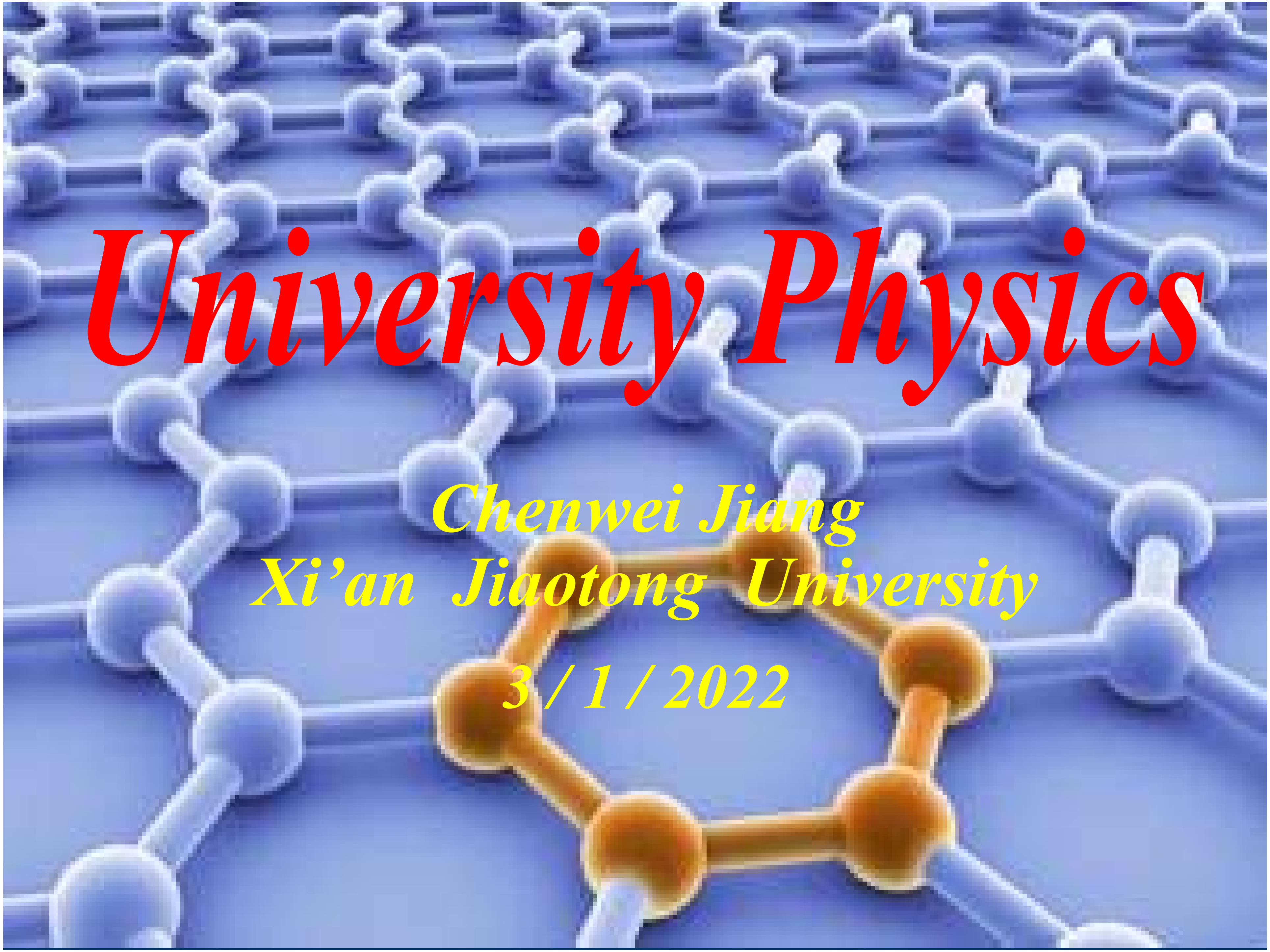


University Physics

Chenwei Jiang

Xi'an Jiaotong University

3 / 1 / 2022

课程作业、考试与答疑

- 作业：在中二楼3216购买（待通知，以班级为单位）

以平时成绩(10%)记入期末成绩

注意：按学校规定缺交作业1/3以上者，不能参加期末考试

作业提交说明（思源学堂线syxt.xjtu.edu.cn上提交，线上批改）

文件名称：学号+姓名，例如：2196413072马鑫鹏

文件内容：手写！直接在作业册上作答，拍照上传即可；每页均请标注清楚学号和姓名！

文件格式：PDF、WORD

提交时间：以每次作业的截止日期为准

注意：每次作业每位学生有3次提交机会，最终分数以最后1次提交的作业为准。作业逾期提交，分数记为0分。

如有特殊情况，请在作业提交截止日期前提供相关证明给助教。

作业由助教批改，如有疑问，请联系助教（助教已在班级QQ群）

- 习题课：自愿参加，不记入期末成绩。研讨课等待通知。
- 阶段1考试：作为平时成绩(20%)记入期末成绩（第7周周末）
- 阶段2考试：作为平时成绩(20%)记入期末成绩（第13周周末）
- 期末考试：占总成绩50%

