République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ecole Nationale Supérieure d'Informatique

المدرسة الوطنية العليا للإعلام الآلي
(المعهد الوطني للتكوين في الإعلام الآلي سابقا)
Ecole nationale Supérieure d'Informatique
ex. INI (Institut National de formation en Informatique)

Mémoire

Pour Obtention du diplôme de Master En Informatique

Option : Système Informatique (SIQ)

Compression de Graphes par extraction de motifs et k2-trees : étude et implémentation

Réaliser par :

Mlle. Hafsa Bousbiat
eh_bousbiat@esi.dz
ESI

Mlle. Sana Ihadadene
es_ihadadene@esi.dz
ESI

Encadreurs :

Dr. Karima Amrouche
k_amrouche@esi.dz
ESI

Dr. Hamida Seba
hamida.seba@univ-lyon1.fr
Université de Lyon

Dr. Mohammed Haddad
mail
Université de Lyon

Octobre 2018

Année Universitaire : 2018-2019

Remerciement

Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae ? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad ! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore ? Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae ? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad ! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore ? Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae ? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad ! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore ?

Résumé

Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae ? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad ! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore ? Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae ? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad ! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque exceptu

Abstract

Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae ? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad ! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque excepturi ducimus accusantium eius voluptatibus, quod velit, explicabo tenetur aliquid ipsam sapiente. Quibusdam quis ullam, saepe numquam molestias nobis recusandae labore ? Lorem ipsum dolor sit, amet consectetur adipisicing elit. Nostrum tempore ea fugiat numquam autem saepe quas porro vitae ? Fugit commodi tempore voluptate sint fugiat, possimus optio ad ! Pariatur, obcaecati quidem. Lorem ipsum dolor, sit amet consectetur adipisicing elit. Neque exceptu

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Théorie des graphes

Pour faciliter la compréhension d'un problème, nous avons tendance à le dessiner ce qui nous amène parfois même à le résoudre, la théorie des graphes est fondée, à l'origine sur ce principe, de nombreuses propriétés et méthodes ont été pensées ou trouvées à partir d'une représentation schématique pour être ensuite formalisées et prouvées.
La théorie des graphes est historiquement un domaine mathématique qui s'est développé au cours des années au sein des autres disciplines comme la chimie, la biologie, la sociologie et l'industrie. Elle constitue aujourd'hui un corpus de connaissance très important et un instrument efficace pour résoudre une multitude de problèmes.
De manière général le graphe sert à représenter les structures, les connexions entre différents composants, les acheminements possible pour un ensemble complexe composé d'un grand nombre de situations, en exprimant les dépendances et les relations entre ses éléments,(e.g. réseau routier ou ferroviaire, réseau de communication,diagramme d'ordonnancement, ..).
Dans ce chapitre nous introduisons les définitions et notions de base relatives aux graphes que nous utiliserons par la suite.

1.1 Graphe non orienté

1.1.1 Définitions et généralités

Un graph non orienté G est la donnée d'un couple (V , E) où V = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets ou nœuds (Vertices en anglais) et E={ $e_1, e_2, \ldots, e_m$ } est un ensemble fini d'arêtes (Edges en anglais). Toute arête e de E correspond à un couple non ordonné de sommets { v_i, v_j } $\in$ E $\subset V \times V$ représentants ses extrémités (Müller, 2012) (Fages, 2014).

Soient $e = (v_i, v_j)$ et e'=(v_k, v_l) deux arêtes de E, On dit que :

- v_i et v_j sont les extrémités de e et e est incident en v_i et en v_j (Hennecart et al., 2012).
- v_i et v_j sont voisins ou adjacents, car il y'a au moins une arête entre eux dans E (IUT, 2012).
- L'ensemble des sommets adjacents au sommet e est appelé le voisinage de e (Müller, 2012).
- e et e' sont voisins si ils ont une extrémité commune , i.e. : $v_i = v_k$ par exemple (Lopez, 2003).
- L'arête e est une boucle si ses extrémités coïncident, i.e. : $v_i = v_j$ (IUT, 2012).
- L'arête e est multiple si elle a plus d'une seule occurrence dans l'ensemble E.

