第二章 逻辑代数基础

2.1 逻辑代数介绍

2.2 逻辑代数的基本运算

2.3 逻辑代数的基本定理及规则

2.4 逻辑函数的性质

2.5 逻辑函数的化简

2.1 逻辑代数介绍

逻辑代数：将布尔代数应用于开关电路的分析与描述，也称为二值布尔代数，或开关代数。逻辑代数是二值逻辑运算中的基本数学工具

定义：逻辑代数L是一个封闭的代数系统，它由一个逻辑变量集K、常量0和1以及“逻辑乘(与)”、“逻辑加(或)”、“逻辑反(非)”三种基本运算所构成，记为：$L=\{K, +, \cdot, -, 0, 1\}$

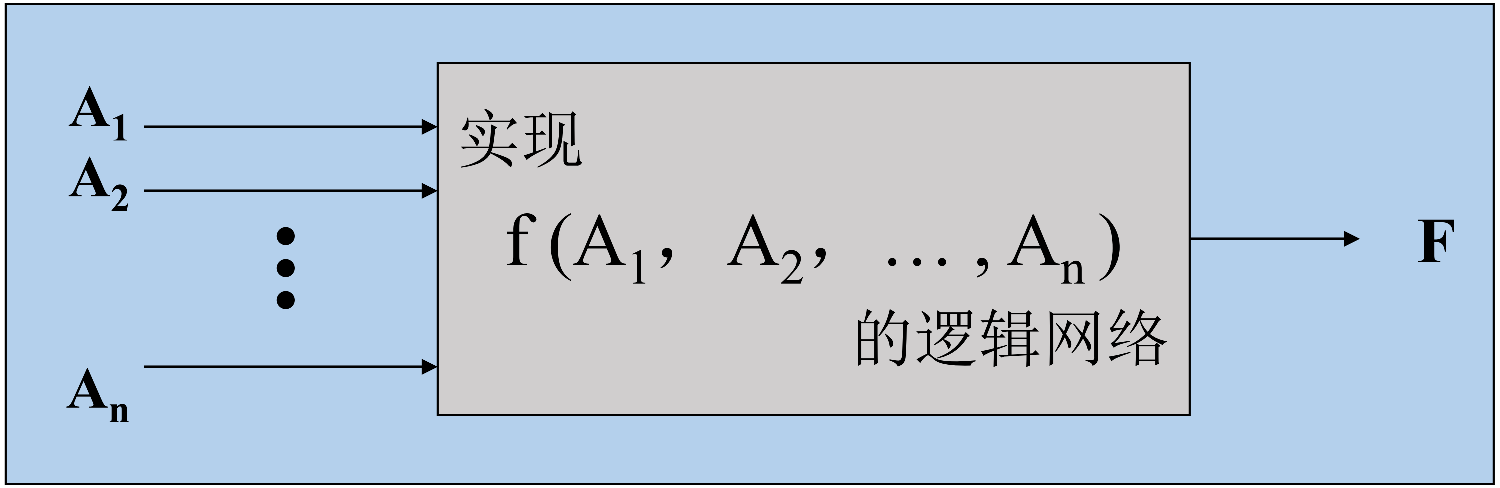
逻辑状态：用符号0、1分别表示事物的某些两种互不相容的状态

即：0状态 (0－state)和1状态 (1－state)

逻辑函数

输入逻辑变量 A_1，A_2，…, A_n，当变量取值确定后，F的值唯一确定，F是A_1，A_2，…, A_n的逻辑函数

记为：$F = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$



逻辑函数相等：两个n变量逻辑函数F_1和F_2，若对于这n个逻辑变量的2^n中组合中的任意一组取值，F_1和F_2都相等，则称函数F_1和F_2相等

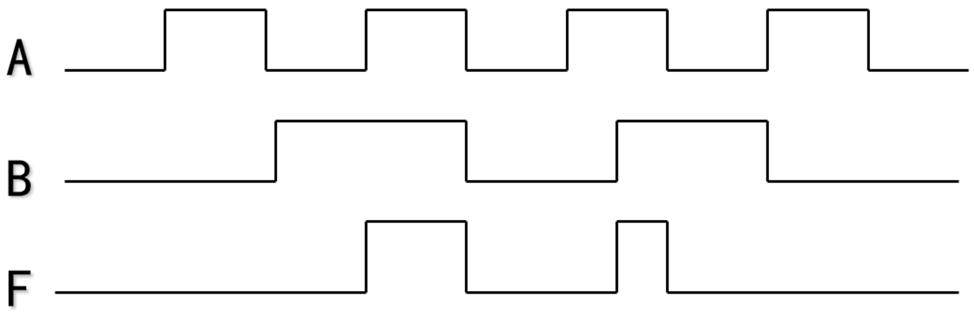
逻辑函数的表示

真值表

逻辑表达式　　$F = A \cdot B$

卡诺图（文氏图）

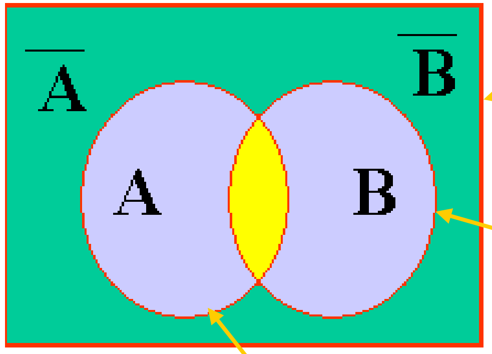
时序图（波形图）



真值表例

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Venn图

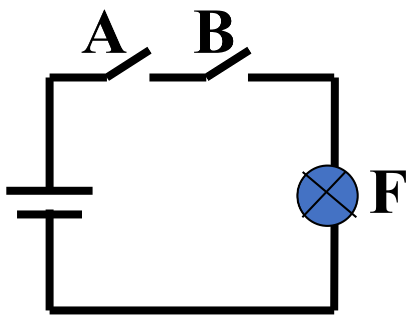
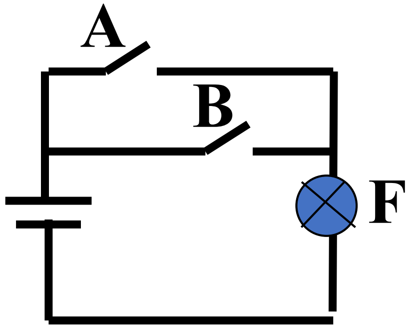
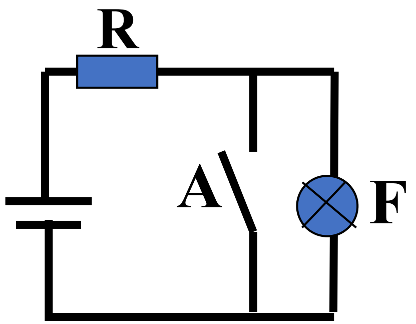


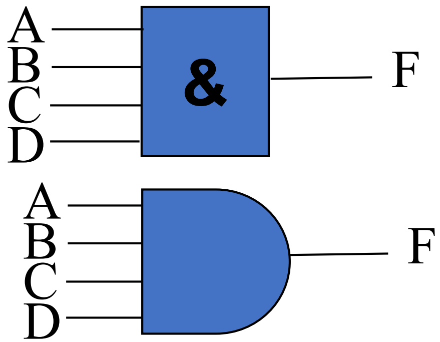
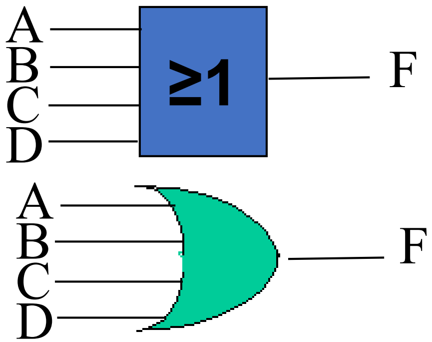
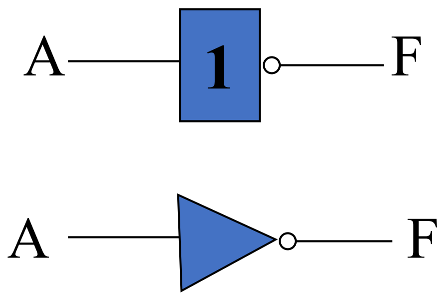
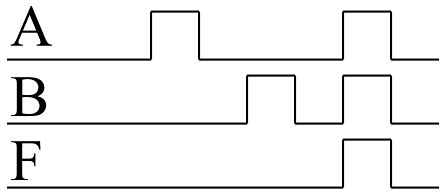
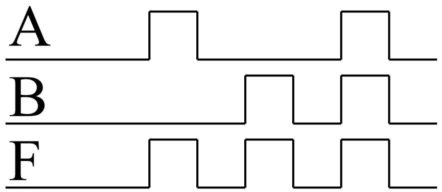
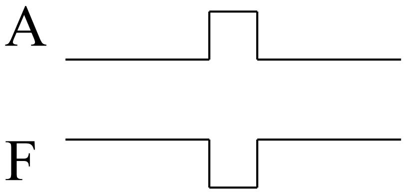
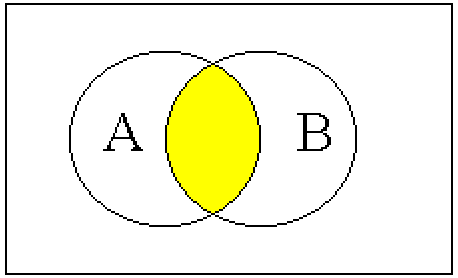
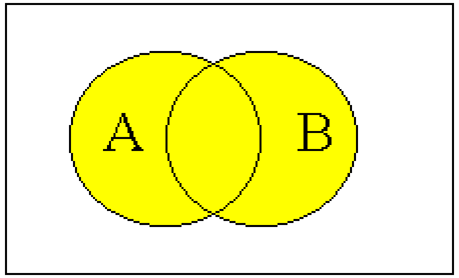
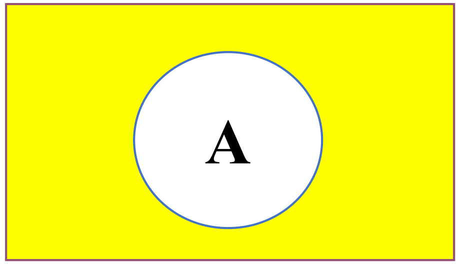
全集 为 1

引入变量B，将已有区域再分别一分为二

引入变量A，将区域 一分为二

2.2 逻辑代数的基本运算

	"与"运算(逻辑乘) *Logic Multiplication*	"或"运算(逻辑加) *Logic Addition*	"非"运算(逻辑非) *Logic Negation*
运算结果	逻辑积 **Logic Product**	逻辑和 **Logic Sum**	求补 **Complement**
示意电路			
真值表	A B F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1	A B F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1	A F 0 1 1 0

	“与”运算(逻辑乘) *Logic Multiplication*	“或”运算(逻辑加) *Logic Addition*	“非”运算(逻辑非) *Logic Negation*
代数式	$F = A \times B = A \cdot B$	$F = A + B$	$F = \overline{A}$
逻辑符号			
波形图			
文氏图			

基本运算

$$0\cdot 1=1\cdot 0=0 \qquad 1\cdot 1=1 \qquad 0\cdot 0=0$$

$$0+1=1+0=1 \qquad 1+1=1 \qquad 0+0=0$$

$$\overline{1}=0 \qquad \overline{0}=1$$

2.3 逻辑代数的基本定理及规则

0—1 律：$A+0=A$　　　$A\cdot 1=A$

$A+1=1$　　　$A\cdot 0=0$

交换律：$A+B=B+A$　　　$A\cdot B=B\cdot A$

结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$　　　$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

分配律：$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$　　　$A+B\cdot C=(A+B)(A+C)$

互补律：$A+\overline{A}=1$　　　$A\cdot\overline{A}=0$

重叠律：$A+A=A$　　　$A\cdot A=A$

吸收律

$$A + A \cdot B = A \qquad A \cdot (A + B) = A$$

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B \qquad A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \qquad (A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$$

反演律

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

证明：

$$X=A+B, Y=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$$\begin{aligned}X+Y&=A+B+\overline{A}\cdot\overline{B}\\&=[(A+B)+\overline{A}]\cdot[(A+B)+\overline{B}]\\&=[(A+\overline{A})+B]\cdot[A+(B+\overline{B})]\\&=[1+B]\cdot[A+1]=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X\cdot Y&=(A+B)\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\\&=A\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}=0\end{aligned}$$

$$X+Y=1 \qquad X\cdot Y=0$$

$$\overline{X}=Y$$

N变量的摩根定理

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$$

包含律（蕴含律）

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

$$(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C)=(A+B)\cdot(\overline{A}+C)$$

$$\begin{aligned}AB+\overline{A}C+BC&=AB+\overline{A}C+1BC\\&=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC\\&=AB+ABC+\overline{A}C+\overline{A}BC\end{aligned}$$