题型：选择题、填空题、计算及证明题

- 答疑时间安排：

2-16周 周一，周三 晚 7:00～9:00 地点：教学主楼B座108

另每两周单独答疑一次：地点：仲英楼B839，双周周三晚7:30～9:30。线上答疑：QQ群随时留言

- 课件在课后上传到QQ群、思源学堂；课题直播录像可在class.xjtu.edu.cn中登录观看。

要点回顾

1. 位置矢量（*Position Vector*） $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

2. 运动学方程（*Equations of motion*） $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Rectangular coordinates： $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

质点运动学的基本问题之一，是确定质点运动学方程。为正确写出质点运动学方程，先要选定参照物、坐标系，明确起始条件等，找出质点坐标随时间变化的函数关系。

3. 位移的定义 $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

位移在直角系中的表述 $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

4. 速度

平均速度 $$\langle\vec{v}\rangle=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

瞬时速度 $$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

直角系中： $$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

5. 加速度

平均加速度 $$\langle\vec{a}\rangle=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

瞬时加速度 $$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

§ 1.2 运动学的两类问题

一. 两类问题

1. 第一类问题 $\vec{r}=\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}, \vec{a}$ (微分问题)

例1 已知一质点运动方程 $\vec{r}=2t\,\vec{i}+(2-t^2)\,\vec{j}$

求 (1) t =1s 到 t =2s 质点的位移 (2) t =2s 时 $\vec{v}$, $\vec{a}$

(3) 轨迹方程

解 (1) $\vec{r}_1=2\vec{i}+1\vec{j}$ $\quad \vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(4-2)\vec{i}+(-2-1)\vec{j}=2\vec{i}-3\vec{j}$$

(2) $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\,\vec{i}-2t\,\vec{j}$ $\qquad \vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-2\vec{j}$

当 t =2s 时 $\vec{v}_2=2\,\vec{i}-4\,\vec{j}$, $\vec{a}_2=-2\,\vec{j}$

(3) $x=2t \quad y=2-t^2$ $\qquad y=2-\dfrac{x^2}{4}$

2. 第二类问题

初始条件

$$\vec{a} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t)$$

(积分问题)

例2 已知 $\vec{a} = 16\vec{j}$

$t=0$ 时 $\vec{v}(0) = 6\vec{i}$， $\vec{r}(0) = 8\vec{k}$

求 $\vec{v}$ 和运动方程。

解 $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = 16\vec{j}$ $\quad d\vec{v} = 16dt\,\vec{j}$ $\quad \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t 16dt\,\vec{j}$

$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = 16t\,\vec{j}$ $\quad \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + 16t\,\vec{j}$

注意积分上下限的对应

代入初始条件 $\vec{v}(t) = 6\vec{i} + 16t\,\vec{j}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \qquad d\vec{r} = (6\vec{i} + 16t\,\vec{j})dt$$

$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t (6\vec{i} + 16t\,\vec{j})dt$$

代入初始条件 $\vec{r}(0) = 8\vec{k}$ $\quad \vec{r}(t) = 6t\,\vec{i} + 8t^2\vec{j} + 8\vec{k}$

例3 一粒子沿 x 轴正向作直线运动, 其加速度为 $a=4x$ (SI) (x 为位置坐标). 已知初始条件为 $v_0=2$ m/s, $x_0=1$ m.

求 粒子的运动方程，以及 $t=1$ s时粒子运动速度。

解

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=4x \longrightarrow v\mathrm{d}v=4x\mathrm{d}x$$

$$a=\frac{?}{dt}=4x$$

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}4x\mathrm{d}x \longrightarrow v^2-v_0^2=4x^2-4x_0^2 \qquad \boxed{v(x)=2x}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=2x \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x}=2\mathrm{d}t \longrightarrow 2t-2t_0=\ln\frac{x}{x_0}$$

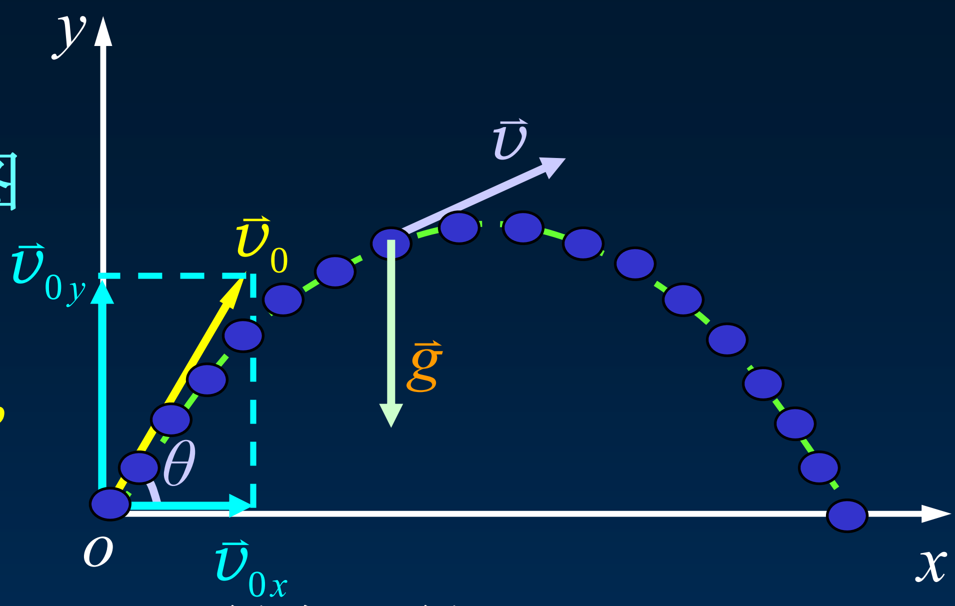
$$\boxed{x=e^{2t}} \qquad \boxed{v(t)=2e^{2t}}$$

