枚举x_j，最终得到$x \bmod p_i^{\alpha_i}$的值
  - 计算得到所有的$x \bmod p_i^{\alpha_i}$的值并计算这些值的CRT即可得到$x \bmod p-1$的值

Pohlig-Hellman算法

Pohlig Hellman算法常用于DLP的求解，其要求$p-1$是光滑的，即$p-1=p_1^{\alpha_1} * p_2^{\alpha_2} * ... * p_k^{\alpha_k}$且$p_i$都很小

- Pohlig Hellman算法流程：
  - 假如$g^x \equiv y \bmod p$，对于p_i设$x = \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} x_j * p_i^j \bmod p_i^{\alpha_i}$
  - $g^x \equiv y \bmod p \rightarrow g^{\frac{p-1}{p_i^t} * x} \equiv b^{\frac{p-1}{p_i^t}} \bmod p$
  - 令$A = g^{\frac{p-1}{p_i^t}},B = b^{\frac{p-1}{p_i^t}}$，即$A^x \equiv B \bmod p$
  - 由于$A^{p_i^t} \equiv 1 \bmod p$，因此$A^{\sum_{j=0}^{t-1} x_j * p_i^j} \equiv B \bmod p$
  - 从$t=1$开始枚举x_j，最终得到$x \bmod p_i^{\alpha_i}$的值
  - 计算得到所有的$x \bmod p_i^{\alpha_i}$的值并计算这些值的CRT即可得到$x \bmod p-1$的值

ECDLP

在椭圆曲线加法群中也存在离散对数困难问题，被称为椭圆曲线离散对数困难问题（EllipticCurve Discrete Log Problem）

- 椭圆曲线中运算不再是数的运算，而是椭圆曲线加法群的运算
- 假设椭圆曲线点加法为"+"，并扩展数乘运算，点P是椭圆曲线上一点
- 给定$kP = Q$中的P、Q，求解k
- ECDLP的解法和DLP的解法大体一致，都有BSGS算法和Pohlig Hellman算法
- 有兴趣的同学可以自行学习

谢谢大家~ 辛苦啦!

Questions?

肖盼 @DengFeng / 等风

Hack For Fun!

QQ: 1440416491