西安交通大学考试题

成绩	

课程高等数学(I II)

学院

专业班号考试日期 2018 年 11 月 4 日

姓名学号

一、 单选题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的（）

   A.连续点 B.可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（）

   A.极限不存在 B.极限存在，但不连续

   C. 连续，但不可导 D. 可导

3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^2-x\right|$ 不可导点的个数是（）

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处（）

   A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$ B. $f(x)$ 取得极大值

   C. $f(x)$ 取得极小值 D. $f(x)$ 的导数不存在

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处切线的斜率为（）

   A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

6. 在区间 (a,b) 内，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 的图像在 (a,b) 内是

   A.单增且凸 B. 单减且凸 C. 单增且凹 D. 单减且凹

二、 计算题（每小题 7 分，共 49 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$.

6. 证明：当 $x>0$ 时，$e^x-1<xe^x$.

7. 求函数 $f(x)=x+2\cos x$ 的最大值，其中 $x\in[0,\pi/2]$.

三、（本题 8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, & x\le 0 \\ \sin ax, & x>0 \end{cases}$，问：$a,b$ 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？并求 $f'(x)$.

四、（本题 12 分）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求

① 函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

② 曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线方程.

五、（本题 7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0, f(0)=0$，$f(1)=1, f'(0)=0$，证明：存在 $\eta \in (-1,1)$，使得 $f^{(3)}(\eta) \geq 3$.

六、（本题 6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：在 $[0,1]$ 存在两点 x_1, x_2，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = 2$.

2. 设 $y = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$ ，求 $\mathrm{d}y$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定，求 $y'(0)$.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：递推数学(I.II)5 课时：______ 考试时间：2018 年11月4日

一 单选 $(6\times3'=18')$

1. C. 2. D. 3. C. 4. B. 5. B. 6. A.

二. $(7\times7'=49')$

1. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}\overset{(3')}{=}\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}\overset{(5')}{=}2.$ (7')

2. $dy=\arctan x\,dx$ (7')

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\overset{(2')}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ (3')

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{3x^2}\overset{(5')}{=}-\frac{1}{3}$ (7')

4. 令 $y=0$. $y(0)=0$ (2') 方程两边对 x 求导得:

$e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0$. (5') $y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}$ $y'(0)=0$ (7')

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{2t-2}{3t^2+9}$ (3') $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(3t^2+9)-6t(2t-2)}{(3t^2+9)^2}\cdot\frac{1}{3t^2+9}$ (7')

或 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\frac{-6(t^2-2t-3)}{27(t^2+3)^3}$

6. 设 $f(x)=e^x-1-xe^x$ $(x>0.)$ (2')

$f'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x<0$ (5'). $(x>0)$

$\because x>0.\ \therefore f(x)<f(0)=0.$ 结论即得 (7')

7. $f'(x)=1-2\sin x$. 令 $f'=0$. $x=\frac{\pi}{6}$. (3')

而 $f(0)=2$. $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$. $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ (6')

比较得 最大值为 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$. (7')

三. 1. 可导必连续. $1+b=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. $\therefore b=-1$ 2 (3')

2. 可导. $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{x}=a$ (5') 4

(7') 6

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$

$\therefore a=2$. $b=-1$. (8') 7 $f'(x)=\begin{cases}2e^{2x}, & x<0\\ 2, & x=0\\ 2\cos 2x, & x>0\end{cases}$ (8)

四. ① $f'(x)=\frac{2x(x+1)^2-x^2\cdot2(x+1)}{2(x+1)^4}=\frac{x}{(x+1)^3}$ (2')

单增区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. 单减区间为 $(-1,0)$ 极小值为 $f(0)=0$.

(5')

② $f''(x)=\frac{1-2x}{(x+1)^4}$ (6') 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{1}{2})$ 内, 曲线是凹的 (7')

在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内曲线为凸的 (8') 拐点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{18})$ (10')

③ $x=-1$ 为垂直渐近线. (11') $y=\frac{1}{2}$ 为水平渐近线 (12')

五. $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3$ (2')

① $f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$ $0<\xi_1<1$.

② $f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$. $-1<\xi_2<0$ (4')

①-②得: $1=\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$ (6') 取 $f'''(\eta)=\max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$ 即可 (7')

六, 据 f 在 $[0,1]$ 连续. $f(\xi)=\frac{1}{2}$. $0\le\xi\le1$. (2') (介值定理)

在 $[0,\xi]$. $\frac{f(\xi)}{\xi}=f'(x_1)$. 在 $[\xi,1]$ 上. $\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(x_2)$ (4')

$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$. (6')