$$t=1\mathrm{s} \qquad v\big|_{t=1}=2e^2\approx 15.5\ \mathrm{m/s}$$

注意变量替换的重要性

二. 应用举例
抛体运动

例4. 无阻力抛体运动，如右图



初始条件为

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta, \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta,$$

$$\vec{a} = -g\vec{j}, \vec{r}_0 = 0$$

求速度，运动方程和轨迹方程，以及射高和射程

解

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \vec{a} = -g\vec{j}$$

$$\int_{\vec{\upsilon}(0)}^{\vec{\upsilon}(\mathrm{t})} \mathrm{d}\vec{\upsilon} = -\int_0^t \mathrm{g}\,\vec{j}dt = -gt\vec{j}$$

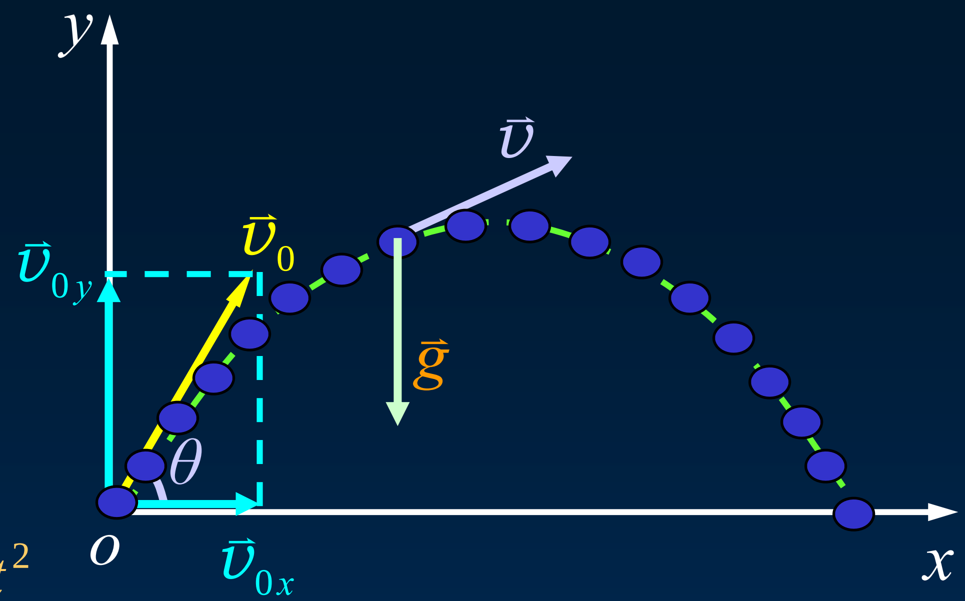
$$\vec{\upsilon}(t) = \upsilon_0 \cos\theta\vec{i} + \upsilon_0 \sin\theta\vec{j} - gt\,\vec{j}$$

任意时刻速度分量为

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = v_0\sin\theta - gt = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

积分得

运动方程 $\begin{cases} x = v_0\cos\theta\cdot t \\ y = v_0\sin\theta\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$



消去t

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\theta}x^2$$ —轨迹方程

射高：$t\big|_{v_y=0} = v_0\sin\theta/g \quad\Rightarrow\quad y_m = \dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\theta}{2g}$

