

Mémoire

Pour Obtention du diplôme de Master En Informatique

Option : Système Informatique (SIQ)

Compression de Graphes par extraction de motifs et k2-trees : étude et implémentation

Réaliser par :

Mlle. Hafsa Bousbiat

eh_bousbiat@esi.dz

ESI

Mlle. Sana Ihadadene

es_ihadadene@esi.dz

ESI

Encadreurs :

Dr. Karima Amrouche

k_amrouche@esi.dz

ESI

Dr. Hamida Seba

hamida.seba@univ-lyon1.fr

Université de Lyon

Dr. Mohammed Haddad

mail

Université de Lyon

Octobre 2018

Année Universitaire : 2018-2019

Remerciement

Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore? Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore? Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore?

Résumé

Nous vivons dans un monde où la quantité d'informations ne cesse d'augmenter et dont la bonne gestion implique l'utilisation des graphes qui se sont répandus dans différents domaines allant des réseaux sociaux et de communication jusqu'aux domaines de la chimie et de la biologie. Cette abondance de données générées fait appel à une technique aussi vieille que la discipline de traitement de données mais qui connaît de nouveaux défis aujourd'hui : la compression. La compression de graphes est un domaine dans lequel le graphe initial subit des transformations pour en obtenir une version plus réduite et compacte permettant, dans la majorité des cas, d'effectuer les traitements dans un temps nettement meilleur.

Dans ce travail, nous étudierons les différentes méthodes de compression existantes dans la littérature dans le but de compléter et d'affiner davantage une classification entamée dans un travail de Master précédent. Nous mettrons l'accent sur les méthodes de compression basées sur l'extraction de motifs ainsi que les méthodes basées sur les k^2 -trees. Par conséquent, nous proposons d'établir une synthèse bibliographique sur ces deux classes et nous établirons une étude comparative entre les méthodes de ces deux classes selon divers critères.

Mots Clés : *Compression de graphes, Big Data, Extraction de motifs, K2-trees, Graphe du Web.*

Abstract

We live in a world where the amount of information is constantly increasing and whose good management involves the use of graphs that have spread in different fields from social and communication networks to the fields of chemistry and biology. This abundance of generated data calls for a technique that is as old as the discipline of data processing but which is facing new challenges today : the compression. Graph compression is a field in which the initial graph undergoes transformations in order to obtain a smaller and more compact version allowing, in the majority of cases, to perform the treatments in a much better time.

In this work, we will study the different methods of compression existing in the literature in order to complete and further refine a classification started in a previous Master's work. We will focus on compression methods based on pattern extraction as well as k^2 -trees methods. Therefore, we propose to establish a bibliographic synthesis on these two classes and we will establish a comparative study between the methods of these two classes according to various criteria.

Key words : *Graph compression, Big Data, Pattern extraction, K2-trees, Web graph.*

Table des matières

Remerciement	1
Résumé	2
Liste des figures	6
Liste des tableaux	7
1 Introduction	8
2 Théorie des graphes	9
2.1 Graphe non orienté	9
2.1.1 Définitions et généralités	9
2.1.2 Représentation graphique	10
2.1.3 Propriété d'un graphe	10
2.2 Graphe orienté	11
2.2.1 Définitions et généralités	11
2.2.2 Représentation graphique	11
2.2.3 Quelques Propriétés :	12
2.3 Notion de Connexité	12
2.4 Graphe partiel et sous graphe :	13
2.4.1 Définitions :	13
2.4.2 Quelques Types de sous graphes :	13
2.5 Quelques types de graphe	14
2.6 Représentation Structurale d'un graphe	14
2.6.1 Matrice d'adjacence	14
2.6.2 Matrice d'incidence	15

2.6.3	Liste d'adjacence	16
2.7	Les domaines d'application	17
2.7.1	Graphes des réseaux sociaux :	17
2.7.2	Graphes en Bioinformatique :	17
2.7.3	Le Graphe du web :	17
2.8	Conclusion	18
3	Compression de graphe	19
3.1	Compression de données :	19
3.2	Compression appliquée aux graphes :	19
3.2.1	Motivations derrière la compression de graphes :	19
3.2.2	Les types de compression :	19
3.2.3	Les métriques d'évaluation des algorithmes de compression :	20
3.2.4	Classification des méthodes de compression :	21
3.3	Conclusion	21
4	Les méthodes de compression par extraction de motifs	22
4.1	Compression par extraction de motifs	22
4.1.1	Compression basée vocabulaire	22
4.1.2	Compression basée Agrégation des motifs	34
4.2	Conclusion	43
5	Les méthodes de compression k2-Trees	44
6	Conclusion	45

Table des figures

2.1	Exemple de représentation graphique d'un graphe non orienté	10
2.2	Exemple de représentation graphique d'un digraphe.	12
2.3	Graphe orientée G	15
2.4	Matrice d'adjacence du graphe G	15
2.5	Graphe orientée G	16
2.6	Matrice d'incidence du graphe G	16
2.7	Graphe orientée G	16
2.8	Liste d'adjacence du graphe G	16
3.1	Compression sans perte.	20
3.2	Compression avec perte.	20
4.1	Exemple illustrant le principe de fonctionnement (Asano et al., 2008)	31
4.2	Exemple d'exécution de SDM	41

Liste des tableaux

4.1	Tableau comparative entre les méthodes de clustering avec n = nombre de nœuds, m = nombre d'arêtes, k = nombre de clusters, t = nombre d'itérations, d = degré moyen de nœuds, $h(m_h)$ = nombre de nœuds (arêtes) dans la structure hyperbolique.	24
4.2	Synthèse des méthode de compression par extraction de motifs basées sur des méthodes de clustering.	30
4.3	Synthèse des méthode de compression par extraction de motifs basées vocabulaire exploitant les propriétés de la matrice d'adjacence.	33
4.4	Synthèse des méthodes de compression par extraction de motifs basées agrégation de nœuds.	35
4.5	Synthèse des méthodes de compression par extraction de motifs basées agrégation de liens en utilisant les règles de grammaire.	38
4.6	Exemple d'exécution de VNM	40
4.7	Synthèse des méthodes de compression par extraction de motifs basées agrégation de liens en utilisant des heuristiques de clustering.	42

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Théorie des graphes

Pour faciliter la compréhension d'un problème, nous avons tendance à le dessiner ce qui nous amène parfois même à le résoudre. La théorie des graphes est fondée, à l'origine sur ce principe. De nombreuses propriétés et méthodes ont été pensées ou trouvées à partir d'une représentation schématique pour être ensuite formalisées et prouvées.

La théorie des graphes est historiquement un domaine mathématique qui s'est développé au sein des autres disciplines comme la chimie, la biologie, la sociologie et l'industrie. Elle constitue aujourd'hui un corpus de connaissance très important et un instrument efficace pour résoudre une multitude de problèmes.

De manière générale le graphe sert à représenter les structures, les connexions entre différents composants, les acheminements possibles pour un ensemble complexe composé d'un grand nombre de situations, en exprimant les dépendances et les relations entre ses éléments, (e.g. réseau routier ou ferroviaire, réseau de communication, diagramme d'ordonnancement, ..).

Dans ce chapitre nous présenterons les définitions et les concepts clés relatives aux graphes qui serviront de base pour la suite de notre travail et nous clôturons le chapitre avec quelques domaines d'application de ces derniers.

2.1 Graphe non orienté

2.1.1 Définitions et généralités

Un graphe non orienté G est la donnée d'un couple (V, E) où $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets ou nœuds (Vertices en anglais) et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ est un ensemble fini d'arêtes (Edges en anglais). Toute arête e de E correspond à un couple non ordonné de sommets $\{v_i, v_j\} \in E \subset V \times V$ représentant ses extrémités (Müller, 2012) (Fages,

2014).

Soient $e = (v_i, v_j)$ et $e' = (v_k, v_l)$ deux arêtes de E , On dit que :

- v_i et v_j sont les extrémités de e et e est incident en v_i et en v_j (Hennecart et al., 2012).
- v_i et v_j sont voisins ou adjacents, car il y'a au moins une arête entre eux dans E (IUT, 2012).
- L'ensemble des sommets adjacents au sommet e est appelé le voisinage de e (Müller, 2012).
- e et e' sont voisins si ils ont une extrémité commune , i.e. : $v_i = v_k$ par exemple (Lopez, 2003).
- L'arête e est une boucle si ses extrémités coïncident, i.e. : $v_i = v_j$ (IUT, 2012).
- L'arête e est multiple si elle a plus d'une seule occurrence dans l'ensemble E .

2.1.2 Représentation graphique

Un graph non orienté G peut être représenter par un dessin sur un plan comme suit (Müller, 2012) :

- Les nœuds de G : $v_i \in V$ sont représenter par des points distincts.
- Les arêtes de G : $e = (v_i, v_i) \in E$ sont représenter par des lignes pas forcément rectilignes qui relient les extrémités de chaque arête e .

Exemple : Soit $g = (V1, E1)$ un graphe non orienté tel que : $V1 = \{ 1, 2, 3, 5 \}$ et $E = \{ (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4) \}$. La représentation graphique de g est alors donnée par le schéma de la figure 2.1.

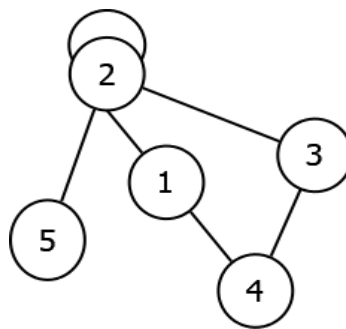


FIGURE 2.1 – Exemple de représentation graphique d'un graphe non orienté

2.1.3 Propriété d'un graphe

- **Ordre d'un graphe :** On appelle ordre d'un graphe le nombre de ses sommets, i.e. $\text{Card}(V)$ (Roux, 2014).

