# 第二节 向量及其线性运算

一 向量的基本概念

二 向量的线性运算

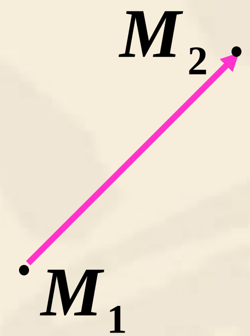
三 向量共线共面的充要条件

四 空间坐标系与向量的坐标

## 第一节作业：

**1，3，8，11，13，14，18**

# 一、向量的基本概念




**向量：** 既有大小又有方向的量.

**向量表示：** $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$

以$M_1$为起点，$M_2$为终点的有向线段.

**向量的模：** 向量的大小. $\|\vec{a}\|$ 或 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$

**单位向量：** 模长为1的向量. $\overrightarrow{a^0}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}^0$

**零向量：** 模长为0的向量. $\vec{0}$

**自由向量**：不考虑起点位置的向量.

**相等向量**：大小相等且方向相同的向量.

$\vec{a}\longrightarrow \quad \vec{b}\longrightarrow$

**负向量**：大小相等但方向相反的向量.

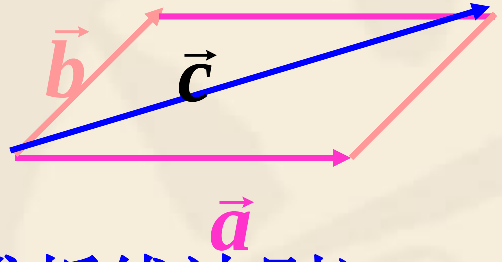
$-\vec{a}\longleftarrow \quad \longrightarrow\vec{a} \qquad -\vec{a}$

**向量的共线或平行**：如果两非零向量的方向相同或相反，则称两向量共线或平行

**向量的正交或垂直**：如果两非零向量的方向互相垂直，则称两向量正交或垂直

# 二、向量的线性运算

1、加法：　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$




平行四边形法则(三角形法则或折线法则）

**向量的加法符合下列运算规律：**

（1）交换律：　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

（2）结合律：　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$

（3）　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

（4）　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

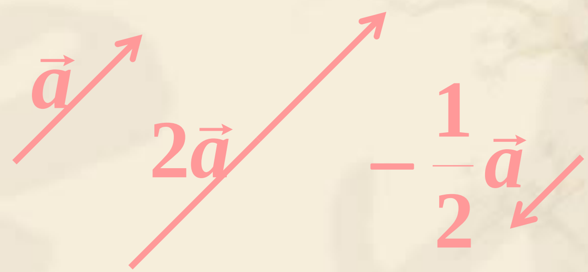
# 2、数乘向量

设$\lambda$是一个数，向量$\vec{a}$与$\lambda$的乘积$\lambda\vec{a}$规定为

(1) $\lambda > 0$,　$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向, $\|\lambda\vec{a}\| = \lambda\|\vec{a}\|$

(2) $\lambda = 0$,　$\lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0$,　$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向, $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$




减法　$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

数与向量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

设$\vec{a}^0$表示与非零向量$\vec{a}$同方向的单位向量，

则 $\vec{a}=\|\vec{a}\|\vec{a}^0 \Longrightarrow \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\vec{a}^0.$

上式表明：一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

向量的加法与数乘向量的运算统称为向量的线性运算.

# 三、向量共线、共面的充要条件

**定理3.1.1** 两个向量 $\vec{a}$与 $\vec{b}$共线 的充要条件是存在不全为零的常数$k_1$和$k_2$使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$$

**推论3.1.1**

在一条直线上取定一个非零向量 $\vec{e}_1$,则该直线上任一向量$\vec{a}$必可由$\vec{e}_1$惟一地表示为$\vec{a}=x\vec{e}_1$，其中$x$为一个常数.

**定理3.1.2** 三个向量$\vec{a},\vec{b}$，$\vec{c}$共面的充要条件是存在不全为零的常数$k_1$，$k_2$和$k_3$使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$$

**推论3.1.2** 在一个平面内取定两个不共线的向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2$，则该平面上任一向量$\vec{a}$都可由$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$惟一地表示为

$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$，其中$x,y$为常数.

**定理3.1.3**

设$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$是空间中不共面的三个向量，则空间中任一向量$\vec{a}$都可由$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$惟一地表示为

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3,$$

其中$x,y,z$为常数.