1.1.2 Représentation graphique

Un graph non orienté G peut être représenter par un dessin sur un plan comme suit (Müller, 2012) :

- Les nœuds de G : $v_i \in$ V sont représenter par des points distincts.
- Les arêtes de G : $e = (v_i, v_i) \in$ E sont représenter par des lignes pas forcement rectilignes qui relient les extrémités de chaque arête e.

Exemple : Soit g=(V1 , E1) un graphe non orienté tel que : V1={ 1,2,3,5 } et E={ (1,2), (1,4), (2,2), (2,3) ,(2,5) ,(3,4) }. La représentation graphique de g est alors donnée par le schéma de la figure 1.1.

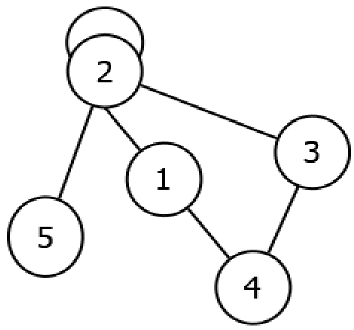

FIGURE 1.1 – Exemple de représentation graphique d'un graphe non orienté

1.1.3 Propriété d'un graphe

Ordre d'un graphe : On appel ordre d'un graphe le nombre de ses sommets.i.e. Card(V) (Roux, 2014).

Taille d'un graphe : On appel taille d'un graphe le nombre de ses arêtes.i.e. Card(E) (Roux, 2014).

Degré d'un graphe :

Degré d'un sommet : Le degré d'un sommet noté $d(v_i)$ est le nombre d'arêtes incidents a ce sommet, sachant qu'une boucle compte pour 2 (Müller, 2012) . Dans l'exemple de la figure 1.1, le degré du sommet (1) est : $d(1)$=2.

Degré d'un graphe : Le degré d'un graphe est le degré maximum de ses sommets. e.i. c'est max($d(v_i)$) (Müller, 2012). Dans l'exemple de la figure 1.1, le degré du graphe est $d(2)$=5.

Rayon et diamétre d'un graphe :

Distance : La distance entre deux sommets v et u est le plus petit nombre d'arêtes qu'on doit parcourir pour aller de v a u ou de u a v (Müller, 2012).

Diamètre d'un graphe : C'est la plus grande distance entre deux sommets de ce graphe (Müller, 2012).

Rayon d'un graph : C'est la plus pette distance entre deux sommets de ce graphe (Parlebas, 1972).

1.2 Graphe orienté

1.2.1 Définitions et généralités

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple (V , E) où V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les sommets de G et E $\subset$ V x V est un ensemble de couples ordonnés de sommets dits arcs ou arêtes (Müller, 2012). G est appelé dans ce cas digraphe (directed graphe).

Pour tout arc e = (v_i , v_j) $\in$ E :

- v_i est dit extrémité initiale ou origine de e et v_j est l'extrémité finale de e (Müller, 2012).
- v_i est le prédécesseur de v_j et v_j est le successeur de v_i (IUT, 2012).
- les sommets v_i , v_j sont des sommets adjacents (Jean-Charles Régin, 2016).
- e est dit sortant en v_i et incident en v_j (Jean-Charles Régin, 2016).
- e est appelé boucle si $v_i = v_j$, i.e l'extrémité initiale et finale représente le même sommet (IUT, 2012).

1.2.2 Représentation graphique

Un graphe G = (V , E) peut être projeter sur le plan en représentant :

- dans un premier temps les nœuds $v_i \in$ V par des points disjoints du plan.
- et dans un second temps les arêtes e = (v_i , v_j) $\in$ E par des lignes orientées reliant par des flèches les deux extrémités de e.

Exemple :

Soit g = (V_1 , E_1) un digraphe tel que : V_1 = { 1,2,3,4 } et E_1 = {(1,2),(1,3),(3,2),(3,4),(4,3)}.

Le représentation graphique de g est alors donnée par le schéma de la figure ci-dessous.