- **Taille d'un graphe :** On appelle taille d'un graphe le nombre de ses arêtes. i.e. $\text{Card}(E)$ (Roux, 2014).
- **Degré d'un graphe :**
 - **Degré d'un sommet :** Le degré d'un sommet noté $d(v_i)$ est le nombre d'arêtes incidents à ce sommet, sachant qu'une boucle compte pour 2 (Müller, 2012). Dans l'exemple de la figure 2.1, le degré du sommet (1) est : $d(1)=2$.
 - **Degré d'un graphe :** Le degré d'un graphe est le degré maximum de ses sommets. e.i. c'est $\max(d(v_i))$ (Müller, 2012). Dans l'exemple de la figure 2.1, le degré du graphe est $d(2)=5$.
- **Rayon et diamètre d'un graphe :**
 - **Distance :** La distance entre deux sommets v et u est le plus petit nombre d'arêtes qu'on doit parcourir pour aller de v à u ou de u à v (Müller, 2012).
 - **Diamètre d'un graphe :** C'est la plus grande distance entre deux sommets de ce graphe (Müller, 2012).
 - **Rayon d'un graph :** C'est la plus petite distance entre deux sommets de ce graphe.

===== **Rayon d'un graph :** C'est la plus petite distance entre deux sommets de ce graphe (Parlebas, 1972). »»»> 0e4b8dd6bd0e83a265e861d99710ae5cff85ecfa

2.2 Graphe orienté

2.2.1 Définitions et généralités

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les sommets de G et $E \subset V \times V$ est un ensemble de couples ordonnés de sommets dits arcs ou arêtes (Müller, 2012). G est appelé dans ce cas digraphe (directed graph).

Pour tout arc $e = (v_i, v_j) \in E$:

- v_i est dit extrémité initiale ou origine de e et v_j est l'extrémité finale de e (Müller, 2012).
- v_i est le prédécesseur de v_j et v_j est le successeur de v_i (IUT, 2012).
- les sommets v_i, v_j sont des sommets adjacents (Jean-Charles Régis, 2016).
- e est dit sortant en v_i et incident en v_j (Jean-Charles Régis, 2016).
- e est appelé boucle si $v_i = v_j$, i.e l'extrémité initiale et finale représente le même sommet (IUT, 2012).

2.2.2 Représentation graphique

Un graphe $G = (V, E)$ peut être projeté sur le plan en représentant :

- dans un premier temps les nœuds $v_i \in V$ par des points disjoints du plan.
- et dans un second temps les arêtes $e = (v_i, v_j) \in E$ par des lignes orientées reliant par des flèches les deux extrémités de e .

Exemple :

Soit $g = (V_1, E_1)$ un digraphe tel que : $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E_1 = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$.

Le représentation graphique de g est alors donnée par le schéma de la figure ci-dessous.

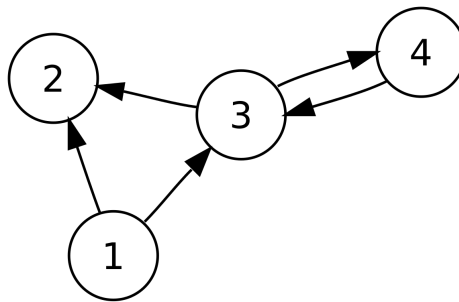


FIGURE 2.2 – Exemple de représentation graphique d'un digraphe.

2.2.3 Quelques Propriétés :

- **Ordre d'un digraphe** : est le nombre de sommets $n = \text{Card}(V)$ (Roux, 2014).
- **taille d'un digraphe** : est le nombre d'arcs $m = \text{Card}(A)$ (Roux, 2014).
- **Degré dans un digraphe** : Le degré d'un sommet $v_i \in V$ dans un digraphe $G = (V, E)$ est donnée par la formule :

$$d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i)$$

où $d^+(v_i)$ est le nombre d'arcs sortants au sommet v_i et est appelé degré extérieure et $d^-(v_i)$ représente le nombre d'arcs incidents et est appelé degré intérieur (Müller, 2012).

- **Voisinage dans un digraphe** : Le voisinage d'un sommet $v_i \in V$, noté $V(v_i)$, dans un digraphe $G = (V, E)$ est :

$$V(v_i) = \text{succ}(v_i) \cup \text{pred}(v_i),$$

avec $\text{succ}(v_i)$ qui est l'ensemble des successeurs de v_i et $\text{pred}(v_i)$ qui l'ensemble de ses prédécesseurs (Rigo, 2010), i.e le voisinage de v_i est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents.

2.3 Notion de Connexité

Les structures de graphes sont généralement exploitables à travers leurs interrogation qui permet de fournir des réponses aux problèmes modélisés. L'un des informations les plus importantes dans un graphe est la notion des relations (indirectes ou indirecte) entre deux nœuds ou plus formellement la connexité dans un graphe. Dans cette partie nous allons définir les concepts relatives à cette notion.

- **Chemin (resp. Chaîne) :** est une liste de sommets $S = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ telle qu'il existe un arc (resp. une arête) entre chaque couple de sommets successifs.
- **Cycle (resp. Circuit) :** est un chemin (resp. chaîne) dont le premier et le dernier sommet sont identiques (Roux, 2014).
- **Graphe connexe :** Un graphe non orienté (resp. orienté) est dit connexe (resp. fortement connexe) si pour tout pair de sommets (v_i, v_j) il existe un chemin S les reliant (Müller, 2012).

2.4 Graphe partiel et sous graphe :

La quantité de donnée disponible aujourd'hui et sa croissance de manière exponentiel ont favorisé la décomposition des graphes en des entités plus petites afin de garantir une facilité de compréhension et d'analyse dans le but d'extraire l'information la plus pertinente. Dans cette partie nous allons définir de manière plus formelle ce que ces entités sont ainsi que leurs types.

2.4.1 Définitions :

Soient $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ et $G'' = (V'', E'')$ trois graphes.

- Le graphe G' est appelé graphe partiel de G si : $V' = V$ et $E' \subset E$ (Roux, 2014). En d'autres termes, un graphe partiel est obtenu en supprimant une ou plusieurs arêtes de G .
- Le graphe G'' est dit sous-graphe de G si : $V'' \subset V$ et $E'' \subset E \cap (V'' \times V'')$ (Rigo, 2010), i.e un graphe partiel est obtenu en enlevant un ou plusieurs nœuds du graphe initial ainsi que les arêtes dont ils représentent l'une des deux extrémités.

2.4.2 Quelques Types de sous graphes :

- **Une Clique :** est un sous graphe complet de G (Rigo, 2010).
- **Bipartie :** G' est un sous graphe bipartie si il existe une partition de V en deux sous ensembles noté V_1 et V_2 , i.e $V' = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tel que $E' = V_1 \times V_2$ (Rigo, 2010).

- **Étoile** : est un cas particulier de sous graphe bipartie où X est un ensemble contenant le sommet central uniquement et Y contient le reste des nœuds (Koutra et al., 2015) .

2.5 Quelques types de graphe

Avec les avancées technologique au fil du temps, plusieurs types de graphes ont connus le jour. En effet, La complexité et la variété des problèmes scientifiques existants modélisés par ces derniers ont poussé les chercheurs à adapter leurs structure selon le problème auquel ils font face. Durant cette section nous allons définir les principaux types existants.

- **Graphe Complet** : Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe complet si tous les sommets $v_i \in V$ sont adjacents (Jean-Charles Régim, 2016). Il est souvent noté K_n où $n = \text{card}(V)$ (Roux, 2014).
- **Graphe étiqueté et graphe pondéré** : Un graphe étiqueté $G = (V, E, W)$ est un graphe, qui peut être orienté ou non orienté, dont chacune des arêtes $e_i \in E$ est doté d'une étiquette w_i . Si de plus, w_i est un nombre alors G est dit graphe pondéré (valué) (Roux, 2014).
- **Graphe simple et graphe multiple** : Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple si il ne contient pas de boucles et tout pair de sommet est reliée par au plus une arête. Dans le cas contraire, G est dit multiple (IUT, 2012).

2.6 Représentation Structurale d'un graphe

Bien que la représentation graphique soit un moyen pratique pour définir un graphe, elle n'est clairement pas adaptée ni au stockage du graphe dans une mémoire, ni à son traitement. Pour cela plusieurs structures de données ont été utilisées pour représenter un graphe, ces structures varient selon l'usage du graphe et la nature des traitements à appliquer. Nous allons présenter dans cette partie les structures les plus utilisés.

Soit un graphe $G(V, E)$ d'ordre n et de taille m dont les sommets v_1, v_2, \dots, v_n et les arêtes (ou arcs) v_1, v_2, \dots, v_m sont ordonnés de 1 à n et de 1 à m respectivement.

2.6.1 Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence de G est une matrice booléenne carré d'ordre n : $(m_{ij})_{(i,j) \in [0;n]^2}$, dont les lignes (i) et les colonnes (j) représentent les sommets de G , où les entrées (ij) prennent une valeur de "1" s'il existe un arc (une arête dans le cas d'un graph non orienté) allant du sommet i au sommet

j et un "0" sinon, e.i (Lehman et al., 2010) (SABLIK, 2018) (IUT, 2012) :

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice est symétrique par rapport à la diagonale descendante de gauche à droite . e.i. $m_{ij} = m_{ji}$, dans ce cas le graphe peut être représenté avec la composante triangulaire supérieure de la matrice d'adjacence (Müller, 2012).

Note :

- Cette représentation est valide pour le cas d'un graphe non orienté et orienté.
- Dans le cas d'un graphe pondéré, les "1" sont remplacés par les poids des arêtes (ou arcs) (Lopez, 2003).
- Ce mode de représentation engendre des matrices très creuses (comprenant beaucoup de zero) (Hennecart et al., 2012).

Exemple : La figure 2.4 représente un exemple de matrice d'adjacence pour le graphe G ci-contre (figure 2.3) :

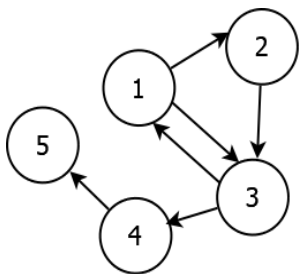


FIGURE 2.3 – Graphe orientée G

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.4 – Matrice d'adjacence du graphe G

Place occupé en mémoire : n^2 pour un graphe d'ordre n (Lopez, 2003).