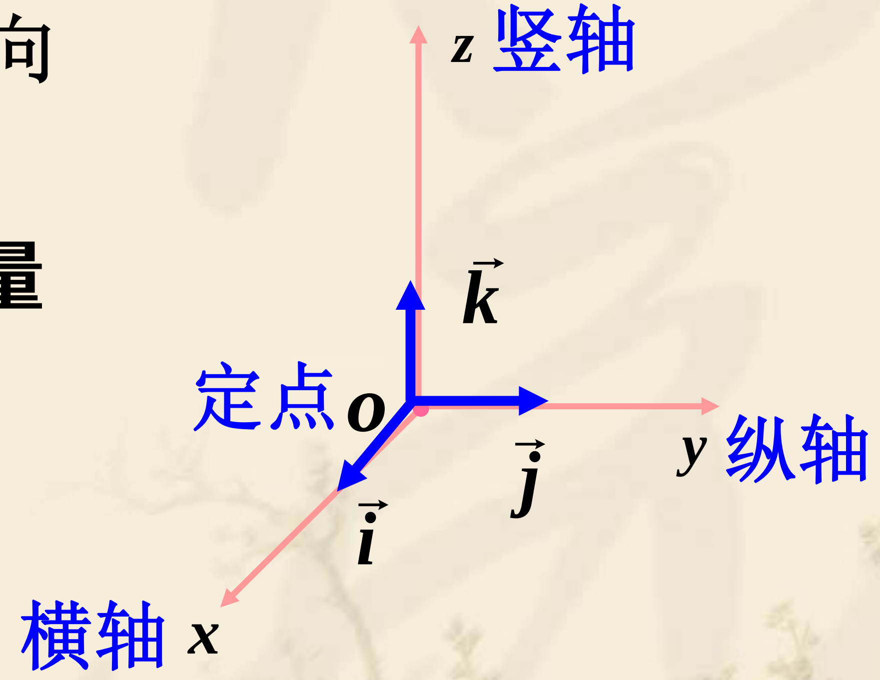
# 四、空间直角坐标系与向量的坐标

1、空间直角坐标系

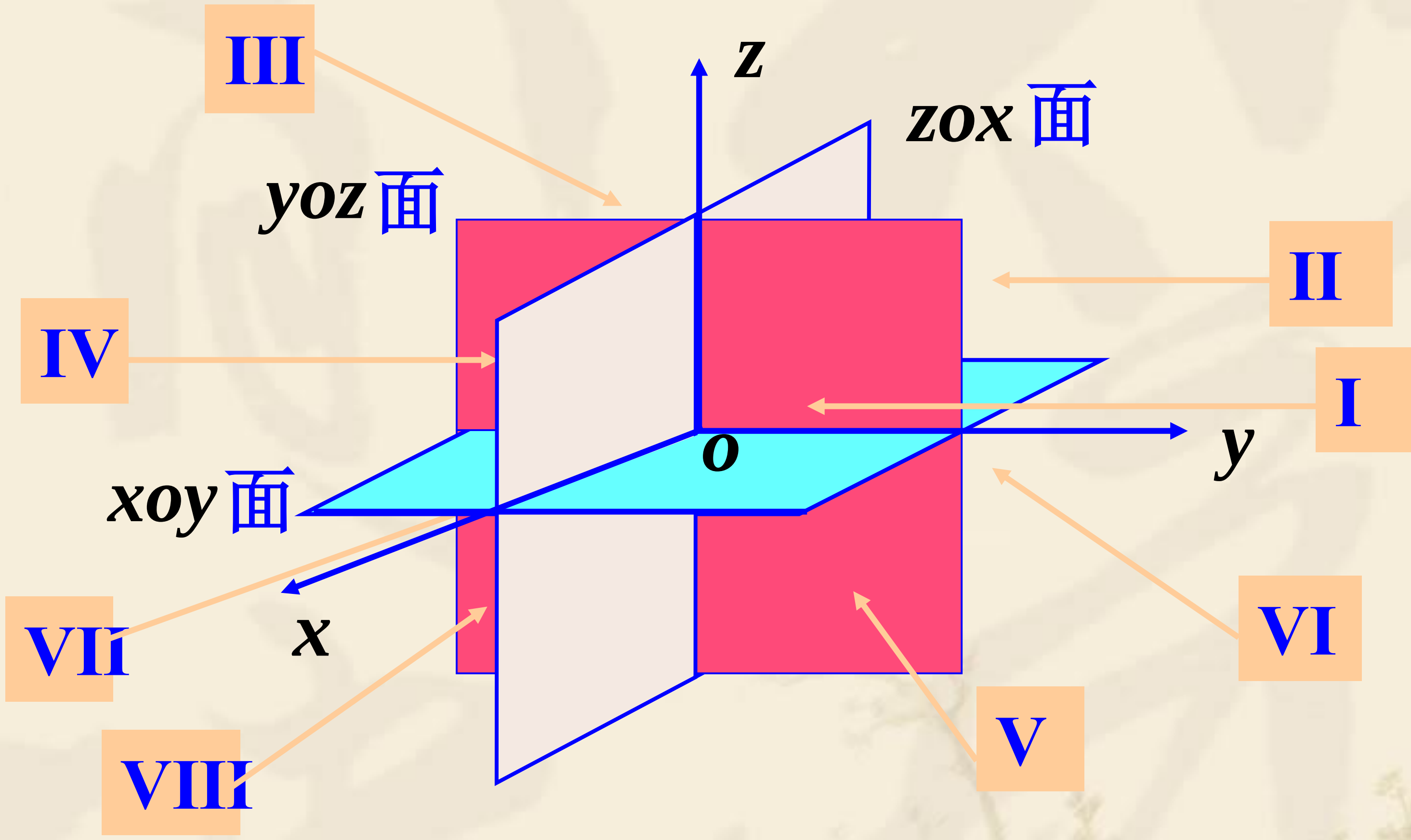
三个坐标轴的正方向符合右手系.

