

# 实验八 线性函数极值求解

## 实验目的

- 1.学会根据实际问题建立线性规划模型.
- 2.掌握用**matlab**软件求解线性函数极值问题.
- 3.学会建立**0-1**模型，掌握用**matlab**软件求解**0-1**规划问题.

- \* 美国空军为了保证士兵的营养，规定每餐的食品中，要保证一定的营养成份，例如蛋白质、脂肪、维生素等等，都有量的规定。当然这些营养成份可以由各种不同的食物来提供，例如牛奶提供蛋白质和维生素，黄油提供蛋白质和脂肪，胡萝卜提供维生素等等。由于战争条件的限制，食品种类有限，又要尽量降低成本，于是在一盒套餐中，**如何决定各种食品的数量，使得既能满足营养成份的需要，又可以降低成本？**
- \* 现代管理问题虽然千变万化，但大致上总是要**利用有限的资源，去追求最大的利润或最小的成本，如何解决这些问题？**

**解决问题的方法：运筹学（线性规划）**

**(OR)**

**(LP)**

- \* 在波斯湾战争期间，美国军方利用线性规划，有效地解决了部队给养和武器调运问题，对促进战争的胜利，起了关键的作用。甚至有这样的说法：因为使用炸药，第一次世界大战可以说是「**化学的战争**」；因为使用原子弹，第二次世界大战可说是「**物理的战争**」；因为使用线性规划，波斯湾战争可称为「**数学的战争**」。
- \* 在历史上，没有哪种数学方法，可以像线性规划那样，直接为人类创造如此巨额的财富，并对历史的进程发生如此直接的影响。

# 一、引例

## 例1 （生产计划问题）

某企业生产A，B两种产品，成本和利润指标如下：

	A	B	备用资源
煤	1	2	30
劳动日	3	2	60
仓库	0	2	24
利润	40	50	

问：A，B各生产多少，可获最大利润？

**解:**设产品A, B的产量分别为变量 $x_1$ ,  $x_2$ , 则:

$$\begin{array}{ll}\max & f = 40x_1 + 50x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60, \\ 2x_2 \leq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases}\end{array}$$

	A	B	备用资源
煤	1	2	30
劳动日	3	2	60
仓库	0	2	24
利润	40	50	

## 例2 (运输问题)

某棉纺厂的原棉需从仓库运送到各车间。各车间原棉需求量，单位产品从各仓库运往各车间的**运输费**以及各仓库的**库存容量**如下表所列：

仓库 \ 车间	1	2	3	库存容量
1	2	1	3	50
2	2	2	4	30
3	3	4	2	10
需求	40	15	35	

问：如何安排运输任务使得**总运费**最小？

**解：** 设 $x_{ij}$ 为 $i$  仓库运到 $j$ 车间的原棉数量( $i = 1, 2, 3$ ;  
 $j = 1, 2, 3$ )。 则

$$\min f = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 3x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33}$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 30, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 10, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 35, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \end{array} \right.$$

车间 仓库	1	2	3	库存容量
1	2	1	3	50
2	2	2	4	30
3	3	4	2	10
需求	40	15	35	

### 例3 (资源配置问题)

有一批长度为7.4m的钢筋若干根。现有5种下料方案，分别作成2.9m， 2.1m， 1.5m的钢筋架子各100根。每种下料方案及剩余料头如下表所示：

	I	II	III	IV	V
2.9m	1	2	0	1	0
2.1m	0	0	2	2	1
1.5m	3	1	2	0	3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

问：如何下料使得剩余料头最少？



**解：** 设按第*i*种方案下料的原材料为 $x_i$ 根， 则：

$$\min Z = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100, \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100, \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, 5), \text{ 且为整数;} \end{cases}$$

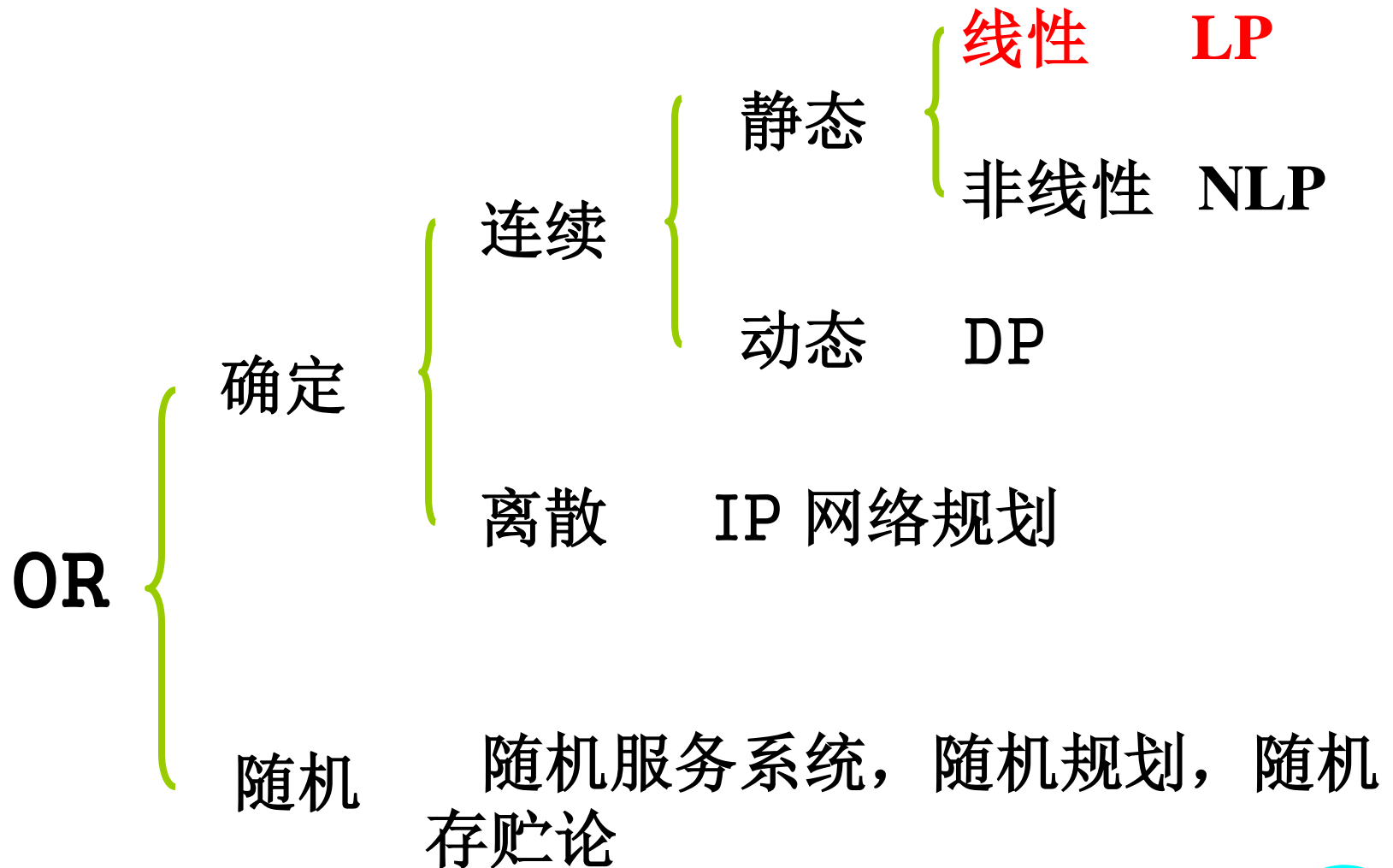
	I	II	III	IV	V
2. 9m	1	2	0	1	0
2. 1m	0	0	2	2	1
1. 5m	3	1	2	0	3
合计	7. 4	7. 3	7. 2	7. 1	6. 6
料头	0	0. 1	0. 2	0. 3	0. 8

## 以上问题的特点：

- 1.在人力、财力、资源给定条件下，如何合理安排任务，使得效益最高.
- 2.某项任务确定后，如何安排人力、财力、物力，使之最省.

