第二节 矩阵相似与矩阵的对角化

一 相似矩阵

二 矩阵可对角化的条件

三 实对称矩阵的对角化

作业

- **习题6.2**

2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 14(2), 16

一、相似矩阵

定义6.2.1（相似矩阵） 对于$A_{n\times n},B_{n\times n}$,若存在可逆矩阵$P_{n\times n}$,使得$P^{-1}AP=B$,则称$A$与$B$相似,或$A$相似于$B$,记为$A\sim B$,并称由$A\to P^{-1}AP=B$的变换为相似变换,

- 如果A与一个对角矩阵相似,则称A可相似对角化,简称为A可对角化.

相似矩阵的简单性质：

(1)反身性$:A\sim A$

(2)对称性$:$若$A\sim B$,则$B\sim A$;

(3)传递性$:$若$A\sim B,B\sim C$,则$A\sim C$.

定理6.2.1 设n阶矩阵A与B相似,则

(1) $\det(A)=\det(B)$;

(2) $r(A)=r(B)$. 特别当A可逆，则 $A^{-1}\backsim B^{-1}$

(3) A与B有相同的特征值（有相同的特征多项式）

证 A与B相似，即有可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP=B$, 于是有

$$\left|\lambda I-B\right|=\left|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP\right|=\left|P^{-1}\ \ \lambda I-A\ \ P\right|$$

$$=\left|P^{-1}\right|\left|\lambda I-A\right|\left|P\right|=\left|\lambda I-A\right|$$

- 定理的逆命题不真,例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\text{与}I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

有相同的行列式，相同的秩及相同的特征值，但是它们不相似. 因为与单位矩阵相似的只能是单位矩阵.

- 对角阵$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

- 若A与对角阵D相似,则A的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

本节的两个主要问题:

(1)方阵可对角化的条件;

(2)如果方阵A会对角化,即存在可逆矩阵P及对角矩阵D,使得$P^{-1}AP = D$,那么,如何求矩阵P和D呢?

二、矩阵可对角化的条件

定理6.2.2（矩阵可对角化的充要条件）

n阶方阵A可对角化$\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

证 "$\Rightarrow$",设A可对角化,即存在可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\underline{\underline{\text{记为}}}\ D \qquad (\#)$$

设P按列分块为$P=\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{bmatrix}$

由P可逆知向量组$p_1,p_2,\cdots,p_n$线性无关,

由(#)式,有$AP=PD$

即

$$A\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

或 $\begin{bmatrix} Ap_1 & Ap_2 & \cdots & Ap_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{bmatrix}$

即 $A\,p_i=\lambda\,p_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$

因为$p_i \neq 0. \Rightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值.且$p_1,p_2,\cdots,p_n$依次为对应的特征向量.　　必要性得证

将以上的证明倒推上去就是充分性的证明

推论6.2.1（矩阵可对角化的**充分**条件）如果n阶矩阵A有n个不同的特征值，则矩阵A可相似对角化.

推论6.2.2 n阶矩阵A可相似对角化⇔A的任t_i重特征值λ_i对应t_i个线性无关的特征向量.

证 设A_{nxn}的互不相同的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$
其代数重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 其中$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$
其几何重数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_m$
设对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$的线性无关特征向量分别为

$$x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1k_1}; x_{21}, x_{22}, \cdots x_{2k_2}; \cdots; x_{m1}, x_{m2}, \cdots x_{mk_m}$$

A的线性无关的特征向量有且只有 $k_1+k_2+\cdots+k_m$

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n \qquad k_i \le n_i \qquad n_1+n_2+\cdots+n_m=n \qquad k_i=n_i$$

注意 （1） P中的列向量$p_1, p_2, \cdots, p_n$的排列顺序要与$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的顺序一致.

（2） 因 p_i是 $(A-\lambda I)x=0$的基础解系中的解向量，故 p_i的取法不是唯一的，因此 P也是不唯一的.

（3） 又 $|A-\lambda I|=0$ 的根只有 n 个（重根按重数计算）所以如果不计λ_i 的排列顺序， 则 Λ 是唯一的.

例1 方阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\5&5&0\\0&0&2\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵?若是,

求可逆矩阵P及对角矩阵D,使得$P^{-1}AP=D$.

解 由A的特征方程

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-5&\lambda-5&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-5&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

A有3个互不相同的特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6.$

故A必可对角化.

对$\lambda_1=0$,解方程组$(0I-A)x=0$,得基础解系$\xi_1=[1,-1,0]^T$

对$\lambda_2=2$,解方程组$(2I-A)x=0$,得基础解系$\xi_2=[0,0,1]^T$

对$\lambda_3=6$,解方程组$(6I-A)x=0$,得$\xi_3=[1,5,0]^T$,

则ξ_1,ξ_2,ξ_3就是A的3个线性无关的特征向量.

$$\text{令矩阵}P=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\text{则有}P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{bmatrix}$$

例2 常数a,b满足什么条件时，$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$

可对角化？在可对角化时，求可逆矩阵P，

使得$P^{-1}AP$成为对角矩阵，并求A^n

解 由A的特征方程

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-a&\lambda-1&-b\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