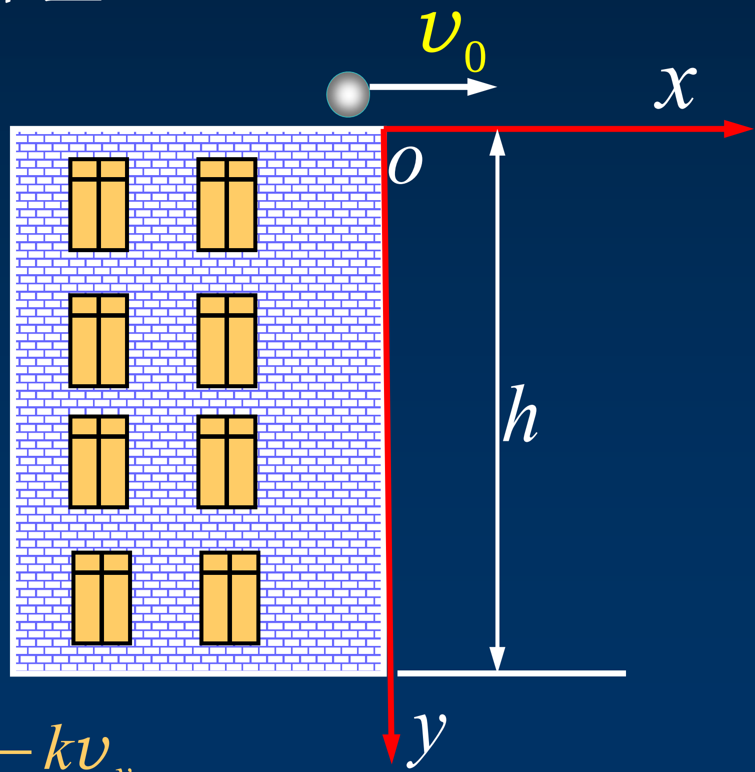
射程(y =0)：$t\big|_{y=0} = 2v_0\sin\theta/g \quad\Rightarrow\quad x_m = \dfrac{v_0^{\,2}\sin 2\theta}{g}$

➢ 讨论：v_0一定时，$\theta = 45^\circ$ 和 $\theta = 90^\circ$ 时，谁的射程和射高最大？

2. 阻力与速度(低速)成正比的抛体运动

阻力与速度(低速)成正比的抛体运动也可以分解为两个直线运动。

例5 小球从距地面高 h 处以速度 v_0 沿水平方向抛出，因阻力原因，小球除具重力加速度外，还具有一与速度方向相反的加速度 $a=-kv$，v 为小球的速度，k 为常量，



求 小球的运动方程。

解 以小球为研究对象。初始条件为 $t=0$ 时，$x=0$, $v_{0x}=v_0$, $v_{0y}=0$

根据加速度公式有

$$\vec{a}=-k\vec{v}+g\vec{j}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-kv_x \qquad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=g-kv_y$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = -k\upsilon_x \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} = g - k\upsilon_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_x} \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\upsilon_x} = -\int_0^t k\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_0^{\upsilon_y} \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{g - k\upsilon_y} = \int_0^t \mathrm{d}t \end{cases}$$

积分（推导）

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 e^{-kt} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \upsilon_y = \dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt}) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

积分得以时间 t 为参量的小球运动方程

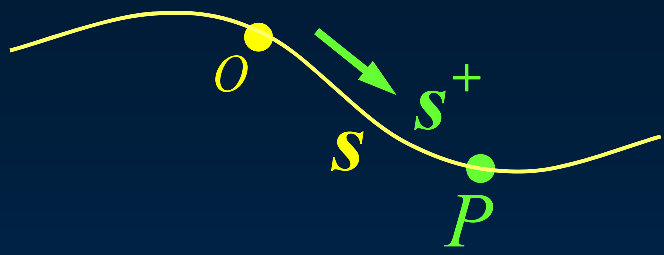
$$\begin{cases} x = \dfrac{\upsilon_0}{k}(1 - e^{-kt}) \\ y = \dfrac{g}{k}t - \dfrac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \end{cases}$$

讨论：假设楼房足够高，当 $t \to \infty$ 时，运动情况如何？

§ 1.3 自然坐标系

(Nature Coordinate System)

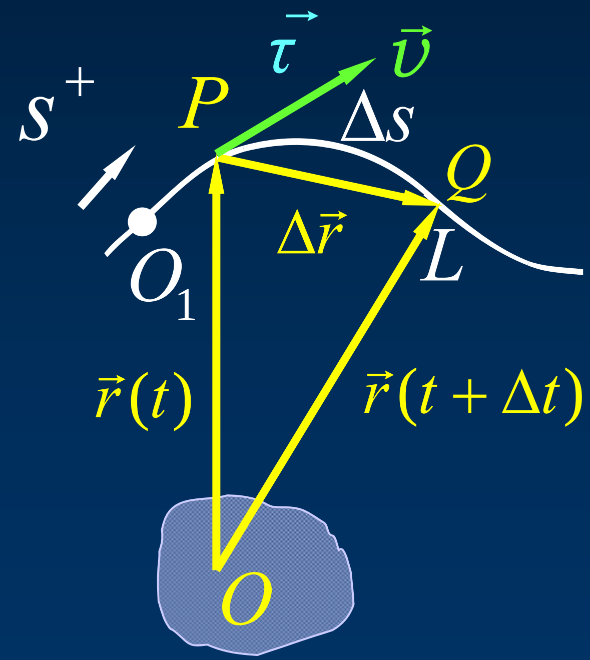
1. 自然坐标



- 已知运动轨迹；
- 坐标原点必须位于轨迹上。

$\boxed{s = s(t)}$ — 运动方程

2. 自然坐标中的速度



$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\Delta \vec{r}\right|}{\Delta s} = 1 \qquad \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}$$

切线方向单位矢量

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = \upsilon\vec{\tau}} \qquad \upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