2.6.2 Matrice d'incidence

La matrice d'incidence d'un graphe orienté G est une matrice de taille $n \times m$, dont les lignes représentent les sommets ($i \in V$) et les colons représentent les arcs ($j \in E$) et dont les coefficients

(m_{ij}) sont dans $\{-1, 0, 1\}$, tel que (Hennecart et al., 2012) (SABLIK, 2018) :

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est l'extrémité final de l'arc } j \\ -1 & \text{si le sommets } i \text{ est l'extrémité initial de l'arc } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un graphe non orienté, la coefficients (m_{ij}) de la matrice sont dans $\{0, 1\}$, tel que (Hennecart et al., 2012) :

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est une extrémité de l'arête } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : La figure 2.6 représente un exemple de matrice d'incidence pour le graphe G ci-contre (figure 2.5) :

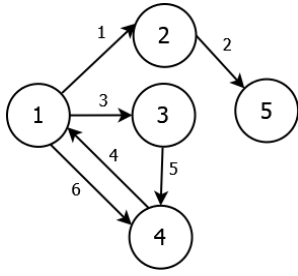


FIGURE 2.5 – Graphe orientée G

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.6 – Matrice d'incidence du graphe G

Place occupé en mémoire : $n \times m$

2.6.3 Liste d'adjacence

La liste d'adjacence d'un graphe G est un tableau de n listes, où chaque entrée (i) du tableau correspond a un sommet et comporte la liste $T[i]$ des successeurs (ou prédécesseur) de ce sommet, c'est à dire tous les sommets j tel que $(i,j) \in E$ (SABLIK, 2018).

Dans le cas d'un graphe non orienté on aura : $j \in \text{la liste } T[i] \iff i \in \text{la liste } T[j]$ (IUT, 2012).

Exemple : La figure 2.8 représente un exemple de matrice d'incidence pour le graphe G ci-contre (figure 2.7) :

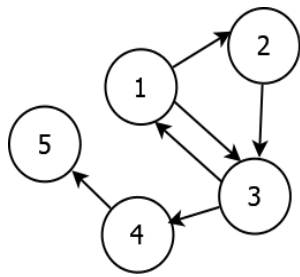


FIGURE 2.7 – Graphe orientée G

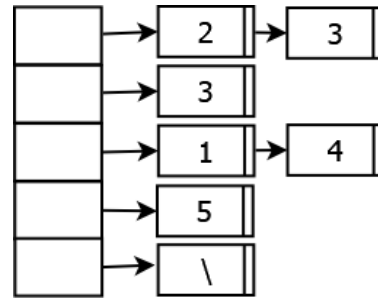


FIGURE 2.8 – Liste d'adjacence du graphe G

Place occupé en mémoire : Dans le cas orienté l'espace est de $n + m$. Dans le cas non orienté, l'espace est de $n + 2m$ car une arête est représenté deux fois.

2.7 Les domaines d'application

La diversité des domaines faisant appel à la modélisation par des graphes ne cesse d'augmenter, allant des réseaux sociaux aux réseaux électriques et réseaux biologiques et arrivant jusqu'aux World Wide Web. Dans cette partie nous allons décrire trois domaines d'application les plus répandus des graphes.

2.7.1 Graphes des réseaux sociaux :

Les réseaux sociaux représentent un lieu d'échange et de rencontre entre individus (entités) et dont l'utilisation est devenue de nos jours une nécessité. Pour représenter les interactions entre ces individus, nous avons généralement besoin de faire recours aux graphes où les sommets sont des individus ou des entités et les interactions entre eux sont représenté par des liens. Vue la diversité des interactions sociales, la modélisation de ces réseaux nécessite différents types de graphes : graphes non orientés pour les réseaux sociaux avec des relations non orientées, graphes orientés pour représenter des relations non symétriques comme c'est le cas dans les réseaux de confiance, graphes pondérés pour les réseaux sociaux qui contiennent différents niveaux d'intensités dans les relations, ... etc (Lemmouchi, 2012).

2.7.2 Graphes en Bioinformatique :

La bio-informatique est un domaine qui se trouve à l'intersection des deux grands domaines celui de l'informatique et celui de la biologie. Elle a pour but d'exploiter la puissance de calcul des équipements informatiques pour effectuer des traitements sur des données moléculaires massives (Pellegrini et al., 2004).

Elle est largement utilisée pour l'analyse des séquences d'ADN et des protéines à travers leurs modélisation sous forme de graphe. A titre d'exemple, les graphes non orientés multiples sont un outil modélisation des réseaux d'interaction protéine-protéine (Pellegrini et al., 2004), le but dans ce cas est donc l'étude du fonctionnement des protéines par rapport à d'autre.

2.7.3 Le Graphe du web :

Le graphe du Web est un graphe orienté dont les sommets sont les pages du web et les arêtes modélise l'existence d'un lien hypertexte dans une page vers une autre (Brisaboa et al., 2009). Il représente l'un des graphes les plus volumineux : en juillet 2000 déjà, on estimait qu'il contenait environ 2,1 milliards de sommets et 15 milliards d'arêtes avec 7,3 millions de pages ajoutées chaque jour (Guillaume and Latapy, 2002). De ce fait, ce graphe a toujours attiré l'attention des chercheurs. En effet, l'étude de ses caractéristiques a donné naissance à plusieurs algorithmes intéressants, notamment l'algorithme PageRank de classement des pages web qui se trouve derrière le moteur de recherche le plus connu de nos jours : Google.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenter les notions et les concepts généraux qui touchent à la théorie de graphes : définitions de graphes, leurs principales propriétés, leurs représentations ainsi que leurs domaines d'application.

Le point important qu'on a put tirer de cette partie est que les graphes sont devenue un moyen crucial et indispensable dans la modélisation des problèmes dans plusieurs domaines. Cependant ils devient de plus en plus complexe et volumineux avec la grande quantités de données disponible de nos jours, ce qui rend leurs stockage, visualisation et traitement difficile. La compression de graphe est nait comme solution à ce problème. Dans le chapitre suivant nous allons présenter la compression de graphe, son rôle et ses différents méthodes.

Chapitre 3

Compression de graphe

3.1 Compression de données :

La compression de donnée est principalement une branche de la théorie de l'information qui traite des techniques et méthodes liées à la minimisation de la quantité de données à transmettre et à stocker. Sa caractéristique de base est de convertir une chaîne de caractères vers un autre jeu de caractères occupant un espace mémoire le plus réduit possible tout en conservant le sens et la pertinence de l'information (Lelewer and Hirschberg, 1987).

Les techniques de compression de données sont principalement motivées par la nécessité d'améliorer l'efficacité du traitement de l'information. En effet, la compression des données en tant que moyen peut rendre l'utilisation des ressources existantes beaucoup plus efficace.

De ce fait, une large gamme d'application usant de ce domaine tel que le domaine des télécommunications et le domaine du multimédia est apparue offrant une panoplie d'algorithmes de compression (Sethi et al., 2014). Sans les techniques de compression, Internet, la télévision numérique, les communications mobiles et les communications vidéo, qui ne cessaient de croître, n'auraient été que des développements théoriques.

3.2 Compression appliquée aux graphes :

3.2.1 Motivations derrière la compression de graphes :

3.2.2 Les types de compression :

La compression de graphe est définie comme l'ensemble des méthodes et techniques permettant de réduire l'espace mémoire occupé par ce derniers sans perte significative d'information. Dès lors,

deux approches se présente : la compression avec ou sans perte, que nous allons détaillées dans ce qui suit.

Compression Sans Perte :

Certains domaines d'application de la compression nécessitent un niveau élevé d'exactitude et une restitution exacte, donc une compression sans perte. Dans cette catégorie, le graphe G subi des transformation pour avoir une représentation compacte G' qui lors de la décompression donne exactement G . La figure ci-dessous illustre cette définition.



FIGURE 3.1 – Compression sans perte.

Compression Avec Perte :

Contrairement à la compression sans perte, la compression avec perte permet la suppression permanente de certaines informations jugées inutile (redondantes) pour améliorer la qualité de la compression. En d'autres termes, le graphe G subi des transformations pour avoir une représentation compacte G' qui lors de la décompression donne un graphe G'' probablement différent de G mais l'approximant le plus possible. La figure ci-dessous illustre cette définition.



FIGURE 3.2 – Compression avec perte.

3.2.3 Les métriques d'évaluation des algorithmes de compression :

Devant la panoplie d'algorithmes et de techniques de compression de graphe disponibles dans la littérature, des critères de comparaison et d'évaluation entre ces méthodes doivent être bien définis. Dans cette partie nous présenterons les principaux mesures de performances.

Le temps de compression :

C'est une métrique qui donne le temps d'exécution de l'algorithme de compression. Elle est généralement mesurée en secondes (ou ms).

Le ratio de compression :

C'est mesure la plus courante pour calculer l'efficacité d'un algorithme de compression. Il est défini comme le rapport entre le nombre total de bits requis pour stocker des données non compressées et le nombre total de bits nécessaires pour stocker des données compressées.

$$CR = \frac{\text{No. de bits du graphe originale}}{\text{No. de bits du graphe finale}}$$

Le CR est parfois appelé bit par bit (bpb) et il définit alors comme étant le nombre moyen de bits requis pour stocker les données compressées (Uthayakumar et al., 2018). Dans le cas des algorithmes de compression de graphe on a :

- **Le nombre de bits par nœuds** : représente l'espace mémoire nécessaire pour stocker un nœud (bpn pour bits per node).
- **Le nombre de bits par liens** : représente l'espace mémoire nécessaire pour stocker un liens (bpe pour bits per edge).

Le taux de compression :

Exprimée en pourcentage, cette métrique permet de mesurer la performance de la méthode de compression. Elle peut être exprimé de deux manières différentes :

- **Le taux de compression** : Le rapport entre volume du graphe après compression et le volume initial du graphe.

$$t = \frac{\text{La taille du graphe finale}}{\text{La taille du graphe originale}}$$

- **Le gain d'espace** : Le gain d'espace représente la réduction de la taille du graphe compressé par rapport à la taille du graphe originale.

$$G = 1 - \frac{\text{La taille du graphe finale}}{\text{La taille du graphe originale}}$$

3.2.4 Classification des méthodes de compression :**3.3 Conclusion**

Chapitre 4

Les méthodes de compression par extraction de motifs

La découverte de connaissances et l'exploration de données (KDD) ont pour objectif d'extraire des informations utiles à partir de sources de données, souvent sous la forme de modèles récurrents. Les motifs fréquents sont des sous-graphes .

