群名称：线性代数20
群　号：783619927

QQ群 783619927

助教老师：侯梦然
QQ号：540172382
电话： 15891703713

作业安排：
每章作业交一次
答疑时间：
每周三下午2:30-4:30

习题1.2

(A)

1（1）（2）（6），3（3），

4（2）（4），5，6，7（1）（2）

回顾

1.二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2.n阶行列式，**余子式** M_{ij}

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

3.三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

-------**对角线法则**

4.行列式的基本性质

性质1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^T = D$

性质2 互换行列式的两行（列）的位置,行列式的值反号.

性质3 行列式D等于它的任一行（列）各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

性质4 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，则可将此行列式写成如下两个行列式的和，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 若行列式D有两行（列）的对应元素相等，

则此行列式为零， 即：$D = 0$

性质7 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

性质8 行列式的任一行（列）各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于0；即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} D, & if\ \ k = i \\ 0, & if\ \ k \neq i \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{is} = \begin{cases} D, & if\ \ s = j \\ 0, & if\ \ s \neq j \end{cases} \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

推论 若行列式D的某行元素全为零，则D=0.

推论 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

例1 **计算**

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 $D_n = n(-1)^{n+n} M_{nn}$

$$= (-1)^{n+n}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

例2

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod a_{ii}$$

$$D=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod a_{ii}$$

例3

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n-1,n-1} & \vdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod a_{i,n-i+1}$$

引入以下记号

行变换	列变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$c_i \leftrightarrow c_j$
kr_i	kc_i
$r_i \div k$	$c_i \div k$
$r_i + kr_j$	$c_i + kc_j$

例4 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$

解 $D \overset{c_1-c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 100 & 204 \\ -1 & 200 & 395 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix} \overset{c_3-2c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$

$\overset{c_2 \div 100}{=\!=\!=} 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{c_2-3c_1}{=\!=\!=} 100 \begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2 \div 100} 100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - 3c_1} 100\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 + c_2} 100\begin{vmatrix} 3 & -8 & -4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 100 \cdot 20 = 2000$$

例5 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解 $D = 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-6)\cdot(-7) = 42$

计算行列式常用方法：化零，展开.

4阶 $\to$ 3阶 $\to$ 2阶

行列式的计算方法

1. 直接用定义（非零元素很少时可用）

2. 化三角形行列式法

此法特点：

(1) 程序化明显，对阶数较低的数字行列式和一些较特殊的字母行列式适用。

(2) 灵活性差，死板。

3.降阶法

利用性质，将某行(列)的元素尽可能化为0，然后按行(列)展开.

$$n\text{阶} \to \quad n-1\text{阶} \to \cdots \to \quad 2\text{阶}$$

此法灵活多变，易于操作，是最常用的手法。

一些特殊行列式的计算

1. 奇数阶反对称行列式 的值为零。

$D = |a_{ij}|$ 为对称行列式 $\longleftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$

例
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$
是对称行列式

$D = |a_{ij}|$ 为反对称行列式 $\longleftrightarrow$ $a_{ij} = -a_{ji}$ (必有 $a_{ii} = 0$)

例
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$
是反对称行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$
不是反对称行列式

例 证明奇数阶反对称行列式的值为零。

证

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各行提}-1} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

当n为奇数时有 $D=-D \quad \Rightarrow D=0$

2. 主对角线非零的“箭形”行列式 化成三角形行列式

例

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & \\ d_n & 0 & 0 & & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

$$\overline{\overline{c_1-\frac{d_i}{a_i}\times c_{i+1}}}\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{a_i}b_i & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_n \end{vmatrix}=(a_0-\sum_{i-1}^{n}\frac{d_i}{a_i}b_i)a_1\cdots a_n$$

3. 除对角线以外各行元素对应相同，则可化成三角形行列式或箭形行列式

可化箭形行列式

例

$$\begin{vmatrix} x_1 - b & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 - a & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 - a & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 - a \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^3 x_1$$

另

$$D = x_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 - a & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 - a & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4 - a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4]{-x_i c_1 + c_i} x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$$

4. 某行（列）至多有两个非零元素的行列式，可用降 阶法或定义或递推公式法或归纳法求解

例

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

n阶

按第一列展开

$$a\begin{vmatrix} a & b & & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

n-1阶 n-1阶

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

5. 各行(列)总和相等的行列式 (赶鸭子法)

例 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1 + c_i (i = 2, 3, \cdots, n)}}$$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y]\begin{vmatrix}1 & y & y & \cdots & y\\ 1 & x & y & \cdots & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & y & y & \cdots & x\end{vmatrix}$$

*

$$\underline{\underline{-r_1+r_i(i=2,3,\ldots,n)}}\quad [x+(n-1)y]\begin{vmatrix}1 & y & y & \cdots & y\\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y]\times 1\times(x-y)^{n-1}$$

$$=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

***或** - y 乘第1列加到后面各列:

$$=[x+(n-1)y]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x-y & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-y\end{vmatrix}$$

6. 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

$$\begin{aligned} = &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\cdots(x_{n-1} - x_1)(x_n - x_1) \\ &(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_{n-1} - x_2)(x_n - x_2) \\ &(x_4 - x_3)\cdots(x_{n-1} - x_3)(x_n - x_3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2}) \\ &(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

证明(数学归纳法)

1. 当$n=2$时，有$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$，结论成立。

2. 假设对于$n-1$阶范德蒙行列式结论成立。

下证对n阶范德蒙行列式结论也成立。

在V_n中从第n行开始，逐行减去上一行的x_1倍，则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}_{n-1\text{阶}}$$