3.8 曲　率

根据 y'' 的正负可知曲线 $y=f(x)$ 的弯曲方向：$y''>0$ 时凹，$y''<0$ 时凸．下面讨论曲线 $y=f(x)$ 弯曲的程度——曲率．

1. 曲率及其计算公式

如图 3-14 所示，直观地看，一条曲线的曲率应该与曲线转过的角度（即曲线上动点的前切向量转过的角度）及曲线的长度有关．

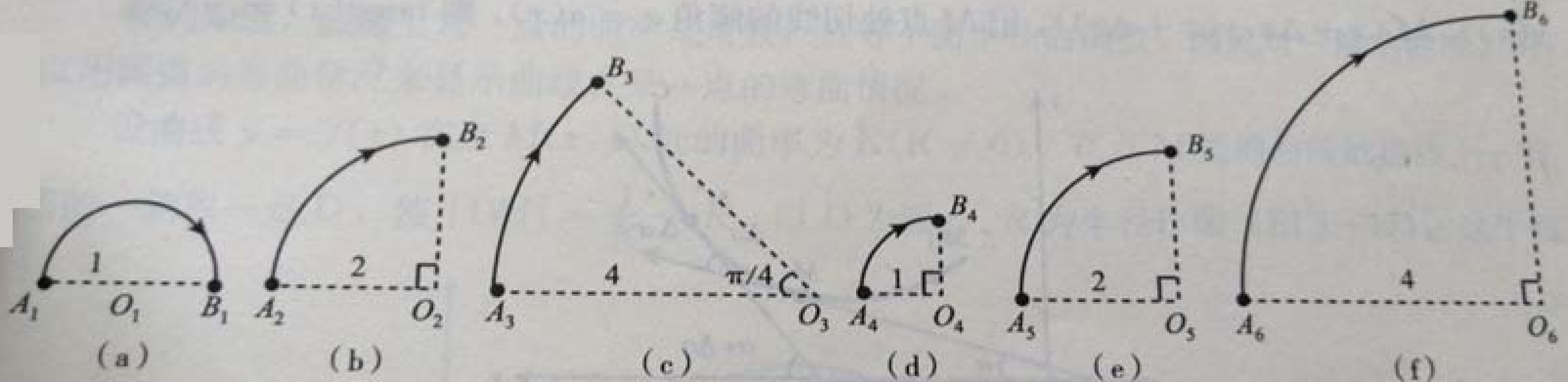


图 3-14

显然，曲线长度相同时，曲线转过的角度越大，曲率就应该越大．如图 3-14（a）、（b）、（c）所示的三条曲线（实际是圆弧）长度相同（均为 π），转角逐渐变小（分别为 π，π/2，π/4），所以图 3-14（a）、（b）、（c）中曲线的曲率应逐渐变小．曲线转过的角度相同时，曲线的长度越大，曲率就应该越小．如图 3-14（d）、（e）、（f）所示中三条曲线转过的角度相同（均为 π/2），长度逐渐变大（分别为 π/2，π，2π），所以图 3-14（d）、（e）、（f）中曲线的曲率应逐渐变小．

根据以上讨论，一条曲线的曲率应正比于曲线转过的角度，反比于曲线的长度．

定义 3-6 （1）一条曲线$\widehat{AB}$的平均曲率$\overline{K}_{\widehat{AB}}$定义为动点沿$\widehat{AB}$从$A$移动到$B$时切线（即前切向量）转过的角度$|\Delta\alpha|$与$\widehat{AB}$的长度$|\Delta s|$之比，即

$$\overline{K}_{\widehat{AB}}=\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$$

（2）曲线$\widehat{AB}$上的A点处的曲率K_A的定义为

$$K_A=\lim_{P沿\widehat{AB}\to A}\overline{K}_{\widehat{AP}}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

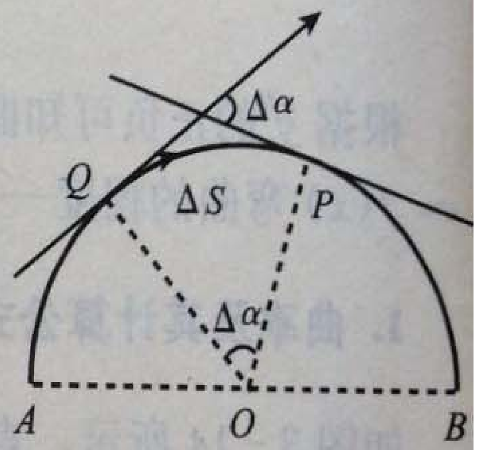
【例 3-41】 求半径为R的半圆周的平均曲率$\overline{K}$及该半圆周上任一点Q的曲率K_Q.

解 如图 3-15 所示，

$$\overline{K}=\overline{K}_{\widehat{AB}}=|\angle AOB|/|\widehat{AB}|=\pi/(R\pi)=1/R.$$

$$K_Q=\lim_{P沿\widehat{AB}\to Q}\overline{K}_{\widehat{QP}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R}=\frac{1}{R}$$



【例 3－42】 设函数 $y(x)$ 二阶可导，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(x,y(x))$ 处的曲率 $K=K(x)$.