逻辑代数的基本规则

1、代入规则

已知 $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

有任意函数 h，令： $x_i = h$

则 $f(x_1, x_2, \ldots, h, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, h, \ldots, x_n)$ 依然成立

例： $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

令 $B = BC$ 代入式中

$$\overline{A(BC)} = \overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

2、反演规则

已知原函数：$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,1,+,\cdot)$

$$\overline{f}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,1,+,\cdot)=f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n,1,0,\cdot,+)$$

注意：必须保持原有的运算次序

例1：$F=\overline{A}+\overline{B}(C+\overline{D}E)$

$$\overline{F}=A[B+\overline{C}(D+\overline{E})]$$

3、对偶规则

已知原函数：$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,1,+,\cdot)$

$$f'=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,1,0,\cdot,+)$$

注意：必须保持原有的运算次序

$$(f')'=f$$

$$f_1=f_2 \Rightarrow f_1'=f_2'$$

例：试证 $A+BC=(A+B)(A+C)$

令: $F_1=A+BC$ $F_2=(A+B)(A+C)$

求两个函数的对偶:

$F_1`=A(B+C)=AB+AC$ $F_2`=AB+AC$

$F_1`= F_2`$

所以$F_1=F_2$

2.4 逻辑函数的性质

2.4.1复合逻辑

1、与、或、非三种基本逻辑运算组合起来可以实现任何逻辑函数。

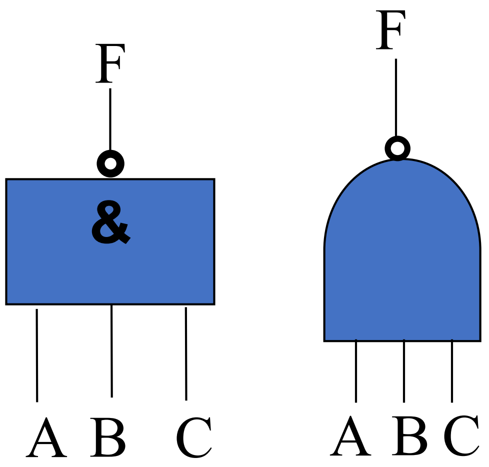
2、与门、或门、非门三种基本逻辑运算(门)组合起来可以构成实现任何逻辑功能的逻辑电路，称此三门构成了一个逻辑完备组

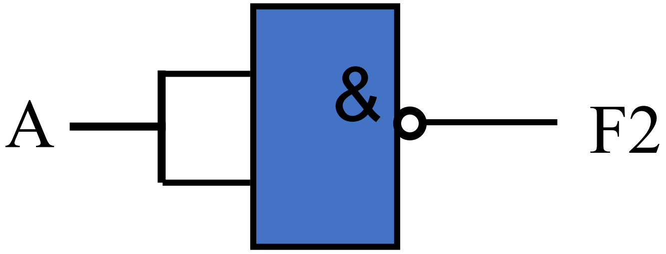
3、实现较复杂的逻辑功能，可以增加门电路的功能，以简化电路。

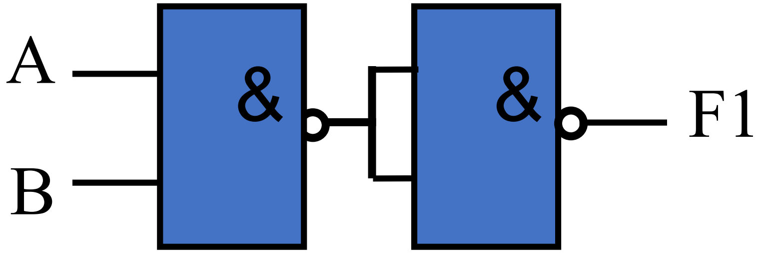
1、与非逻辑(NAND)

$$F = \overline{ABC}$$

A B C	F
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

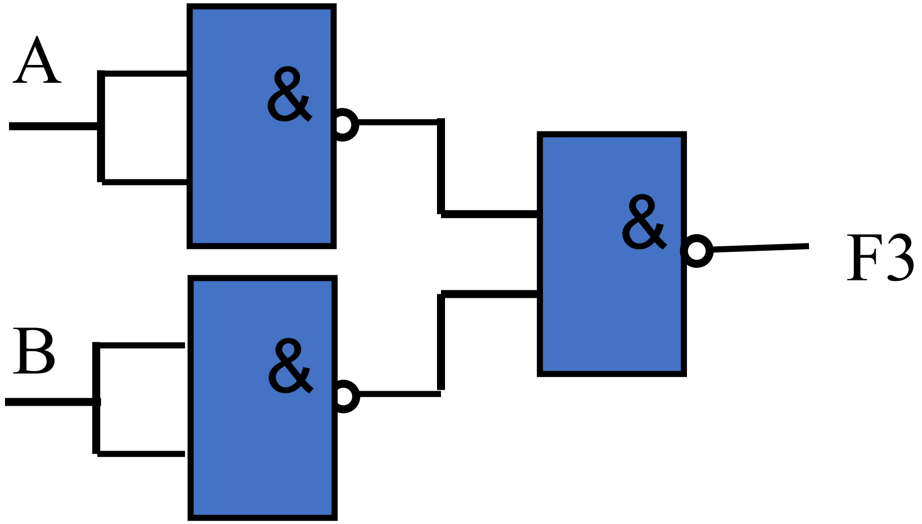






$$F1 = \overline{AA} = \overline{A}$$

$$F2 = \overline{\overline{AB}} = AB$$

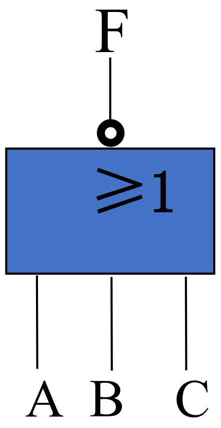


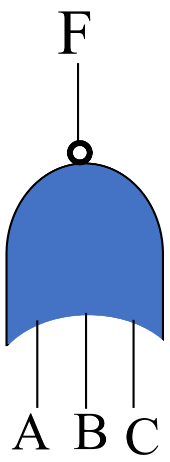
$$F3 = \overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$$

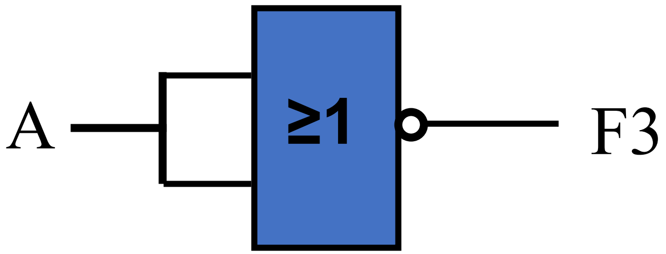
2、或非逻辑(NOR)

$$F = \overline{A + B + C}$$

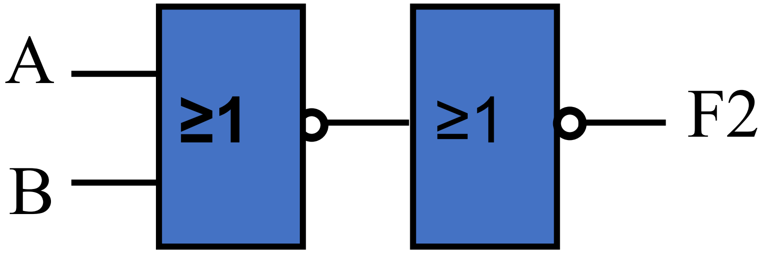
A B C	F
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0



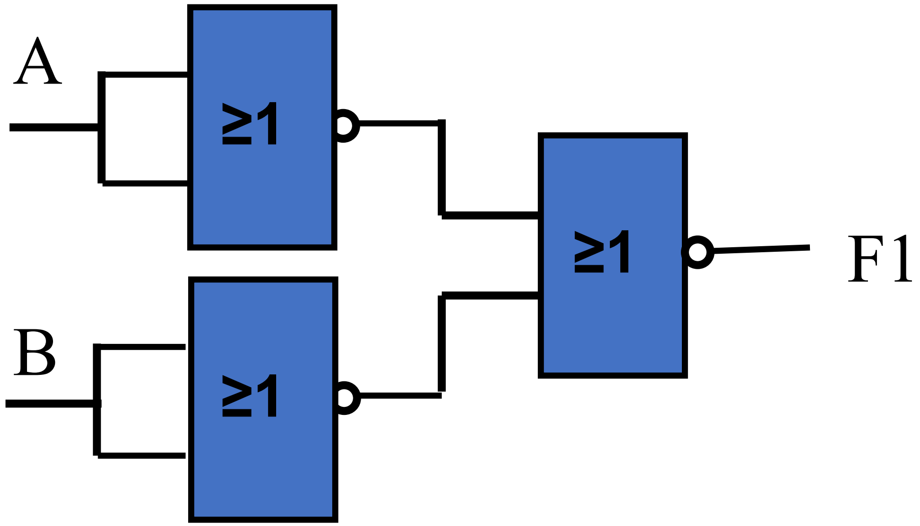




$$F1 = \overline{A + A} = \overline{A}$$



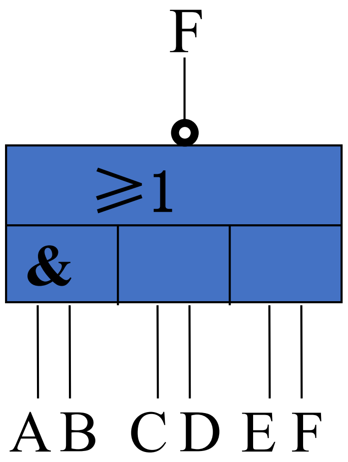
$$F2 = \overline{\overline{A + B}} = A + B$$

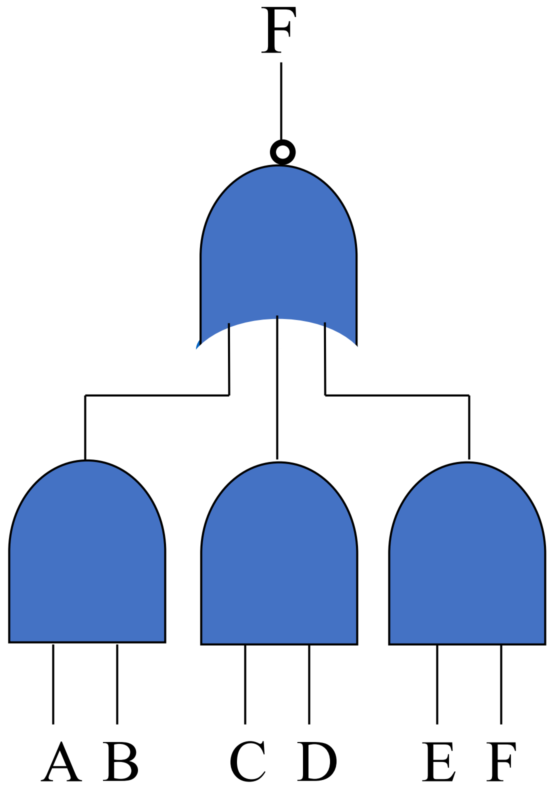


$$F3 = \overline{\overline{A + A} + \overline{B + B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$$

3、与或非逻辑(AOI)

$$F = \overline{AB + CD + EF}$$

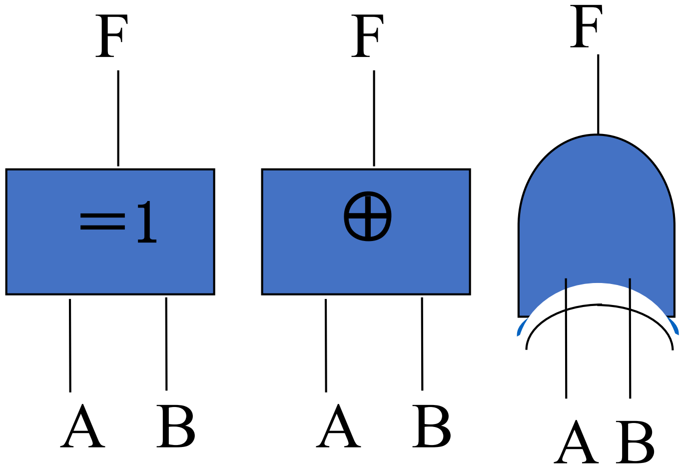




4、异或逻辑(NOR)

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

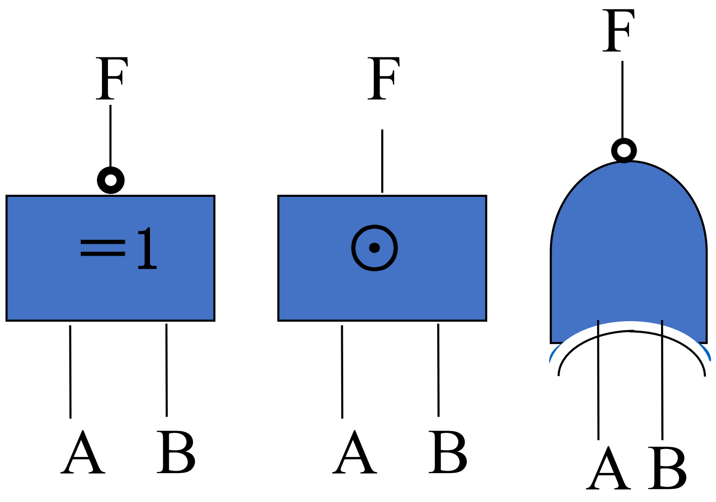
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