即以上问题都是在决策变量满足一定条件下，求目标函数（线性函数）的最大值或最小值问题。这类问题称为线性规划LP（Linear Programming）问题。

# 以模型的特点分类:



## 二、线性规划问题的一般形式

$$\min \text{ (or max) } f(x)=c_1x_1+ c_2x_2+\dots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1+ a_{12}x_2+\dots+ a_{1n}x_n \geq (=, \leq) b_1, \\ a_{21}x_1+ a_{22}x_2+\dots+ a_{2n}x_n \geq (=, \leq) b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2+\dots+ a_{mn}x_n \geq (=, \leq) b_m, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,\dots,n) ; \end{array} \right.$$

$$\min \text{ (or max) } f(x)=C^T x \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (3)$$

$$\min (\text{or } \max) f(x)=C^T x \quad (1)$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (3)$$

**定义1:** 满足约束(2)、(3)的 $x=(x_1, \dots, x_n)^T$ 称为LP问题的可行解，全部可行解的集合称为可行域。

**定义2:** 满足(1)的可行解称为LP问题的最优解。

### 三、线性规划问题的求解方法

1. 二元线性规划问题的图解法（掌握）
2. 线性规划问题的理论解法（了解）
3. 线性规划问题的MATLAB软件解法（重点掌握）

# 1.二元线性规划问题的图解法

## 例4（配餐问题）

营养学家指出，成人日常饮食每天至少要摄入**75克**碳水化合物、**60克**蛋白质和**60克**脂肪。现有甲乙两种食物，在每千克甲中含**105克**碳水化合物，**70克**蛋白质、**140克**脂肪，花费为**28元**，在每千克乙中含**105克**碳水化合物，**140克**蛋白质、**70克**脂肪，花费为**21元**，请设计出符合营养学家要求并且花费最少的营养配餐。

食物 (千克)	碳水化合物 (千克)	蛋白质 (千克)	脂肪 (千克)
甲	0.105	0.07	0.14
乙	0.105	0.14	0.07
最少摄入量	0.075	0.06	0.06

解： 设每天选择甲  $x$  千克， 乙 $y$ 千克。

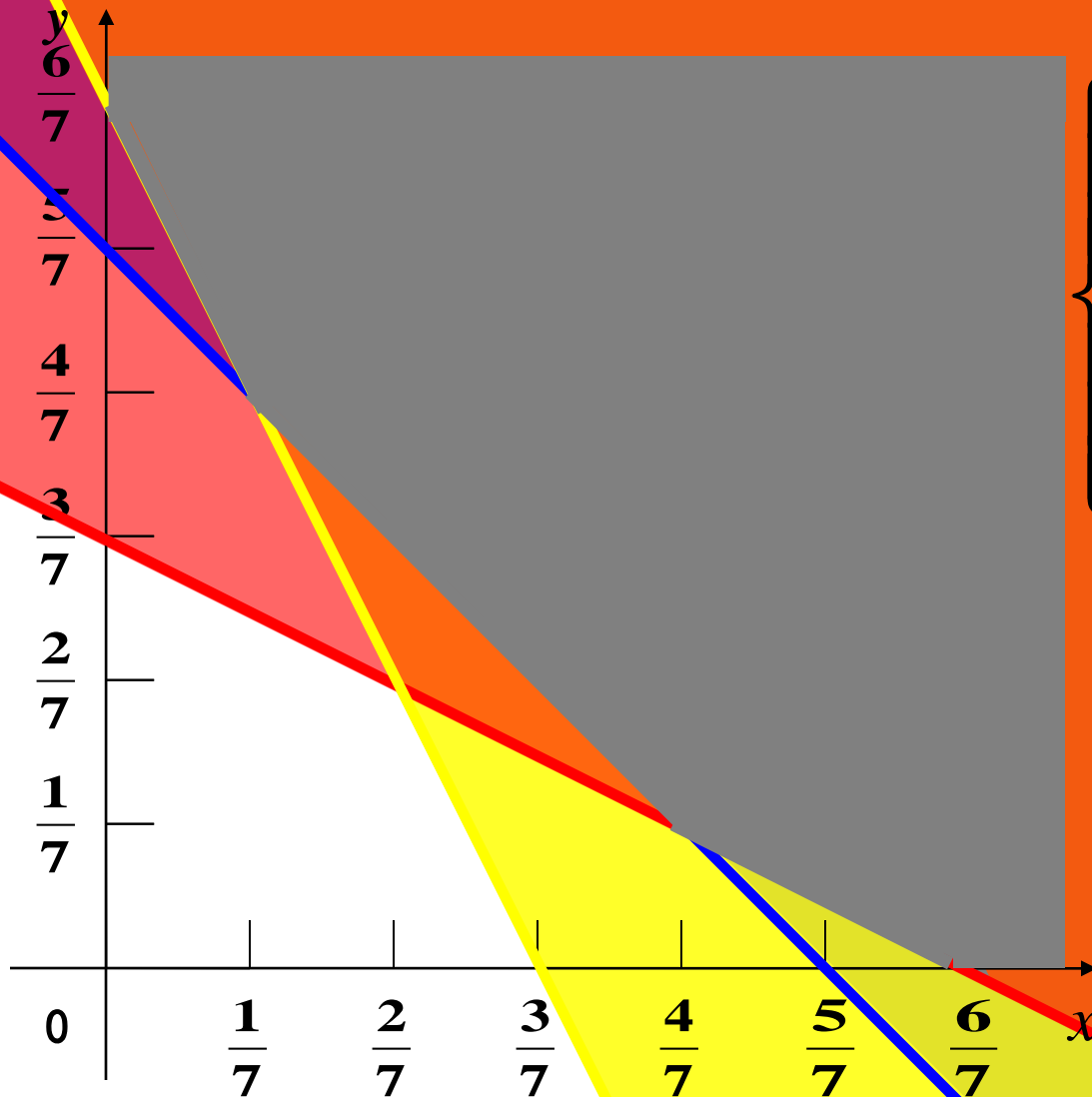
$$\min f = 28x + 21y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.105x + 0.105y \geq 0.075 \\ 0.07x + 0.14y \geq 0.06 \\ 0.14x + 0.07y \geq 0.06 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad \textcircled{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x + 7y \geq 5 \\ 7x + 14y \geq 6 \\ 14x + 7y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad \textcircled{2}$$

食物 (千克)	碳水化合物 (千克)	蛋白质 (千克)	脂肪 (千克)	费用
甲	0.105	0.07	0.14	28
乙	0.105	0.14	0.07	21
最少摄入量	0.075	0.06	0.06	

作出二元一次不等式组②所表示的平面区域



$$\begin{cases} 7x + 7y \geq 5 \\ 7x + 14y \geq 6 \\ 14x + 7y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