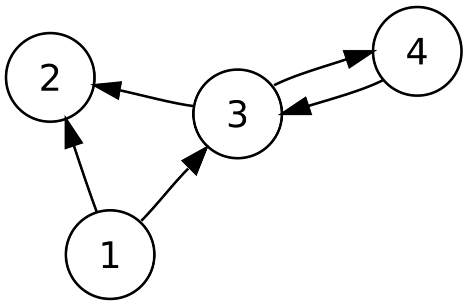

FIGURE 1.2 – Exemple de représentation graphique d'un digraphe.

1.2.3 Quelques Propriétés :

Ordre d'un digraphe : est le nombre de sommets n = Card(V) (Roux, 2014).

taille d'un digraphe : est le nombre d'arcs m = Card(A) (Roux, 2014).

Degré dans un digraphe :

Le degré d'un sommet $v_i \in$ V dans un digraphe G = (V , E) est donnée par la formule :

$$\mathrm{d}(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i$$

où $d^+(v_i)$ est le nombre d'arcs sortants au sommet v_i et est appelé degré extérieure et $d^-(v_i)$ représente le nombre d'arcs incidents et est appelé degré intérieur (Müller, 2012).

Voisinage dans un digraphe :

Le voisinage d'un sommet $v_i \in$ V, noté V(v_i), dans un digraphe G = (V , E) est :

$$\mathrm{V}(v_i) = \mathrm{succ}(v_i) \bigcup \mathrm{pred}(v_i),$$

avec succ(v_i) qui est l'ensemble des successeurs de v_i et pred(v_i) qui l'ensemble de ses prédécesseurs (Rigo, 2010), i.e le voisinage de v_i est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents.

1.3 Quelques types de graphe

Avec les avancées technologique au fil du temps, plusieurs types de graphes ont connus le jours. En effet, La complexité et la variété des problèmes scientifiques existants modélisés par ces derniers ont poussé les chercheurs à adapter leurs structure selon le problème auquel ils font face. Durant cette section nous allons définir les principaux types existants.

- **Graphe Complet :** Un graphe G = (V , E) est un graphe complet si tous les sommets $v_i \in$ V sont adjacents (Jean-Charles Régin, 2016). Il est souvent noté K_n où n = card(V) (Roux, 2014).
- **Graphe étiqueté et graphe pondéré :** Un graphe étiqueté G = (V , E , W) est un graphe, qui peut être orienté ou non orienté, dont chacune des arêtes $e_i \in$ E est doté d'une étiquette w_i. Si de plus, w_i est un nombre alors G est dit graphe pondéré (valué) (Roux, 2014).
- **Graphe simple et graphe multiple :** Un graphe G = (V , E) est dit simple si il ne contient pas de boucles et tout pair de sommet est reliée par au plus une arête. Dans le cas contraire, G est dit multiple (IUT, 2012).
- **Graphe connexe :** Un graphe non orienté (resp. orienté) est dit connexe (resp. fortement connexe) si pour tout pair de sommets (v_i, v_j) il existe un chemin S les reliant (Müller, 2012).

1.4 Graphe partiel et sous graphe :

La quantité de donnée disponible aujourd'hui et sa croissance de manière exponentiel ont favorisé la décomposition des graphes en des entités plus petites afin de garantir une facilité de compréhension et d'analyse dans le but d'extraire l'information la plus pertinente. Dans cette partie nous allons définir de manière plus formelle ce que ces entités sont ainsi que leurs types.

1.4.1 Définitions :

Soient G = (V , E), G' = (V' , E') et G" = (V" , E") trois graphes.

- Le graphe G' est appelé graphe partiel de G si : V' = V et E' $\subset$ E (Roux, 2014). En d'autres termes, un graphe partiel est obtenu en supprimant une ou plusieurs arêtes de G.
- Le graphe G" est dit sous-graphe de G si : V" $\subset$ V et E"$\subset$ E $\cap$ (V" x V") (Rigo, 2010), i.e un graphe partiel est obtenu en enlevant un ou plusieurs nœuds du graphe initial ainsi que les arêtes dont ils représentent l'une des deux extrémités.

