第五章 线性空间与欧氏空间

第一节 线性空间的基本概念

第二节 欧氏空间的基本概念

第一节 线性空间的基本概念

作业

习题5.1(A)

3(1)(4)(5), 4, 6

一、线性空间的定义

定义4.1(线性空间)　V是一个非空集合, F为数域, 在V中定义了加法和数乘两种运算,即　　**加法和数乘的封闭性**

$\forall \alpha \in V, \beta \in V, k \in F$,有$\boxed{\alpha+\beta \in V, k\alpha \in V}$,

并且满足:

(1)$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;　(2)$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3)在V中存在一个元素,称为零元素,使得$\alpha+0=\alpha, \forall \alpha \in V$

(4)$\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V$,使得$\alpha+(-\alpha)=0$

(5)$1\alpha=\alpha$;　(6)$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(7)$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;　(8)$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

则称V是F上的一个线性空间或向量空间，因此，V中的元素也称为V的向量.

一、线性空间的定义

1. 有两个集合：V和F

2. 定义了加法和数乘这两种运算

3. 满足加法和数乘的封闭性，满足8条运算规则

$\forall \alpha \in V, \beta \in V, k \in F, \alpha + \beta \in F, k\alpha \in F$

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;　(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) 在 V 中存在一个元素，称为零元素，使得 $\alpha + 0 = \alpha, \forall \alpha \in V$

(4) $\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V$，使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$

(5) $1\alpha = \alpha$;　(6) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(7) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;　(8) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

例1 向量空间F^n, R^n, C^n,分别是F, R, C上的线性空间.

例2 $F^{m\times n}$，$R^{m\times n}$：元素属于F或R的$m\times n$矩阵的全体，按照矩阵的加法和数与矩阵的乘法，构成数域F或R上的线性空间.

例3 $F[x]_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in F, i = 1,2,\cdots,n\}$

按照多项式的加法与数与多项式的乘法构成数域F上的线性空间.

例4 $F[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \mid a_i \in F, i = 1,2,\cdots,n\}$

例5 $C[a,b] = \{f(x) \mid f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\}$

按照函数的加法与实数与函数的乘法构成一个实线性空间.

例6

齐次线性方程组的解空间(A为$m\times n$矩阵):

$S=\left\{x\in F^n \middle| Ax=0\right\}$按照向量加法与数与向量的乘法，构成$F$域上的线性空间.

例7 $V=\left\{(a,b)\middle| a,b\in R\right\}$

若定义:

加法:$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

数乘:$k(a,b)=(ka,0)$

则: 不构成向量空间,因为 $1(a,b)=(a,0)\neq(a,b)$

例8 非齐次线性方程组$Ax=b$的解集合不构成向量空间因为,若$Ax_0=b$,但$A(2x_0)=2Ax_0=2b\neq b$.

二、线性空间的基本性质

(1)零元素是唯一的.

(2)每个元素的负元素是唯一的.

(3)$0\alpha = 0, (-1)\alpha = -\alpha, k0 = 0.$

(4)若$k\alpha = 0$,则$k = 0$,或$\alpha = 0$

三、线性子空间的定义

定义5.1.2（子空间） 设W是线性空间V，数域F上的一个非空子集，如果W按照V所定义的线性运算也构成一个线性空间，则称W为V的**子空间**

1. 有两个集合：V和F
2. 定义了加法和数乘这两种运算
3. 满足加法和数乘的封闭性，并满足8条运算规则

三、线性子空间的定义

定义5.1.2（子空间） 设W是线性空间V的一个非空子集，如果W按照V所定义的线性运算也构成一个线性空间，则称W为V的**子空间**

定理5.1.1 设W是线性空间V的非空子集，则

W为V的子空间 $\Longleftrightarrow$ W对V中的线性运算封闭

$$\boxed{\alpha+\beta \in V, k\alpha \in V}$$

例1

设0为线性空间V中的零向量，则由单个零向量构成的集合{0}是V的一个子空间，称它为V的零子空间.

例2 设α_1，α_2是线性空间 V 中两个取定的向量，则由α_1和α_2的所有线性组合所组成的 V 的子集

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \mid k_i\in F, i=1,2\}$$

是 V 的一个子空间.

一般地，设α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_m$是线性空间 V 中一组向量，则 V 的子集

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m \mid k_i\in F, i=1,2,\cdots,m\}$$

是 V 的一个子空间.称为由 V 生成的子空间，记为 span$\{\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots\alpha_m\}$.

