

BÁO CÁO 1 - NHÓM D

Contents

BÁO CÁO 1	2
Kiểm tra $Y_i \sim B(m_i, p_i)$ có thuộc họ phân phối mũ phân tán	2
Xác định hàm liên kết chính tắc, hàm liên kết không chính tắc	4
THAM KHẢO	5

BÁO CÁO 1

Kiểm tra $Y_i \sim B(m_i, p_i)$ có thuộc họ phân phối mũ phân tán

Ta có hàm phân phối nhị thức:

$$f_Y(y_i) = C_{m_i}^{y_i} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{m_i - y_i}$$

Lấy log 2 vế, ta được:

$$\log[f_Y(y_i)] = \log(C_{m_i}^{y_i}) + y_i \log(p_i) + (m_i - y_i) \log(1 - p_i)$$

Đưa về dạng lũy thừa, ta được:

$$f_Y(y_i) = \exp\{\log(C_{m_i}^{y_i}) + y_i \log(p_i) + (m_i - y_i) \log(1 - p_i)\}$$

$$f_Y(y_i) = \exp\{\log(C_{m_i}^{y_i}) + y_i \log(p_i) + m_i \log(1 - p_i) - y_i \log(1 - p_i)\}$$

$$f_Y(y_i) = \exp\{\log(C_{m_i}^{y_i}) + y_i [\log(p_i) - \log(1 - p_i)] + m_i \log(1 - p_i)\}$$

$$f_Y(y_i) = \exp\{y_i \log\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right) + m_i \log(1 - p_i) + \log(C_{m_i}^{y_i})\} \quad (*)$$

Đặt:

$$\theta_i = \log\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow e^{\theta_i} = \frac{p_i}{1 - p_i}$$

$$\Leftrightarrow p_i = (1 - p_i) e^{\theta_i}$$

$$\Leftrightarrow p_i (1 + e^{\theta_i}) = e^{\theta_i}$$

$$\Leftrightarrow p_i = \frac{e^{\theta_i}}{1 + e^{\theta_i}} \quad (1.1)$$

Với:

$$p_i = \frac{e^{\theta_i}}{1 + e^{\theta_i}}$$

$$\Rightarrow 1 - p_i = 1 - \frac{e^{\theta_i}}{1 + e^{\theta_i}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - p_i = \frac{1 + e^{\theta_i} - e^{\theta_i}}{1 + e^{\theta_i}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - p_i = (1 + e^{\theta_i})^{-1}$$

$$1 - p_i = (1 + e^{\theta_i})^{-1} \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow m_i \log(1 - p_i) = m_i \log(1 + e^{\theta_i})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow m_i \log(1 - p_i) = -m_i \log(1 + e^{\theta_i}) \quad (2)$$

Thế (1), (2) vào (*). Ta được:

$$f_Y(y_i | \theta_i) = \exp\{y_i \theta_i - m_i \log(1 + e^{\theta_i}) + \log(C_{y_i}^{m_i})\}$$

$$\Leftrightarrow f_Y(y_i | \theta_i, \phi) = \exp\left\{\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi)\right\}$$

Với:

$$\theta_i = \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)$$

$$b(\theta_i) = m_i \log(1 + e^{\theta_i})$$

$$a(\phi) = 1$$

$$c(y_i, \phi) = \log(C_{y_i}^{m_i})$$

Vậy $Y_i \sim B(m_i, p_i)$ thuộc họ phân phối mũ phân tán

Xác định hàm liên kết chính tắc, hàm liên kết không chính tắc

Ta có:

$$f_Y(y_i|\theta_i, \phi) = \exp\{y_i\theta_i - m_i \log(1 + e^{\theta_i}) + \log(C_{y_i}^{m_i})\}$$

Với:

$$\theta_i = \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)$$

$$b(\theta_i) = m_i \log(1 + e^{\theta_i})$$

$$a(\phi) = 1$$

$$c(y_i, \phi) = \log(C_{y_i}^{m_i})$$

Tính kỳ vọng của Y:

$$\begin{aligned} E[y_i] &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} b(\theta_i) \\ &\Leftrightarrow E[y_i] = \frac{\partial}{\partial \theta_i} m_i \log(1 + e^{\theta_i}) \\ &\Leftrightarrow E[y_i] = m_i \frac{e^{\theta_i}}{1 + e^{\theta_i}} \\ &\Leftrightarrow E[y_i] = m_i p_i \quad (\text{Do 1.1}) \end{aligned} \tag{3}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \mu_i &= E[y_i] \\ &\Leftrightarrow \mu_i = m_i p_i \quad (\text{Do 3}) \\ &\Leftrightarrow p_i = \frac{\mu_i}{m_i} \end{aligned}$$

Mà:

$$\begin{aligned} \theta_i &= \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \\ &\Leftrightarrow \theta_i = \log\left(\frac{\frac{\mu_i}{m_i}}{1 - \frac{\mu_i}{m_i}}\right) \end{aligned}$$

Vậy hàm liên kết chính tắc là $\theta_i = \log\left(\frac{\frac{\mu_i}{m_i}}{1 - \frac{\mu_i}{m_i}}\right)$

Vậy hàm liên kết là $\eta_i = \log\left(\frac{\mu_i}{1 - \mu_i}\right) = \log\left(\frac{m_i p_i}{1 - m_i p_i}\right)$

THAM KHẢO

- https://www.youtube.com/watch?v=7mNrsFr7P_A&si=3CSLdQa-Sg4aeKwj
- <https://www.youtube.com/watch?v=MfynxwNqgfU>