**在坐标轴上取定单位向量**

$$\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}$$




空间直角坐标系 **记为** $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$

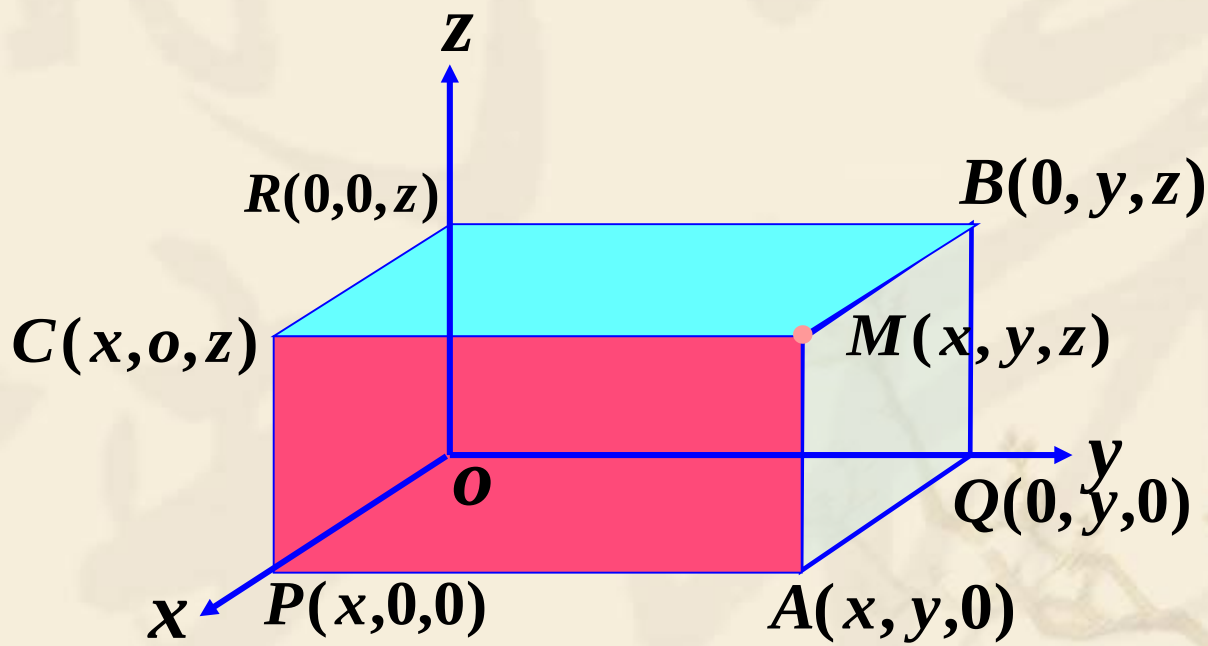



空间直角坐标系共有八个卦限

空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组$(x, y, z)$

特殊点的表示： 坐标轴上的点 $P, Q, R,$

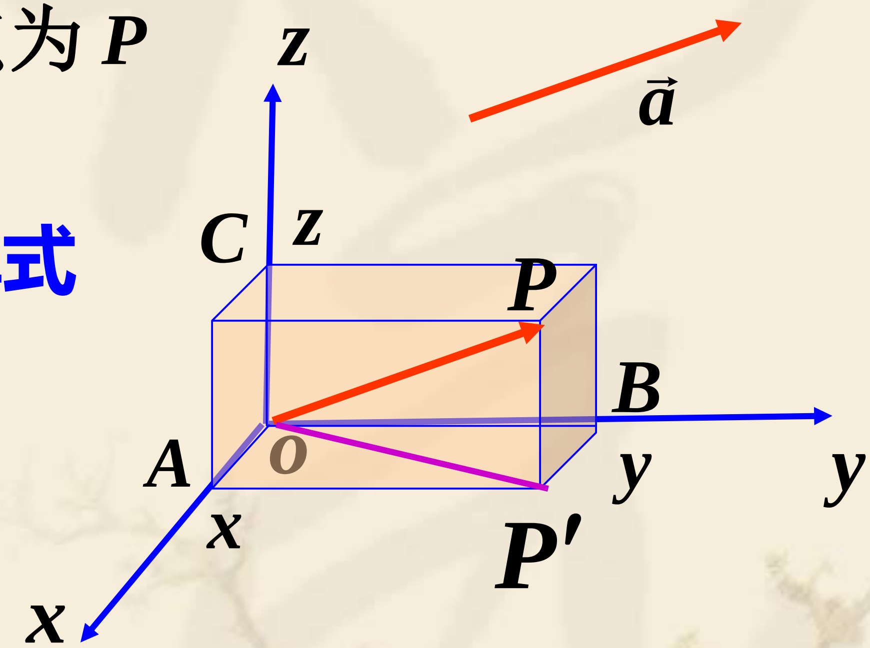
坐标面上的点 $A, B, C,$ $O(0,0,0)$



## 2、向量的坐标

设$\vec{a}$为空间直角坐标系中的一个向量，将$\vec{a}$平移

使其起点与原点重合，终点为 $P$