5. 同或逻辑

$$F = A \odot B = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



异或运算与同或运算的关系

$$\overline{A \oplus B} = A \odot B \qquad \overline{A \odot B} = A \oplus B$$

$$\begin{aligned}\overline{A \oplus B} &= \overline{\overline{A}B + A\overline{B}} \\ &= \overline{\overline{A}B} \cdot \overline{A\overline{B}} \\ &= (A + \overline{B})(\overline{A} + B) \\ &= AB + \overline{A}\,\overline{B} = A \odot B\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A \oplus B \oplus C &= \overline{A}(B \oplus C) + A\overline{(B \oplus C)} \\
&= \overline{A}(B \oplus C) + A(B \odot C) \\
&= \overline{A}(\overline{B}C + B\overline{C}) + A(BC + \overline{B}\,\overline{C}) \\
&= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + ABC + A\overline{B}\,\overline{C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \odot B \odot C &= \overline{A}\overline{(B \odot C)} + A(B \odot C) \\
&= \overline{A}(B \oplus C) + A(B \odot C)
\end{aligned}
$$

当变量为偶数时，同或运算与异或运算之间具有互补关系

当变量为奇数时，同或运算与异或运算之间具有相等关系

异或运算和同或运算的基本代数性质

0-1律

$$A \oplus 0 = A \qquad A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$A \odot 0 = \overline{A} \qquad A \odot 1 = A$$

交换律

$$A \oplus B = B \oplus A \qquad A \odot B = B \odot A$$

分配律

$$A(B \oplus C) = AB \oplus AC$$

$$A + (B \odot C) = (A + B) \odot (A + C)$$

结合律

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

$$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$$

调换律

$$A \oplus B = C, \text{则} A \oplus C = B, C \oplus B = A$$

$$A \odot B = C, \text{则} A \odot C = B, C \odot B = A$$

例1、化简 $(\overline{A}B \odot C) + (B \oplus A\overline{C})$

$$
\begin{aligned}
(\overline{A}B \odot C) + (B \oplus A\overline{C}) &= ((\overline{A}B)C + \overline{(\overline{A}B)}\overline{C}) + (B\overline{(A\overline{C})} + \overline{B}(A\overline{C})) \\
&= \overline{A}BC + (A + \overline{B})\overline{C} + B(\overline{A} + C) + A\overline{B}\overline{C} \\
&= B(\overline{A}C + \overline{A} + C) + (A + \overline{B} + A\overline{B})\overline{C} \\
&= B(\overline{A} + C) + (A + \overline{B})\overline{C} \\
&= \overline{A}B + BC + A\overline{C} + \overline{B}\overline{C} \\
&= B + \overline{C}
\end{aligned}
$$

2.4.2逻辑函数的基本表达式

依照逻辑运算的规则，一个逻辑命题可以用多种形式的逻辑函数来描述，而这些逻辑函数的真值表都是相同的。

$$F = A \oplus B$$

$$= \overline{A}B + A\overline{B}$$ 与或式（积之和式）

$$= (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$ 或与式（和之积式）

$$= \overline{\overline{\overline{A}B}\,\overline{A\overline{B}}}$$ 与非式

$$= \overline{\overline{(A+B)}+\overline{(\overline{A}+\overline{B})}}$$ 或非式

$$= \overline{\overline{A}\,\overline{B}+AB}$$ 与或非式

表达式中所有乘积项都是单个变量相乘：积之和式

$$AB\overline{C}+DEFG+H \qquad A+\overline{B}+C+\overline{D}E$$

$$\times \quad (A+B)CD+EF$$

两个分配率用于展开表达式以获得积之和式

$$A(B+C)=AB+AC \qquad (A+B)(A+C)=A+BC$$

例1、化简 $(A+BC)(A+D+E)$

$$\begin{aligned}(A+BC)(A+D+E) &= (A+BC)(A+(D+E)) \\ &= A+BC(D+E) \\ &= A+BCD+BCE\end{aligned}$$

表达式中所有和项都是单个变量的和时：和之积式

$$(A+\overline{B})(C+\overline{D}+E)(A+\overline{C}+\overline{E})$$

$\times$ $(A+B)(C+D)+EF$

两个分配率用于展开表达式以获得和之积式

$$A(B+C)=AB+AC \qquad (A+B)(A+C)=A+BC$$

例2、 $A+\overline{B}CD$

$$\begin{aligned} & A+\overline{B}CD \\ &=(A+\overline{B})(A+CD) \\ &=(A+\overline{B})(A+C)(A+D) \end{aligned}$$

例3、 $A\overline{B}+\overline{C}D$

$$\begin{aligned} & A\overline{B}+\overline{C}D \\ &=(A\overline{B}+\overline{C})(A\overline{B}+D) \\ &=(A+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C})(A+D)(\overline{B}+D) \end{aligned}$$

2.4.3逻辑函数的标准形式

逻辑命题的表示法：真值表、逻辑表达式、卡诺图……

真值表、逻辑表达式、卡诺图之间的关系：

①真值表是逻辑函数最基本的表达方式，具有唯一性；

②由真值表可以导出逻辑表达式和卡诺图；

③由真值表导出逻辑表达式的两种标准形式：最小项之和与最大项之积

例1、3输入1输出的开关电路，输入A、B、C分别代表二进制数N从左往右的第1、2、3位。当N≥$(011)_2$时，F=1；当N<$(011)_2$时，F=0。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

表达式：使F=1的变量A、B、C的组合

当A=0、B=1、C=1时，F=1　　$\overline{A}BC$

当A=1、B=0、C=0时，F=1　　$A\overline{B}\overline{C}$

⋮

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$= \overline{A}BC + A\overline{B} + AB$$

$$= \overline{A}BC + A$$

$$= BC + A$$

最小项

n 个变量的积（与），积中每个变量以原/反变量形式出现且仅出现一次，此积（与）称为 n 个变量的最小项。

n 变量构成 2^n 个最小项，记为 m_i

i：最小项变量按顺序排好，用 1 代替原变量，0 代替反变量，得到的二进制数的等值十进制数，即为 i 的值。

序号	A	B	C	最小项
0	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}=m_0$
1	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C=m_1$
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}=m_2$
3	0	1	1	$\overline{A}BC=m_3$
4	1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}=m_4$
5	1	0	1	$A\overline{B}C=m_5$
6	1	1	0	$AB\overline{C}=m_6$
7	1	1	1	$ABC=m_7$

当函数F写成最小项的和时，称其为最小项展开式或标准积之和式

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$= m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$F(A,B,C) = \sum m(3,4,5,6,7)$$

$$F = \sum m^3(3,4,5,6,7)$$

序号	A	B	C	最小项
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C = m_1$
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C} = m_2$
3	0	1	1	$\overline{A}BC = m_3$
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C} = m_4$
5	1	0	1	$A\overline{B}C = m_5$
6	1	1	0	$AB\overline{C} = m_6$
7	1	1	1	$ABC = m_7$

最大项

n 个变量的和（或），和中每个变量以原/反变量形式出现且仅出现一次，此和（或）称为 n 个变量的最大项。

n 变量构成 2^n 个最大项，记为 M_i

i：最大项变量按顺序排好，用 1 代替反变量，0 代替原变量，得到的二进制数的等值十进制数，即为 i 的值。

序号	A	B	C	最大项
0	0	0	0	$A+B+C=M_0$
1	0	0	1	$A+B+\overline{C}=M_1$
2	0	1	0	$A+\overline{B}+C=M_2$
3	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}=M_3$
4	1	0	0	$\overline{A}+B+C=M_4$
5	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}=M_5$
6	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C=M_6$
7	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=M_7$

$$M_i=\overline{m_i}$$

当函数F写成最大项的积时，称其为最大项展开式或标准和之积式

$$F = M_0 M_1 M_2$$

$$F(A,B,C) = \prod M(0,1,2)$$

$$F = \prod M^3(0,1,2)$$

序号	A	B	C	最大项
0	0	0	0	$A+B+C=M_0$
1	0	0	1	$A+B+\overline{C}=M_1$
2	0	1	0	$A+\overline{B}+C=M_2$
3	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}=M_3$
4	1	0	0	$\overline{A}+B+C=M_4$
5	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}=M_5$
6	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C=M_6$
7	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=M_7$

最小项与最大项具有如下性质：

（1）对于任意最小项，只有一组输入变量组合可使其值为1

对于任意最大项，只有一组输入变量组合可使其值为0

（2）n变量的所有最小项之和为1

n变量的所有最大项之积为0

（3）任意两个最小项之积必为0，即： $m_i \cdot m_j = 0 (i \neq j)$

任意两个最大项之和必为1，即： $M_i + M_j = 1 (i \neq j)$

（4） $m_i = \overline{M_i} \quad M_i = \overline{m_i}$

$$F = \sum m^3(3,4,5,6,7)$$

$$\overline{F} = (\overline{m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7}) = \overline{m_3 m_4 m_5 m_6 m_7} = M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 = \prod M^3(3,4,5,6,7)$$

函数的最小项标准式

如果构成函数的积之和表达式中每一个乘积项(与项)均为最小项，则这种表达式称为最小项标准式，这种表示是唯一的。

例2、 $F = AC + \bar{A}B + BC$

$$= ABC + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + ABC + \bar{A}BC$$

$$= ABC + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}$$

$$= m_7 + m_5 + m_3 + m_2$$

$$= \sum m^3(2,3,5,7)$$

写出逻辑函数的最小项标准式的方法：

函数为与或式：反复应用 $A=A(B+\overline{B})$ 代入缺少某变量(Y)的与项，形成最小项之和的形式。

例3、 $$\begin{aligned} F &= AC+A\overline{B}+BC \\ &= AC(B+\overline{B})+A\overline{B}(C+\overline{C})+BC(A+\overline{A}) \\ &= ABC+A\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC \\ &= \sum m^3(3,4,5,7) \end{aligned}$$

真值表转化标准式：真值表每一行变量的组合对应一个最小项。如果对应该行的函数值为1，则函数的最小项表达式中应包含该最小项；不包含函数值为 0的行对应的最小项。

A	B	C	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$F = m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum m^3(3,4,5,6,7)$$

$$\overline{F} = m_0 + m_1 + m_2 = \sum m^3(0,1,2)$$

n 变量函数F有2^n个最小项，不是包含在原函数F的表达式中，就是包含在反函数的表达式中。

函数的最大项标准式

如果构成函数的和之积表达式中每一个和项均为最大项，则这种表达式称为最大项标准式，这种表示是唯一的。

函数为或与式：反复应用 $A=(A+B)(A+\overline{B})$ 代入缺少某变量(Y)的与项，形成最大项之积的形式。

例4、 $F=(A+C)(\overline{A}+B)$

$$=(A+C+B\overline{B})(\overline{A}+B+C\overline{C})$$

$$=(A+C+B)(A+C+\overline{B})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

$$=M_0M_2M_4M_5$$

$$=\prod M^3(0,2,4,5)$$

真值表每一行变量组合对应一个最大项。如果对应该行的函数值为0，则函数的最大项表达式中应包含该最大项；不包含函数值为1的行应该的最大项。

$$F = M_0 M_1 M_2 = \prod M^3(0,1,2)$$

$$\overline{F} = M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 = \sum M^3(3,4,5,6,7)$$

n 变量函数F有2^n个最大项，不是包含在原函数F的表达式中，就是包含在反函数的表达式中。

A	B	C	F	$\overline{\mathrm{F}}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