4.1 Compression par extraction de motifs

Les motifs fréquents sont des connaissances extraites sur des données. Leur but est de fournir à l'utilisateur des informations non triviales, implicites, présumées non connues. Ils offrent ainsi à l'utilisateur une meilleure appréhension des données. L'extraction de motifs fréquents est ainsi devenue une tâche importante de la fouille de données et un thème très étudié par la communauté. Elle a aussi été vastement utilisée dans le domaine de compression des graphes vue qu'elle permet de ne garder que l'information utiles et d'éliminer les redondances de manière efficace. En effet, nous trouvons plusieurs méthodes basées sur ce principe dont nous proposons de les classer en deux grandes classes : (i) les méthodes de compression basées vocabulaire (ii) les méthodes de compression basées Agrégation.

Dans cette section, nous allons expliquer le principe de base de chaque classe où nous allons subdiviser chacune en plusieurs sous-classe en se basant sur ce dernier.

4.1.1 Compression basée vocabulaire

Les méthodes de compression par extraction de motifs basées vocabulaire sont des méthodes qui ont attirées l'attention des chercheurs ces dernières années car elles permettent une meilleurs

compréhension du graphe. Elles partent toujours d'un ensemble de structures prédéfinies qui ont été prouvées fréquent dans les graphes réels. Deux sous classes de cette dernières peuvent être d :

Basées sur des méthodes de clustering

Les méthodes de cette classe s'appuient sur le fait qu'on ne peut pas comprendre facilement les graphes denses, alors que quelques structures simples sont beaucoup plus faciles à comprendre et souvent très utiles pour analyser le graphe. Elles se basent sur des algorithmes de détection de communautés. La question suivante peut alors se poser : pourquoi ne pas appliquer l'un des nombreux algorithmes de détection de communauté ou de partitionnement de graphe pour compresser le graphe en termes de communautés ? La réponse est que ces algorithmes ne servent pas tout à fait le même objectif que la compression. Généralement, ils détectent de nombreuses communautés sans ordre explicite, de sorte qu'une procédure de sélection des sous-graphes les plus «importants» est toujours nécessaire. En plus de cela, ces méthodes renvoient simplement les communautés découvertes, sans les caractériser (par exemple, clique, étoile) et ne permettent donc pas à l'utilisateur de mieux comprendre les propriétés du graphe.

Parmi les méthodes de détection les plus importants dans la littérature nous trouvons :

1. **METIS(Karypis and Kumar, 2000)** :est un schéma de partitionnement de graphe multiniveau basé sur la coupe basé sur la bisection récursive multiniveau (MLRB). Tant que la taille du graphe n'est pas sensiblement réduite, il grossit d'abord le graphe d'entrée en regroupant les nœuds dans les super-nœuds de manière itérative, de sorte que la coupe des bords soit préservée. Ensuite, le graphe grossi est partitionné à l'aide de MLRB et le partitionnement est projeté sur le graphe d'entrée G par le biais du retour en arrière. La méthode produit k partitions à peu près égales.
2. **SPECTRAL(Hespanha, 2004)** : partitionne un graphe en effectuant une classification en k-means sur les k premiers vecteurs propres du graphe d'entrée. L'idée derrière cette classification est que les nœuds avec une connectivité similaire ont des scores propres similaires dans les k premiers vecteurs.
3. **LOUVAIN(Blondel et al., 2008)** :est une méthode de partitionnement basée sur la modularité pour détecter la structure de communauté hiérarchique. Comme SLASHBURN, LOUVAIN est itératif : (i) Chaque nœud est placé dans sa propre communauté. Ensuite, les voisins j de chaque nœud i sont pris en compte et i est déplacé vers la communauté j si le déplacement produit le gain de modularité maximum. Le processus est appliqué à plusieurs reprises jusqu'à ce qu'aucun gain supplémentaire ne soit possible. (ii) Un nouveau graphe est créé dont les super nœuds représentent les communautés et les super arêtes sont pondérées par la somme des

poids des liens entre les deux communautés. L'algorithme converge généralement en quelques itérations.

4. **SLASHBURN (Kang and Faloutsos, 2011)** :est un algorithme de ré-ordonnancement de nœud initialement développé pour la compression de graphes. Il effectue deux étapes de manière itérative : (i) il supprime les nœuds de haute centralité du graphe (ii) Il réorganise les nœuds de manière à ce que les identificateurs les plus petit soient attribués aux nœuds de degré élevé et les nœuds des composants déconnectés obtiennent les identificateurs les plus élevés. Le processus est répété sur le composant connecté.
5. **BIGCLAM(Yang and Leskovec, 2013)** :est une méthode de détection de communauté à chevauchement évolutive. Il est construit sur le constat que les chevauchements entre les communautés sont étroitement liés. En modélisant explicitement la force d'affiliation de chaque couple nœud-communauté, un facteur latent non négatif est attribué à cette dernière, qui représente le degré d'appartenance à la communauté. Ensuite, la probabilité d'un bord est modélisée en fonction des affiliations de communautés partagées. L'identification des communautés de réseau est réalisée en adaptant BIGCLAM à un réseau non dirigé donné G .
6. **HYCOM(Araujo et al., 2014)** :est un algorithme sans paramètre qui détecte les communautés à structure hyperbolique. Il se rapproche de la solution optimale en détectant de manière itérative les communautés importantes. L'idée clé est de trouver dans chaque étape une communauté unique qui minimise une fonction d'objectif basée sur la MDL en fonction des communautés précédemment détectées. La procédure itérative comprend trois étapes : les candidats à la communauté, la construction de la communauté et la déflation matricielle.

Nous présenterons dans ce qui suit une étude comparative entre ces méthodes dans le but de mieux comprendre leurs influence sur les méthode de compression.

	Chevauchement	Clique	Étoile	sous-graphe Bipartie	Chaîne	Structure Hyperbolique	Complexité
Metis	✗	Beaucoup	certaines	certaines	peu	peu	$O(m \cdot k)$
Spectral	✗	Beaucoup	certaines	Beaucoup	peu	peu	$O(n^3)$
Louvain	✗	Beaucoup	certaines	peu	peu	peu	$O(n \log n)$
SlashBurn	✓	Beaucoup	Beaucoup	certaines	peu	peu	$O(t(m + n \log n))$
Bigclam	✓	Beaucoup	certaines	peu	peu	peu	$O(d \cdot n \cdot t)$
Hycom	✓	certaines	Beaucoup	certaines	peu	Beaucoup	$O(k(m + h \log h^2 + h m_h))$
KCBC	✓	Beaucoup	certaines	peu	peu	peu	$O(t(m + n))$

TABLE 4.1 – Tableau comparative entre les méthodes de clustering avec n = nombre de nœuds, m = nombre d'arêtes, k = nombre de clusters, t = nombre d'itérations, d = degré moyen de nœuds, $h(m_h)$ = nombre de nœuds (arêtes) dans la structure hyperbolique.

Une première technique de compression usant de ces méthodes s'intitule VOG (Koutra et al., 2015). C'est une méthode de base sur laquelle s'appuient plusieurs autres méthodes de cette classe. Elle permet de compresser un graphe statique non orienté G à l'aide d'un vocabulaire de sous-structures qui apparaissent fréquemment dans les graphes réels et ayant une signification sémantique tout en minimisant le cout du codage en utilisant le principe MDL qui est un concept de la théorie de l'information permettant de trouver le modèle ayant une longueur minimale : $\min(D, M) = L(M) + L(D | M)$ où $L(M)$ est la longueur du modèle et $L(D | M)$ est la longueur en bits de la description des données en utilisant le modèle M . Le vocabulaire Ω utilisé est composé de six structures qui sont : clique (fc) et quasi-clique (nc), noyau bipartie (cb) et quasi-noyau bipartie (nb), étoile (st) et chaîne (ch). On peut avoir un chevauchement au niveau des nœuds, les liens quand à eux sont servis selon un ordre FIFO et ne peuvent pas se chevaucher, i.e la première structure $s \in M$ qui décrit l'arête dans A détermine sa valeur.

On note par \mathcal{C}_x l'ensemble de tous les sous-graphes possible de type $x \in \Omega$, et \mathcal{C} l'union de tous ces ensembles, $\mathcal{C} = \cup_x \mathcal{C}_x$. La famille de modèles noté \mathcal{M} représente tous les permutations possibles des éléments de \mathcal{C} . Par MDL, on cherche $M \in \mathcal{M}$ qui minimise le mieux le cout de stockage du modèle et de la matrice d'adjacence. En d'autre terme, VoG formule le problème de compression comme un problème d'optimisation dont la fonction objective est : $\min(D, M) = L(M) + L(E)$ avec $E = A \oplus M$ représentant l'erreur.

Pour l'encodage du modèle, on a pour chaque $M \in \mathcal{M}$:

$$L(M) = L_{\mathbb{N}}(|M|+1) + \log \left(\frac{|M| + |\Omega| - 1}{|\Omega| - 1} \right) + \sum_{s \in M} (-\log \Pr(x(s)|M) + L(s))$$

Le premier terme représente le nombre de structures dans le modèle avec $L_{\mathbb{N}}$, le second terme encode le nombre de structures par type $x \in \Omega$ tant dis que le troisième terme permet pour chaque structure $s \in M$, d'encoder son type $x(s)$ avec un code de préfixe optimal et d'encoder sa structure. Le codage des structures se fait selon leurs type :

Clique : Pour l'encodage d'une clique, on calcule le nombre des nœuds de celle-ci, et on encode leurs ids : $L(fc) = L_{\mathbb{N}}(|fc|) + \log \binom{n}{|fc|}$

Quasi-Clique : Les quasi cliques sont encodées comme des cliques complètes, tout en identifiant les arêtes ajoutées dont le nombre est $||nc||$ et manquantes dont le nombre est noté $||nc||'$ en utilisant des codes de préfixe optimaux : $L(nc) = L_{\mathbb{N}}(|nc|) + \log \binom{n}{|nc|} + \log(|nc|) + ||nc||l_1 + ||nc||'l_0$ où $l_1 = -\log(||nc||/(||nc||+||nc||'))$ et analogue à l_0 sont les longueurs des codes de préfixe optimaux des arêtes ajoutées et manquantes.