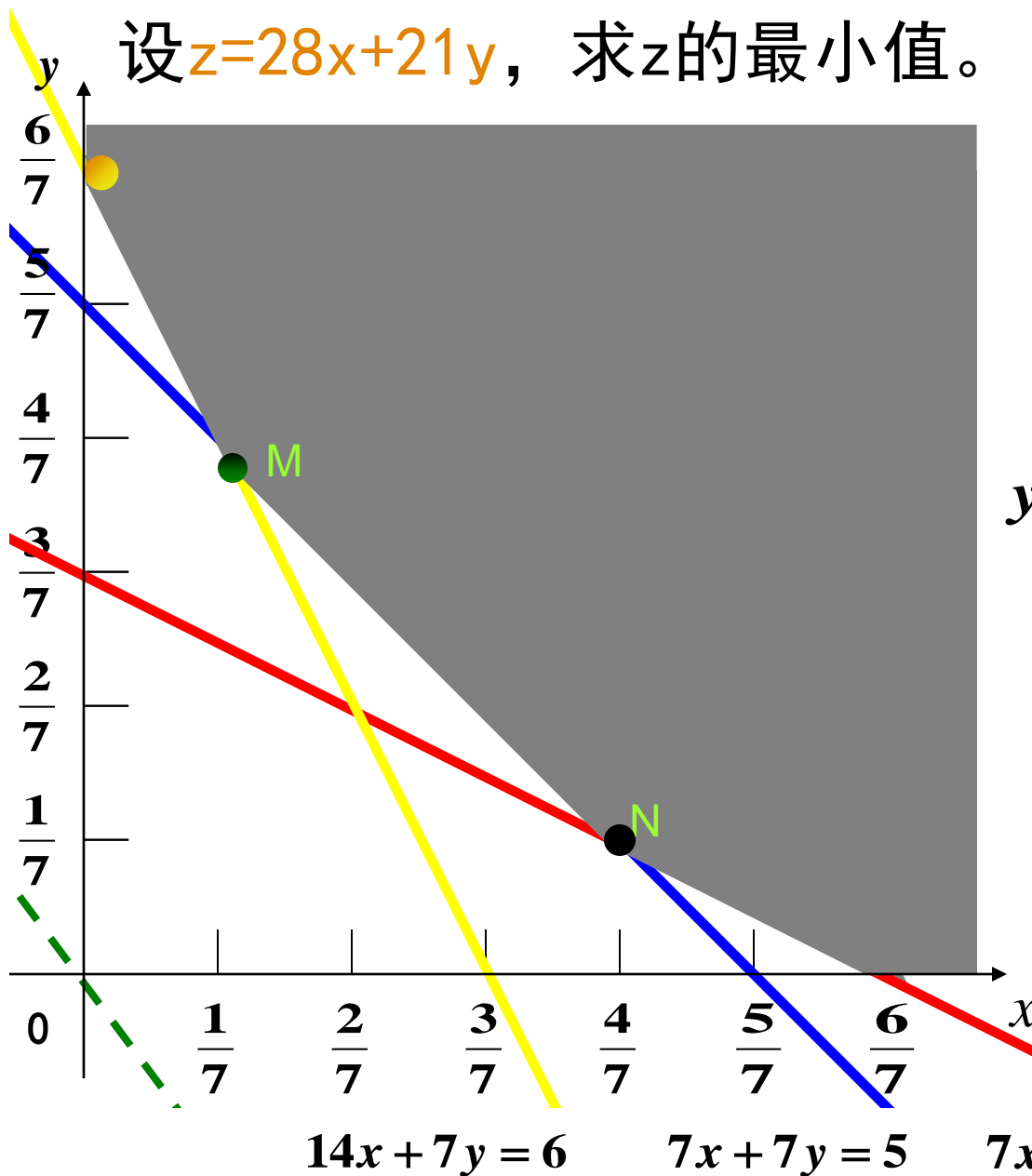
$$14x + 7y = 6$$

$$7x + 7y = 5$$

$$7x + 14y = 6$$



设 $z=28x+21y$ ，求 $z$ 的最小值。



第一步：点 $(x, y)$ 在此平面区域内运动时，如何求 $z=28x+21y$ 的最小值。

第二步：由 $z=28x+21y$ 得：  
 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{C}{21}$ ，观察这族直线与此平面区域的公共点。

第三步：直线族与可行域接触到的第一个公共点处， $z$ 的值最小。

解方程组：
$$\begin{cases} 7x + 7y = 5 \\ 14x + 7y = 6 \end{cases}$$

得 $M$ 点的坐标为  $x = \frac{1}{7} \approx 0.143, y = \frac{4}{7} \approx 0.571$

所以  $z_{\min} = 28x + 21y = 16$

答：每天食用食物A 143g，食物B 571g，能够满足日常饮食要求，又使花费最低，最低成本为16元。

**例5** 图解法求解**例1**中的生产计划问题.

$$\max f = 40x_1 + 50x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60, \\ 2x_2 \leq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

解：(1)、确定可行域

$x_1 \geq 0$ ;  $\rightarrow x_1 = 0$  (纵)

$x_2 \geq 0$ ;  $\rightarrow x_2 = 0$  (横)

$x_1 + 2x_2 \leq 30$

$\rightarrow x_1 + 2x_2 = 30$

与坐标轴交点:

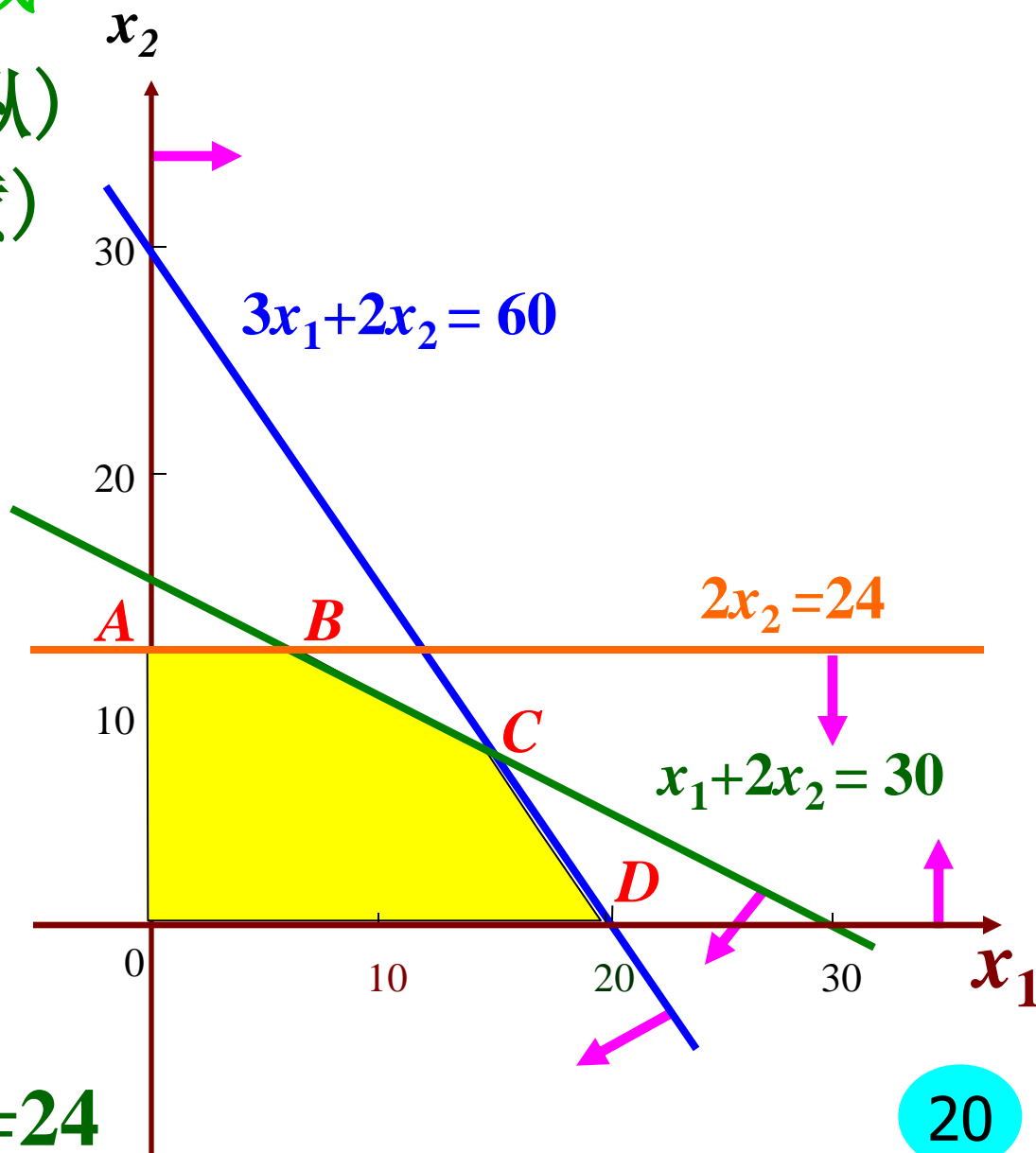
$(0, 15) (30, 0)$

$3x_1 + 2x_2 \leq 60$

$\rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 60$

$(0, 30), (20, 0)$

$2x_2 \leq 24 \rightarrow 2x_2 = 24$



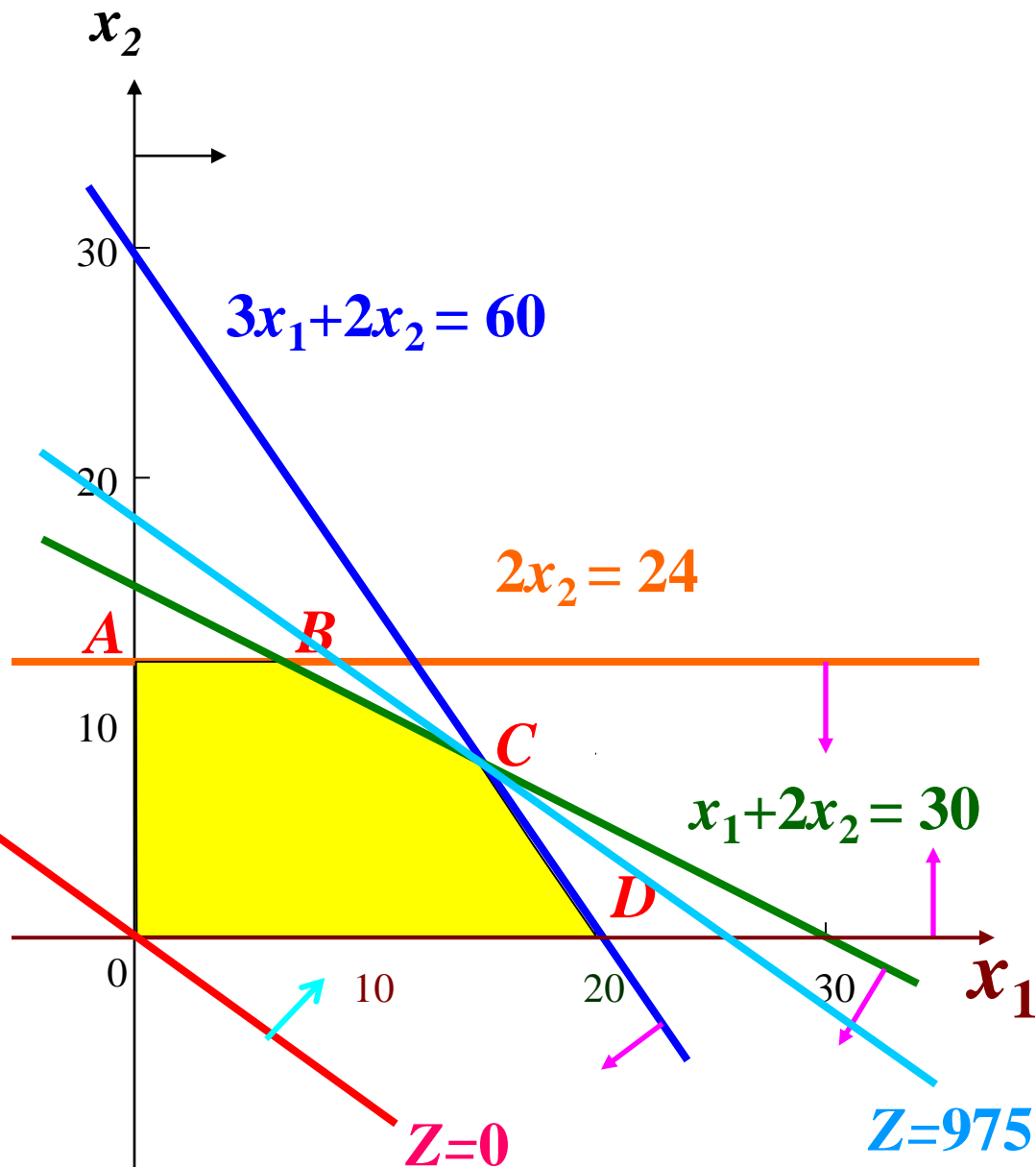
## (2)、求最优解

$$Z=40x_1+50x_2$$

$$C点: \begin{cases} x_1+2x_2=30 \\ 3x_1+2x_2=60 \end{cases}$$

$$x^* = (15, 7.5)$$

$$Z_{max}=975$$



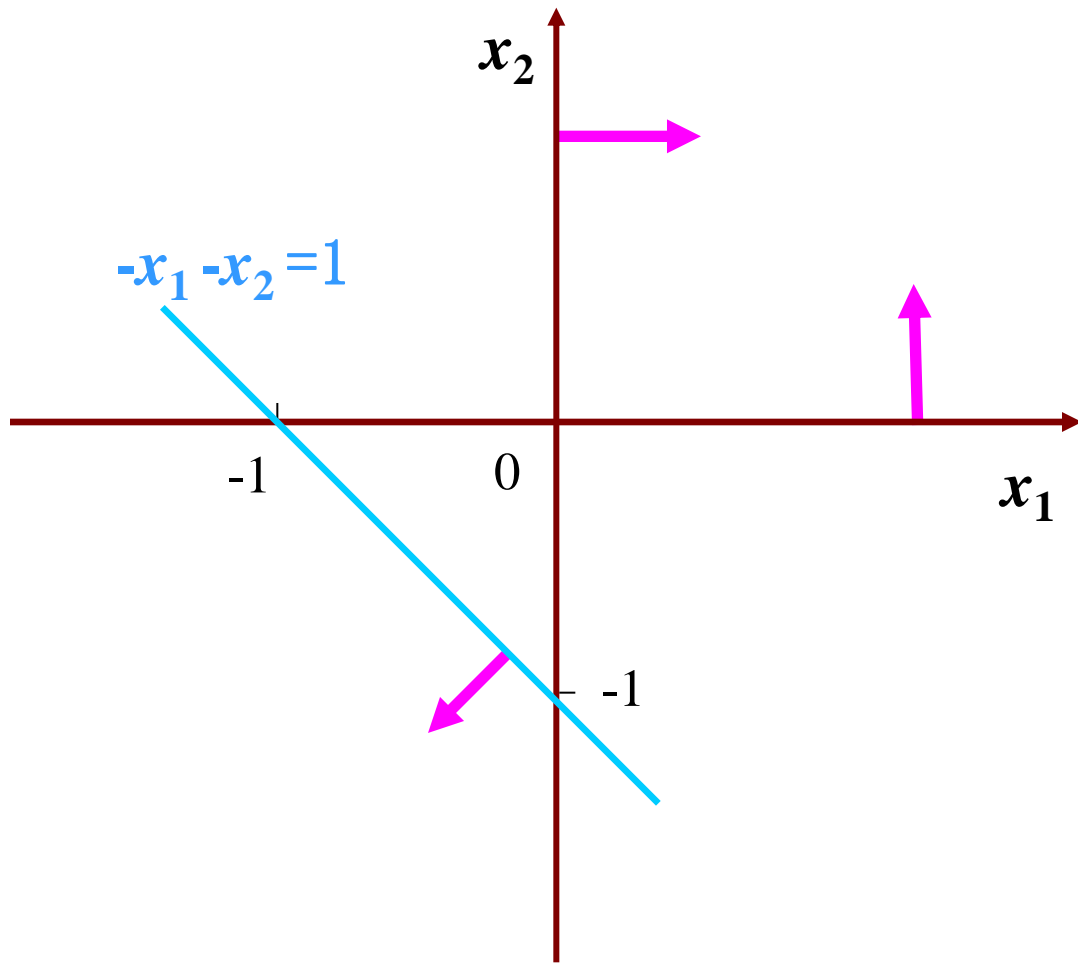
**例6** 图解法求解下列线性规划问。

$$\max f=3x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

可行域无解.

即无可行解.



## 2.线性规划问题的理论解法——单纯形法

线性规划的标准形式

$$\begin{array}{ll}\min & f(x)=C^T x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x \geq 0\end{array}$$

- (1) 当约束条件中有“ $\leq$ ”时，加上一个非负新变量，使之成为**等式**。这个新变量称为松弛变量。
- (2) 当约束条件中有“ $\geq$ ”时，减去一个非负新变量，使之成为**等式**。这个新变量称为剩余变量。
- (3) 当约束条件右端常数项为负数时，将等式两边乘以（-1），即  $a_{ij}$  变成  $-a_{ij}$ ，新的  $b_i \geq 0$
