第二节 向量组的线性相关性

一 n维向量及其线性运算

二 线性表示与等价向量组

三 线性相关与线性无关

回顾

⑴ $A_{m\times n}x=0$只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

$A_{m\times n}x=0$有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

⑵ $A_{n\times n}$, $Ax=0$只有零解 $\Leftrightarrow det(A)\neq 0$

⑶ $Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow det(A)=0$

⑷ $A_{m\times n}$, $m<n$, 则$Ax=0$必有非零解

⑸ $A_{m\times n}$, n元线性方程组$Ax=b$有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$

当有解时,解的情形分为两种:

1^0 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})=n$;

2^0 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<n$.

- **数域—数集F,含有0和1,对数的加、减、乘和除（除数不为零）运算封闭.**

作业

- 习题4.2

5， 6， 7， 10，

11， 13， 16

一、n维向量及其线性运算

1、定义 由数域F中的n个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$ 行向量

或 $$\beta=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}^T$$ 列向量

称为一个n维向量，其中a_i称为第 i 个分量（坐标）.

实向量，复向量，零向量，单位向量. 向量相等.

注意

1、行向量和列向量总被看作是两个不同的向量;

2、行向量和列向量都按照矩阵的运算法则进行运算;

3、当没有明确说明时，都当作实的列向量.

2、向量的线性运算

(1) 加法 $\alpha=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n),\beta=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)$,

规定 $\alpha+\beta=(a_1+b_1\quad a_2+b_2\quad\cdots\quad a_n+b_n)$

(2) 数乘 $\alpha=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n),k\in R$

规定 $k\alpha=\alpha k=(ka_1\quad ka_2\quad\cdots\quad ka_n)$

称为数 k 与向量 α 的数量积.

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1\quad a_2-b_2\quad\cdots\quad a_n-b_n)$$

向量的加法与数乘合称为向量的线性运算.

运算规律 (设α,β,γ均是 n 维向量,λ, μ为实数)

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (交换律)

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (结合律)

(3) $\alpha+O=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=O$

(5) $1\alpha=\alpha$

(6) $(\lambda\mu)\alpha=\lambda(\mu\alpha)=\mu(\lambda\alpha)$

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

(8) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

3、向量与矩阵的关系

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

有m个 n 维**行向量**. 有 n 个m维**列向量**.

4、线性方程组的向量表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b$$

即 $Ax = b$ 或 $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$

例 1 设n维向量$\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，矩阵

$A=E-\alpha^T\alpha, B=E+2\alpha^T\alpha$ ，其中 E为n阶单位阵，

证明：$AB=E.$

证明: $\because AB=(E-\alpha^T\alpha)(E+2\alpha^T\alpha)$

$$=E-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-2(\alpha^T\alpha)\cdot(\alpha^T\alpha)$$

$$=E+\alpha^T\alpha-2\alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha$$

又 $\because \alpha\alpha^T=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

故$AB=E+\alpha^T\alpha-2\alpha^T\left(\frac{1}{2}\right)\alpha$

$$=E+\alpha^T\alpha-\alpha^T\alpha=E$$

二、线性表示与等价向量组

1、线性组合与线性表示

定义4.2.5 给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，对于任何一组数 $k_1, k_2,\cdots,k_s$，称向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 为向量组的一个**线性组合**. $k_1, k_2,\cdots,k_s$ 称为组合的**组合系数**.

如果向量β可以表示为

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

则称β可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性表示**或**线性表出**

定理4.2.1 β可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性表出**

$\Longleftrightarrow$ 方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\beta$ 有解

相关知识点

① 若$\alpha = k\beta$，则称向量α与β**成比例**.

② 零向量O是任一向量组的线性组合.

③ 向量组中每一向量都可由该向量组线性表示.

④ 任一n维向量$\alpha = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$都是**基本向量组**

$$\varepsilon_1 = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0),$$
$$\varepsilon_2 = (0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0), \cdots,$$
$$\varepsilon_n = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1),$$

的一个线性组合．事实上，有$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$.