Noyau bipartie : notant par A et B les deux ensemble du noyau bipartie, On encode leurs tailles, ainsi que les ids de leurs sommets : $L(fb) = L_{\mathbb{N}}(|A|) + L_{\mathbb{N}}(|B|) + \log \binom{n}{|A|} + \log \binom{n-|A|}{|B|}$.

Quasi-Noyau bipartie : Comme les quasi-cliques, les noyau bipartie sont codé comme suit : $L(nb) = L_{\mathbb{N}}(|A|) + L_{\mathbb{N}}(|B|) + \log \binom{n}{|A|} + \log \binom{n-|A|}{|B|} + \log(|\text{area}(nb)|) + \|nb\|l_1 + \|nb\|l_0$.

Étoile : comme l'étoile est un cas particulier des noyau bipartie, d'abord on calcule la nombre de spokes de l'étoile, ensuite on identifie le hub parmi les n sommets et les spokes parmi les n-1 restants. $L(st) = L_{\mathbb{N}}(|st|-1) + \log n + \log \binom{n-1}{|st|-1}$.

Chaine : On calcule d'abord le nombre d'éléments de la chaine, ensuite on encode les ids des nœuds selon leurs ordre dans la chaine : $L(ch) = L_{\mathbb{N}}(|ch| - 1) + \sum_{i=0}^{|ch|} (n - i)$

Matrice d'erreur : la matrice d'erreur E est encoder sur deux parties E^+ et E^- . E^+ correspond à la partie de A que M modélise en rajoutant des liens non existants contrairement à E^- qui représente les partie de A que M ne modélise pas. Notons que les quasi-clique et les quasi-noyau bipartie ne sont pas inclut dans la matrice d'erreur puisque ils sont encodés exactement donc on les ignorent. Le codage de E^+ et E^- est similaire à celui des quasi-clique, on a :

$$\begin{aligned} L(E^+) &= \log(|E^+|) + \|E^+\|l_1 + \|E^+\|l_0 \\ L(E^-) &= \log(|E^-|) + \|E^-\|l_1 + \|E^-\|l_0 \end{aligned}$$

Pour la recherche du meilleur modèle $M \in \mathcal{M}$, VoG procède sur trois étapes :

1. **Génération des sous-structures :** Dans cette phase, Les méthodes de détection de communautés et de clustering sont utilisé pour décomposer le graphe en sous-graphes pas forcément disjoints. La méthode de décomposition utilisé dans VOG est SlashBurn.
2. **Étiquetage des sous-graphes :** L'algorithme cherche pour chaque sous-graphe généré dans l'étape précédente la structure $x \in \Omega$ qui le décrit le mieux, en tolérant un certain seuil d'erreur.

a **Étiquetage des structures parfaites :** Tout d'abord, le sous-graphe est testé pour une similarité sans erreur par rapport au structures complètes du vocabulaire :

- si tous les sommets d'un sous graphe d'ordre n ont un degré égale à n-1, il s'agit alors d'une clique
- si tous les sommets ont un degré de 2 sauf deux sommets ayant le degré 1, le sous-graphe est une chaine.
- si les amplitudes de ses valeurs propres maximales et minimales sont égales, le sous-graphe est un noyau bipartie où les sommet de chaque nœuds sont identifié à travers un parcours BFS avec coloration des sommets.

- Quant à l'étoile, elle est considéré comme un cas particulier d'un noyau bipartie, il suffit donc que l'un des ensemble soit composé d'un seule sommet.

b **Étiquetage des structures approximative** : Si le sous graphe ne correspond pas à une structures complète, on cherche la structure qui l'approxime le mieux en terme du principe MDL.

Après avoir représenter le sous graphe sous forme d'une structure, on l'ajoute à l'ensemble des structure candidates \mathcal{C} , en l'associant à son cout.

3. **Assemblage du modèle** : Dans cette dernier étape, une sélection d'un ensemble de structures parmi ceux de \mathcal{C} est réaliser, des heuristiques de sélections sont utilisés car le nombre de permutations est très grand ce qui implique des calcules exhaustifs. Les heuristiques permettent d'avoir des résultats approximatives et rapides, parmi les heuristiques utilisés dans VOG on trouve :

- PLAIN : Cette heuristique retourne tout les structures candidates. e.i. $M = \mathcal{C}$.
- TOP-K : Cette heuristique sélectionne les k meilleurs candidats en fonction de leurs gain en bits.
- GREEDY'N FORGET(GNF) : Parcours structure par structure dans l'ensemble \mathcal{C} ordonnés par leurs qualité (gain en bits), ajoute la structure au modèle tant que elle n'augmente pas le cout total de la représentation, sinon l'ignore.

Comme nous l'avons déjà précisé, VOG formule le problème de compression de graphe en tant que problème d'optimisation basé sur la théorie de l'information, l'objectif étant de rechercher les structures qui minimisent la longueur de description globale du graphe. Un élément clé de VoG est la méthode de décomposition utilisée qui peut donner en sortie des sous-graphes ayant des nœuds et/ou des arêtes en commun et dont VoG(Koutra et al., 2015) ne suppose que le premiers cas. En partant de ce constat, les auteurs de (Liu et al., 2015) propose VoG-overlapp, une extension de VoG prenant en compte les chevauchement des structures sous forme d'une étude de l'effet de diverses méthodes de décomposition sur la qualité de la compression, à savoir la méthodes SlushBurn, Louvain, Spectral clustering, Metis et KCBC.

L'idée de base de VoG-overlapp est d'inclure une pénalité pour les chevauchements importants dans la fonction objective ce qui oriente le processus de sélection des structures vers la sortie souhaitée. Elle devient alors :

$$\min L(G, M) = \min \{L(M) + L(E) + \mathbf{L}(\mathbf{O})\}$$

Le principe de calcul de $L(M)$ et $L(E)$ demeurent le même avec O , une matrice cumulant le nombre de fois que chacune des arêtes a été couverte par le modèle. Le cout du codage de la matrice des chevauchement est donné par la formule (4.1).

$$L(O) = \log(|O|) + \|O\| l_1 + \|O\|' l_0 + \sum_{o \in \varepsilon(O)} L_N(|o|) \quad (4.1)$$

Où :

- $|O|$ est le nombre d'arêtes (distinctes) qui se répète dans le modèles M .
- $\|O\|$ et $\|O\|'$ représentent respectivement le nombre des arêtes présentes et manquantes dans O .
- $l_1 = -\log(\frac{\|O\|}{\|O\| + \|O\|'})$, de manière analogique l_0 , sont les longueurs des codes de préfixe optimaux pour les arêtes actuelles et manquantes, respectivement.
- $\varepsilon(O)$ est l'ensemble des entrées non nulles dans la matrice O .

Durant la même année, (Shah et al., 2015) ont proposé une autre variation de VoG, TimeCrunch, pour le cas des graphes simples (sans boucles) non orientés dynamiques représentés par un ensemble de graphes associés chacun à timestamp. En d'autres termes, ils considèrent les graphes $G = \bigcup_{t_i} G_{t_i}(V, E_{t_i})$ $1 \leq i \leq t$ où $G_{t_i} = G$ à l'instant t_i . Un nouveau vocabulaire est proposé pour décrire proprement l'évolution des sous-structures dans le temps. En effet, ils partent du même vocabulaire de structures statiques $\Omega = \{st(etoile), fc(clique), nc(quasi-clique), bc(bipartie), nb(quasi-bipartie), ch(chaine)\}$ dont ils affectent une signature temporelle $\delta \in \Delta$ où : $\Delta = \{o(oneshot), r(ranged), p(periodique), f(flickering), c(constante)\}$.

Comme les éléments du modèle sont modifiés, son cout est alors aussi modifié pour inclure pour chaque structure s non seulement sa connectivité $c(s)$ correspondant aux arêtes des zones induites par s mais aussi sa présence temporelle $u(s)$ correspondant aux timestamps dans lesquels s apparaît dans le graphe G .

$$L(M) = L_N(|M| + 1) + \log\binom{|M| + |\Phi| - 1}{|\Phi| - 1} + \sum_{s \in M} (\log P(v(s)|M) + L(c(s)) + \mathbf{L}(\mathbf{u}(s)))$$

Le cout de l'encodage de la présence temporelle diffère selon ses caractéristiques. Nous présentons dans ce qui suit la formule correspondant à chaque signature.

- **Oneshot** : cette signature décrit les sous-structure qui apparaissent dans un seul timestamp ,i.e $|u(s)| = 1$. Donc le cout de l'encodage se réduit aux nombre de bits nécessaires pour sauvegarder le timestamp : $L(u(s)) = \log(t)$.
- **Ranged** : dans ce cas la sous-structure apparaît dans tous les graphes se trouvant entre deux

timestamps t_1 et t_2 . Le cout englobe le nombre de timestamps dans lesquels elle apparait ainsi que les identifiants des deux timestamp t_{debut} et t_{fin} : $L(u(s)) = L_N(|u(s)|) + \log \binom{t}{2}$.

- **Periodic** : cette catégorie est une extension de la précédente avec les timestamps qui sont éloigné de plus d'un pas d'où : $L(p) = L(r)$.

En effet, la périodicité peut être déduite des marqueurs début et de fin ainsi que du nombre de pas de temps $|u(s)|$, permettant ainsi de reconstruire $u(s)$

- **Flickering** : ce type décrit les structures qui apparaissent dans n timesteps de manière aléatoire. Le cout doit englober donc le nombre de timesteps ainsi que leurs identifiants d'où : $L(u(s)) = L_N(|u(s)|) + \log \binom{t}{|u(s)|}$.
- **Constant** : dans ce cas la sous-structure apparait dans tout les timesteps et donc elle ne dépend pas du temps d'où $L(c)=0$.

Nous notons que décrire $u(s)$ est encore un autre problème de sélection de modèle pour lequel les auteurs tirent parti du principe MDL. En effet juste comme pour le codage de la connectivité, il peut ne pas être précis avec une signature temporelle donnée. Toutefois, toute approximation entraînera des coûts supplémentaires pour l'encodage de l'erreur qui englobent dans ce cas l'erreur de l'encodage de la connectivité ainsi que l'erreur de l'encodage de la signature temporelle.

