例 5 矩阵与线性变换的关系

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 一个线性变换. 其中 a_{ij} 为常数.

线性变换的系数构成的矩阵称为**线性变换的矩阵**

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases} \Longleftrightarrow \quad y = Ax$$

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

若线性变换为 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称之为**恒等变换**.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

单位阵.

例：线性方程组

$$\begin{cases} x+y-3z-u=1 \\ 3x-y-3z+4u=4 \\ x+5y+9Z-8u=0 \end{cases}$$

可以表示成：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例：坐标旋转

在平面直角坐标系中，坐标轴绕原点沿逆时针方向旋转 θ 角，点M的新坐标 (x',y') 和旧坐标 (x,y) 之间的关系为

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

可以表示成：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi-\theta) & -\sin(2\pi-\theta) \\ \sin(2\pi-\theta) & \cos(2\pi-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

复合变换

设 n 维向量 x 到 m 维 向量 y 的线性变换为 y=Ax

m 维向量 y 到 p 维 向量 z 的线性变换为 z=By

则由n 维向量 x 到 p 维 向量 z 的线性变换是一个复合变换

$$z=By=BAx=(BA)x$$

BA为复合线性变换的矩阵

例6　线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

系数矩阵

或 $$Ax = b$$

若$x_1=c_1, x_2=c_2, \cdots, x_n=c_n$为方程组的一个解，

则称列向量$x_0=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$为方程组的一个解向量.

称 $\overline{A}=[A \vdots b]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

为方程组的增广矩阵

三、矩阵的转置

1、定义 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的**转置矩阵**，记作 A^{T} .or. A'.

例
$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix}9&6\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}.$$

2、运算规律

(假定所有运算合法，A 是矩阵，$\lambda\in R$)

(1) $\left(A^T\right)^T=A$　　(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(3) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$　　(4) $\left(AB\right)^T=B^TA^T$

特别 $\left(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n\right)^T=A_n^{\ T}A_{n-1}^{\ T}\cdots A_2^{\ T}A_1^{\ T}$

例5 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$, 求$(AB)^T, B^TA^T$.

解 $$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\16&11\\28&19\end{pmatrix}$$

所以 $$(AB)^T=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix}$$

而且 $$B^TA^T=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix}$$

显然 $(AB)^T=B^TA^T$

3、对称矩阵

定义 设A为n阶方阵，若 $A^T = A$，即 $a_{ij} = a_{ji}$

那么A称为**对称矩阵**.

如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

对称矩阵的特点是：它的元素以**主对角线为对称轴**对应相等.

特别 两个同阶的对称矩阵的和还是对称矩阵，对称矩阵的数乘也是对称矩阵.但两个对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵.

4、反对称矩阵

定义 设A为 n 阶方阵，若 $A^T=-A$，即 $a_{ij}=-a_{ji}$

那么A称为**反对称矩阵**.

如 $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

反对称矩阵的主要特点是：主对角线上的元素为0,其余的元素关于**主对角线**互为相反数.

特别 两个同阶的反对称矩阵的和还是反对称矩阵,反对称矩阵的数乘也是反对称矩阵.但两个反对称矩阵的乘积不一定是反对称矩阵.

例6 设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，E 为 n 阶单位矩阵，且 $H=E-2XX^T$，证明 H 是对称矩阵，且 $HH^T=E$.

证明 $\because H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-2\left(XX^T\right)^T$

$$=E-2XX^T=H,$$

$\therefore H$ 是对称矩阵.

又 $HH^T=H^2=\left(E-2XX^T\right)^2$

$$=E-4XX^T+4\left(XX^T\right)\left(XX^T\right)$$

$$=E-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E.$$

例7证明任一 阶矩阵 都可表示成对称阵与反对称阵之和.

证明 设 $C = A + A^T$

则 $C^T = \left(A + A^T\right)^T = A^T + A = C,$

所以C为对称矩阵.

设 $B = A - A^T,$

则 $B^T = \left(A - A^T\right)^T = A^T - A = -B,$

所以B为反对称矩阵.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \frac{C}{2} + \frac{B}{2},$$ 命题得证.

四、方阵的行列式

1、定义 由n阶方阵A的元素所构成的行列式（各元素的位置不变）叫做**方阵A的行列式**.

记作 $|A|$ $.or.$ $\det(A)$

注意 方阵与行列式是两个不同的概念.

2、运算规律

（假定所有运算合法，A B是矩阵，$\lambda\in R$）

(1) $\left|A^T\right|=|A|$

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

(3) $|AB|=|A||B|=|BA|$

(4) $\left|A^n\right|=|A|^n$

注 $|A+B| \overset{?}{=} |A|+|B|$

例8 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\3&2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$,

求 $|AB|, |A^3|, |3A|$.

解 易见 $|A|=6, |B|=20$,

所以 $|AB|=|A||B|=120$

$$|A^3|=|A|^3=216$$

$$|3A|=3^3|A|=162$$

五、伴随矩阵

1、定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成矩阵的转置.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

2、运算规律

(假定所有运算合法，A 是矩阵，$\lambda \in R$

(1) $\left(A^*\right)^T = \left(A^T\right)^*$ (2) $\left(AB\right)^* = B^* A^*$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{|A|} & & & \\ & \boxed{|A|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{|A|} \end{pmatrix} = |A|E.$$

同理可得 $A^*A = |A|E.$

所以 $AA^* = A^*A = |A|E.$

六、小结

(1)矩阵的概念

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m=n)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 行矩阵与列矩阵; $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 零矩阵. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

矩阵运算

- 加法
- 数乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 矩阵的幂
- 转置矩阵
- 方阵的行列式
- 伴随矩阵

线性运算

$$AB \overset{?}{=} BA$$

$$AM = AN \overset{?}{\Longrightarrow} M = N$$

$$AB = O \overset{?}{\Longrightarrow} A = O \;.or.\; B = O$$

对称矩阵　　反对称矩阵

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

思考题

矩阵与行列式的有何区别?

解答

矩阵与行列式有本质的区别，行列式是一个算式，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个数表，它的行数和列数可以不同.

练习：

(1) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 求 A^{10}

(2) 设 $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 求 B^{100}