2、等价向量组

(向量组线性表出)　设有两个向量组

$$A: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\ \ B: \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s.$$

若向量组 A 中每一个向量皆可由向量组 B 线性表示，

则称**向量组 A 可以由向量组 B 线性表示**.

即存在矩阵 $K_{s\times r}$ 使得

$$A_r = B_s K_{s\times r}.$$

2、等价向量组

$$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\quad B:\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s.$$

$$A_r=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r];B_s=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$$

$$\alpha_1=k_{11}\beta_1+k_{12}\beta_2+\cdots+k_{1s}\beta_s$$

$$\alpha_2=k_{21}\beta_1+k_{22}\beta_2+\cdots+k_{2s}\beta_s$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

$$\alpha_r=k_{r1}\beta_1+k_{r2}\beta_2+\cdots+k_{rs}\beta_s$$

$$K_{s\times r}=\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{sr} \end{bmatrix},A_r=B_sK_{s\times r}.$$

2、等价向量组

定义4.2.6(等价向量组) 设有两个向量组

$$A: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\ \ B: \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s.$$

若两个向量组可以互相线性表示，则称这**两向量组等价**.

向量组之间的等价关系具有反身性、对称性、传递性.

例2 设有两个向量组

$$(\mathrm{I})\ \alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,-2,-2)^T$$

$$(\mathrm{II})\ \beta_1=(2,-1,3,3)^T,\beta_2=(0,1,-1,-1)^T$$

证明:（I）与（II）等价

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_1]$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_2]$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_1,\beta_2] \qquad [\beta_1,\beta_2\,|\,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$$

三、 线性相关与线性无关

(1)为什么要研究线性相关与线性无关

(2)何谓线性相关与线性无关

(3)有关线性相关与线性无关的常用性质与判别法

例3 $\alpha_1=(1,-1,2)^T$与$\alpha_2=(2,-2,4)^T$有关系:

$\alpha_2=2\alpha_1$或$2\alpha_1-\alpha_2=0$

几何上,α_1与α_2共线(平行)

例4 $\alpha_1=(1,2,3)^T,\alpha_2=(2,3,4)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$有关系:

$\alpha_3=\alpha_2-\alpha_1$ 或 $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$

几何上,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 3个向量共面

特点：存在一组不全为零的常数使得它们的组合为零。

例5 向量$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(0,5,6)^T$ 不存在线性关系,即不存在不全为零的常数x_1,x_2,x_3,使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=0$,

事实上,若$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=0$,

则由 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

知秩$(A)=3$,故方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=0$只有零解$x_1=x_2=x_3=0$,此时,称$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

定义4.2.7(线性相关与线性无关)

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一组$n$维向量,如果存在一组不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

否则,称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(即仅在$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时,

才成立 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$)

定理4.2.2 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关(线性无关)

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$

有非零解(只有零解)

$\Leftrightarrow$ 矩阵$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s]$的秩小于$s$(等于$s$)

推论4.2.1 n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关(线性无关)

$\Leftrightarrow$ 行列式$\det[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]=0(\neq 0)$

推论4.2.2 若$s>n$,则s个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性相关.

特别地,$n+1$个n维向量必线性相关.

例6 n维基本单位向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关.

事实上,由行列式$\left|\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n\right| = \left|E_n\right| = 1$,

即知结论成立.

例7

λ取何值时,向量组$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$线性相关?