1.4.2 Quelques Types de sous graphes :

- **Une Clique :** est un sous graphe complet de G (Rigo, 2010).
- **Bipartie :** G' est un sous graphe bipartie si : V' = $V_1 \cup V_2$, tel que $V_1 \cap V_2 = \phi$, et E' = V_1 x V_2 (Rigo, 2010).
- **Étoile :** est un cas particulier de sous graphe bipartie ou X est un ensemble contenant le sommet central uniquement et Y contient le reste des nœuds (Koutra et al., 2015) .
- **Chemin (resp. Chaine) :** est une liste de sommets S= $(v_0, v_1, v_2, ..., v_k)$ telle qu'il existe un arc (resp. une arête) entre chaque couple de sommets successifs.
- **Cycle (resp. Circuit) :** est un chemin (resp. chaine) dont le premier et le dernier sommet sont identiques (Roux, 2014).

1.5 Représentation Structurelle d'un graphe

Bien que la représentation graphique soit un moyen pratique pour définir un graphe, elle n'est clairement pas adaptée ni au stockage du graphe dans une mémoire, ni à son traitement. Pour cela plusieurs structures de donnés ont été utilisés pour représenter un graphe, ces structures varient selon l'usage du graphe et la nature des traitements appliquer. Nous allons présenter dans cette partie les structures les plus utilisés.

Soit un graphe G(V,E) d'ordre n et de taille m dont les sommets v_1, v_2,..., v_n et les arêtes (ou arcs) v_1, v_2,..., v_m sont ordonnés de 1 à n et de 1 à m respectivement.

1.5.1 Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence de G est une matrice booléenne carré d'ordre n : $(m_{ij})_{(i,j)\in[0;n]^2}$, dont les lignes (i) et les colons (j) représentent les sommets de G, où les entrés (ij) prenent une valeur de "1" s'il existe un arc (une aréte dans le cas d'un graph non orienté) allant du sommet i au sommet j et un "0" sinon, e.i (Lehman et al., 2010) (SABLIK, 2018) (IUT, 2012) :

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 \quad si \quad (v_i, v_i) \in E \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice est symétrique par rapport a la diagonale descendante de gauche à droite . e.i. $m_{ij} = m_{ji}$, dans ce cas le graphe peut être représenter avec la composante triangulaire supérieure de la matrice d'adjacence (Müller, 2012).

Note :

- Cette représentation est valide pour le cas d'un graphe non orienté et orienté.
- Dans le cas d(un graphe pondéré, les "1" sont remplacés par les poids des arêtes (ou arcs) (Lopez, 2003).
- Ce mode de représentation engendre des matrices très creuses (comprenant beaucoup de zero) (Hennecart et al., 2012).

Exemple : La figure 1.4 représente un exemple de matrice d'adjacence pour le graphe G ci-contre (figure 1.3) :

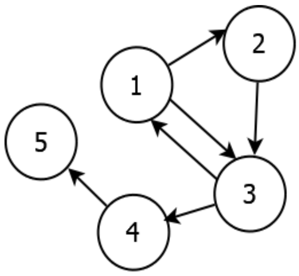

Figure 1.3 – Graphe orientée G

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 1.4 – Matrice d'adjacence du graphe G

Place occupé en mémoire : n^2 pour un graphe d'ordre n (Lopez, 2003).

1.5.2 Matrice d'incidence

La matrice d'incidence d'un graphe orienté G est une matrice de taille $n \times m$, dont les lignes représentent les sommets (i $\in$ V) et les colons représentent les arcs (j $\in$ E) et dont les coefficients (m_{ij}) sont dans {-1, 0, 1}, tel que (Hennecart et al., 2012) (SABLIK, 2018) :

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & si \text{ le sommet i est l'extrémité final de l'arc j} \\ -1 & si \text{ le sommets i est l'extrémité initial de l'arc j} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Pour un graphe non orienté, la coefficients (m_{ij}) de la matrice sont dans {0, 1}, tel que (Hennecart et al., 2012) :

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & si \text{ le sommet i est une extrémité de l'arête j} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exemple : La figure 1.6 représente un exemple de matrice d'incidence pour le graphe G ci-contre (figure 1.5) :