- (4) 当某一决策变量**没有非负限制**时，引进两个新的非负变量  $y_i, z_i$ ，使得  $x_i = y_i - z_i$  代入约束条件和目标函数中，即可化为**非负变量**的问题。

$$\begin{array}{ll}\min & f(x)=C^T x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x \geq 0\end{array}$$

$$A = [A_B, A_N] \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

基变量

基矩阵

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}(b - A_N x_N) \\ x_N \end{bmatrix} \quad x_N = 0 \quad x' = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) 将模型标准化，找出所有的基矩阵；

(2) 找出每个基矩阵对应的基本解；

(3) 在所有的基本解中找出基本可行解；

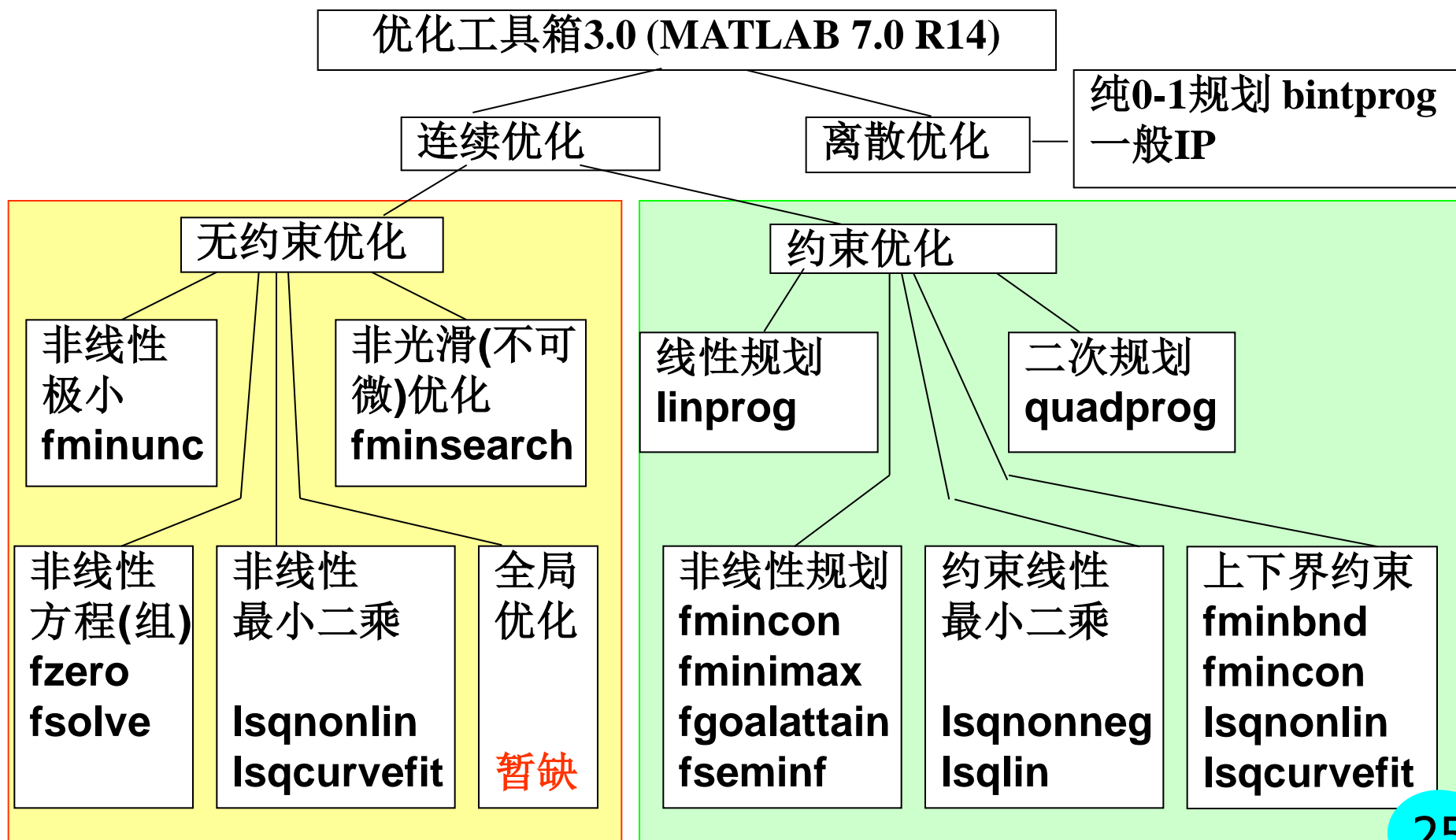
(4) 通过计算目标函数的值在所有的基本可行解中找出最优解。

步骤



# 线性规划问题的软件解法

## MATLAB优化工具箱能求解的优化模型



### 3.求解线性规划的MATLAB命令

$$\min z = C'x,$$

$$\text{s.t } Ax \leq b$$

$$x = \text{linprog}(C, A, b)$$

$$\min z = C'x,$$

$$\text{s.t } Ax \leq b,$$

$$aeq'x = beq,$$

$$vlb \leq x \leq vub$$

$$x = \text{linprog}(C, A, b, aeq, beq, vlb, vub)$$

若没有不等式约束,可用[]替代A和b,

若没有等式约束,可用[]替代aeq和beq,

若某个 $x_i$ 下无界或上无界,可设定-inf或inf ;