同一函数的最小项标准式与其最大项标准式的关系

逻辑函数的两种标准式变换时，互换$\sum m^n$和$\prod M^n$，并在符号后列出原式中缺少的数字。两种标准式都是唯一的。

$$F=\sum m^3(0,2,3)=\prod M^3(1,4,5,6,7)$$

$$\overline{F}=\sum m^3(1,4,5,6,7)=m_1+m_4+m_5+m_6+m_7$$

$$\overline{\overline{F}}=\overline{m_1+m_4+m_5+m_6+m_7}$$

$$=\overline{m_1}\bullet\overline{m_4}\bullet\overline{m_5}\bullet\overline{m_6}\bullet\overline{m_7}$$

$$=M_1\bullet M_4\bullet M_5\bullet M_6\bullet M_7$$

$$=\prod M^3(1,4,5,6,7)$$

2.5 逻辑函数的化简

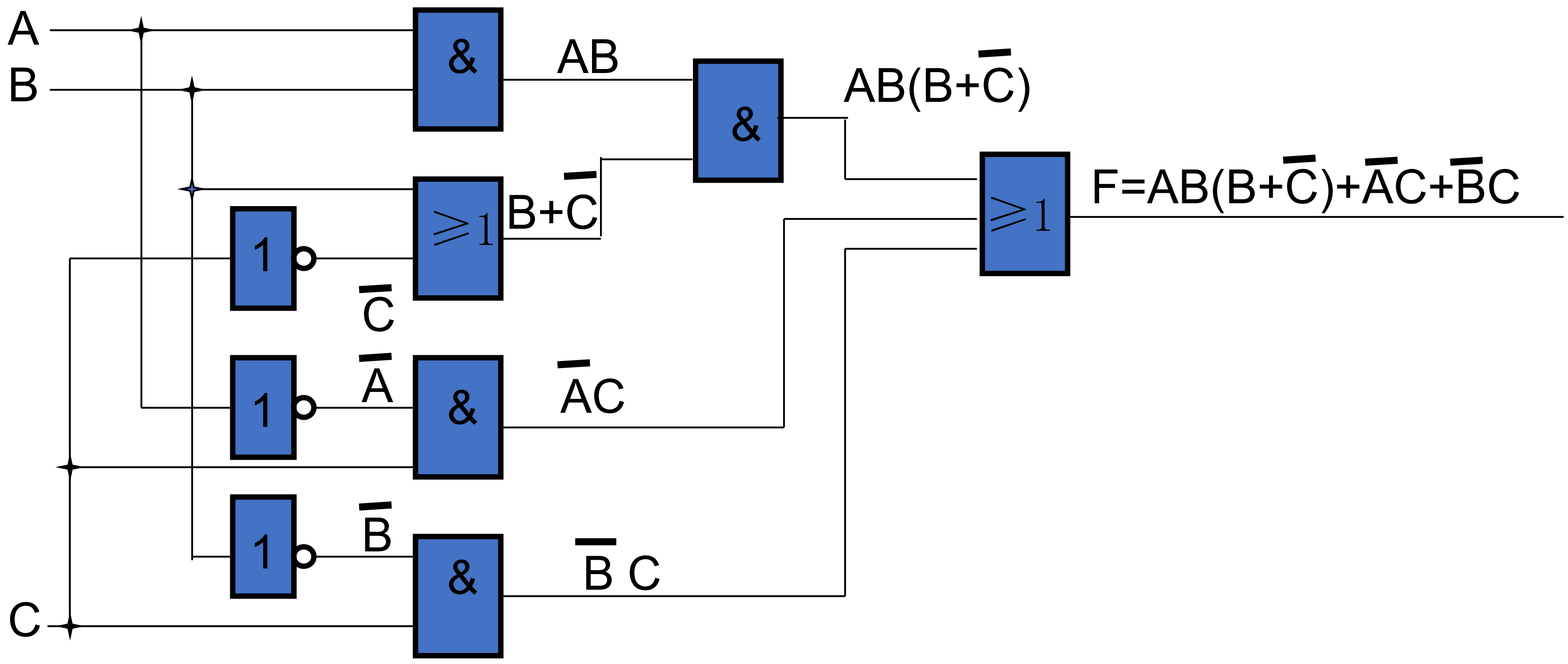
逻辑函数对应实现其逻辑功能的电路，使该函数最简意味电路最简。

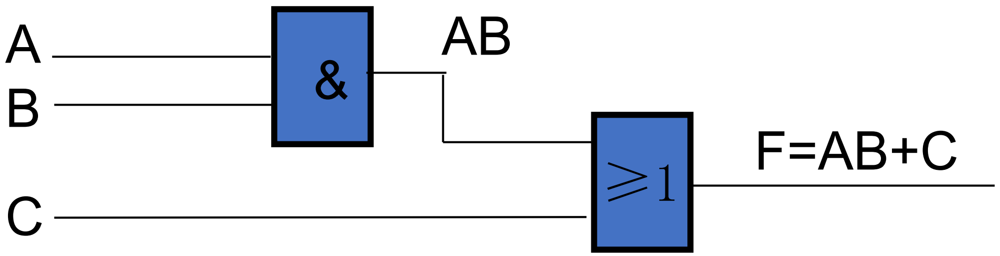
最简逻辑电路：门数最少；门的输入端最少；门的级数最少。

最简与或式：与项的数目最少；每个与项的变量个数最少。

最简或与式：或项的数目最少；每个或项的变量个数最少。

$$F = AB(B+\overline{C}) + \overline{A}C + \overline{B}C = AB + C$$





化简定理

$$A + A \cdot B = A \qquad A \cdot (A + B) = A$$

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B \qquad A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \qquad (A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$$

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

$$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$$

$$(A + B)(\overline{A} + C) = AC + \overline{A}B$$

$$AB + \overline{A}C = (A + C)(\overline{A} + B)$$

例1、 $\overline{A}BC+\overline{A} \quad =\overline{A}$

例2、 $[A+\overline{B}C+D+EF][A+\overline{B}C+\overline{(D+EF)}] \quad =A+\overline{B}C$

例3、 $(AB+C)(\overline{B}D+\overline{C}\overline{E})+\overline{(AB+C)} \quad =\overline{(AB+C)}+(\overline{B}D+\overline{C}\overline{E})$

例4、 $(A+B+\overline{C})(A+B+D)(A+B+E)(A+\overline{D}+E)(\overline{A}+C)$

$$=(A+B+\overline{C}D)(A+B+E)(AC+(\overline{D}+E)\overline{A})$$

$$=(A+B+\overline{C}DE)(AC+\overline{A}\overline{D}+\overline{A}E)$$

$$=AC+ABC+\overline{A}B\overline{D}+\overline{A}BE+\overline{A}\overline{C}DE$$

$$=AC+\overline{A}B\overline{D}+\overline{A}BE+\overline{A}\overline{C}DE$$

2.5.1代数化简法

（1）要求熟记化简公式、定理；

（2）技巧性强，特别是采用“配项法”，要先找出“配项”，使表达式“由简变繁”，再消除多余项，“由繁变简”；

（3）代数化简的过程和结果呈多样性，且不易发现出错，也不易判断是否最简。

与或式的化简

与或式化简常用的公式主要有四个：

$$A+\overline{A}=1 \qquad A+\overline{A}B=A+B$$

$$AB+A\overline{B}=A \qquad AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

化简过程：代入规则，把子函数看成变量，应用公式简化

需要变换子函数的形式，以应用公式，化简为**最简与或式**

吸收法

利用公式：$A + AB = A$ ，消去多余变量

例1、 $F = AB + AB(C + D)E = AB$

利用公式：$A + \overline{A}B = A + B$，消去反变量

例2、
$$
\begin{aligned}
F &= AB + \overline{A}C + \overline{B}C \\
&= AB + (\overline{A} + \overline{B})C \\
&= AB + \overline{AB}C \\
&= AB + C
\end{aligned}
$$

合并项法

利用公式：$AB+A\overline{B}=A$，两项合并为一项且消去一个变量

例3、$F=\sum m^4(5,7,13,15)=\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BCD+AB\overline{C}D+ABCD$

$$=\overline{A}BD+ABD$$

$$=BD$$

消去法

利用公式：$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$，消去多余项

例4、$F=AC+ADE+\overline{C}D$

$$=AC+\overline{C}D+AD+ADE$$

$$=AC+\overline{C}D$$

配项法

无法直接应用公式时，先增加与项，再利用增加项消除多余项。

利用公式：$1 = A + \bar{A}$ ，增加项数

$$F = A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B = A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C(A + \bar{A}) + \bar{A}B(C + \bar{C})$$

$$= A\bar{B} + B\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}$$

$$= A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC = A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{A}C$$

$$F = A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B = A\bar{B}(C + \bar{C}) + B\bar{C}(A + \bar{A}) + \bar{B}C + \bar{A}B$$

$$= A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + B\bar{C}A + B\bar{C}\bar{A} + \bar{B}C + \bar{A}B$$

$$= A\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B$$

利用公式：$AB+\overline{A}C=AB+\overline{A}C+BC$，增加项数

$$
\begin{aligned}
F &= A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B \\
&= A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B+\overline{A}C \\
&= A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B \\
&= A\overline{B}+B\overline{C}+A\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B \\
&= A\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B
\end{aligned}
$$

综合法

$$
\begin{aligned}
F &= AB + A\overline{C} + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B + ADE(F+G) \\
&= A(B+\overline{C}) + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B + ADE(F+G) \\
&= A\overline{\overline{B}C} + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B + ADE(F+G) \\
&= A + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B + ADE(F+G) \\
&= A + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B \\
&= A + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B + \overline{C}D \\
&= A + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{D}B + \overline{C}D \\
&= A + \overline{B}C + \overline{D}B + \overline{C}D
\end{aligned}
$$

或与式的化简

常规法：

$$(A+B)(A+\overline{B})=A$$

$$A(A+B)=A$$

$$A(\overline{A}+B)=AB$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

利用最简与或式得到最简或与式

对偶规则：求F的对偶式F’，将F’化简为最简与或式，再求对偶，得到F最简或与式。

$$F=(A+B)(A+\overline{B})(B+C)(\overline{C}+D)(B+D)$$

$$\begin{aligned}F'&=AB+A\overline{B}+BC+\overline{C}D+BD\\&=A+BC+\overline{C}D+BD\\&=A+BC+\overline{C}D\end{aligned}$$

$$(F')'=(A+BC+\overline{C}D)'$$

$$F=A(B+C)(\overline{C}+D)$$

反演规则：求F的反函数$\overline{F}$，将$\overline{F}$化简为最简与或式，再求反，得到F最简或与式。

$$F = AB + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{D}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= (\overline{A} + \overline{B})(A + B)(A + C)(\overline{B} + D) \\
&= (\overline{A}B + A\overline{B})(A + C)(\overline{B} + D) \\
&= (\overline{A}BC + A\overline{B} + A\overline{B}C)(\overline{B} + D) \\
&= \overline{A}BCD + A\overline{B} + A\overline{B}D \\
&= \overline{A}BCD + A\overline{B}
\end{aligned}$$

$$F = \overline{\overline{F}} = (A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + B)$$

代数化简的特点：

应用基本公式和法则

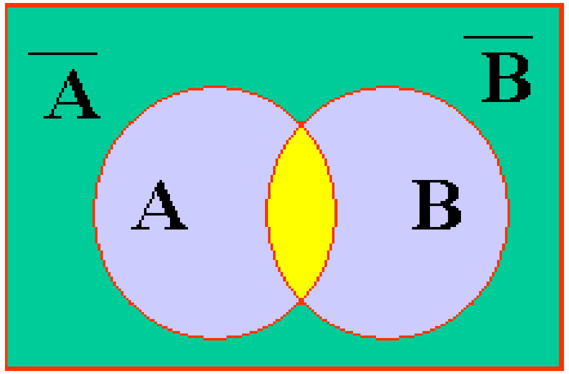
一定的技巧

没有严格的规则可循

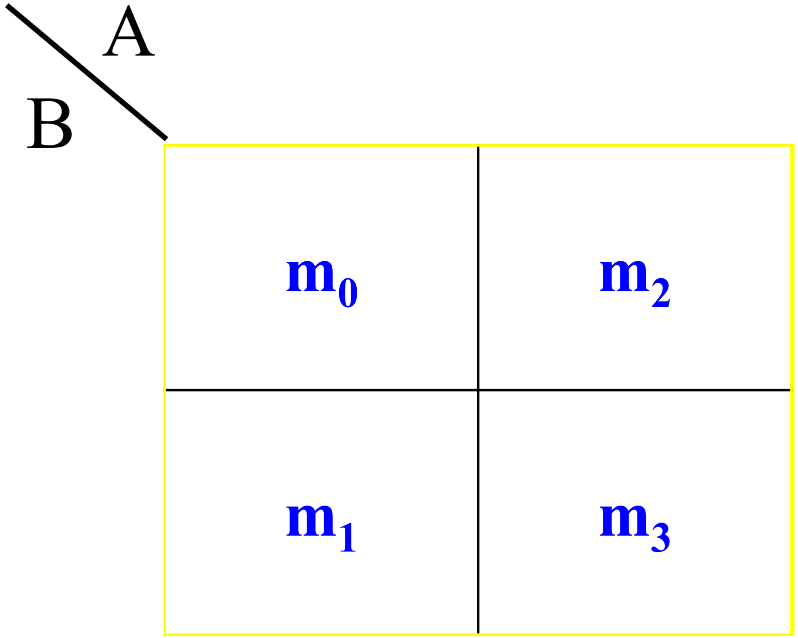
化简结果是否最简难以判断

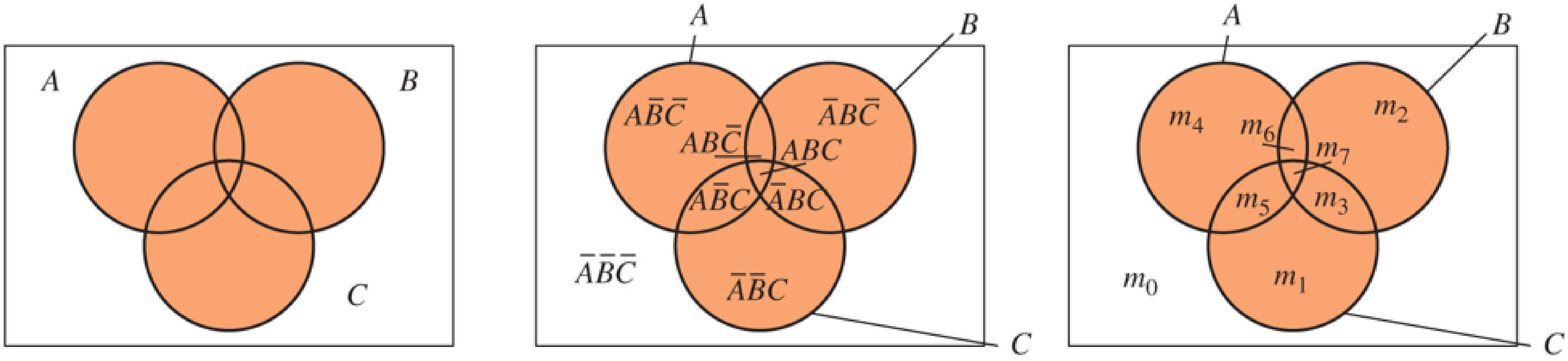
2.5.2卡诺图

卡诺图和文氏图一样，是逻辑函数**真值表**的一种**图形**表示，它使得函数的最小项以特殊方式编排，这样可以很容易观察出什么时候可以对两个最小项、缺少变量的乘积项等使用化简定理。



