1、设有两个向量组

(Ⅰ): $\alpha_1=(1,1,1)^T, \alpha_2=(0,1,1)^T, \alpha_3=(1,4,5)^T$

(Ⅱ): $\beta_1=(1,1,2)^T, \beta_2=(0,3,4)^T, \beta_3=(3,3,a)^T,$

已知Ⅰ不能由Ⅱ线性表示。

(1)求a的值;
(2)将Ⅱ用Ⅰ线性表示

$$\boldsymbol{det}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\mathbf{1}\neq\mathbf{0}$$

(II) 线性相关，否则，

$$\alpha_i,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$$

线性相关，则（II）可以表出（I）。

1、解:

(1) Ⅰ不能由Ⅱ,故Ⅱ线性相关

$$\det[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=0 \qquad \Rightarrow a=6$$

(2) $\beta_1=\alpha_3-3\alpha_2$

$\beta_2=\alpha_3-\alpha_1$

$\beta_3=3\alpha_3-9\alpha_2$

2、试将向量β用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，其中$\beta=(1,2,1,1)^T$，$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T$，$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$。

解：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\1&-2&0&-2&0\\1&-2&-2&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&0&-2&2&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&5/4\\0&1&0&0&1/4\\0&0&1&0&-1/4\\0&0&0&1&-1/4\end{bmatrix}\Rightarrow\beta=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4$$

3、设向量$\beta=(-1,0,1,b)^T$，$\alpha_1=(3,1,0,0)^T$

$\alpha_2=(2,1,1,-1)^T$ $\alpha_3=(1,1,2,a-3)^T$

问a,b取何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并求出此表达式。

解：
$$\begin{bmatrix}3&2&1&-1\\1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\3&2&1&-1\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&1&-1\\0&0&2&1\\0&-1&a-3&b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-2&-1\\0&0&a-1&b+1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

① a=1, b=-1

② a$\neq$1, b任取

4、下列命题是否正确？如正确，给出证明；如不正确，举出反例：

(1)若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{\mathbf{m}}$线性相关，则其中每个向量都可由该组中其余m-1个向量线性表示；

不正确，反例： $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

4、下列命题是否正确？如正确，给出证明；如不正确，举出反例：

(2)若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathrm{m}$ 中存在一个向量不能由该组中其余m-1个向量线性表示，则该向量组线性无关。

不正确，反例： $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4、下列命题是否正确？如正确，给出证明；如不正确，举出反例：

(3)齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解的充要条件是A的列向量组线性无关。

4、下列命题是否正确？如正确，给出证明；如不正确，举出反例：

(4)对于实向量$x=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)^T$**，则**$x^Tx\geq 0$

而且 $x^Tx=0\Leftrightarrow x=0$

正确 $x^Tx=\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2\geq 0$

$$x^Tx=0\Leftrightarrow \alpha_1^2=\ldots=\alpha_n^2=0\Leftrightarrow x=0$$

5、λ **取何值时，向量组** $\alpha_1=(\lambda,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$\alpha_2=(-\frac{1}{2},\lambda,-\frac{1}{2})$ $\alpha_2=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\lambda)$ **线性相关?**

解:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & \lambda \\ -1/2 & \lambda & -1/2 \\ \lambda & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & \lambda \\ 0 & \lambda+1/2 & -1/2-\lambda \\ 0 & -1/2-\lambda & -1/2+2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & \lambda \\ 0 & \lambda+1/2 & -1/2-\lambda \\ 0 & 0 & -1-\lambda+2\lambda^2 \end{bmatrix} \Rightarrow (2\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

$\lambda=-\frac{1}{2}$ **或** $\lambda=\mathbf{1}$

6、设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}}$是一组n维列向量，证明：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}}$线性无关的充分必要条件是行列式

$$D=\begin{bmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_{\mathbf{n}} \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mathbf{n}}^T\alpha_1 & \alpha_{\mathbf{n}}^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_{\mathbf{n}}^T\alpha_{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

$$A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \ldots \alpha_{\mathrm{n}}] \in R^{n\times n}$$

证明:

令矩阵 $A = [\alpha_1 \ \ \alpha_2 \dots \alpha_n]$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性无关** $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ **由于**

$$A^T A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} [\alpha_1 \ \ \alpha_2 \dots \alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_1 & \dots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_1 & \dots & \alpha_2^T \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_1 & \dots & \alpha_n^T \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |A|^2 = |A^T||A| = D$$

故 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0$ **所以** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性无关**

$\Leftrightarrow D \neq 0$

7、判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\alpha_1=(6,2,4,-9)^T \quad \alpha_2=(3,1,2,3)^T \ \alpha_3=(15,3,2,0)^T$

(2) $\alpha_1=(2,-1,3,2)^T \ \alpha_2=(-1,-2,1,-1)^T \ \alpha_3=(15,3,2,0)^T$

(3) $\alpha_1=(1,-\mathrm{a},1,1)^T \quad \alpha_2=(1,1,-\mathrm{a},1)^T \quad \alpha_3=(1,1,1,-a)^T$