得A得全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

A可对角化

$\Leftrightarrow A$的属于$\lambda=1$的线性无关的特征向量有2个

$\Leftrightarrow$方程组$(I-A)x=0$的基础解系含有2个向量

$\Leftrightarrow$方程组$(I-A)x=0$的基础解系含有2个向量

$\Leftrightarrow 3-r(I-A)=2 \quad \Leftrightarrow r(I-A)=1$

而$I-A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

的秩为1 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{vmatrix} = a+b=0$

故A可对角化$\Leftrightarrow a+b=0$

当$a+b=0$时,下面来求化A为对角矩阵的相似变换的矩阵P.此时$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$,解方程组$(I-A)x=0$,由

$$I-A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于特征值$\lambda_3=-1$,解方程组$(-I-A)x=0$

$$-I-A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ -a & -2 & a\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}1\\ a\\ -1\end{bmatrix}$$

故令$P=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

则有:$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$记为$D$

下面求A^n:由上式可得$A=PDP^{-1}$

$$\Rightarrow A^n=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$

$$=PD(P^{-1}P)D\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}$$

$$=PDD\cdots DP^{-1}$$

因$D^n=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (-1)^n\end{bmatrix}$

故当$n=2k$时,$D^n=I\Rightarrow A^n=PIP^{-1}=I$

$n=2k+1$时,$A^n=A^{2k+1}=A^{2k}A=IA=A$

例3 判断$A=\begin{bmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵?

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&5\\-6&\lambda-4&9\\-5&-3&\lambda+7\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda^2=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$, $0I-A\to\begin{bmatrix}1&2&-5\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$ 秩(0I-A)=2

故属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的线性无关的

特征向量只有一个,故A不能对角化.

三、实对称矩阵的对角化

对称矩阵： 满足$A^T = A$或$a_{ij} = a_{ji}(\forall i, j = 1,2,\cdots,n, i \neq j)$,

共扼矩阵： 称$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$为$A = (a_{ij})$的共轭矩阵

共扼运算满足：

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\overline{kA} = \overline{k}\,\overline{A}$$

方阵A为实矩阵$\Leftrightarrow \overline{A} = A$

方阵A为实对称矩阵$\Leftrightarrow (\overline{A})^{\mathrm{T}} = A$

性质6.2.1 实对称矩阵的特征值都是实数.

证明 设λ为实对称矩阵A的一个特征值且

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为对应的特征向量,

则有 $$Ax=\lambda x$$

两端取共轭再取转置,得

$$\overline{x}^T A^T=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T \Rightarrow \overline{x}^T A=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T \Rightarrow \overline{x}^T Ax=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T x$$

$$\Rightarrow \overline{x}^T \lambda x=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T x \Rightarrow \lambda\overline{x}^T x=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T x \Rightarrow (\lambda-\overline{\lambda})\overline{x}^T x=0$$

因$\overline{x}^T x=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2>0$

$\Rightarrow \lambda=\overline{\lambda}$,即$\lambda$为实数.

- 若λ_i为实对称矩阵A的特征值,则$(\lambda_i I - A)x = 0$为实系数方程组,可以取为实向量,因此A的特征向量可取为实向量,以下都这样假定.

性质6.2.2 设λ_1,λ_2是实对称矩阵的两个不同特征值.

$$x_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$分别为对应的特征向量.

则x_1与x_2正交, 即$x_1^T x_2 = x_2^T x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$

性质6.2.3 设λ是实对称矩阵的特征值,则λ的几何重数与其代数重数必相等.

对于任一n阶实对称矩阵A,必存在n阶正交矩阵P,使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的全部特征值.

(2) P的列向量组为A的n个标准正交的特征向量.

利用正交矩阵将对称矩阵对角化的方法

根据上述结论，利用正交矩阵将对称矩阵化为对角矩阵，其具体步骤为：

1. 求A的特征值;
2. 由$(A-\lambda_i I)x=0$,求出A的特征向量;
3. 将特征向量正交化;
4. 将特征向量单位化.

例1 对于$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$,求一个正交矩阵$P$,使得$P^{-1}AP$成为对角矩阵.

解 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=3, \lambda_2=-1.$

分别求得$\lambda_1=3, \lambda_2=-1$对应的特征向量

$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ ξ_1与ξ_2已经正交,再单位化:

$$e_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, e_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

令$P=[e_1 \quad e_2]$,

则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & \\ & -1\end{bmatrix}$

例2 已知$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&3\end{bmatrix}$与$D=\begin{bmatrix}5&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}$相似,

(1)求a,b的值;

(2)求正交矩阵P使得$P^{-1}AP=D$.

解 (1)A的特征值为5,b,−1,由特征值的性质1,得

$$\begin{cases}5+b+(-1)=0+0+3\\5\times b\times(-1)=|A|=4a-3\end{cases}\Rightarrow a=2,b=\text{-}1$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&2&3\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$$

(2)对于$\lambda_1=5$,由$5I-A\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

对于$\lambda_2=\lambda_3=-1$,由$-I-A\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\xi_2,\xi_3$已经正交

令$P=\begin{bmatrix}\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}&\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}&\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}\end{bmatrix}$,则有$P^{-1}AP=P^TAP=D$

注1 属于$\lambda_2=\lambda_3=-1$的相互正交的特征向量

不唯一,例如,还可以取为$\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\1\\2\end{bmatrix}$

注2 如果取$\lambda_2=\lambda_3=-1$的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

则α_1,α_2不正交,这时,可以通过施密特正交化方法求得属于$\lambda_2=\lambda_3=-1$的相互正交的特征向量.

本章基本要求

(1)理解特征值与特征向量的定义,了解其性质,会计算特征值与特征向量.

(2)了解相似矩阵的概念及性质.

(3)理解方阵可对角化的条件,掌握用相似变换化方阵为对角矩阵的方法.

(4)了解实对称矩阵的性质,掌握实对称矩阵正交相似对角化的方法.