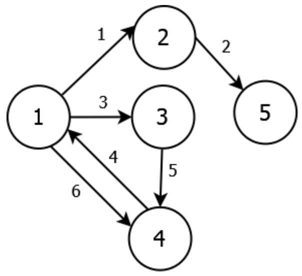

FIGURE 1.5 – Graphe orientée G

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 1.6 – Matrice d'incidence du graphe G

Place occupé en mémoire : $n \times m$

1.5.3 Liste d'adjacence

La liste d'adjacence d'un graphe G est un tableau de n listes, où chaque entrée (i) du tableau correspond a un sommet et comporte la liste T[i] des successeurs (ou prédécesseur) de ce sommet, c'est à dire tous les sommets j tel que (i,j) $\in$ E (SABLIK, 2018).

Dans le cas d'un graphe non orienté on aura : j $\in$ la liste T[i] $\iff$ i $\in$ la liste T[j] (IUT, 2012).

Exemple : La figure 1.8 représente un exemple de matrice d'incidence pour le graphe G ci-contre (figure 1.7) :

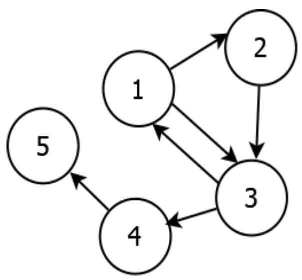

FIGURE 1.7 – Graphe orientée G

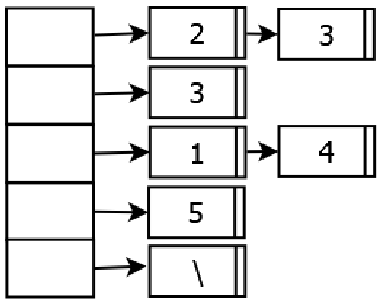

FIGURE 1.8 – Liste d'adjacence du graphe G

Place occupé en mémoire : Dans le cas orienté l'espace est de n + m. Dans le cas non orienté, l'espace est de n + 2m car une arête est représenté deux fois.

1.6 Les domaines d'application

La diversité des domaines faisant appel à la modélisation par des graphes ne cesse d'augmenter, allant des réseaux sociaux aux réseaux électriques et réseaux biologiques et arrivant jusqu'aux World Wide Web. Dans cette partie nous allons décrire trois domaines d'application les plus répandus des graphes.

1.6.1 Graphes des réseaux sociaux :

Les réseaux sociaux représentent un lieu d'échange et de rencontre entre individus (entités) et dont l'utilisation est devenue de nos jours une nécessité. Pour représenter les interactions entre ces individus, nous avons généralement besoin de faire recours aux graphes où les sommets sont des individus ou des entités et les interactions entre eux sont représenté par des liens. Vue la diversité des interactions sociales, la modélisation de ces réseaux nécessite différents types de graphes : graphes non orientés pour pour les réseaux sociaux avec des relations non orientées, graphes orientés pour représenter des relations non symétriques comme c'est la cas dans les réseaux de confiance, graphes pondérés pour les réseaux sociaux qui contiennent différents niveaux d'intensités dans les relations, ... etc (Lemmouchi, 2012).

1.6.2 Graphes en Bioinformatique :

La bio-informatique est un domaine qui se trouve à l'intersection des deux grands domaines celui de l'informatique et celui de la biologie. Elle a pour but d'exploiter la puissance de calcule des équipements informatiques pour effectuer des traitements sur des données moléculaires massives (Pellegrini et al., 2004).

Elle est largement utilisée pour l'analyse des séquences d'ADN et des protéines à travers leurs modélisation sous forme de graphe. A titre d'exemple, les graphes non orientés multiples sont un outil modélisation des réseaux d'interaction protéine-protéine (Pellegrini et al., 2004), le but dans ce cas est donc l'étude du fonctionnement des protéines par rapport à d'autre.