解：(1) $\begin{bmatrix}6&2&4&-9\\3&1&2&3\\15&3&2&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&1&2&3\\0&-2&-8&-15\\0&0&0&-15\end{bmatrix}\Rightarrow$ **无关**

(2) $\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\-1&-2&1&-1\\15&3&2&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&-2&1&-1\\0&-5&5&0\\0&-27&17&-15\end{bmatrix}\Rightarrow$**无关**

(3) $\begin{bmatrix}1&-a&1&1\\1&1&-a&1\\1&1&1&-a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-a&1&1\\0&1+a&-a-1&0\\0&0&a+1&-a-1\end{bmatrix}\Rightarrow$

a=-1 **相关**

a≠-1 **无关**

9、利用定理4.2.2证明：若r维向量组

$$\alpha_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{rj})^T, j = 1,2,\ldots,s$$

线性无关，则对 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中每个向量在相同位置上任意添加分量所得的r+1维向量组

$$\boldsymbol{\beta}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{rj}, \alpha_{\boldsymbol{r+1},j})^T, j = 1,2,\ldots,s$$

也线性无关，并说出此命题的逆否命题。

证明：

由题知齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\ldots+x_s\alpha_s=0$ 只有零解

设添加分分量后的向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots\boldsymbol{\beta}_s$,对应的齐次线性方程组为 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+\ldots+x_s\boldsymbol{\beta}_s=0$，**比之前方程组多了一个方程**。若关于 α 的方程只有零解，则关于 β 的方程也只有零解。故线性无关。

逆否命题：线性相关的向量组,去掉若干个分量仍线性相关

10、设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\mathrm{m}}$线性表示，但 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\mathrm{m-1}}$线性表示。证明：

α_m 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\mathrm{m-1}},\beta$ 线性表示。

证明：由题知 $\beta = k_1\alpha_1+\ldots+k_m\alpha_m$

若 $k_m=0$**，则** β **能由** $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\mathrm{m-1}}$**线性表示，与题设矛盾，故** $k_m \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{k_m} = \frac{k_1}{k_m}\alpha_1+\ldots+\alpha_m$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_m = \frac{\beta}{k_m} - \frac{k_1}{k_m}\alpha_1 - \ldots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1}$$

11、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，而向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问

(1) α_1 是否由 α_2,α_3 线性表示？为什么？

(2) α_4 是否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？为什么？

解：(1) α_1 能由 α_2,α_3 线性表出，因为已知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 α_2,α_3线性无关，又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，得证。

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

反证法：设 α_4 能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出。即有 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得 $\alpha_4=\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\alpha_3\lambda_3$，由（1）知，有$\alpha_1=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，代入上式有： $\alpha_4=(\lambda_2+\lambda_1 l_2)\alpha_2+(\lambda_3+\lambda_1 l_3)\alpha_3$

即α_4可由 α_2,α_3 线性表示，从而与 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关矛盾。从而得证。

12、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\mathrm{m}}(m\geq 3)$线性无关，证明：向量组 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\mathrm{m}},\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\mathrm{m}},\ldots,\beta_{\mathrm{m}}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mathrm{m}-1}$线性无关。

证明：

设存在 $k_1,\ldots,k_n$ **使得** $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_m\beta_m=0$

$$\Rightarrow\quad (k_2+k_3+\ldots+k_m)\alpha_1+(k_1+k_3+\ldots+k_m)\alpha_2+\ldots+(k_1+k_2+\ldots+k_{m-1})\alpha_m=0$$

将k看成系数矩阵为D的解

$$\mathrm{D}=\begin{bmatrix}0&1&1&1&\ldots&1\\1&0&1&1\ldots&&1\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\1&1&1&1\ldots&&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\ |D|\neq 0$ **方程组只有零解** $\Rightarrow$ **线性无关**

13、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为3维向量组，A为3阶矩阵，证明：向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 线性无关$\Leftrightarrow$ A可逆且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

证明:

$\Rightarrow$ **存在** k_1,k_2,k_3 **使得** $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

左乘A得 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0 \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性无关。** $|A||\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|\neq 0$ $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|\neq 0$

$\Rightarrow |A|\neq 0$ **A可逆。**

$\Leftarrow$ **存在** k_1,k_2,k_3 **使得**

$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$

左乘 A^{-1} **得** $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ $\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$

$\Rightarrow A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ **线性无关。**

14、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，证明：

(1)向量组$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\alpha_3+\beta$线性无关；

(2)对任意常数x，y，z，向量组

$\alpha_1-x\alpha_2,\alpha_2-y\alpha_3,\alpha_3-z\alpha_1$ **线性无关**$\Leftrightarrow \mathrm{xyz}\neq 1$

(1)证明：假设存在k_1,k_2,k_3,k_4**不全为零。使得**

$$k_1\beta+k_2(\alpha_1+\beta)+k_3(\alpha_2+\beta)+k_4(\alpha_3+\beta)=0$$

$$(k_1+k_2+k_3+k_4)\beta+k_2\alpha_1+k_3\alpha_2+k_4\alpha_3=0$$

$$\Rightarrow\beta=-\frac{k_2\alpha_1+k_3\alpha_2+k_4\alpha_3}{k_1+k_2+k_3+k_4}$$