例3 判断R^3的下列子集是否构成R^3的子空间：

（1）$W_1=\{(x,2x,3y)^{\mathrm{T}} \mid x,y\in R\};\}$. **是**

（2）$W_2=\{(1,x,y)^{\mathrm{T}} \mid x,y\in R\}$. **否**

四、基、维数和向量坐标

定义5.1.3 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是向量空间$V$中的一组向量,满足：

(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关

(2)$\forall\alpha\in V$,α都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示：

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \qquad (x_i \in F, i = 1,2,\cdots,n)$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$的一个$\boxed{\text{基}}$,称基中所含向量个数$n$为$V$的$\boxed{\text{维数}}$,记为$\dim(V)=n$.称$F^n$中向量

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

为α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的$\boxed{\text{坐标}}$.

例：F^n是n维向量空间

$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$

就是F^n的一个基,称为标准基.

向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$在该组基下的坐标为$\alpha$.

- 无限维空间：可以找到无限多个线性无关的向量
- 有限维空间
- 基不是唯一的,但基中所含向量个数唯一
- 对于n维线性空间V,V中任意n个线性无关的向量都可作为V的基.
- V中的向量用基线性表示式唯一.

例 4 证明：$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(2,4,5)^T,\alpha_3=(1,2,3)^T$ 是 R^3的一个基，并求$\alpha=(0,2,3)^T$在此基下的坐标

$$
\text{解}:\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0
$$

又因$\dim(R^3)=3,\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可作为$R^3$的基

设有一组数x_1,x_2,x_3，使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha$

解此非齐次线性方程组，得唯一解

$$x_1=-1,x_2=-1,x_3=3.$$

故α在该基下的坐标为 $\mathrm{x}=(-1,-1,3)^T$

例5 证明:元素组

$$A_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},A_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

是$F^{2\times2}$的一个基,并求$A=\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}$在此基下的坐标

解 首先证明A_1, A_2, A_3, A_4线性无关

$$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=O\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

其次证明任一$A\in F^{2\times2}$,都可由A_1, A_2, A_3, A_4线性表出

设有x_1,x_2,x_3,x_4使得$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iA_i=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}(a_{12}-a_{11}),x_2=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{12}),x_3=a_{21},x_4=a_{22}$$

A在该组基下的坐标为$x_1=-1,x_2=1,x_3=-1,x_4=3$

五、基变换与坐标变换

定义5.1.4（过渡矩阵）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是n维线性空间V的两个基，第2个基可由第1个基线性表示为

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} A$$

其中 a_{ij} 为常数，则称矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵

注：过渡矩阵A一定可逆。

定理5.1.2 设n维线性空间V有两个基：

$$(\mathrm{I})\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\quad (\mathrm{II})\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$$

且由基（I）到基（II）的过渡矩阵为A,设V中向量 α 在基（I） 的坐标为 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$ ，α 在基（II）下的坐标为 $y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^T$ ，则有坐标变换公式

$$x=Ay \qquad \text{或} \qquad y=A^{-1}x$$

证

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}y$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}A$$

$$x=Ay \qquad \text{或} \qquad y=A^{-1}x$$

例5.1.18 已知R^3 有两个基:

$$(\mathrm{I})\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(1,0,1)^T$$

$$(\mathrm{II})\beta_1=(1,2,1)^T,\beta_2=(2,3,4)^T,\ \beta_3=(3,4,3)^T$$

（1）求由基（I）到基（II）的过渡矩阵

（2）求向量 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ 在基（II）下的坐标

解（1） $\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}A$

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}$$

（2） α 在基（I）下的坐标为x=（1，2，-1）^{T}

$$y=A^{-1}x$$

六、线性空间的同构

定义 5.1.5（线性空间的同构）设$V1$和$V2$是数域F上两个线性空间， $V1$到$V2$的一个映射f叫做同构映射，如果

(1) f 是$V1$到$V2$的双射；

(2) $\forall \alpha, \beta \in V_1$, 恒有$f(\alpha+\beta)= f(\alpha)+ f(\beta)$;

(3) $\forall \alpha \in V_1$, $k \in F$,恒有$f(k\alpha)=kf(\alpha)$.

如果两个线性空间$V1$与$V2$之间可以建立一个同构映射，那么就称 $V1$与$V2$同构.