Algorithm 1 TIMECRUNCH

- 1: **Génération de sous-structure candidate** : Génération de sous-graphe pour chaque G_{t_i} en utilisant un des algorithmes de décomposition de graphe statiques
 - 2: **Étiquetage de sous-structure candidate** : Associer chaque sous-structure à une etiquette $x \in \Omega$ minimisant son MDL.
 - 3: **Assemblage des sous-structures candidates temporelles** : Assembler les sous-structure des graphes G_{t_i} pour former des structures temporelles avec un comportement de connectivité cohérente et étiquetez-les conformément en minimisant le coût de codage de la présence temporelle. Enregistrer le jeu de candidats $C_x \in C$.
 - 4: **Composition du graphe compressé** : Composition du modèle M d'importantes structures temporelles non redondantes qui résument G à l'aide des méthodes heuristiques VANILLA, TOP-10, TOP-100 et STEPWISE. Choisir M associé à l'heuristique qui génère le coût de codage total le plus faible.
-

Une dernière variante a été présenté par Liu et al. (Liu et al., 2018) où ils abordent efficacement trois contraintes principales des méthodes précédentes : (i) leurs dépendance à la méthode d'extraction de motifs (ii) l'incapacité de certaines à gérer les motifs qui se chevauchant (iii) leurs dépendance vis-à-vis de l'ordre dans lequel les structures candidates sont considérées lors de la phase d'assemblage. En effet, pour résoudre le premiers problèmes ils combinent plusieurs méthodes d'extraction de motifs ce qui améliore la qualité des structures candidates en dépit du temps d'exécution. Tant dis que pour répondre à la deuxième contrainte ils utilisent la fonction objective proposée dans

(Liu et al., 2015). Arrivant à la dernière phase de l'algorithme ??, ils proposent quatre nouvelles heuristique : (1) STEP : choisie les K meilleurs structures, (2) STEP-P : partitionne le graphe et affecte chaque motifs à la partition ayant un chevauchement maximal de noeuds avec lui. Ces partition sont parcourue parallelement pour ne prendre que meilleur de toutes les structures dans chacune des partitions, (3) STEP-PA :amélioration de STEP-P en désignant chaque partition du graphe comme étant active, puis si une partition échoue x fois pour trouver une structure qui réduit le coût MDL, cette partition est déclarée inactive et n'est pas visitée dans les prochaines itérations, (4) K-STEP : combinaison des trois premières heuristiques. Ils transforme par la suite chaque motif trouvé en un super-noeud.

Article	Graphe en entrée				Compression		Structure en sortie		Complexité		Graphe de test	Résultat
	Orienté	Non orienté	Statique	Dynamique	Avec perte	Sans perte	Succincte	Structurale	Temporelle	Espaciale		
VoG (Koutra et al., 2015)	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗			ASOregion — 13 milles nœuds — 37 milles liens	71%
VoG-Overlap (Liu et al., 2015)	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗			ASOregion — 13 milles nœuds — 37 milles liens	25%
TimeCrunch (Shah et al., 2015)	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗			Enron — 80 milles nœuds — 288 milles liens	74%
CanDenSe (Liu et al., 2018)	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✓	✓			Enron — 80 milles nœuds — 288 milles liens	78%

TABLE 4.2 – Synthèse des méthodes de compression par extraction de motifs basées sur des méthodes de clustering.

Basée sur les propriétés de la matrice d'adjacence

Les graphes peuvent avoir différentes représentations. Chacune des structures de données présente des avantages et des inconvénients en ce qui concerne la quantité de mémoire nécessaire pour stocker les données et la facilité d'accès aux données. Selon les besoins, il est parfois utile de stocker les données dans des structures de données plus grandes, qui nécessitent plus d'espace mais offrent un accès efficace aux données. En se basant sur ce constat plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour compresser la matrice d'adjacence en exploitant les propriétés des graphes réels pour trouver les motifs les plus fréquents dans cette dernière.

(Asano et al., 2008) ont exploité les propriétés du graphe du web pour présenter une nouvelle méthode de compression (ECWG) sans perte permettant d'extraire les motifs à partir de la matrice d'adjacence. Ils proposent un vocabulaire composé de six types de blocs (Motifs) : un bloc horizontal de 1, un bloc vertical de 1, un bloc diagonal de 1, un rectangle de 1, un bloc de 1 sous forme de L et le singleton 1. Avant de procéder à l'extraction des motifs, la liste d'adjacence du graphe est partitionnée selon les hôtes. Une nouvelle matrice d'adjacence est donc construite pour chaque hôte contenant les liens existants entre ses pages auxquelles les liens inter-hôte sont concaténés. Les blocs B sont détectés par la suite et chacun est représenté par un quadruplet $(i, j, \text{type}(B), \text{dim}(B))$ où i, j représentent les coordonnées du premier élément du bloc dans la matrice d'adjacence de l'hôte, $\text{type}(B)$ représente le type du bloc et $\text{dim}(B)$ représente les dimensions du bloc (omis dans le cas du singleton).

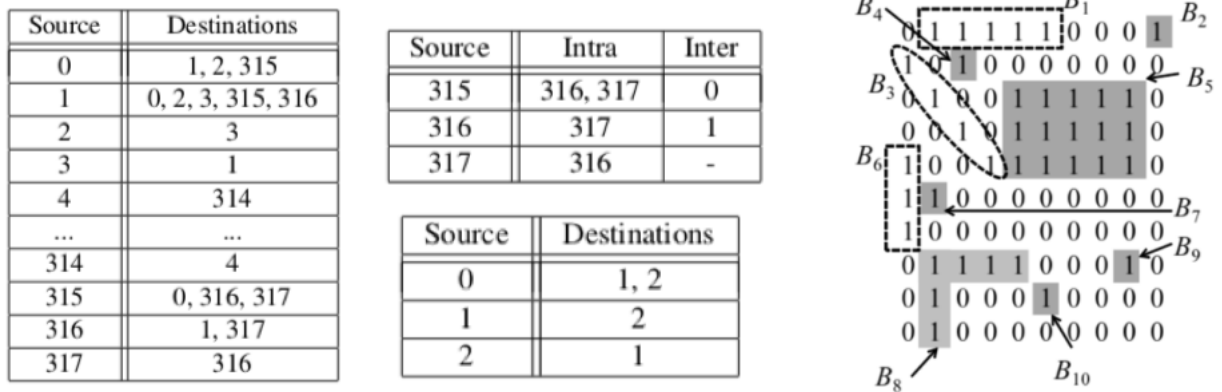


FIGURE 4.1 – Exemple illustrant le principe de fonctionnement (Asano et al., 2008)

Dans une méthode toute récente (GCUPMT), Shah et Rushabh (Shah, 2018) partitionnent les lignes de la matrice d'adjacence en plusieurs blocs ayant la même taille des motifs qui sont dans ce cas sous forme de vecteur prédéfinies. Les blocs sont comparés avec l'ensemble des motifs ce qui entraîne, en cas de correspondance, le remplacement du bloc par un indicateur du motif précédé

par un 1 indiquant ainsi que les bits suivants appartenant à un indicateur de motif. Dans le cas contraire, les données brutes sont stockées directement précédés par un 0.

Article	Graphe en entrée				Compression		Structure en sortie		Complexité		Graphe de test	Résultat
	Orienté	Non orienté	Statique	Dynamique	Avec perte	Sans perte	Succincte	Structurelle	Temporelle	Spaciale		
ECWG (Asano et al., 2008)	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗			uk-2002 — 18 millions de nœuds — 298 millions liens	76.1%
GCUPMT (Shah, 2018)	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗			graphes avec : — 8192 nœuds	70%

TABLE 4.3 – Synthèse des méthode de compression par extraction de motifs basées vocabulaire exploitant les propriétés de la matrice d'adjacence.

4.1.2 Compression basée Agrégation des motifs

Les méthodes de compression par extraction de motifs basées sur l'agrégation sont des méthodes qui agrègent plusieurs nœuds ou liens d'un motif en un seul nœud ou lien, appelés respectivement super-nœud et super-lien. Le graphe en sortie, dit super-graphe, devient dès lors plus simple et moins offrant ainsi une aisance et une facilité de traitement, d'exploration et de visualisation.

Nous présenterons dans ce qui suit les deux sous-classes de cette classe.

Compression basée Agrégation de nœuds

Les techniques de compression basées sur l'agrégation des nœuds des motifs sont des méthodes qui ont existé depuis plusieurs décennies offrant plusieurs avantages. Elles visent à résumer le graphe initial en agrégeant les nœuds des motifs découverts dans le but de diminuer le nombre de nœuds existants et d'offrir une meilleure visibilité et analyse du graphe.

Une première méthode de cette classe s'intitule Subdue (Ketkar et al., 2005). Elle effectue une recherche *Branch&Bound* qui commence à partir de sous-structures composées de tous les sommets avec des étiquettes uniques. Les sous-structures sont prolongées de toutes les manières possibles par un sommet et une arête ou par une arête afin de générer des sous-structures candidates. Subdue conserve les instances de sous-structures et utilise l'isomorphisme de graphe pour déterminer les instances de la sous-structure candidate. Les sous-structures sont ensuite évaluées en fonction de leur compression et de la longueur de description (DL) du jeu de données. Cette procédure se répète jusqu'à ce que toutes les sous-structures soient prises en compte ou que les contraintes imposées par l'utilisateur ne soient plus vérifiées. À la fin de la procédure, Subdue indique les meilleures sous-structures de compression. Le système Subdue fournit également la possibilité d'utiliser la meilleure sous-structure trouvée lors d'une étape de découverte pour compresser le graphe d'entrée en remplaçant ces instances de la sous-structure par un seul sommet et en effectuant le processus de découverte sur le compressé. Cette fonctionnalité génère une description hiérarchique du jeu de données de graphe à différents niveaux d'abstraction en termes de sous-structures découvertes.

(Rossi and Zhou, 2018) partent de l'observation que graphes réels sont formés souvent de nombreuses cliques de grande taille. En utilisant ceci comme base, GraphZip décompose le graphe en un ensemble de grandes cliques, qui est ensuite utilisé pour compresser et représenter le graphe de manière succincte.