解 如图 3－16 所示，曲线 C 的方程为 $y=y(x)$，点 $M(x,y(x))$，$M'(x+\Delta x,y(x+\Delta x))$，记 M 点处切线的倾角 $\alpha=\alpha(x)$，则 $\tan\alpha(x)=y'(x)$.

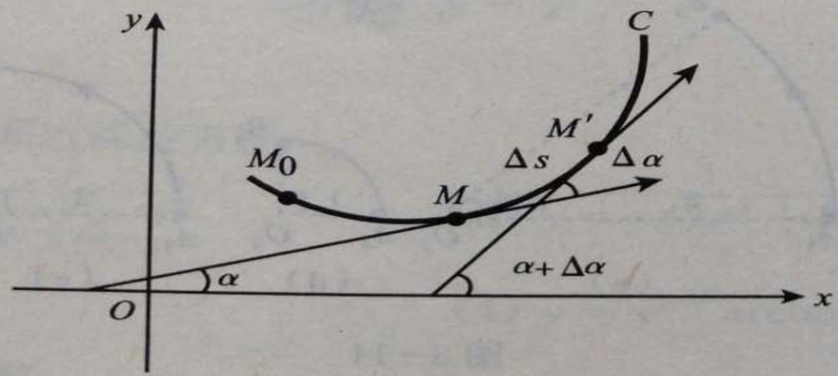


图 3－16

又在曲线 C 上取一点 $M_0(x_0,y(x_0))$ 作为度量弧长的基点，则弧 $\widehat{M_0M}$ 的长度为 $s(x$

则由曲率定义

$$K=K(x)=\lim_{M\text{沿}C\to M}\overline{K}_{\widehat{MM'}}=\lim_{M\text{沿}C\to M}\left|\frac{\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)}{s(x+\Delta x)-s(x)}\right|$$

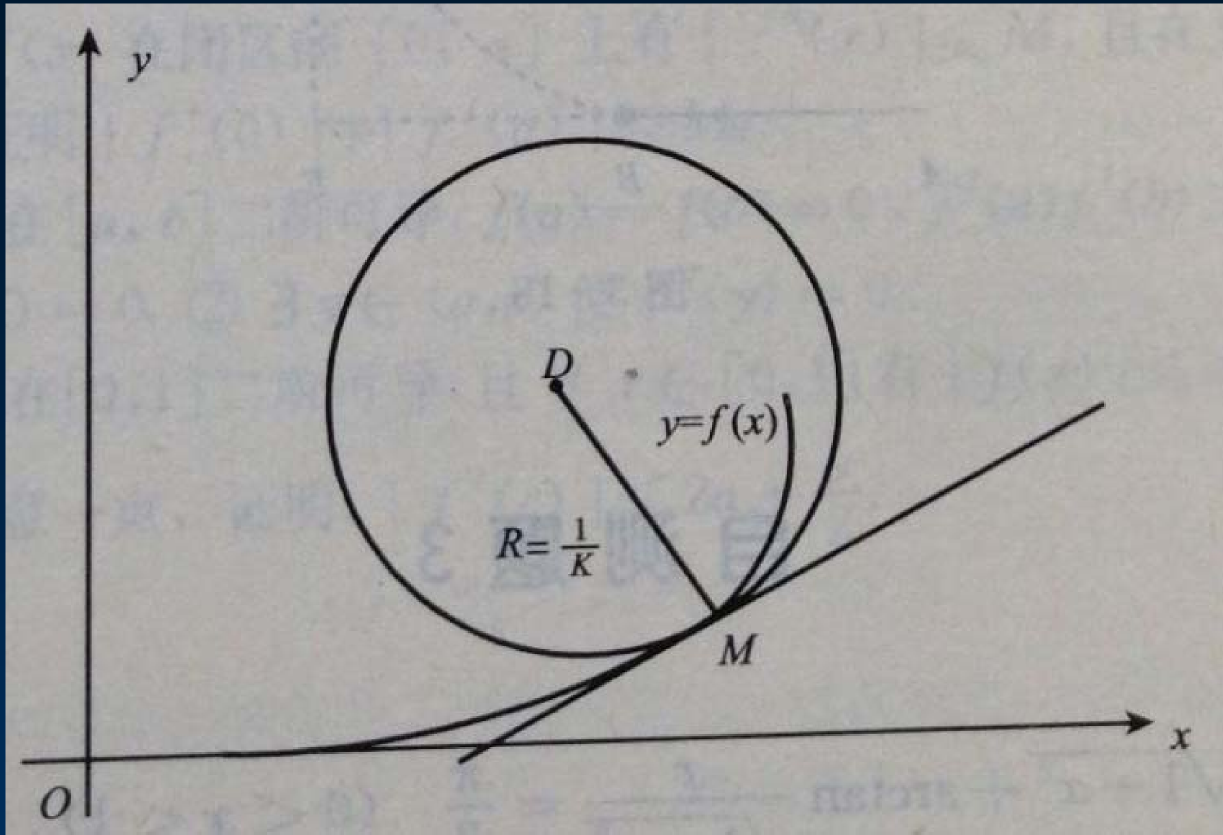
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|[\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)]/\Delta x|}{|[s(x+\Delta x)-s(x)]/\Delta x|}=\frac{|\alpha'(x)|}{|s'(x)|}.$$

