4.设 $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，3阶矩阵 A

满足 $AP=PD$，求 $\varphi(A)=A^8(5I-6A+A^2)$.

解： $A=PDP^{-1}$

$\therefore A^n=PD^nP^{-1}$

可求得

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(A)=5PD^8P^{-1}-6PD^9P^{-1}+PD^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

5.设3阶矩阵A 按列分块 $A=[\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3]$，且 $a_1=2a_2-3a_3$，问齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解吗？A 是可逆矩阵吗？并说明理由.

解:

$\therefore A$不是满秩的，即 $Ax=0$存在非零解，且A不是可逆矩阵。

7.设A为3阶矩阵, $\det(A)=\frac{1}{2}$, 求 $\det((2A)^{-1}-5A^{*})$.

解: $det(A)=\frac{1}{2}$ $det\left((2A)^{-1}-5A^{*}\right)=det(-4A^{*})=(-4)^{3}det(A^{*})$

$$=(-4)^{3}\times\frac{1}{4}=-16$$

8. 设线性方程组$Ax=b$的增广矩阵为

$$\bar{A}=\left[A\;\vdots\;b\right]=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^{2} \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right],$$

求 $r(A)$及 $r(\bar{A})$

解： $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda\\ -1 & \lambda & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1\\ 0 & -2 & 2-\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1\\ 0 & 0 & 4-\lambda\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\lambda=4\ or-1\ ,r(A)=2\\ else\qquad r(A)=3\end{cases}$$

$$\lambda\neq-1\text{ 时}\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2+4\\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2+4\\ 0 & 0 & 4-\lambda & \dfrac{2\lambda(\lambda-4)}{\lambda+1}\end{bmatrix}$$

$$\lambda=4\quad r(\overline{A})=2$$

$$\lambda=-1\text{ 时}\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & -2 & 3 & -8\end{bmatrix}\ r(\overline{A})=3$$

$$\begin{cases}\lambda=4\ ,r(A)=2\\ else\quad r(A)=3\end{cases}$$

由行列式的定义计算:

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中x^4的系数：2

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

则：$A_{31} + A_{32} + A_{33} = ?$

设n阶实对称矩阵$A=(a_{ij})$满足$A^2=0$.证明：$A=0$

$$A^2 = AA^T = 0$$

$$b_{ii}=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0$$

设A,B,C均为n阶矩阵，且满足$ABC=E$,则下列结论正确的为：

（A）$ACB=E$ (B)$CBA=E$

（C）$BAC=E$ (D)$BCA=E$