用[x, Fval]代替上述命令行中的x , 可得最优解处的函数值Fval.

## 软件解法：例1（生产计划问题）

$$\max f = 40x_1 + 50x_2$$

$$\min -f = -40x_1 - 50x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60, \\ 2x_2 \leq 24, \end{cases}$$

	A	B	备用资源
煤	1	2	30
劳动日	3	2	60
仓库	0	2	24
利润	40	50	

```
c=[-40,-50];
```

```
a=[1,2;3,2;0,2];
```

```
b=[30;60;24];
```

```
x=linprog (c,a,b)
```

```
f=c*x
```

```
>> Optimization terminated successfully.
```

```
x =
```

```
15.0000
```

```
7.5000
```

```
f =
```

```
-975.0000
```

## 软件解法：例2 （运输问题）

设 $x_{ij}$ 为 $i$  仓库运到 $j$ 车间的原棉数量.

$$\min f = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 3x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 30, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 10, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 35, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \end{array} \right.$$

车间 仓库	1	2	3	库存容量
1	2	1	3	50
2	2	2	4	30
3	3	4	2	10
需求	40	15	35	

## 软件解法：例2（运输问题）

重新整理

$$\min f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 2x_9$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_4 + x_7 = 40, \\ x_2 + x_5 + x_8 = 15, \\ x_3 + x_6 + x_9 = 35, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 50, \\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 30, \\ x_7 + x_8 + x_9 \leq 10, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 9; \end{cases}$$

## 软件解法：例2 （运输问题）

```
c=[2,1,3,2,2,4,3,4,2];  
a(1,:)= [1,1,1,0,0,0,0,0,0];  
a(2,:)= [0,0,0,1,1,1,0,0,0];  
a(3,:)= [0,0,0,0,0,0,1,1,1];  
b=[50;30;10];  
aeq(1,:)= [1,0,0,1,0,0,1,0,0];  
aeq(2,:)= [0,1,0,0,1,0,0,1,0];  
aeq(3,:)= [0,0,1,0,0,1,0,0,1];  
beq=[40;15;35];  
vlb=zeros(9,1); % lower bound of vector x %  
vub=[]; % upper bound of vector x %  
x=linprog(c,a,b,aeq,beq,vlb,vub)  
f=c*x
```

## 软件解法：例2 （运输问题）

```
>> Optimization terminated successfully.
```

```
x =
```

```
10.0000
```

```
15.0000
```

```
25.0000
```

```
30.0000
```

```
0.0000
```

```
0.0000
```

```
0.0000
```

```
0.0000
```

```
10.0000
```

```
f =
```

```
190.0000
```

## 软件解法：例4（配餐问题）

$$\begin{cases} 7x + 7y \geq 5 \\ 7x + 14y \geq 6 \\ 14x + 7y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{7} \approx 0.143, y = \frac{4}{7} \approx 0.571$$

$$z_{\min} = 28x + 21y = 16$$

x =
0.1429
0.5714
f =
16.0000

食物 (千克)	碳水化合物 (千克)	蛋白质 (千克)	脂肪 (千克)
甲	0.105	0.07	0.14
乙	0.105	0.14	0.07
最少摄入量	0.075	0.06	0.06

```
c=[28,21];  
a=[-7 -7;-7 -14;-14 -7];  
b=[-5;-6;-6];  
aeq=[];  
beq=[];  
vlb=[0;0];  
vub=[];  
x=linprog(c,a,b,aeq,beq,vlb,vub);  
f=c*x
```



## 4.用matlab软件求解0-1规划问题

混合整数规划问题:

$$\min z=C^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \leq b \\ aeq \cdot x = beq \\ vlb \leq x \leq vub \\ x \text{中的分量取整.} \end{cases}$$

混合整数规划问题的命令调用格式:

$$[x,fval]=intlinprog(c,lintcon,A,b,aeq,beq,vub)$$

## 例7 求解混合整数线性规划问题

$$\min f = 8x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq -14 \\ -4x_1 - x_2 \leq -33 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_2 \text{取整数} \end{cases}$$

`c=[8;1];`

`intcon=2;`

`A=[-1,-2;-4,-1;2,1];`

`b=[14;-33;20];`

`[x f]=intlinprog(c,intcon,A,b)`

`x =`

6.5000

7.0000

`f =`

59.0000

若 $x_1, x_2$ 均为整数, `intcon=1:2`

`[x,fval]=intlinprog(c,lintcon,A,b,aeq,beq,vub)`

# 例8 人员配置问题

某城市110巡警大队要求每天各个时间段均有一定数量的警员值班，每人连续工作6小时，一天8个班次所需警员人数如下：求该城市110巡警大队至少需要多少警员满足值班要求？

班次	时间段	人数	班次	时间段	人数
1	6:00-9:00	70	5	18:00-21:00	80
2	9:00-12:00	80	6	21:00-24:00	100
3	12:00-15:00	65	7	24:00-3:00	120
4	15:00-18:00	90	8	3:00-6:00	90

设第 $i(i = 1, 2, 3 \cdots, 8)$  个班次开始上班的警员数为 $x_i$ ,

$$\min z = x_1 + x_2 + \cdots + x_8$$

s.t.

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq 80; x_2 + x_3 \geq 65; x_3 + x_4 \geq 90; x_4 + x_5 \geq 0; x_5 + x_6 \geq 100; \\ &x_6 + x_7 \geq 120; x_7 + x_8 \geq 90; x_8 + x_1 \geq 70; x_i \geq 0, x_i \text{取整数}, i = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned}$$

```

c=[1,1,1,1,1,1,1,1];
A=[-1,0,0,0,0,0,0,-1;
   -1,-1,0,0,0,0,0,0;
   0,-1,-1,0,0,0,0,0;
   0,0,-1,-1,0,0,0,0;
   0,0,0,-1,-1,0,0,0;
   0,0,0,0,-1,-1,0,0;
   0,0,0,0,0,-1,-1,0;
   0,0,0,0,0,0,-1,-1];
b=[-70;-80;-65;-90;-80;-100;-
   120;-90];
aeq=[];beq=[];
intcon=1:8;
lb=[0,0,0,0,0,0,0,0]';ub=[inf;inf;in
f;inf;inf;inf;inf;inf];
[x,f]=intlinprog(c,intcon,A,b,aeq,
beq,lb,ub)