**则有**

$$\vec{a}=\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$ **分解式**

$$=(x,y,z)$$ **向量的坐标**

起点为$A(x_1,y_1,z_1)$终点为$B(x_2,y_2,z_2)$的向量

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

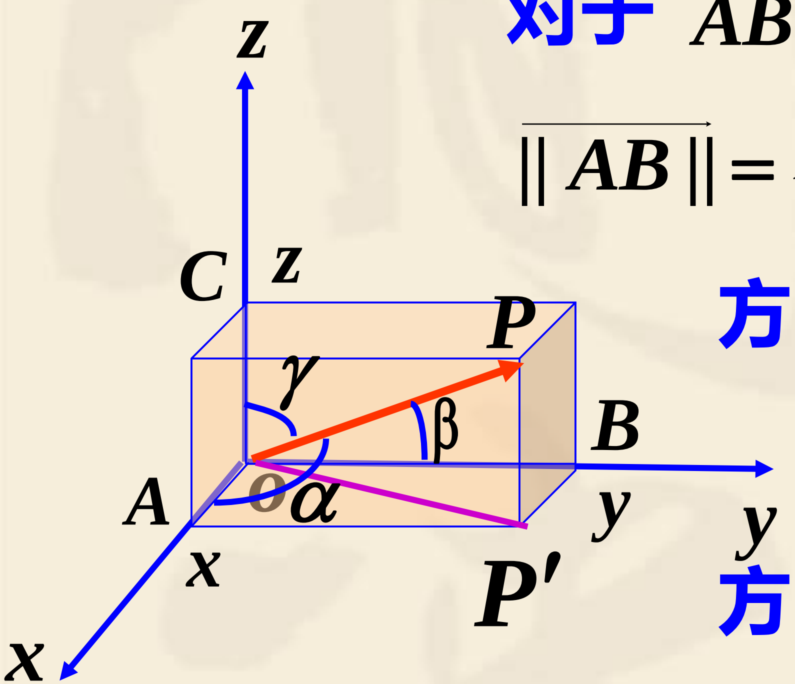
**特别地** $\vec{i}=(1,0,0)$  $\vec{j}=(0,1,0)$  $\vec{k}=(0,0,1)$

# 3、向量的长度与方向余弦

设$\vec{a}=(x,y,z)$ 则 $\|\vec{a}\|=\|\overrightarrow{OP}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