Article	Graphe en entrée				Compression		Structure en sortie		Complexité		Graphe de test	Résultat
	Orienté	Non orienté	Statique	Dynamique	Avec perte	Sans perte	Succincte	Structurelle	Temporelle	Spaciale		
Subdue (Ketkar et al., 2005)	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✓			Composante chimique : — 21 étiquettes — 422 transactions	16%
GraphZip (Rossi and Zhou, 2018)	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✓			Web-Google	19%

TABLE 4.4 – Synthèse des méthodes de compression par extraction de motifs basées agrégation de nœuds.

Compression basée agrégation de liens

Les méthodes de compression par extraction de motifs basées agrégation de liens sont parmi les méthode les plus populaires. Leur objectif est de produire un graphe compressé à partir du graphe initial en remplaçant les liens denses du graphe par un nouveau super-nœud ou une nouvelle super-arêtes. Elle se divise selon le principe en deux grandes classes : celles utilisant les règles de grammaire et celles utilisant des méthode de clustering. Nous détaillerons dans ce qui suit ces deux classes et nous conclurons par une synthèse sur les méthodes de chaque classe.

Basées sur les règles de grammaire

La classe des méthodes de compression basées sur les règles de grammaire est une généralisation d'une méthode de compression des dictionnaire s'intitulant Re-pair. Son principe de base consiste en la recherche, à chaque itération, de la paire de symboles la plus fréquente dans une séquence de caractères et à la remplacer par un nouveau symbole, jusqu'à ce qu'il ne soit plus commode de les remplacer. Nous notons que dans ce cas le motif est sous forme de deux arêtes ayant un sommet en commun, nommé *digraph*.

Une première méthode de suivant ce principe a été proposée dans (Claude and Navarro, 2010b) baptisé *Approximate Re-pair*. Dans cette méthode un graphe $G=(V,E)$ est représenté sous forme d'une sequence de caractères T :

$$T=T(G)= \overline{v_1} \ v_{1,1} \ \dots \ v_{1,a} \ \overline{v_2} \ v_{2,1} \ \dots \ v_{2,a_2} \dots \overline{v_n} \ v_{n,1} \ \dots \ v_{n,a_n}$$

où $\overline{v_i}$ représente un indicateur du sommet v_i . Elle procède en trois étapes essentielles expliquer dans l'algorithme 2 . Lorsqu'il n'y a plus de paires à remplacer, Approximate Re-pair s'arrête donnant

Algorithm 2 Approximate Re-pair

- 1: **Calcule des fréquences** : T est parcourue séquentiellement et chaque pair $t_i t_{i+1}$ est ajouté à un tableau de hachage H avec leurs nombre d'occurence.
 - 2: **Recherche des k meilleurs paires** : H est parcourue et les k paires les plus fréquentes sont retenues, en utilisant k pointeurs vers les cellules de H .
 - 3: **Le remplacement simultané** : les k paires identifiés dans l'étape précédente sont simultanément remplacées par un nouveau identifiant et une règle de production est ajoutée.
-

comme résultat un compressé compacte C de la chaine T . Pour finaliser le processus, tous les indicateurs de nœuds $\overline{v_i}$ seront supprimés de C . De plus, l'algorithme crée une table qui contiendra des pointeurs vers le début de la liste d'adjacence de chaque nœud dans C . Grâce à cette table l'algorithme pourra répondre aux requêtes de recherche de successeurs en un temps optimal.

Dans un travail ultérieure (Claude and Navarro, 2010a) , les même auteurs s'intéressent aux requêtes de recherche des nœuds prédécesseurs et successeurs à partir du graphe compressé de

Approximate Re-pair directement. Il proposent alors de combiner leurs méthode avec une représentation basé sur les relations binaires de (Barbay et al., 2006). En effet, ce dernier consiste à représenter les listes d’adjacence à l’aide d’une représentation séquentielle permettant de rechercher les occurrences d’un symbole puis de rechercher les voisins inverses à l’aide de cette primitive.

Claude et Ladra (Claude and Ladra, 2011) partageaient les même préoccupations des auteurs de la méthode précédente et ont proposé comme solution de combiner la méthode Re-pair avec la représentation k2-tree. Ils obtiennent alors une compression de 2,27 (pbe) sur le graphe UK2002, tout en conservant la possibilité d’interroger les voisins entrants et sortants (Maneth and Peternek, 2015).

Une dernière méthode de cette classe s’instituant gRepair a été proposé dans (Maneth and Peternek, 2018). Ce nouveau algorithme de compression détecte de manière récursive des sous-structures répétées et les représente via des règles de grammaire. Des requêtes spécifiques telles que l’accessibilité entre deux nœuds ou des requêtes de chemin normal peuvent ainsi être évaluées en temps linéaire (ou en temps quadratiques, respectivement), sur la grammaire, permettant ainsi des accélérations proportionnelles au taux de compression. la figure xxx presentent le resultat de cette methode sur un exemple.

Article	Graphe en entrée				Compression		Structure en sortie		Complexité		Graphe de test	Résultat (bits/lien)
	Orienté	Non orienté	Statique	Dynamique	Avec perte	Sans perte	Succincte	Structurelle	Temporelle	Spaciale		
Approximate Re-pair (Claude and Navarro, 2010b)	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✗			uk-2002 : — 18 millions de nœuds — 298 millions de liens	4.23
Approximate Re-pair (Claude and Navarro, 2010a)	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✗			uk-2002 : — 18 millions de nœuds — 298 millions de liens	3.98
gRe-pair (Maneth and Peternek, 2018)	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗			NotreDame : — 325 milles de nœuds — 1M de liens	4.84

TABLE 4.5 – Synthèse des méthodes de compression par extraction de motifs basées agrégation de liens en utilisant les règles de grammaire.

Basées sur des méthodes de clustering

Les méthodes de compression appartenant à la classe courante sont des méthodes basées sur la recherche des sous-graphes denses (ayant des nœuds fortement connectés). Ils sont destinées principalement aux graphes du Web et les graphes des réseaux sociaux dans but de faciliter leurs exploration et analyse.

(Buehrer and Chellapilla, 2008) ont exploité l'existence de plusieurs ensembles de pages web qui ont les même liens sortants. S'intitulant VNM pour Virtual Node Miner, leurs approche est basée sur la réduction du nombre de liens en créant des nouveaux sommets virtuels qui sont ajoutés au graphe. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, l'algorithme proposé se compose de deux phases essentielles :

1. Phase de Clustering :

Le but de cette première étape est de contourner la tâche presque impossible d'extraction simultanée de centaines de millions de points de données en groupant d'abord les sommets similaires dans le graphes dans des clusters. Pour cela k fonctions de hachage indépendantes sont utilisées pour obtenir une matrice de taille $V * k$. Par la suite, les lignes de la matrice sont triées lexicographiquement et elle est parcourue colonne par colonne en regroupant les lignes ayant la même valeur. Lorsque le nombre total de lignes chute au-dessous d'un seuil ou que le bord de la matrice de hachage est atteint, les identifiants des sommets associés aux lignes sont renvoyé au processus d'extraction (Phase 02).

2. Phase d'Extraction de Motifs : Le but de cette étape est de localiser des sous-ensembles communs de liens sortants dans les sommets donnés. Ainsi les ensembles plus grands et fréquents présentent un intérêt, car ils peuvent représenter des motifs plus pertinents et une meilleure compression. En effet, les performances de compression d'un motif sont calculés en fonction de sa fréquence dans la liste d'adjacence, et de sa taille qui est le nombre de liens qu'il contient (4.2).

$$Compression(P) = (P.frquence - 1)(P.taille - 1) - 1 \quad (4.2)$$

Afin d'extraire ces motifs, VNM utilise une heuristique gloutonne. Cette heuristique procède comme suit :

- (a) Extraire un histogramme des identifiants de liaison sortante à partir de la liste d'adjacence des sommets données.
- (b) Les listes sont réorganisées dans l'ordre décroissant des fréquences des liens sortants en

éliminant ceux qui apparaissent une seul fois uniquement.

- (c) Chaque lien sortant est ajouté à un arbre de préfixes avec l'ensemble trié de ces extrémités initiales selon leurs identifiants.
- (d) L'arbre est par la suite parcouru afin d'identifier les motifs qui maximisent la formule de performance de la compression 4.2. Ces motifs sont ensuite convertis en nœuds virtuels et les identificateurs de sommet de leurs listes sont supprimés.

L'algorithme est appliqué jusqu'à ce que la réduction n'apporte pas un gain significative. La figure 4.6 illustre le principe de fonctionnement de cette méthode sur un exemple.