定理5.1.3 **设f是线性空间V_1到V_2的同构映射，则**

(1) $f(0_1)=0_2$，其中$0_1,0_2$分别是V_1和V_2的零元素;

(2) $\forall \alpha \in V_1$有$f(-\alpha)=-f(\alpha)$;

(3) $\forall \alpha_i \in V_1, k_i \in F\,(i=1,2,\cdots m)$,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{m} k_i f(\alpha_i);$$

(4) V_1中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

$\Leftrightarrow$它们的像线性相关.

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$$\Leftrightarrow k_1 f(\alpha_1)+k_2 f(\alpha_2)+\cdots+k_m f(\alpha_m)=0$$

同构具有下列的性质：

(1) 自反性：V_1与V_1同构；

(2) 对称性：若V_1与V_2同构，则V_2与V_1同构；

(3)传递性：若V_1与V_2同构，V_2与V_3同构，

则V_1与V_3同构.

定理5.1.4 数域F上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们的维数相同.

(维数是有限维线性空间的惟一本质特征)

V是n维线性空间，F^n是n维线性空间，则V与F^n同构。

定理5.1.5（扩充定理） 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$n$维线性空间$V$中一个线性无关向量组，且$r<n$,则由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$扩充必能得到$V$的基，也就是说，必能找到$V$中的向量$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,使得$\alpha,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$成为$V$的基.

七、子空间的交与和

定理 5.1.6 如果V_1,V_2是线性空间V的两个子空间，则它们的交 $V_1\cap V_2$也是V子空间.

证 首先由于零向量是公共元素，故 $V_1\cap V_2\neq\Phi$.

其次，$\forall\alpha$，$\beta\in V_1\cap V_2$，有α，$\beta\in V_1$且α，$\beta\in V_2$

于是$\alpha+\beta\in V_1$，且$\alpha+\beta\in V_2$，因此$\alpha+\beta\in V_1\cap V_2$，

即$V_1\cap V_2$ 对加法运算封闭.

同样可证对数乘运算封闭，因此V的子集 $V_1\cap V_2$ 是V的子空间.

定理 5.1.7 设V_1, V_2都是线性空间V的子空间，则V的子集 $\{\alpha+\beta \mid \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}$
是V的子空间,并称这个子空间为V_1与V_2**和**,记为V_1+V_2 .

证 首先，V_1+V_2显然非空 .

其次，若α，$\beta \in V_1+V_2$，即若

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1 \in V_1,\ \alpha_2 \in V_2,$$

$$\beta=\beta_1+\beta_2,\ \beta_1 \in V_1,\ \beta_2 \in V_2,$$ 那么 $$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2).$$

又因$V1$和$V2$是子空间，故有 $\alpha_1+\beta_1 \in V_1$， $\alpha_2+\beta_2 \in V_2$，

因此 $\alpha+\beta \in V_1+V_2$. 同理 $k\alpha = k\alpha_1+k\alpha_2 \in V_1+V_2$.

所以V_1+V_2是V的子空间.

例 在R^3中，设V_1是通过原点的一个平面，V_2是通过原点且与这个平面垂直的一条直线，则

$$V_1 \cap V_2 = \{0\},\ V_1 + V_2 = R^3.$$

定理 5.1.8（维数公式）设V_1, V_2都是线性空间V的子空间，则有

$$\dim(V_1)+\dim(V_2) = \dim(V_1+V_2)+\dim(V_1 \cap V_2).$$

在线性空间F^{nxn}中，记全体上、下三角矩阵所构成的子空间分别为V_1和V_2，由于每个n阶方阵都可以表示为一个上三角矩阵与一个下三角矩阵之和，因而有

$$F^{nxn} = V_1 + V_2 ,$$

但是，这种表示法不是唯一的，因为主对角线上元素的表示法可以不唯一。

子空间的直和

定义5.1.6（子空间的直和）设V_1,V_2都是线性空间V的子空间，如果和V_1+V_2 中每个向量α的表示式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \qquad (\alpha_1\in V_1,\ \alpha_2\in V_2)$$

是唯一的，则称这个和为V_1与V_2的**直和**，并记为 $V_1\oplus V_2$.

定理 5.1.9 V_1+V_2为直和$\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$.

推论 5.1.1 V_1+V_2为直和

$$\Leftrightarrow \dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2).$$

例12：P196例5.1.19

例13：P197例5.1.20