因为

$$\tan\alpha(x)=y'(x)\Rightarrow\alpha(x)=\arctan y'(x)\Rightarrow\alpha'(x)=\frac{y''(x)}{1+y'(x)^2}$$

将此结论及 $s'(x)=\sqrt{1+y'(x)^2}$ 代入 $K=K(x)$，得 $y=y(x)$ 在点 $(x,y(x))$ 的曲率为

$$K(x)=\frac{|\alpha'(x)|}{|s'(x)|}=\frac{|y''(x)|}{(1+y'(x)^2)^{3/2}}\text{，或 }\boxed{K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}}\qquad(3-32)$$



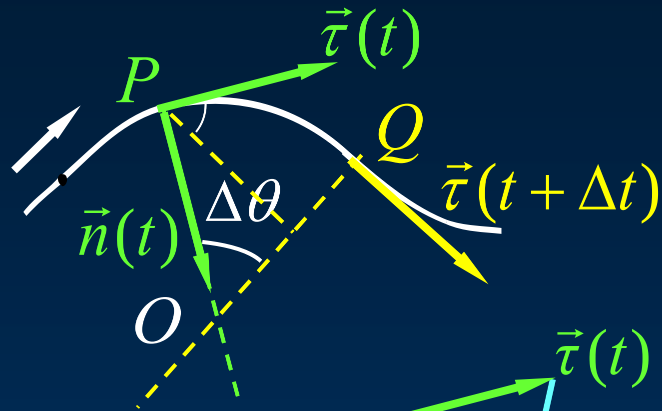
曲率半径就是指过曲线上一点（如上图M点）作法线（垂直于切线且过该切点的直线），在曲线的凹向的那一侧在直线上确定一点D，以曲率K的倒数为半径作圆，这个圆称为该曲线在此点处的曲率圆，而该曲率圆的半径就是曲率半径。

对于半径为R的圆，圆周上任意一点的曲率为1/R，曲率半径则为R。

3. 自然坐标中的加速度

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = v\vec{\tau} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

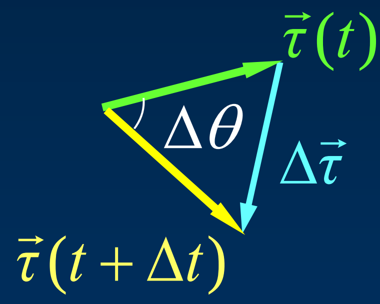
对第一项　大小 $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　方向 $\vec{\tau}$



令　$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau} = a_\tau \vec{\tau} = \vec{a}_\tau$　切向加速度

● 反映了速度大小的变化。

对第二项



$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta t/2}\vec{n}\right]$$

$\Delta t \to 0$ 情况下 $\Delta\vec{\tau}$ 与 $\vec{\tau}(t)$ 垂直

$$= \vec{n}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}(t+\Delta t) - \vec{\tau}(t)$$

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2|\vec{\tau}(t)|\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$= \frac{v}{\rho}\vec{n} \qquad \boxed{\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right) = \rho}$$

法向加速度　$\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_n\vec{n}$

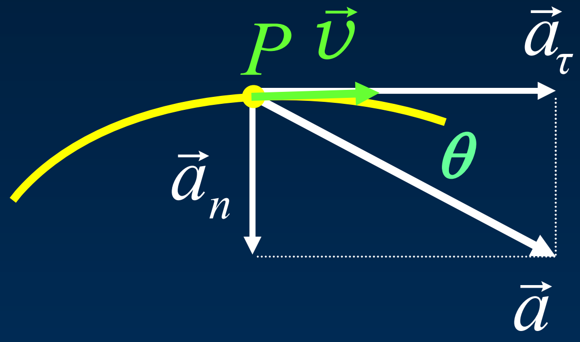
● 反映了速度方向的变化。

$$\vec{a} = a_n\vec{n} + a_\tau\vec{\tau} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{1}{\rho}\vec{n} + \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}$$

对半径为r的匀速率圆周运动 $\vec{a}_\tau = 0 \quad \vec{a}_n = a_n\vec{n} = \frac{v^2}{r}\vec{n}$

加速度的正交分解 $\vec{a} = a_n\vec{n} + a_\tau\vec{\tau}$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \tan\theta = \frac{a_n}{a_\tau}$$

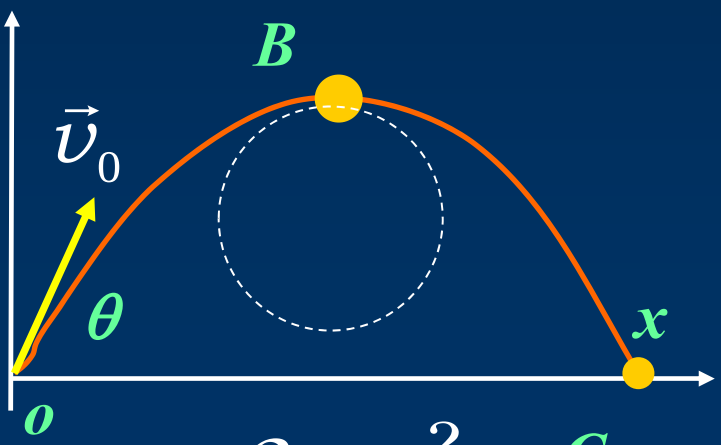


➢ 思考 求抛体运动过程中的曲率半径?