**对于** $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$




**方向角** 向量$\vec{a}$与$x$轴,$y$轴,$z$轴正向之间的夹角$\alpha,\beta,\gamma$

**方向余弦** $\cos\alpha=\dfrac{x}{\|\vec{a}\|}$

$$\cos\beta=\frac{y}{\|\vec{a}\|}\qquad \cos\gamma=\frac{z}{\|\vec{a}\|}$$

## 方向余弦的特征

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\beta = \frac{y}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{a}\|}$$

⑴ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(2 单位向量的**方向余弦就是它的坐标**

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

**例 1** 求平行于向量$\vec{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$的单位向量的分解式.

**解** 所求向量有两个，一个与$\vec{a}$同向，一个反向

$$\because \|\vec{a}\| = \sqrt{6^2+7^2+(-6)^2} = 11,$$

$$\therefore \vec{a^0} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{6}{11}\vec{i} + \frac{7}{11}\vec{j} - \frac{6}{11}\vec{k},$$

或 $$\vec{a^0} = -\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = -\frac{6}{11}\vec{i} - \frac{7}{11}\vec{j} + \frac{6}{11}\vec{k}.$$

**例 2** 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 2$，它与$x$轴和$y$轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，如果$P_1$的坐标为$(1,0,3)$，求$P_2$的坐标.

**解** 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad \therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$ 设$P_2$的坐标为$(x, y, z)$,

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow z = 4, \ z = 2,$$

$P_2$的坐标为 $(2, \sqrt{2}, 4)$, $(2, \sqrt{2}, 2)$.

## 4、用坐标进行向量的线性运算

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$,

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$,

则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k};$$

$$= \{a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z\}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}.$$

$$= \{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}$$

## 5、用坐标表示向量的共线共面的充要条件

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$,

$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$,

$\vec{a}$与$\vec{b}$共线 的充要条件是存在不全为零的常数$k_1$和$k_2$

使得 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$ 不妨设 $k_1$不为0

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}$$

$$(a_x, a_y, a_z)=\lambda\{b_x,\ b_y,\ b_z\},$$

$$a_x:b_x=a_y:b_y=a_z:b_z$$

三向量 $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$, 共面

存在不全为零的常数$k_1$, $k_2$, $k_3$,

使得 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$

方程组$\begin{cases} a_x k_1 + b_x k_2 + c_x k_3 = 0 \\ a_y k_1 + b_y k_2 + c_y k_3 = 0 \\ a_z k_1 + b_z k_2 + c_z k_3 = 0 \end{cases}$有非零解

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

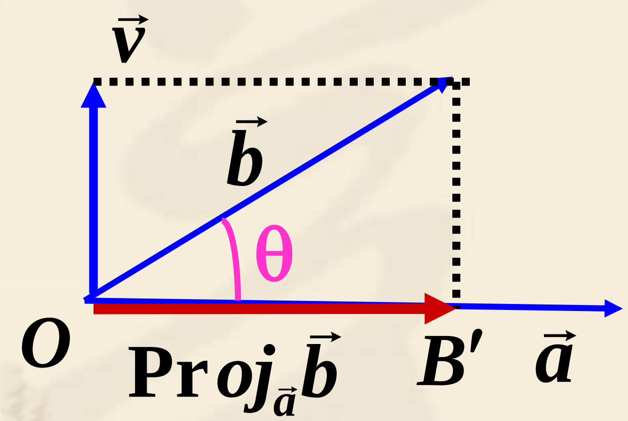
## 6、正交射影

定义3.1.3(正交射影向量和正交射影)

设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，定义向量

$$\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \|\vec{b}\|\cos\theta\cdot\vec{a}^0$$

为$\vec{b}$在$\vec{a}$上的正交射影向量，简称为射影向量.




定义数值 $(\vec{b})_{\vec{a}} = \|\vec{b}\|\cos\theta$ 为$\vec{b}$在$\vec{a}$上的正交射影，简称为射影.

令 $\vec{v} = \vec{b} - \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b}$ 则 $\vec{b} = \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} + \vec{v}$

向量 $\vec{b}$的正交分解

向量$\vec{a}=(x,y,z)$的坐标$x,y,z$分别是$\vec{a}$在坐标向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$上的射影.

射影有下述基本性质

（1） $\left(k\vec{b}\right)_{\vec{a}}=k\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}$

（2） $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)_{\vec{a}}=\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}+\left(\vec{c}\right)_{\vec{a}}$

看教材证明