A	B	F
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	





A

000	010	110	100
001	011	111	101

C

B

A

D

0	4	12	8
1	5	13	9
3	7	15	11
2	6	14	10

C

B

A

B

0	4	12	8
1	5	13	9
3	7	15	11
2	6	14	10

E

C

B

16	20	28	24
17	21	29	25
19	23	31	27
18	22	30	26

D

C

卡诺图的特点

(1) 卡诺图被每个变量逐次地分成两半

(2) 2^n个单元，每个单元对应一个最小项，单元的十进制数就是它对应的最小项的下标值

(3) 相邻单元，仅有一个变量状态不同

(4) 若干单元对应一个逻辑函数，即逻辑函数可以图示于卡诺图上

A

D

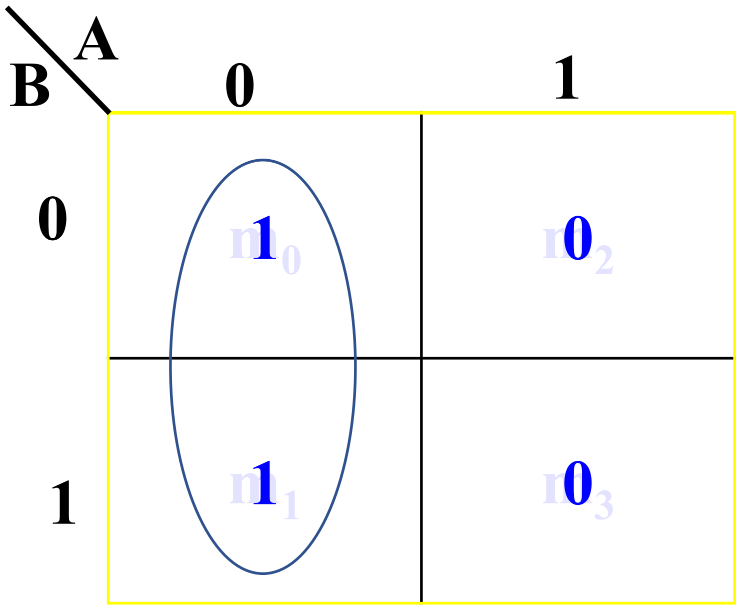
0	4	12	8
1	5	13	9
3	7	15	11
2	6	14	10

C

B

逻辑函数与卡诺图

A	B	F
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



i个独立变量

2^i个单元

单元序号

单元标记

$$F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B$$

卡诺图可以通过每个独立变量值的组合来确定函数值。

$F = m_1 + m_2 + m_5 + m_7$，其真值表和卡诺图标注如下：

行号	ABC	F	m_i
0	0 0 0	0	m_0
1	0 0 1	1	m_1
2	0 1 0	1	m_2
3	0 1 1	0	m_3
4	1 0 0	0	m_4
5	1 0 1	1	m_5
6	1 1 0	0	m_6
7	1 1 1	1	m_7

A

000	010	110	100
001	011	111	101

C

B

0	1	0	0
1	0	1	1

$$F = A\overline{B}C + AB + \overline{C}$$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	1

$$F = \sum m(0,3,5) = m_0 + m_3 + m_5$$
$$= \prod M(1,2,4,6,7) = M_1 M_2 M_4 M_6 M_7$$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1

逻辑函数在卡诺图上的表示

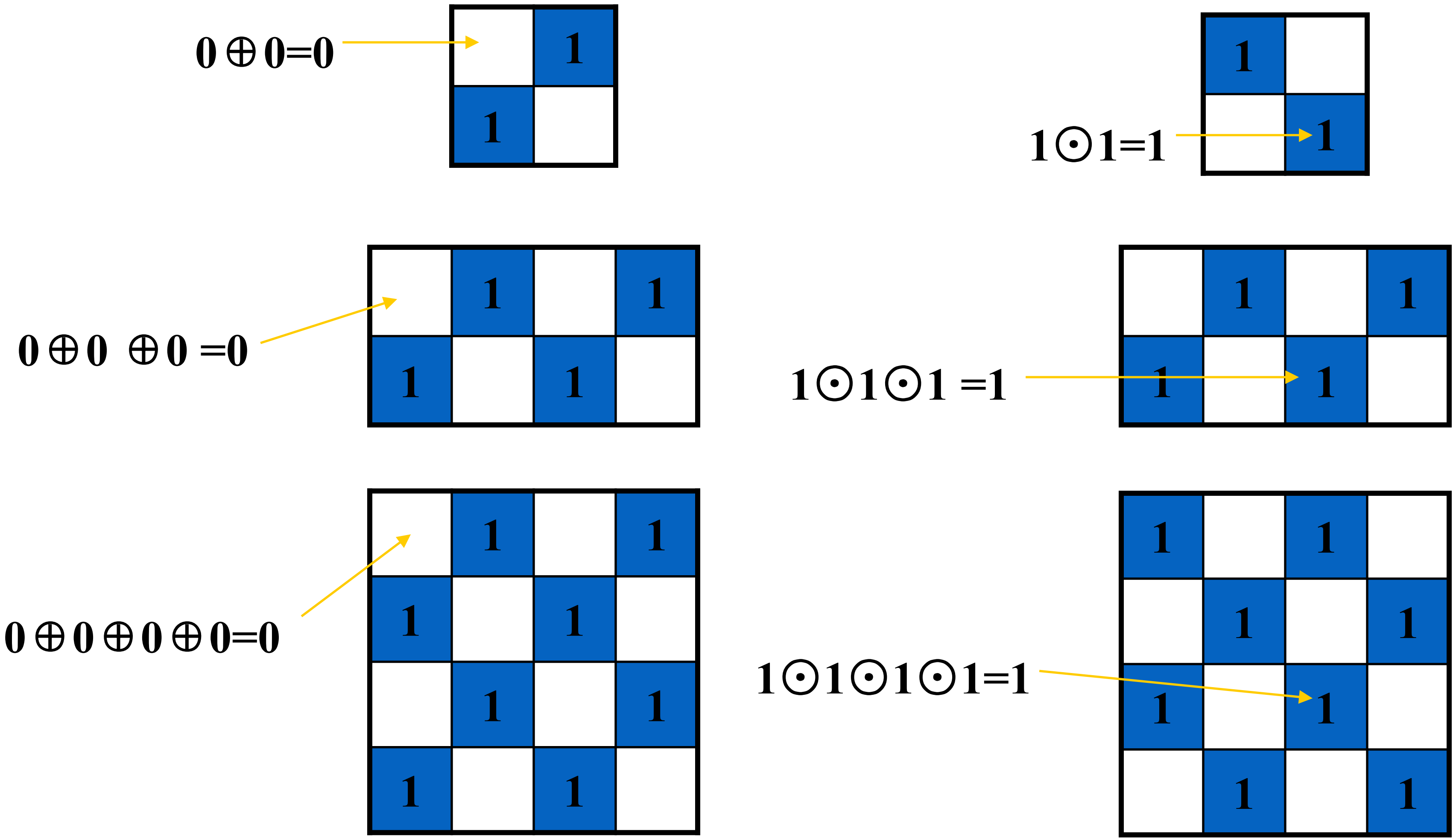
① 把给定的逻辑函数化为最小项标准式

② 按变量数画出相应卡诺图

③ 在对应于最小项标准式中各最小项的小方格内标“1”

④ 所有标有“1”的小方格的合成区域就表示该函数

同或运算和异或运算在卡诺图上的表示



卡诺图化简逻辑函数的基本原理

1.“相邻”的判断

（1）相邻最小项：两个最小项只有一个变量不同(一个为原变量，一个为反变量)，在图上反映为两个相邻的小方格。

（2）卡诺图相邻小方格：是指对应最小项相邻。n 变量卡诺图每个小方格具有n个相邻小方格：

具有共同边界的小方格(几何相邻)

同一幅卡诺图中分别处于行(或列)两端的小方格(相对相邻)

在相邻两幅卡诺图中，处于相同位置的两个小方格(相重相邻)

0	1

0	2
1	3

0	2	6	4
1	3	7	5

0	4	12	8
1	5	13	9
3	7	15	11
2	6	14	10

0	4	12	8
1	5	13	9
3	7	15	11
2	6	14	10

16	20	28	24
17	21	29	25
19	23	31	27
18	22	30	26

0	4	12	8	16	20	28	24
1	5	13	9	17	21	29	25
3	7	15	11	19	23	31	27
2	6	14	10	18	22	30	26
32	36	44	40	48	52	60	56
33	37	45	41	49	53	61	57
35	39	47	43	51	55	63	59
34	38	46	42	50	54	62	58