对 B 点:

$$\vec{a}_\tau = 0 \quad \vec{a}_n = -g\vec{j} \quad v_B = v_0\cos\theta$$

$$\rho_B = \frac{v_B^2}{a_n} = \frac{(v_0\cos\theta)^2}{g}$$



$\rho_C = ?$

运动学中的两类问题（自然坐标系）

第一类问题 $\vec{r}=\vec{r}(t),\ s=s(t)\ \Rightarrow\ \vec{\boldsymbol{v}},\vec{a}$

自然坐标系中的速度 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=v\vec{\tau}$

自然坐标系中的加速度

$$\vec{a}=a_n\vec{n}+a_\tau\vec{\tau}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{1}{\rho}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}$$

初始条件

第二类问题 $\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{\boldsymbol{v}}\ \Rightarrow\ \vec{r}=\vec{r}(t),\ s=s(t)$

在第二类问题中，注意变量替换的重要性，如 $a_x(x)=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$

例6 一汽车在半径R=200m 的圆弧形公路上行驶，其运动学方程为$s=20t-0.2t^2$ (SI) .

求 汽车在 $t=1$s 时的速度和加速度的大小。

解 根据速度和加速度在自然坐标系中的表示形式，有

$$\upsilon=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20-0.4t \qquad \upsilon(1)=19.6(\mathrm{m/s})$$

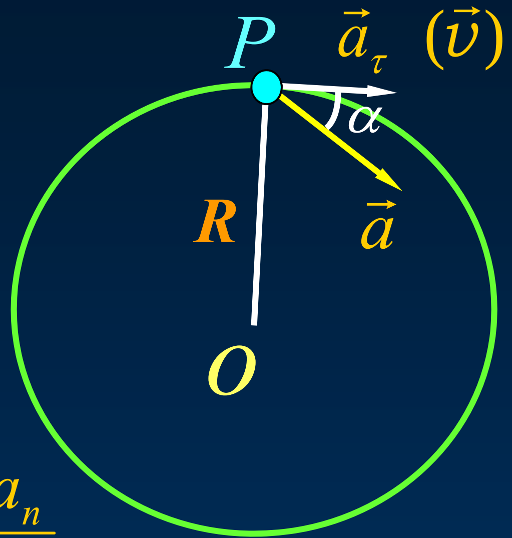
$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=-0.4 \qquad a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{(20-0.4t)^2}{R}$$

$$a_n(1)=\frac{(20-0.4)^2}{200}=2(1-0.02)^2$$

$$a(1)=\sqrt{(-0.4)^2+\left(2(1-0.02)^2\right)^2}\approx1.96(\mathrm{m/s^2})$$

例7 一物体在半径为 R 的圆环上运动, 初速度为 υ_0. 已知加速度与速度之间的夹角 α 保持不变.

求 速度大小与时间的函数关系。



解 $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = a\cos\alpha, \quad a = ?$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = a\cos\alpha \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = a\sin\alpha \qquad \tan\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\upsilon^2}{R} \Big/ \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\upsilon^2}{R\tan\alpha} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon^2} = \frac{\mathrm{d}t}{R\tan\alpha}$$

$t_0=0$

$$\Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon^2} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{R\tan\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon} = \frac{t}{R\tan\alpha} \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_0 R\tan\alpha}{R\tan\alpha - \upsilon_0 t}$$

习题

例 已知 $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j}$ (SI)

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = \upsilon\vec{\tau}$$

求（1）$t_1 = 1\mathrm{s} \rightarrow t_2 = 3\mathrm{s}$ 之间的路程 S 。

（2）t_1=1s时的速度、切向加速度和法向加速度的大小。

解 （1） $\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t\vec{i} + t^2\vec{j}) = 2\vec{i} + 2t\,\vec{j}$

设自然坐标的正方向与质点运动方向相同

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2} = \sqrt{2^2 + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}s = \upsilon\mathrm{d}t = 2\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad \int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} 2\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1+t^2})\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$s_2 - s_1 = \Delta s = 3\sqrt{10} - \sqrt{2} + \ln\frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}} = 9.98(\mathrm{m})$$

习题

例 已知 $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j}$ (SI)

求（1）$t_1 = 1\text{s} \rightarrow t_2 = 3\text{s}$ 之间的路程 S 。

（2）t_1=1s时的速度、切向加速度和法向加速度的大小。

解 （2） $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t\vec{i} + t^2\vec{j}) = 2\vec{i} + 2t\,\vec{j}$

t_1=1s时 $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 2\,\vec{j}$

$$v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = \sqrt{2^2 + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$$

t_1=1s时 $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{2}$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = ? \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{j} \qquad |\vec{a}| = 2 = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

t_1=1s时 $a_n = \sqrt{2}$