```

x =

25

55

10

80

0

100

20

70

f =

360

## 5.用matlab软件求解0-1规划问题

**0-1**规划是一种特殊形式的整数规划，要求决策变量**仅取0或1**。

**0-1**规划适合求解的问题：线路设计、工厂选址、旅行购物、背包问题、人员安排、代码选取、资源分配、装载问题、以及投资决策问题。

**0-1规划的一般形式**

$$\min z=C^T x \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b \quad (2)$$

$$aeq \cdot x = beq \quad (3)$$

$$x_i \in \{0,1\}, i=1,2,\cdots,n$$

其中，**A**和**aeq**是矩阵，**c**,**b**和**beq**是列向量，若没有等式约束，则

$$\text{令 } aeq = [\quad], beq = [\quad], c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

# matlab软件求解0-1规划问题

**x=bintprog(c)**                      %求解无约束0-1规划问题

**x=bintprog(c,A,b)**              %求解带约束条件  $Ax \leq b$  的0-1  
规划问题

**x=bintprog(c,A,b,aeq,beq)**

%求解带约束条件  $Ax \leq b, aeq \cdot x = beq$  的0-1规划问题

**注意：** R2018b版本没有0-1规划命令bintprog,可以用混合整数、规划命令intlinprog来解决0-1规划问题.

## 例8 求解下列0-1规划问题

$$\max f = -3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\min -f = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

`c=[3,-2,5];`

`a=[1,2,-1;1,4,1;1,1,0;0,4,1];`

`b=[2;4;3;6];`

`[x,fval]=bintprog(c,a,b);`

`Xmax=x,fmax=-fval`

xmax =

0

1

0

fmax =

2

## 例9 背包问题

现有容积为1.5立方米的背包，6件物品的价格分别为0.7,0.5,0.4,0.6,0.8,0.55（万元），物品的体积分别为0.35,0.3,0.6,0.4,0.7,0.5立方米，试确定一种方案：选取哪几件物品装入包内，可使背包所装物品的总价值最大？

**分析：**该问题的实质是如何选择物品装入背包，在背包的容积限定之内使包内物品的总价值最大.

$$\begin{aligned} \max f &= 0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 0.6x_4 + 0.8x_5 + 0.55x_6 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 0.35x_1 + 0.3x_2 + 0.6x_3 + 0.4x_4 + 0.7x_5 + 0.5x_6 \leq 1.5 \\ x_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\dots,6 \end{cases} \end{aligned}$$



```
c=[-0.7;-0.5;-0.4;-0.6;-0.8;-0.55];  
A=[0.35,0.3,0.6,0.4,0.7,0.5];  
b=[1.5]  
[x,fval]=bintprog(c,A,b)  
xmax=x  
fmax=-fval
```

xmax =

1  
0  
0  
1  
1  
0

fmax =

2.1000

## 四、综合实例一 投资的收益和风险

市场上有 $n$ 种资产 $S_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 可以选择, 现用数额为 $M$ 的相当大的资金作一个时期的投资。财务人员分析估算出这一时期内购买 $S_i$ 的平均收益率为 $r_i$ , 风险损失率为 $q_i$ , 投资越分散, 总的风险越小, 总体风险可用投资的 $S_i$ 中最大的一个风险来度量。

购买 $S_i$ 时要付交易费, 费率 $p_i$  (不买无须付费). 当购买额不超过给定值 $u_i$ 时, 交易费按购买 $u_i$ 计算. 另外, 假定同期银行存款利率是 $r_0$ , 既无交易费又无风险。(  $r_0=5\%$ )

已知 $n=4$ 时的相关数据如下:

$S_i$	$r_i$	$q_i$	$p_i$	$u_i$
$S_1$	28	2.5	1	103
$S_2$	21	1.5	2	198
$S_3$	23	5.5	4.5	52
$S_4$	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定达到资金 $M$ ，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，使总体风险尽可能小。

# 基本假设

1. 投资数额 $M$ 相当大, 为了便于计算, 假设 $M=1$ ;
2. 投资越分散, 总的风险越小;
3. 总体风险 $S_i$ 用投资项目中最大的一个风险来度量;
4.  $n$ 种资产  $S_i$  之间是相互独立的;
5. 在投资的这一时期内,  $r_i, p_i, q_i, r_0$  为定值, 不受意外因素影响;
6. 净收益和总体风险只受 $r_i, p_i, q_i$ 影响, 不受其他因素干扰。

# 符号规定

- $S_i$ ——第 $i$ 种投资资产，如股票，债券；
- $r_i, p_i, q_i$ ——分别为 $S_i$ 的平均收益率，风险损失率，交易费率；
- $u_i$ —— $S_i$ 的交易定额；
- $r_0$ ——同期银行利率；
- $x_i$ ——投资资产 $S_i$ 的资金；
- $a$  ——投资风险度；
- $Q$ ——总体收益.

# 模型的建立与分析

1. 总体风险用所投资的 $S_i$ 中最大的一个风险来衡量,即 $\max\{q_i x_i | i=1, 2, \dots, n\}$ ;
2. 购买 $S_i$ 所付交易费是一个分段函数,即
  - 交易费 = 
$$\begin{cases} p_i x_i & x_i > u_i \\ p_i u_i & x_i \leq u_i \end{cases}$$
  - 而题目所给定的定值 $u_i$ (单位:元)相对总投资 $M$ 很小, $p_i u_i$ 更小,可以忽略不计,这样购买 $S_i$ 的净收益为 $(r_i - p_i)x_i$

## 建立模型

$$\max \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i$$

净收益尽可能大

$$\min \max(q_i x_i)$$

总体风险尽可能小

$$s.t \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

多目标规划问题

# 模型转化

## 固定风险水平，极大化收益

在实际投资中，投资者承受风险的程度不一样，若给定每只股票风险一个界限 $a$ ，使最大的一个风险  $q_i x_i / M \leq a$ ，可找到相应的投资方案。

$$\max \sum_{i=0}^n (r_i - p_i) x_i$$

$$s.t \begin{cases} q_i x_i \leq a / M \\ \sum_{i=0}^n (1 + p_i) x_i = M \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

模型一  
线性规划模型



# 模型的求解

将具体数据代入,模型一如下:

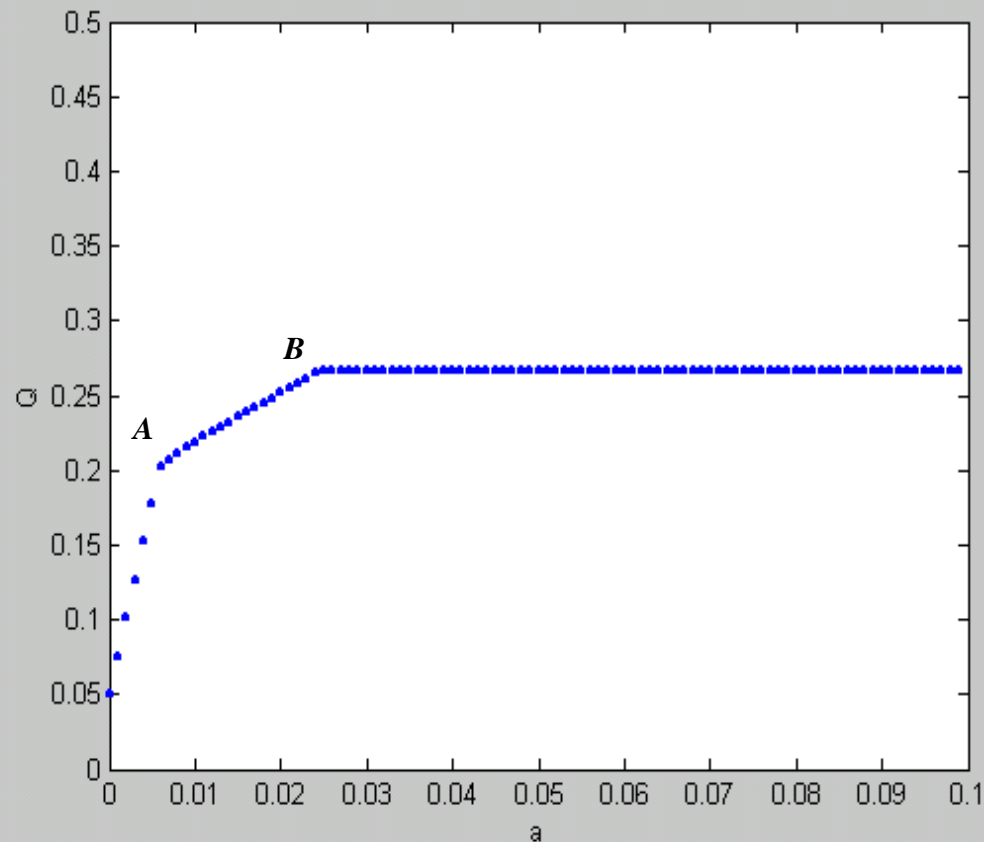
$$\begin{aligned} \min f &= (-0.05, -0.27, -0.19, -0.185, -0.185) (x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)^T \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 = 1 \\ 0.025x_1 \leq a \\ 0.015x_2 \leq a \\ 0.055x_3 \leq a \\ 0.026x_4 \leq a \\ x_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4) \end{cases} \end{aligned}$$

由于 $a$ 是任意给定的风险度, 到底怎样给定没有一个准则, 不同的投资者有不同的风险度。我们从 $a=0$ 开始, 以步长 $\Delta a=0.001$ 进行循环搜索, 编制程序如下:

```
a=0;
while a<1.4
    c=[-0.05 -0.27 -0.19 -0.185 -0.185];
    aeq=[1 1.01 1.02 1.045 1.065]; beq=[1];
    A=[0 0.025 0 0 0;0 0 0.015 0 0;0 0 0 0.055 0;0 0 0 0 0.026];
    b=[a;a;a;a];
    vlb=[0,0,0,0,0];vub=[];
    [x,val]=linprog(c,A,b,aeq,beq,vlb,vub);
    a
    x=x'
    Q=-val
    plot(a,Q,'. '),axis([0 0.1 0 0.5]),hold on
    a=a+0.001;
end
xlabel('a'),ylabel('Q')
```

## 计算结果:

$a = 0.0030$	$x = 0.4949$	0.1200	0.2000	0.0545	0.1154	$Q = 0.1266$
<b><math>a = 0.0060</math></b>	<b><math>x = 0</math></b>	<b>0.2400</b>	<b>0.4000</b>	<b>0.1091</b>	<b>0.2212</b>	<b><math>Q = 0.2019</math></b>
$a = 0.0080$	$x = 0.0000$	0.3200	0.5333	0.1271	0.0000	$Q = 0.2112$
$a = 0.0100$	$x = 0$	0.4000	0.5843	0	0	$Q = 0.2190$
$a = 0.0200$	$x = 0$	0.8000	0.1882	0	0	$Q = 0.2518$
$a = 0.0400$	$x = 0.0000$	0.9901	0.0000	0	0	$Q = 0.2673$



# 模型一结果分析

1. 风险大，收益也大。
2. 当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题意一致。即：  
冒险的投资者会出现集中投资的情况，保守的投资者则尽量分散投资。
3. 曲线上的任一点都表示该风险水平的最大可能收益和该收益要求的最小风险。对于不同风险的承受能力，选择该风险水平下的最优投资组合。

4. 分别在 $a=0.006$ 和 $a=0.025$ 附近有两个转折点A和B，在 $a=0.006$ 点左边，风险增加很少时，利润增长很快；在 $a=0.006$ 和 $a=0.025$ 之间，风险增加很大时，利润增长很缓慢；在 $a=0.025$ 右边，风险增加时利润不再增加，达到稳定值0.2637。

(1) 对于风险厌恶型的投资者来说，应该选择曲线左边的转折点A作为最佳投资组合。此时风险度为 $a=0.0060$ ，收益为 $Q=0.2019$ ，所对应投资方案为：

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0.2400	0.4000	0.1091	0.2212

(2) 对于风险喜好型的投资者来说，应该选择曲线右边的转折点B作为最佳投资组合。此时风险度为 $a=0.025$ ，收益为 $Q=26.73\%$ ，所应投资方案为：

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0.9901	0.0000	0.0000	0.0000

## 例: 决策问题

某一学生在大学三年级，第一学期必须要选修的课程（必修课）只有一门（2个学分）；可供限定选修的课程有8门，任意选修课程有10门。由于有些课程之间有联系，所以可能在选修的某门课程中必须同时选修其他课程，这18门课程的学分数和要求同时选修课程的相应信息如下表所示。按学校规定，每个学生每学期选修的总学分不能少于21学分，因此，学生必须在上述18门课程中至少选修19学分，学校同时还规定学生每学期选修任意选修课的学分不能少于3学分，也不能超过6学分。为了达到学校的要求，为该学生确定一种选课方案。

限定选修课	课号	1	2	3	4	5	6	7	8		
	学分	5	5	4	4	3	3	3	2		
	选修要求					1		2			
任意选修课	课号	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	学分	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
	选修要求	8	6	4	5	7	6				

$$\min z = \sum_{i=1}^{18} x_i$$

$$s.t. \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 3x_{10} + \\ 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + 2 \geq 21, \\ 3x_9 + 3x_{10} + 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \geq 3, \\ 3x_9 + 3x_{10} + 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \leq 6, \\ x_1 \geq x_5, \\ x_2 \geq x_7, \\ x_8 \geq x_9, \\ x_6 \geq x_{10}, \\ x_4 \geq x_{11}, \\ x_5 \geq x_{12}, \\ x_7 \geq x_{13}, \\ x_6 \geq x_{14}, \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1, \end{cases}$$

程序

```
c=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1];
a=[-5,-5,-4,-4,-3,-3,-3,-2,-3,-3,-3,-2,-2,-2,-1,-1,-1,-1;
0,0,0,0,0,0,0,0,-3,-3,-3,-2,-2,-2,-1,-1,-1,-1;
0,0,0,0,0,0,0,0,3,3,3,2,2,2,1,1,1,1;-1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,-1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;0,0,0,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,-1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0;0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0;0,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0]; b=[-21;-3;6;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]
aeq=[];beq=[];vlb=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
vub=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];
x=linprog(c,a,b,aeq,beq,vlb,vub)
```

X =

1  
1  
1  
1  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
1  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0



# 本次上机任务：

(1) 读懂教材各示例；

(2) 完成第**167**页练习1第**1， 2**题， 第**178**页练习2第**5,6**题.  
第**182**页第**1,2**题.