真值表上，最小项相邻关系不直观，卡诺图上则相邻关系一目了然

A

B

0	4	12	8
1	5	13	9
3	7	15	11
2	6	14	10

E

C

B

16	20	28	24
17	21	29	25
19	23	31	27
18	22	30	26

D

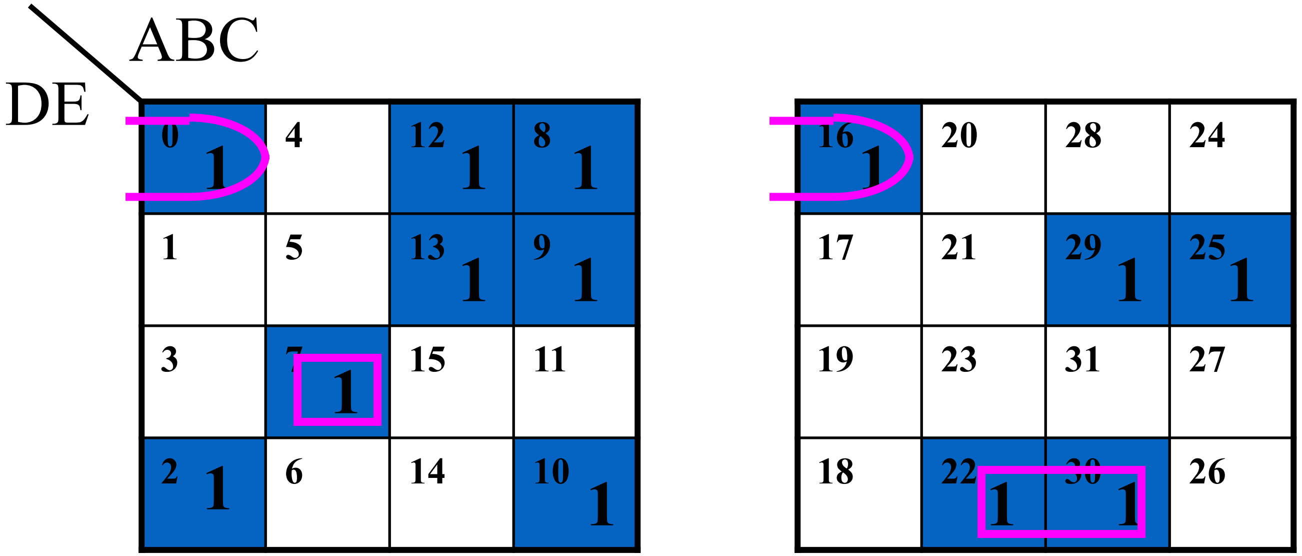
C

画卡诺圈的规则

寻找相邻块的目的是为了在图上进行函数化简

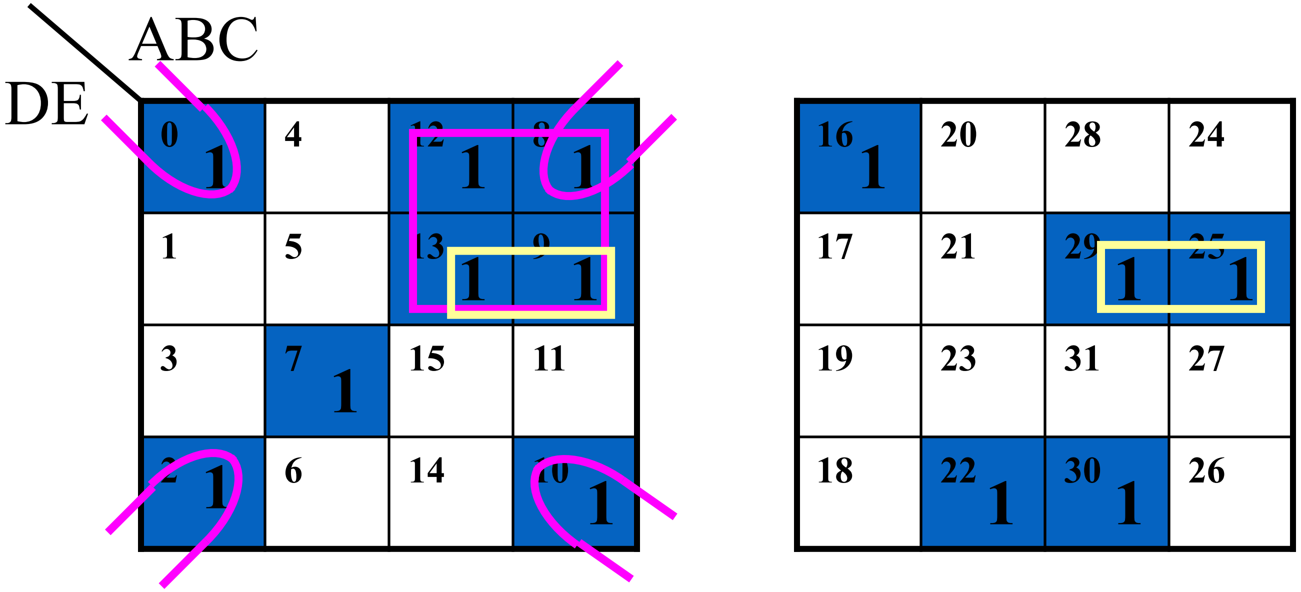
- 标1/0的相邻同维块可画在一个卡诺圈；
- 标1/0的非相邻同维块不能画入一个卡诺圈，至少在两个圈内

- 任何2^i个（$i \leq n$）标1的相邻小方格均可画在一个卡诺圈内
- 任何2^i个标1的非相邻的小方格不能画入一个卡诺圈内，它们至少画在两个圈内。



① 0维块：m_7是五变量的与项

② 1维块：由两个相邻的 0 维块构成的一个卡诺圈，m_0+m_{16}、$m_{22}+m_{30}$是四变量的与项。



③2维块：由四个相邻的 0 维块构成的卡诺圈，$m_8+m_9+m_{12}+m_{13}$、$m_0+m_2+m_8+m_{10}$、$m_9+m_{13}+m_{25}+m_{29}$ 是三变量的与项。

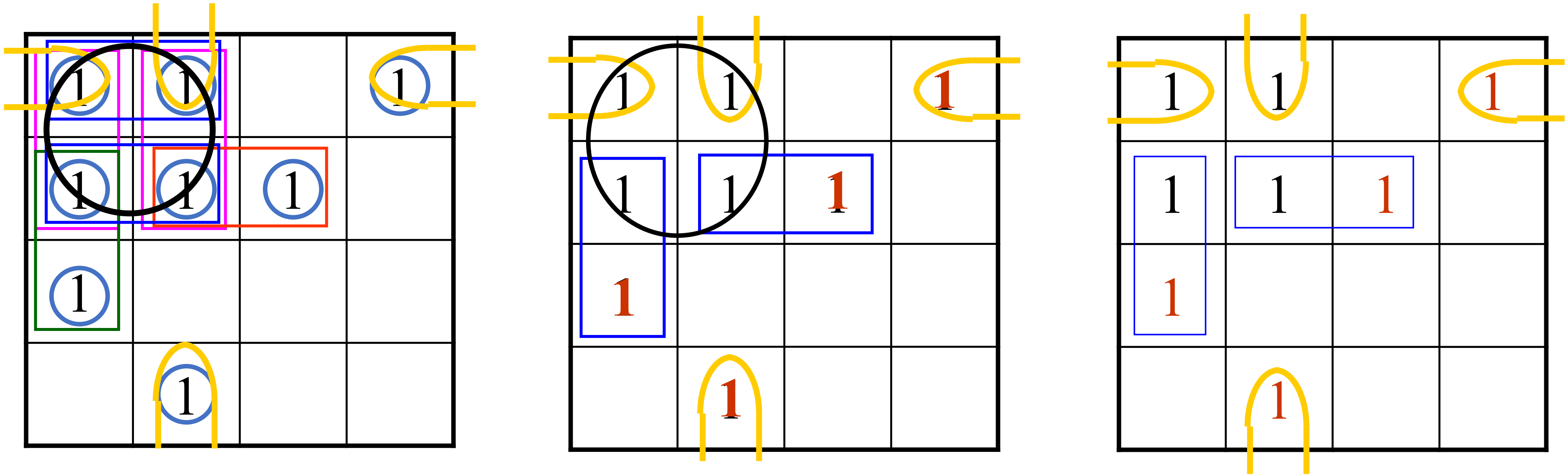
2^i个($i\le n$)标1相邻小方格构成的卡诺圈表示一个(n-i)变量的与项

2^i个相邻的最小项被化简为一个(n-i)变量的与项

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	

画卡诺圈的规则：任何2^i个标1的相邻小方格均可画在一个卡诺圈内



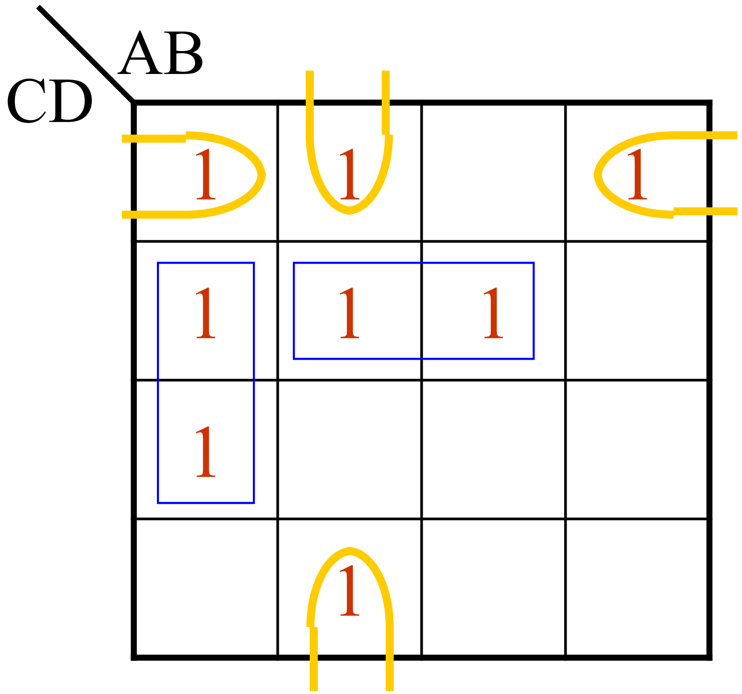
蕴涵项：函数的与或表达式，每一个与项称为蕴涵项

质蕴涵：函数中的蕴涵项不是该函数的其他蕴涵项的子集，则此蕴涵项为质蕴涵，在卡诺图中称为极大圈

实质最小项：只被一个质蕴涵所覆盖的最小项称为实质最小项

必要质蕴涵：包含实质最小项的质蕴涵。卡诺图上称为必要极大圈

最小覆盖：挑选数目最少的必要质蕴涵，它们覆盖了图上全部标1的小方格。最小覆盖对应最简表达式。



$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\overline{B}D+B\overline{C}D+\overline{B}\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{D}$$