根据归纳假设有：

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

综上所述，结论成立 $(n\geq 2)$ 。

$$\therefore\quad D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_n-x_1)D_{n-1}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)D_{n-2}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad (x_4-x_3)\cdots(x_n-x_3)D_{n-3}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)$$

$$(x_4-x_3)\cdots(x_n-x_3)$$

$$\cdots \qquad (x_n-x_{n-1})$$

$$=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

例 计算
$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n\end{vmatrix}.$$

解 每一行提取各行的公因子，于是得到

$$D_n=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为n阶范德蒙行列式，由范德蒙行列式知

$$D_n = n! \prod_{n \ge i > j \ge 1} (i-j)$$

$$
\begin{aligned}
&= n!(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\
&\quad \cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\
&\quad \cdot(4-3)\cdots(n-3) \\
&\quad \vdots \\
&\quad [n-(n-1)]
\end{aligned}
$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$ 求第一行各元素的代数余子式之和.

解 第一行各元素的代数余子式之和为

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

例 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 第四行各元素余子式之和为 $\underline{-28}$

分析 以 M_{ij} 表示 D 中元素 a_{ij} 的余子式，则有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=28\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-28$$

7. 证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

(对左上角和右下角化三角形可以证明)

(数学归纳法证明)

证明(数学归纳法) 记

$$D_1 = \det\left(a_{ij}\right)_{n\times n} \qquad D_2 = \det\left(b_{ij}\right)_{m\times m}$$

需要证

$$D = D_1 D_2$$

1. 当n=1时，将D按第1行展开

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} D_2 = D_1 D_2$$

结论成立

2. 假设对n-1阶行列式D_1，结论成立，则当D_1为n阶行列式时，

记D_1的代数余子式为A_{ij}, D的代数余子式D_{ij}, 将D按第1行展开

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} D_{1j}$$

$$D_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,j-1} & c_{1,j+1} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m,j-1} & c_{m,j+1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D_{1j} = A_{1j} D_2 \qquad D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} D_2 = D_1 D_2$$ 结论成立

习题1.3

2，5

第三节、Cramer法则

1、非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，则称此方程组为**齐次线性方程组**.

使得方程组成立的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**此方程组的解**.

2、Cramer法则

定理 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组有解，并且解可以**唯一**表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中D_i是把系数行列式D中第i列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式.

(其证明将在第二章第二节给出)

二、几个结论

1、线性方程组的相关定理

定理 如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则线性方程组一定有解,且解是唯一的．

推论1 如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

2、齐次线性方程组的相关定理

定理 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组只有零解.

推论2 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.

例1 用Cramer法则解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 2 \\ \cdots \\ x_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ nx_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2 \end{cases}$$

解

易见 $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (i \neq n)$$

所以，线性方程组的解唯一

$$x_i = \frac{D_i}{D} = 0 \quad (i \neq n)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 2 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D$$

$$x_n = \frac{D_n}{D} = 2$$

例2 齐次方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0\end{cases}$

有非零解，问λ取何值?

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-3 & (\lambda-1)(1-\lambda)+4 \\ 2 & 1-\lambda & 2(\lambda-1)+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ 1-\lambda & 2\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -(\lambda+1) \\ 1-\lambda & 2\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(2\lambda-\lambda^2)$$

$$=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

齐次方程组有非零解，则 $D=0$

所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 或 $\lambda=2$ 时齐次方程组有非零解.

小结

1、用克拉默法则解方程组的两个条件

(1)方程个数等于未知量个数;

(2)系数行列式不等于零.

2、Cramer法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.它主要适用于理论推导.

3、如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$, 则线性方程组一定有解,且解是唯一的 .

4、如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

四、思考题

证明平面上三条不同的直线

$$ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$$

相交于一点的充分必要条件是$a+b+c=0$.

证明 必要性 设所给三条直线交于一点$M(x_0, y_0)$,

则$x=x_0, y=y_0, z=1$可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ bx+cy+az=0, \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$ 的非零解.

从而有系数行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$D = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(a+b+c)\cdot\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

因为三条直线互不相同,所以a,b,c也不全相同,

故$a+b+c=0.$

充分性　如果$a+b+c=0$,将方程组

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ bx + cy = -a, \\ cx + ay = -b \end{cases} \quad (1)$$

的第一、二两个方程加到第三个方程，得

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ bx + cy = -a, \\ 0 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
&= [a^3 + b^3] + c^3 - 3abc \\
&= [(a+b)^3 - 3ab(a+b)] + c^3 - 3abc \qquad [Put\ (a+b) = x] \\
&= x^3 - 3abx + c^3 - 3abc \\
&= x^3 + c^3 - 3abx - 3abc \\
&= (x+c)(x^2 + c^2 - cx) - 3ab(x+c) \\
&= (x+c)[(x^2 + c^2 - cx - 3ab] \qquad [\mathrm{Replace}\ x = a+b] \\
&= (a+b+c)[(a+b)^2 + c^2 - c(a+b) - 3ab] \\
&= (a+b+c)[a^2 + b^2 + 2ab + c^2 - ca - bc) - 3ab] \\
&= (a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca]
\end{aligned}$$

下证此方程组（2）有唯一解.

反证法： 如果 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$，则 $ac = b^2 \geq 0$.

由 $b = -(a+c)$ 得 $ac = b^2 = [-(a+c)]^2 = a^2 + 2ac + c^2$,

于是 $ac = -(a^2 + c^2) \leq 0$，从而有 $ac = 0$.

$$a = 0, b = 0, c = 0$$

与题意矛盾!