1.6.3 Le Graphe du web :

Le graphe du Web est un graphe orienté dont les sommets sont les pages du web et les arêtes modélise l'existence d'un lien hypertexte dans une page vers une autre (Brisaboa et al., 2009). Il représente l'un des graphes les plus volumineux : en juillet 2000 déja, on estimait qu'il contenait environ 2,1 milliards de sommets et 15 milliards d'arêtes avec 7,3 millions de pages ajoutées chaque jour (Guillaume and Latapy, 2002). De ce fait, ce graphe a toujours attiré l'attention des chercheurs. En effet, l'étude de ses caractéristiques a donné naissance à plusieurs algorithmes intéressants, notamment l'algorithme PageRank de classement des pages web qui se trouve derrière le moteur de recherche le plus connu de nos jours : Google.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenter les notions et les concepts généraux qui touchent a la théorie de graphes : définitions de graphes, leurs principales propriétés, leurs représentations et leurs domaines d'application.
Le point important qu'on a put tirer de cette partie est que les graphes sont devenue un moyen crucial et indispensable dans la modélisation des problèmes dans plusieurs domaines. Cependant ils devient de plus en plus complexe et volumineux suit a la grande quantités de données, ce qui rend leurs stockage, visualisation et traitement difficile. La compression de graphe est nait comme solution a ce problème. Dans le chapitre suivant nous allons présenter la compression de graphe, son rôle et ses différents méthodes.

Chapitre 2

Compression de graphe

2.1 Compression de données :

2.2 Compression appliquée aux graphes :

2.2.1 Motivations derrière la compression de graphes

2.2.2 Les types de compression :

2.2.3 Les métriques d'évaluation des algorithmes de compression :

2.2.4 Classification des méthodes de compression :

2.3 Conclusion

Chapitre 3

chapitre 03 : etude empirique

Definition 3.0.1. Here is a new definition

Deuxième partie

Conclusion

Random citation (Seo et al., 2018) embeddeed in text.

Random citation (Brisaboa et al., 2009) embeddeed in text.

Bibliographie

(2012). *Quelques rappels sur la théorie des graphes.* IUT Lyon Informatique.

Brisaboa, N. R., Ladra, S., and Navarro, G. (2009). k 2-trees for compact web graph representation. In *International Symposium on String Processing and Information Retrieval*, pages 18–30. Springer.

Fages, J.-G. (2014). *Exploitation de structures de graphe en programmation par contraintes.* PhD thesis, Ecole des Mines de Nantes.

Guillaume, J.-L. and Latapy, M. (2002). The web graph : an overview. In *Actes d'ALGOTEL'02 (Quatrièmes Rencontres Francophones sur les aspects Algorithmiques des Télécommunications).*

Hennecart, F., Bretto, A., and Faisant, A. (2012). Eléments de théorie des graphes.

Jean-Charles Régin, A. M. (2016). Théorie des graphes. Technical report.

Koutra, D., Kang, U., Vreeken, J., and Faloutsos, C. (2015). Summarizing and understanding large graphs. *Statistical Analysis and Data Mining : The ASA Data Science Journal*, 8(3) :183–202.

Lehman, E., Leighton, F. T., and Meyer, A. R. (2010). Mathematics for computer science. Technical report, Technical report, 2006. Lecture notes.

Lemmouchi, S. (2012). *Etude de la robustesse des graphes sociaux émergents.* PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I.

Lopez, P. (2003). Cours de graphes.

Müller, D. (2012). *Introduction à la théorie des graphes.* Commission romande de mathématique (CRM).

Parlebas, P. (1972). Centralité et compacité d'un graphe. *Mathematiques et sciences humaines*, 39 :5–26.

Pellegrini, M., Haynor, D., and Johnson, J. M. (2004). Protein interaction networks. *Expert review of proteomics*, 1(2) :239–249.

Rigo, M. (2010). *Théorie des graphesorie des graphes.* Université de liège, Faculté des sciences Département de mathématiques.

Roux, P. (2014). *Théorie des graphes.*

SABLIK, M. (2018). Graphe et langage.

Seo, H., Park, K., Han, Y., Kim, H., Umair, M., Khan, K. U., and Lee, Y.-K. (2018). An effective graph summarization and compression technique for a large-scaled graph. *The Journal of Supercomputing*, pages 1–15.