西安交通大学考试题（A）卷

成绩	

课　　程 线性代数与空间解析几何

学　　院 ____________________ 序号__________

专业班号 ____________________ 考试日期 2019 年 10 月 20 日

姓　　名 ____________________ 学号________________ 期中 √

注：试题参考答案将于 10 月 22 日在《线性代数与解析几何》微信公众号公布。

一、单项选择题（请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设x,y,z为两两互不相同的数，则行列式$\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix}=0$的充要条件是【　】

$(A)\ xyz=0$　$(B)\ x+y+z=0$　$(C)\ x=-y,z=0$　$(D)\ y=-z,x=0$

2. 设A为n阶方阵$(n\geq 3)$，若$A^3=O$，则下式中未必成立的是【　】

$(A) A=O$　$(B)\ (A^T)^3=O$　$(C) A^4=O$　$(D)\ |A|=0$

3. 设A为n阶可逆矩阵$(n\geq 2)$，I为n阶单位矩阵，则$\left(\left(A^*\right)^*\right)^{-1}=$【　】

$(A)|A|^{n-1} I$　$(B)\ |A|^{1-n} I$　$(C)|A|^{n-1} A^*$　$(D)\ |A|^{1-n} A^*$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019}=$【　】

$(A)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　$(B)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$　$(C)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$　$(D)\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5.

设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量且$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a},\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，则$\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|=$【　】

$(A)\ 0$　$(B)\ 1$　$(C)\ 2$　$(D)\ 3$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 已知x_1,x_2,x_3为方程$x^3+px+q=0$的三个根，则$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$__________.

7．设$\alpha=(1,2,3),\beta=(1,-1,1)$,则$(\alpha^T\beta)^{2020}=$______________.

8. 设A为3阶方阵,且$|A|=2$,则$\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}-3A\right|=$___________.

9. 设有直线$L_1:\frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{5},L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$,则过直线$L_1$且与$L_2$平行的平面方程为____________________________

10. 以$A(1,1,1),B(2,0,1),C(0,0,1),D(1,3,2)$为顶点的四面体体积为_______

三、解答题（第 11 题 10 分；第 12-16 每题 12 分，共 70 分）

11. 设有n元线性方程组$Ax=b$, 其中A为三对角矩阵,

$$且A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(1)证明$|A|=(n+1)a^n$; (2)a为何值时，该方程组有唯一解，并在此时求x_1和x_n.

12． 设A为 n 阶实矩阵, I为单位阵, 满足$AA^{\mathrm{T}}=I$,此时称A为正交矩阵,
若已知$|A|<0$, 求$|A|$及$|A+I|$.

13． 设有两条直线$L_1:\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$和$L_2: x+1=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$, 点$M(1,0,-1)$.
(1)求L_1的对称式方程； (2)求点M到L_1的距离； (3)研究L_1与L_2的位置关系.

14. 设矩阵$B=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$, I为单位阵

矩阵A满足$A(I-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=I$, 求$A$.

15. 讨论矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & \mu & \lambda \end{bmatrix}$的秩.

16. 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$为非零实矩阵, A_{ij}为a_{ij}的代数余子式, 且$a_{ij}+A_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$

(1)求$|A|$; (2)证明A为正交矩阵(正交矩阵定义参见第12题).