卡诺图化简的流程：

1、将逻辑函数表示在卡诺图上

2、根据实质最小项确定所有的必要极大圈

3、如果已覆盖卡诺图上全部标1单元，这些必要极大圈集合就是最小覆盖

4、如果还有标1单元未被必要极大圈覆盖，加上选择最少的极大圈覆盖剩余标1单元，获得最小覆盖

5、写出最小覆盖所对应的逻辑表达式，即最简与或式

将逻辑函数化简成最简与或表达式

$$F_1 = \sum m^4(1,3,4,5,9,11,12,13,14,15)$$

1、将F_1表示在卡诺图中

2、画出极大圈，确定实质最小项 m_3, m_4, m_{14}

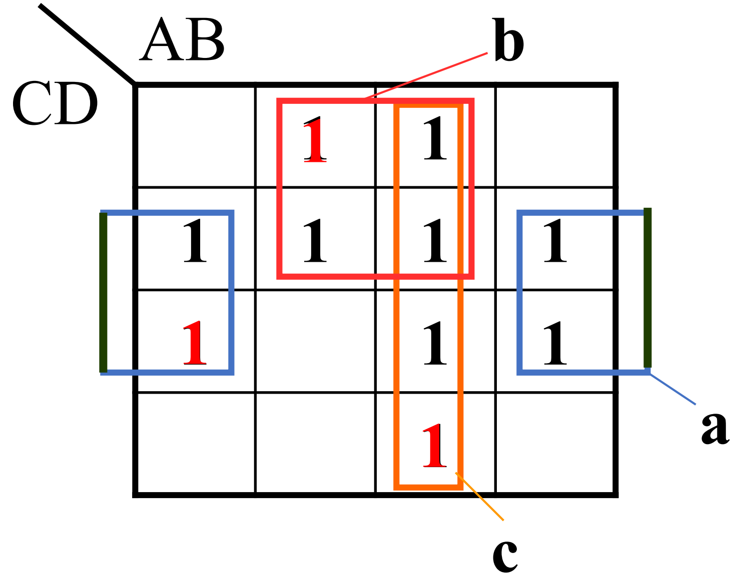
3、确保必要极大圈 a,b,c已覆盖全部标1小方格；

4、写出函数最简表达式 $F_1 = a + b + c = \overline{B}D + B\overline{C} + AB$

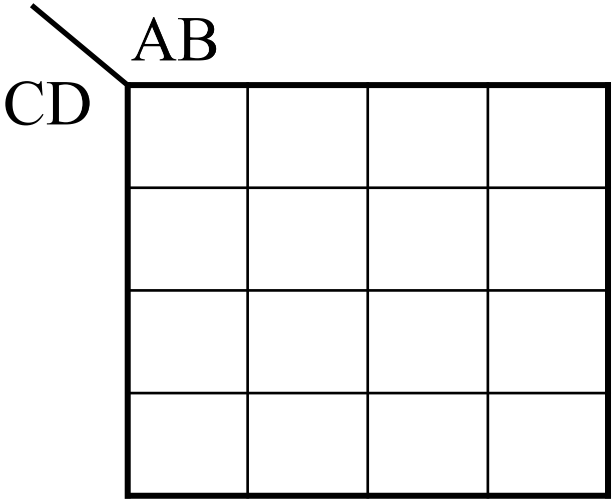
AB

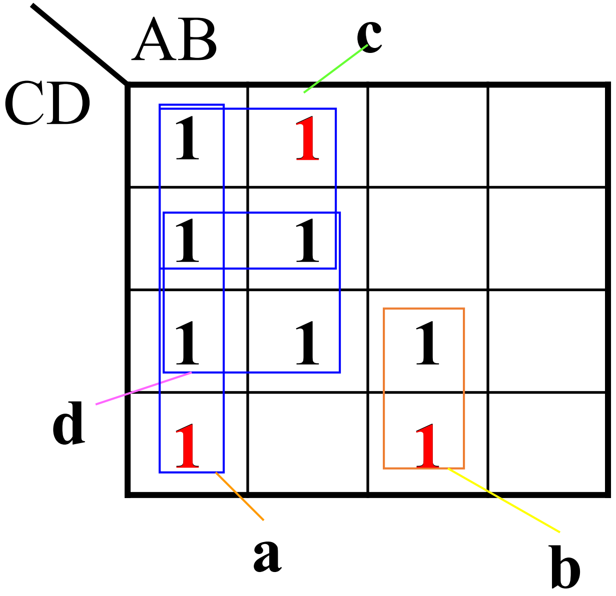
CD

	1	1	
1	1	1	1
1		1	1
		1	



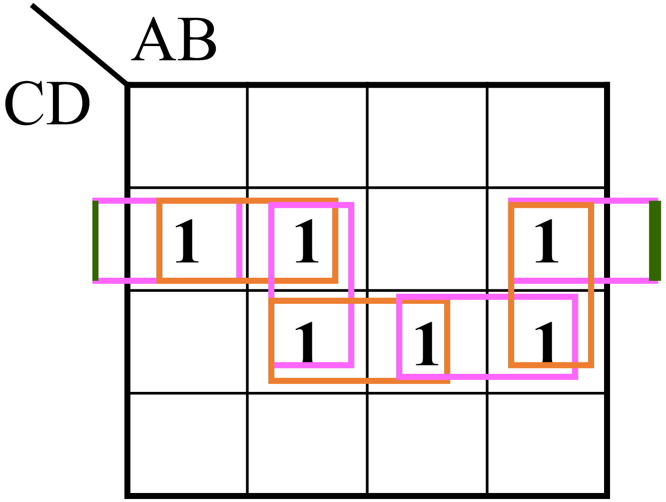
$$F_2 = \sum m^4(0,1,2,3,4,5,7,14,15)$$



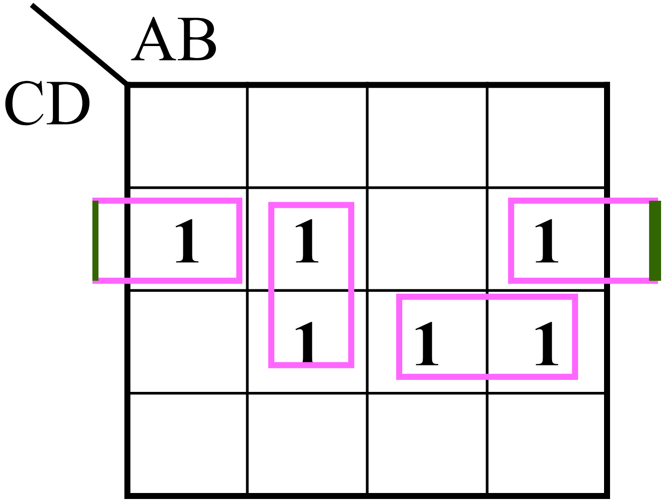


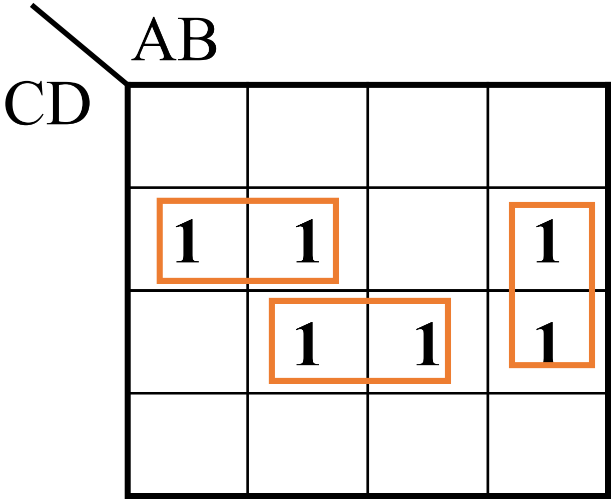
$$F_2 = a + b + c + d = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}D + ABC$$

$$F_3 = \sum m^4(1,5,7,9,11,15)$$



有两种表达式，如下所示

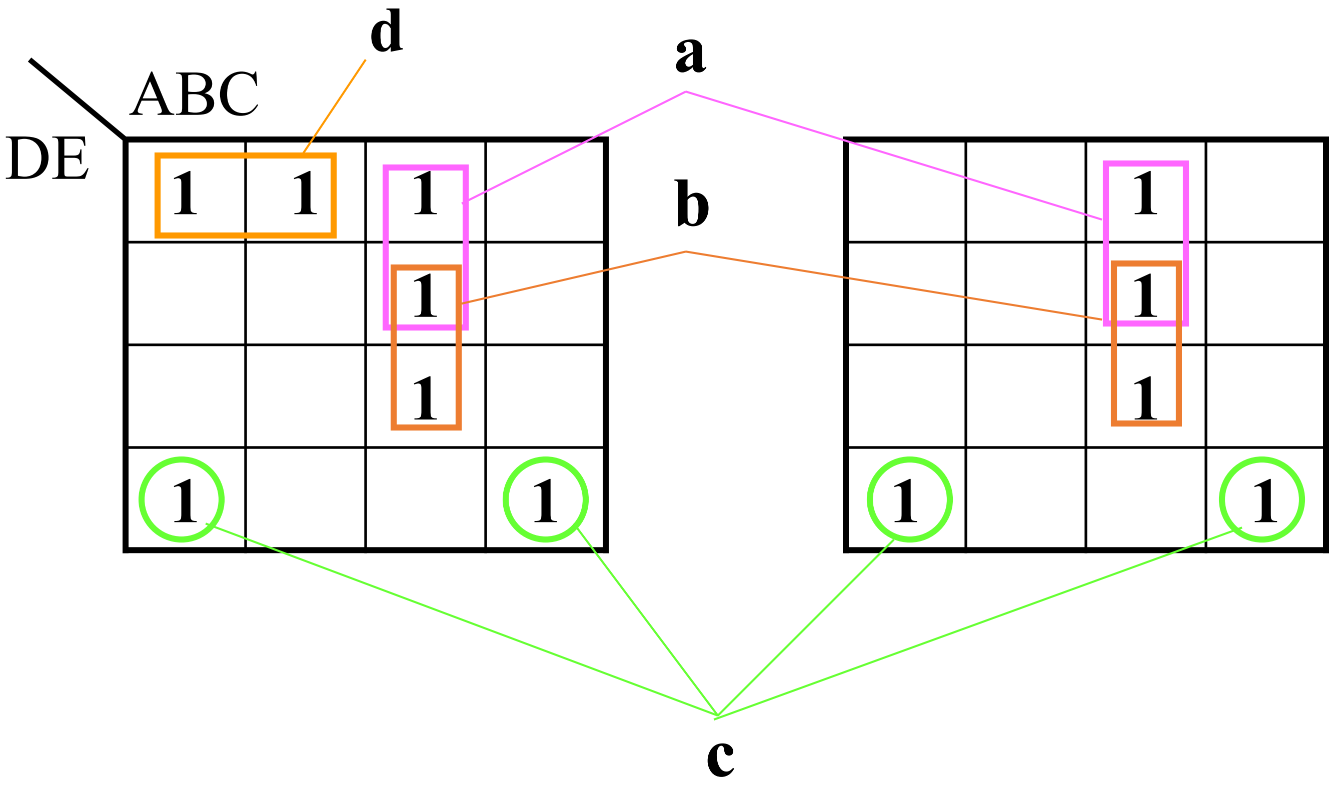




$$F_3 = \overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BD + ACD$$

$$F_3 = \overline{A}\,\overline{C}D + BCD + A\overline{B}D$$

$$F_4 = \sum m^5(0,2,4,10,12,13,15,18,26,28,29,31)$$



$$F_4 = a + b + c + d = BC\overline{D} + BCE + \overline{C}D\overline{E} + \overline{A}\overline{B}\overline{D}\overline{E}$$

将逻辑函数化简成最简或与式

求反函数的最简与或式，按反演规则得原函数的最简或与式

原函数在卡诺图上标0小方格的集合是反函数在卡诺图上的表示：

（1）按原函数在卡诺图中标0小方格的相邻情况，即可求出反函数的最简与或式；

（2）将反函数求反，得到原函数的最简或与式

$$F_1 = \sum m^4(0,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

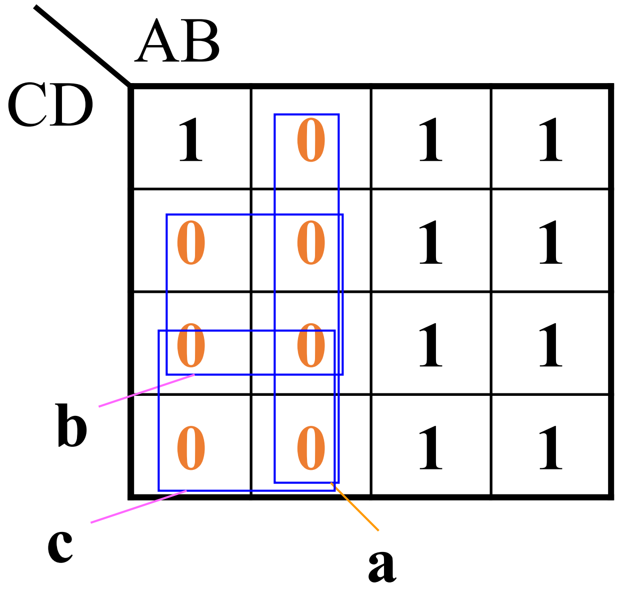
1、将函数表示在卡诺图上、将未填1的小方格均填上0

2、对所有标0小方格选出必要极大圈、选择最小覆盖，得到反函数

$$\overline{F_1} = a + b + c = \overline{A}B + \overline{A}D + \overline{A}C$$

$$F_1 = \overline{\overline{A}B + \overline{A}D + \overline{A}C}$$

$$= (A + \overline{B})(A + \overline{D})(A + \overline{C})$$



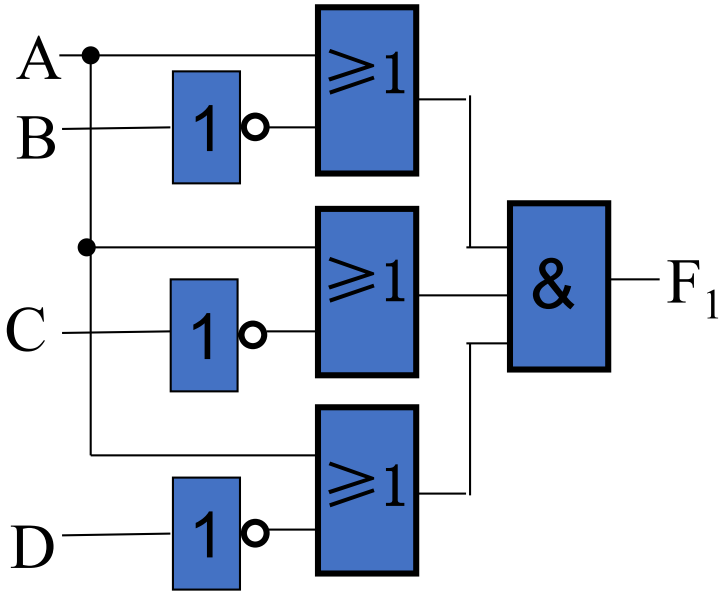
同一函数最简与或式和最简或与式的电路比较

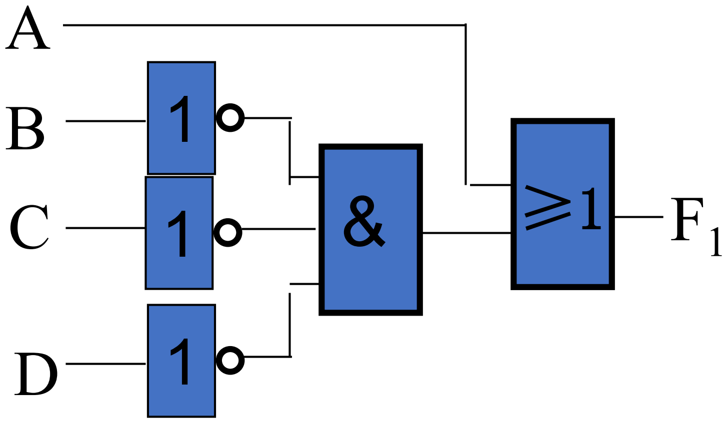
$$F_1 = \sum m^4(0,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

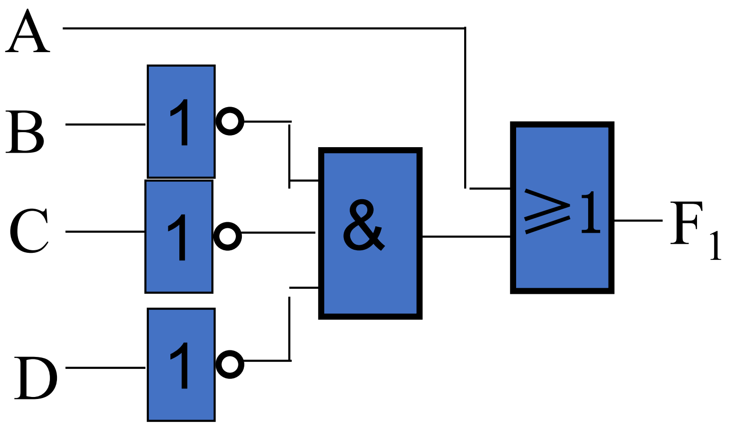
$$F_1 = (A+\bar{B})(A+\bar{D})(A+\bar{C})$$