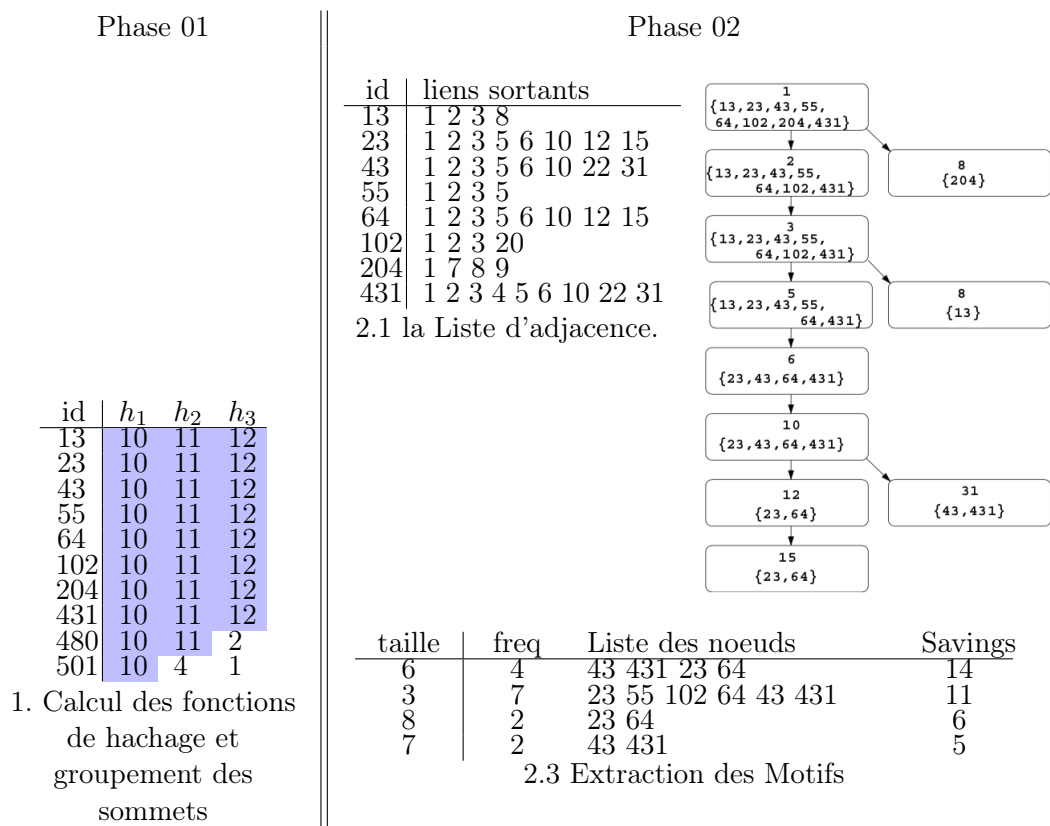


TABLE 4.6 – Exemple d'exécution de VNM

Une variante de VNM a été proposée par Hernandez et Navarro (Hernández and Navarro, 2014). Comme première contribution, ils augmentent les types de structures découvertes dans la phase de clustering pour englober aussi : les cliques, les bi-cliques. L'extraction de motifs cette fois-ci n'est basée sur un parcours des feuilles vers la racine mais l'inverse où l'ensemble des sommets finales des liens du motifs est constitués des étiquettes des nœuds de l'arbre inclus dans le chemin de la racine vers la feuille et les sommets initiales sont la liste des sommets inclus dans le nœud feuille. Leurs deuxième contribution consiste en une hybridation dans le but de représenter le graphe en sortie à

l'aide de structures compactes. Une première approche proposée est d'utiliser les k2-trees (Brisaboa et al., 2009) et qui donnent la représentation la plus compacte. La deuxième hybridation consiste en une nouvelle structure proposée par les auteurs.

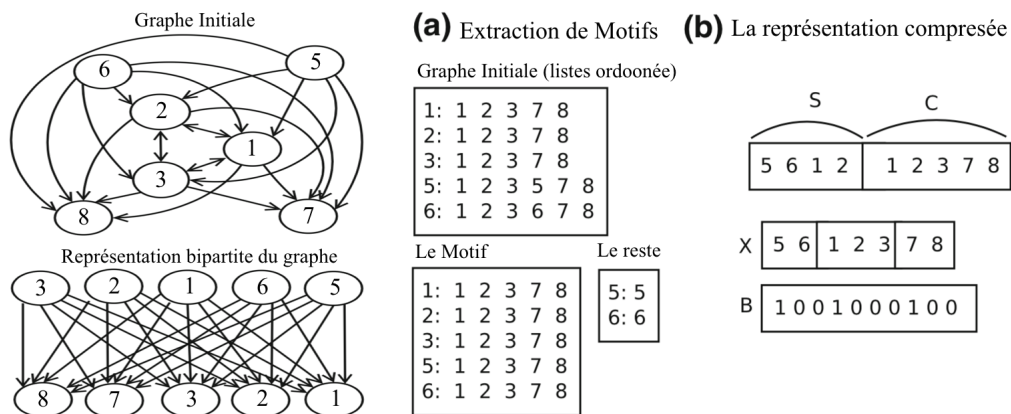


FIGURE 4.2 – Exemple d'exécution de SDM

Article	Graphe en entrée				Compression		Structure en sortie		Complexité		Graphe de test	Résultat (bits/liens)
	Orienté	Non orienté	Statique	Dynamique	Avec perte	Sans perte	Succincte	Structurelle	Temporelle	Spaciale		
VNM (Buehrer and Chellapilla, 2008)	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✓			uk-2002 : — 18 millions de noeuds — 298 millions de liens	1.95
DSM (Hernández and Navarro, 2014)	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✓			uk-2002 : — 18 millions de noeuds — 298 millions de liens	1.53

TABLE 4.7 – Synthèse des méthodes de compression par extraction de motifs basées agrégation de liens en utilisant des heuristiques de clustering.

4.2 Conclusion

Chapitre 5

Les méthodes de compression k2-Trees

Chapitre 6

Conclusion

Bibliographie

- (2012). *Quelques rappels sur la théorie des graphes*. IUT Lyon Informatique.
- Araujo, M., Günnemann, S., Mateos, G., and Faloutsos, C. (2014). Beyond blocks : Hyperbolic community detection. In *Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, pages 50–65. Springer.
- Asano, Y., Miyawaki, Y., and Nishizeki, T. (2008). Efficient compression of web graphs. In *International Computing and Combinatorics Conference*, pages 1–11. Springer.
- Barbay, J., Golynski, A., Munro, J. I., and Rao, S. S. (2006). Adaptive searching in succinctly encoded binary relations and tree-structured documents. In *Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching*, pages 24–35. Springer.
- Blondel, V. D., Guillaume, J.-L., Lambiotte, R., and Lefebvre, E. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of statistical mechanics : theory and experiment*, 2008(10) :P10008.
- Brisaboa, N. R., Ladra, S., and Navarro, G. (2009). k 2-trees for compact web graph representation. In *International Symposium on String Processing and Information Retrieval*, pages 18–30. Springer.
- Buehrer, G. and Chellapilla, K. (2008). A scalable pattern mining approach to web graph compression with communities. In *Proceedings of the 2008 International Conference on Web Search and Data Mining*, pages 95–106. ACM.
- Claude, F. and Ladra, S. (2011). Practical representations for web and social graphs. In *Proceedings of the 20th ACM international conference on Information and knowledge management*, pages 1185–1190. ACM.
- Claude, F. and Navarro, G. (2010a). Extended compact web graph representations. In *Algorithms and Applications*, pages 77–91. Springer.

- Claude, F. and Navarro, G. (2010b). Fast and compact web graph representations. *ACM Transactions on the Web (TWEB)*, 4(4) :16.
- Fages, J.-G. (2014). *Exploitation de structures de graphe en programmation par contraintes*. PhD thesis, Ecole des Mines de Nantes.
- Guillaume, J.-L. and Latapy, M. (2002). The web graph : an overview. In *Actes d'ALGOTEL'02 (Quatrièmes Rencontres Francophones sur les aspects Algorithmiques des Télécommunications)*.
- Hennecart, F., Bretto, A., and Faisant, A. (2012). *Eléments de théorie des graphes*.
- Hernández, C. and Navarro, G. (2014). Compressed representations for web and social graphs. *Knowledge and information systems*, 40(2) :279–313.
- Hespanha, J. P. (2004). An efficient matlab algorithm for graph partitioning. *Santa Barbara, CA, USA : University of California*.
- Jean-Charles Régin, A. M. (2016). *Théorie des graphes*. Technical report.
- Kang, U. and Faloutsos, C. (2011). Beyond 'caveman communities' : Hubs and spokes for graph compression and mining. In *Data Mining (ICDM), 2011 IEEE 11th International Conference on*, pages 300–309. IEEE.
- Karypis, G. and Kumar, V. (2000). Multilevel k-way hypergraph partitioning. *VLSI design*, 11(3) :285–300.
- Ketkar, N. S., Holder, L. B., and Cook, D. J. (2005). Subdue : Compression-based frequent pattern discovery in graph data. In *Proceedings of the 1st international workshop on open source data mining : frequent pattern mining implementations*, pages 71–76. ACM.
- Koutra, D., Kang, U., Vreeken, J., and Faloutsos, C. (2015). Summarizing and understanding large graphs. *Statistical Analysis and Data Mining : The ASA Data Science Journal*, 8(3) :183–202.
- Lehman, E., Leighton, F. T., and Meyer, A. R. (2010). *Mathematics for computer science*. Technical report, Technical report, 2006. Lecture notes.
- Lelewer, D. A. and Hirschberg, D. S. (1987). Data compression. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 19(3) :261–296.
- Lemmouchi, S. (2012). *Etude de la robustesse des graphes sociaux émergents*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I.

- Liu, Y., Safavi, T., Shah, N., and Koutra, D. (2018). Reducing large graphs to small supergraphs : a unified approach. *Social Network Analysis and Mining*, 8(1) :17.
- Liu, Y., Shah, N., and Koutra, D. (2015). An empirical comparison of the summarization power of graph clustering methods. *arXiv preprint arXiv :1511.06820*.
- Lopez, P. (2003). Cours de graphes.
- Maneth, S. and Peternek, F. (2015). A survey on methods and systems for graph compression. *arXiv preprint arXiv :1504.00616*.
- Maneth, S. and Peternek, F. (2018). Grammar-based graph compression. *Information Systems*, 76 :19–45.
- Müller, D. (2012). *Introduction à la théorie des graphes*. Commission romande de mathématique (CRM).
- Parlebas, P. (1972). Centralité et compacité d’un graphe. *Mathématiques et sciences humaines*, 39 :5–26.
- Pellegrini, M., Haynor, D., and Johnson, J. M. (2004). Protein interaction networks. *Expert review of proteomics*, 1(2) :239–249.
- Rigo, M. (2010). *Théorie des graphes*. Université de liège, Faculté des sciences Département de mathématiques.
- Rossi, R. A. and Zhou, R. (2018). Graphzip : a clique-based sparse graph compression method. *Journal of Big Data*, 5(1) :10.
- Roux, P. (2014). *Théorie des graphes*.
- SABLIK, M. (2018). Graphe et langage.
- Sethi, G., Shaw, S., Vinutha, K., and Chakravorty, C. (2014). Data compression techniques. *International Journal of Computer Science and Information Technologies*, 5(4) :5584–6.
- Shah, N., Koutra, D., Zou, T., Gallagher, B., and Faloutsos, C. (2015). Timecrunch : Interpretable dynamic graph summarization. In *Proceedings of the 21th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 1055–1064. ACM.
- Shah, R. J. (2018). Graph compression using pattern matching techniques. *arXiv preprint arXiv :1806.01504*.

- Uthayakumar, J., Vengattaraman, T., and Dhavachelvan, P. (2018). A survey on data compression techniques : From the perspective of data quality, coding schemes, data type and applications. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*.
- Yang, J. and Leskovec, J. (2013). Overlapping community detection at scale : a nonnegative matrix factorization approach. In *Proceedings of the sixth ACM international conference on Web search and data mining*, pages 587–596. ACM.