解 由推论4.2.1知,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

$$\Leftrightarrow 0 = \left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \text{或} \lambda = 1$$

例8

证明向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}6\\0\\5\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\-7\\1\\3\end{bmatrix}$线性相关，

并求一组不全为零的数k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0.$$

解　设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

系数矩阵$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6 & 4\\3 & 0 & -7\\1 & 5 & 1\\-1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3} x_3 \end{cases} (x_3\text{任意}).$$

令$x_3 = 3$,则得其一个非零解 $x_1 = 7, x_2 = -2, x_3 = 3.$

$$\Rightarrow 7\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

例8 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,又向量$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$,证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

证 设有x_1,x_2,x_3,使得 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$

$$\Rightarrow (x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,故$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$

$\because$ 系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{1+3}=2\neq 0$

$\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$,故$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

有关线性相关与线性无关的常用性质及判别法

一个向量α线性相关：$\exists$常数$k \neq 0$，使得$k\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$

定理4.2.3 向量组线性相关$\Leftrightarrow$至少有一个向量可由其余向量线性表示.

证 $if \ A: \alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_r \Rightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_r\alpha_r = 0$

$\because A$线性相关，至少有一个系数不为零，不妨设$k_i \neq 0$

$$\Rightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_r\alpha_r = -k_i\alpha_i$$

$$\therefore \alpha_i = \frac{k_1}{-k_i}\alpha_1 + \cdots + \frac{k_{i-1}}{-k_i}\alpha_{i-1} + \frac{k_{i+1}}{-k_i}\alpha_{i+1} + \cdots + \frac{k_r}{-k_i}\alpha_r$$ 得证

推论 向量组线性无关$\Leftrightarrow$任何一个向量都不能由其它向量线性表示.

由定理4.2.3知,两个向量α_1与α_2线性相关

$\Leftrightarrow \alpha_1 = k\alpha_2$或$\alpha_2 = \lambda\alpha_1$ 至少有一个成立

$\Leftrightarrow \alpha_1$与α_2的对应分量成比例.

例如 $(1,2,3)^T$与$(2,4,6)^T$线性相关,

$(1,2,3)^T$与$(-1,0,2)^T$线性无关.

定理4.2.4

如果向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而向量组 $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则β可由A唯一线性表示.

证 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0$

$\because A$线性无关，而向量组B线性相关，

$\therefore k\neq 0$，（否则与A线性无关矛盾）

即有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=-k\beta$

$$\Rightarrow \beta=\frac{k_1}{-k}\alpha_1+\frac{k_2}{-k}\alpha_2+\cdots+\frac{k_r}{-k}\alpha_r$$ $\therefore\beta$可由A线性表示.

下证唯一性：

设 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$； $\beta=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_r\alpha_r$

两式相减有 $(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1+(\lambda_2-\mu_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_r-\mu_r)\alpha_r=0$

$\because A$线性无关， $\therefore \lambda_1-\mu_1=0,\lambda_2-\mu_2=0,\cdots\lambda_r-\mu_r=0$

$\therefore \lambda_1=\mu_1,\lambda_2=\mu_2,\cdots\lambda_r=\mu_r$ 即表达式唯一.

定理4.2.5 **如果向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 有一个部分组线性相关，则向量组 A 也线性相关.**

证 设向量组A:的部分组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关,

则有不全为零的常数 $k_1,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

$$\Rightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+0\alpha_{s+1}+\cdots+0\alpha_r=0$$

由 $k_1,\cdots,k_s,0,\cdots,0$ 不全为零,$\Rightarrow$ A线性相关.

推论 **如果向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,则它的任何部分组也线性无关.**

1 特别地,含有零向量的向量组线性相关.

2 **定理4. 2. 5**常说成:部分线性相关,则整体线性相关;
整体线性无关,则部分线性无关.

例9 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,又$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.
问α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?为什么?

解 已知$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关,由定理4.2.5知,向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关,又因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,故由定理4.2.5知,$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

P_{147}例4.2.3 设有一组向量

$$\alpha_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\beta=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}},$$

问a,b取何值时,β可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

并在可以线性表示时，求出此表示式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$$

$b\neq 2$

$b=2,a\neq 1$

$b=2,a=1$

P_{151}例4.2.8 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又知向量

$$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3,\ \beta_3=5\alpha_1+6\alpha_2+7\alpha_3$$

试判别向量组 β_1,β_2,β_3 的线性相关性