例1 计算

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例2计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

例3计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

例4计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

例5计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \vdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

例6证明：n ≥ 2 阶Vandermond行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

例7计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

（以5阶来说明n阶的计算）

例8计算行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} au+cv & as+ct \\ bu+dv & bs+dt \end{vmatrix}=(ad-bc)(ut-vs)$$

例9计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

例10已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数.

例11计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

（第一行乘1加到其它各行）

例12计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

（从第n列开始，后一列乘1加到前一列）

例13计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

（箭形行列式；其它各行乘-1加到第一行）

例14计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\1&x&x_2&\cdots&x_n\\1&x_1&x&\vdots&x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&x_1&x_2&\cdots&x\end{vmatrix}$$

（第1行乘-1加到其它各行）

例15计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$(\text{其中} a_1a_2\cdots a_{n-1}\neq 0)$

思考题

证明分块三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mm} \end{vmatrix}$$

（对n作数学归纳法证明）