与题设矛盾，故线性无关

14、（2）证明

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 - x\alpha_2 \;\; \alpha_2 - y\alpha_3 \;\; \alpha_3 - z\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -z \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & -y & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1(\alpha_1 - x\alpha_2) + k_2(\alpha_2 - y\alpha_3) + k_3(\alpha_3 - z\alpha_1) = 0$$

$$(k_1 - k_3 z)\alpha_1 + (k_2 - k_1 x)\alpha_2 + (k_3 - k_2 y)\alpha_3 = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

由线性无关可得：

$$|A| = xyz - 1 \neq 0 \Rightarrow xyz \neq 1$$

15、设A为nxm矩阵，B为mxn矩阵，I为n阶单位矩阵，其中n<m,若AB=I，证明：B的列向量组线性无关。

证明：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)^T$ ， $B=(b_1,b_2\dots,b_n)$

假设存在 $k_1,k_2,\dots k_n$ **使得** $k_1b_1+k_2b_2+\dots+k_nb_n=0$

左乘A有 $k_1Ab_1+k_2Ab_2+\dots+k_nAb_n=0$

而 $Ab_i=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}=e_i$

故 $k_1e_1+k_2e_2+\dots+k_ne_n=0$

而 $e_1,e_2\dots e_n$ **线性无关** $\Rightarrow k_1=k_2=\dots=k_{\mathbf{n}}=0$

故线性无关

15、设A为nxm矩阵，B为mxn矩阵，I为n阶单位矩阵，其中n<m,若AB=I，证明：B的列向量组线性无关。

n=r(I)=r(AB)<=r(B)<=n

1. k阶子**式来判定**

2. 齐次线性**方程组判定**

3. 线性**相关和线性无关判定**

$$r(A+B)\le r(A)+r(B)$$

$$r(AB)\le min\{r(A),r(B)\}$$

$$AB=O\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$$

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & if r(A)=n \\ 1, & if\ r(A)=n-1 \\ 0, & if\ r(A)\le n-2 \end{cases}$$

16、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\mathrm{r}}$ 线性无关，向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\mathrm{r}}$ 线性表示：

$$\beta_j = b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \ldots + b_{rj}\alpha_r, j = 1,2,\ldots,s$$

写成矩阵形式就是

$$[\ \beta_1\ \beta_1\ \ldots\ \beta_s] = [\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_r]B,$$

其中，矩阵$B = \left(b_{ij}\right)_{r\times s}$. **试证：向量组** $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ **线性无关** $\Leftrightarrow$ r(B)=s.**特别当**s=r**时，有**:
$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{\mathrm{r}}$ **线性无关** $\Leftrightarrow$ det(B) $\neq$0.

$$\boldsymbol{A}_{n\times s} = \boldsymbol{K}_{n\times r}\boldsymbol{B}_{r\times s}$$

证明：记 $\mathbf{K}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$ $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s)$,有

$$A_{n\times s}=K_{n\times r}B_{r\times s}$$

必要性：设向量组A线性无关，知R(A)=s,又由A=KB,知

$$\boldsymbol{R(A)\le R(KB)\le min\{r(K),r(B)\}\le r(B)\le s}$$

$$\mathbf{s}=R(\mathbf{A})\le R(\mathbf{B})\le \mathbf{s}$$

即R(B)=s，当s=r时，$\Leftrightarrow$ det(B)≠0.

充要性：设 R(B)=s，要证A组线性无关，由于

$$\mathbf{A}x=0\Leftrightarrow K\boldsymbol{B}x=0$$

$$\Leftrightarrow K\mathbf{y}=0,$$

K线性无关

$$\mathbf{y}=\mathbf{B}x$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}=0,\mathbf{B}x=\mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

故线性无关

17、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关，试利用上题的结论判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_3=4\alpha_3-\alpha_1$

(2) $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\qquad \beta_2=2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,$
$\beta_3=3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

解：(1)

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&0\\0&3&4\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathrm{B}$$

由于r(B)=3,**故向量组线性无关**

(2)

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathrm{B}$$

由于r(B)=2<3,**故向量组线性相关**

(B)

1、设A为n阶方阵，k为正整数，α 为齐次线性方程组 $A^k x=0$ 的解向量，但 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明：向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

证明：假设存在 $k_1, k_2, \dots k_k$ 使得 $k_1\alpha + k_2 A\alpha + \dots + k_k A^{k-1}\alpha = 0$

左乘 A^{k-1} 得 $k_1 A^{k-1}\alpha + k_2 A^k\alpha + \dots + k_k A^{2k-2}\alpha = 0$

由于 $A^k x = 0$

所以 $k_1 A^{k-1}\alpha = 0$ 由于 $A^{k-1}\alpha \neq 0 \Rightarrow k_1 = 0$

$\Rightarrow k_2 A\alpha + \dots + k_k A^{k-1}\alpha = 0$

左乘 $A^{k-\mathrm{i}}$，同理可得：$k_1 = k_2 = \dots = k_k = 0$ 得证。