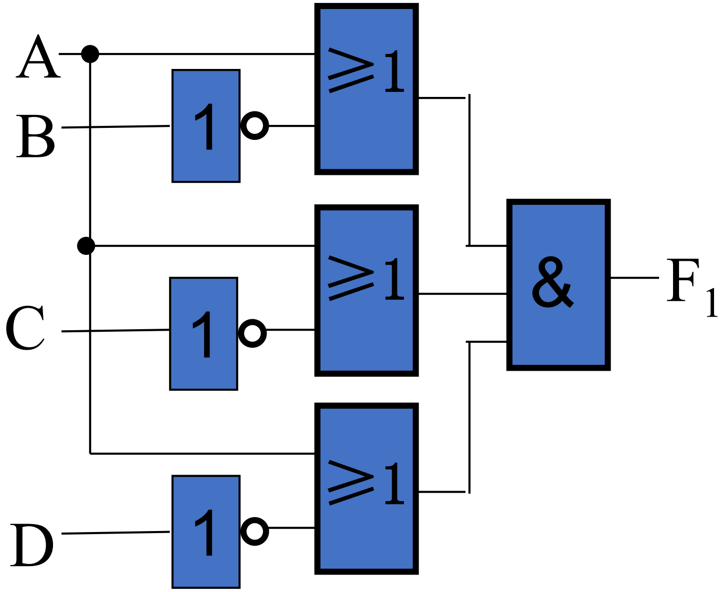
$$F_1 = A+\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

CD \ AB				
	1	0	1	1
	0	0	1	1
	0	0	1	1
	0	0	1	1



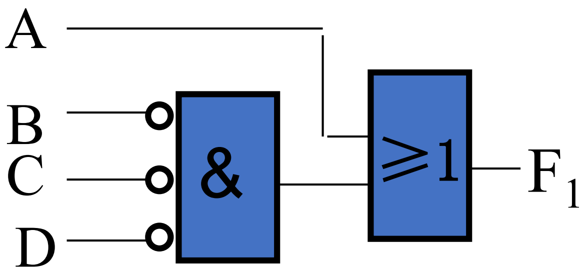


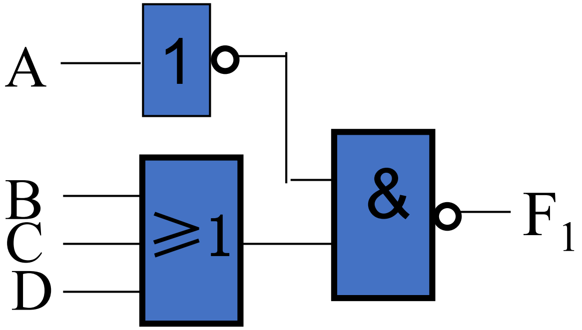




如果能用输入端为非的与门，则 $F_1 = A + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 可转换成二级电路

没有输入端为非的与门，变换成或与式 $F_1 = \overline{\overline{A} \bullet (B + C + D)}$





2.5.3利用无关项化简函数表达式

一位BCD码输入偶数判别电路

分析：当输入为偶数时，输出F为1，否则输出 F为0

输入为 $A_8A_4A_2A_1$，　$F(A_8A_4A_2A_1)=\sum m^4(0,2,4,6,8)$

函数的最简与或式　$F=\overline{A_8}\,\overline{A_1}+\overline{A_4}\,\overline{A_2}\,\overline{A_1}$

A_2A_1 \ A_8A_4				
	1	1	d	1
			d	
			d	d
	1	1	d	d

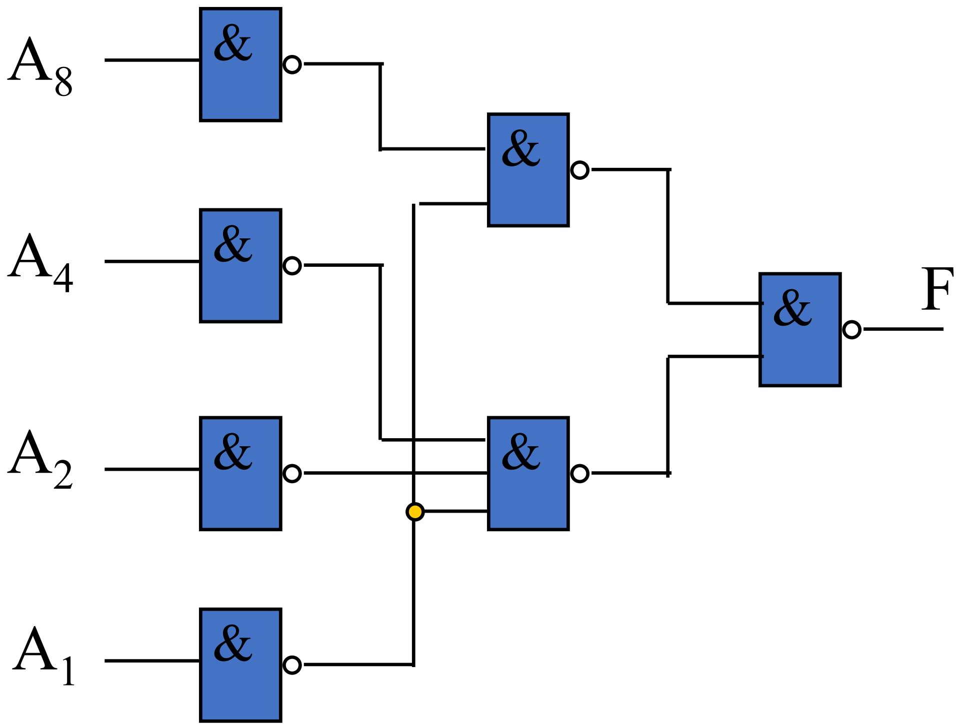
最小项m_{10}～m_{15}不会出现，用“d”表示输入组合的无关项，填入卡诺图，表示此类小方格既可表示1也可表示0

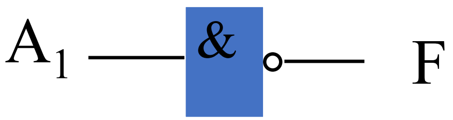
$$F=\overline{A_1}$$

未使用无关最小项和使用无关最小项的电路比较

$$F = \overline{A}_8 \overline{A}_1 + \overline{A}_4 \overline{A}_2 \overline{A}_1$$

$$F = \overline{A}_1$$





无关项也称任意项、约束项，构成的函数为不完全给定函数

当函数输出与某些输入组合无关时，这些输入的组合称为无关项

产生原因：输入组合在正常操作中不会出现；即使某个输入组合可能出现，但实际上输出与它们无关

当输入出现无关组合d时，d可以随意加/不加入其对应的函数F，不影响F原有的逻辑功能，但为函数F的化简提供了帮助

$$F = \sum m^4(4,5,13,15) + \sum d^4(2,3,7,9,14)$$

AB

CD

	1		
	1	1	d
d	d	1	
d		d	

$$F = \overline{A}B\overline{C} + BD$$

二进制数表示的十进制数码

最小项m_i	8421码	2421码	余3码
m_0	0000 0	0000 0	d
m_1	0001 1	0001 1	d
m_2	0010 2	0010 2	d
m_3	0011 3	0011 3	0011 0
m_4	0100 4	0100 4	0100 1
m_5	0101 5	d	0101 2
m_6	0110 6	d	0110 3
m_7	0111 7	d	0111 4
m_8	1000 8	d	1000 5
m_9	1001 9	d	1001 6
m_{10}	d	d	1010 7
m_{11}	d	1011 5	1011 8
m_{12}	d	1100 6	1100 9
m_{13}	d	1101 7	d
m_{14}	d	1110 8	d
m_{15}	d	1111 9	d

BCD码输入质数检测器，假设输入为$N_3N_2N_1N_0$，输出表达式

$$F=\sum m^4(2,3,5,7)+\sum d^4(10,11,12,13,14,15)$$

找出必要质蕴涵，区别是：相邻的“d”尽可能包含在极大圈内，使画出的极大圈尽可能地大，减少质蕴涵的变量数。不圈任何仅包含 d 的圈；不圈任何标 0 的小方格。

$$F=N_2N_0+\overline{N}_2N_1$$

N_1N_0 \ N_3N_2				
			d	
		1	d	
	1	1	d	d
	1		d	d

2421码输入四舍五入判别电路

最小项m_i	2421码
m_0	0000 0
m_1	0001 1
m_2	0010 2
m_3	0011 3
m_4	0100 4
m_5	d
m_6	d
m_7	d
m_8	d
m_9	d
m_{10}	d
m_{11}	1011 5
m_{12}	1100 6
m_{13}	1101 7
m_{14}	1110 8
m_{15}	1111 9

$$F=\sum m^4(11,12,13,14,15)+\sum d^4(5,6,7,8,9,10)$$

CD \ AB				
			1	d
		d	1	d
		d	1	1
		d	1	d

$$F=A$$

余3码输入偶数判别电路

最小项m_i	余3码
m_0	d
m_1	d
m_2	d
m_3	0011 0
m_4	0100 1
m_5	0101 2
m_6	0110 3
m_7	0111 4
m_8	1000 5
m_9	1001 6
m_{10}	1010 7
m_{11}	1011 8
m_{12}	1100 9
m_{13}	d
m_{14}	d
m_{15}	d

$$F=\sum m^4(3,5,7,9,11)+\sum d^4(0,1,2,13,14,15)$$

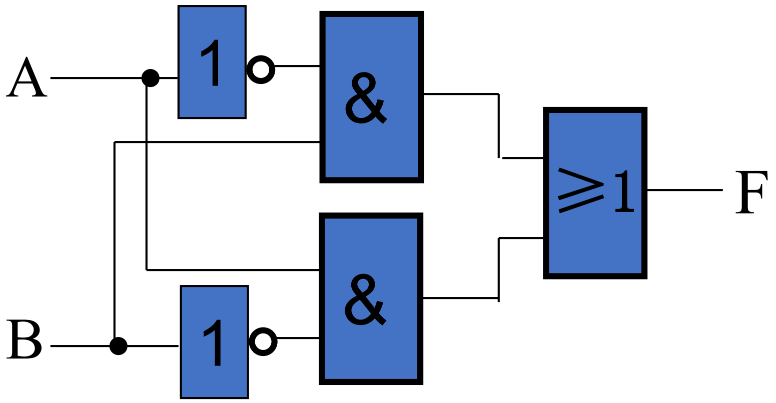
N_1N_0 \ N_3N_2				
	d			
	d	1	d	1
	1	1	d	1
	d		d	

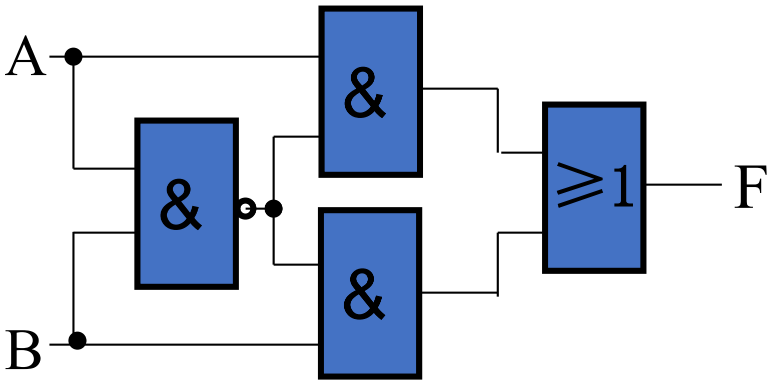
$$F=N_0$$

2.5.4 输入无反变量的函数的化简

电路中为减少连线数目，对其外部输入变量只有原变量没有反变量，电路要通过非门来实现反变量。

$$F = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B = A\overline{AB} + B\overline{AB}$$





对于与或式，共享的门是与非门

当反变量较多时，每个反变量都加非门不经济。

共享非门：多个单输入非门合并成一个多输入与非门，可以减少非门个数

替代尾因子法

定义：每个与项中原变量部分称为头因子，反变量部分称为尾因子

特点：把头因子中的任何变量放入任一个尾因子中，该与项不变，即头因子是不变的，尾因子是可变的。

$$F = AB\overline{C}\,\overline{DE} = AB\,\overline{AC}\,\overline{DE} = AB\,\overline{BC}\,\overline{DE} = AB\,\overline{ABC}\,\overline{DE}$$

$$= AB\,\overline{ABC}\,\overline{ADE} = AB\,\overline{ABC}\,\overline{ABDE}$$

1、把最简式中具有相同头因子的与项合并成一个与项

$$
\begin{aligned}
F &= A\bar{B}\bar{C} + BC\bar{D} + A\bar{C}\bar{D} + \bar{B}CD + \bar{A}BC + \bar{A}CD \\
&= A(\bar{B}\bar{C} + \bar{C}\bar{D}) + BC(\bar{D} + \bar{A}) + CD(\bar{A} + \bar{B}) \\
&= A\bar{C}\,\overline{BD} + BC\,\overline{AB} + CD\,\overline{AB}
\end{aligned}
$$

2、列出最简与或式中所有与项的头因子、尾因子及替代尾因子

与项	头因子	尾因子	替代尾因子
$A\bar{C}\,\overline{BD}$	A	$\bar{C}$	$\bar{C}$，$\overline{AC}$
		$\overline{BD}$	$\overline{BD}$，$\overline{ABD}$
$BC\,\overline{AD}$	BC	$\overline{AD}$	$\overline{AD}$，$\overline{ABD}$，$\overline{ACD}$，$\overline{ABCD}$
$CD\,\overline{AB}$	CD	$\overline{AB}$	$\overline{AB}$，$\overline{ABC}$，$\overline{ABD}$，$\overline{ABCD}$

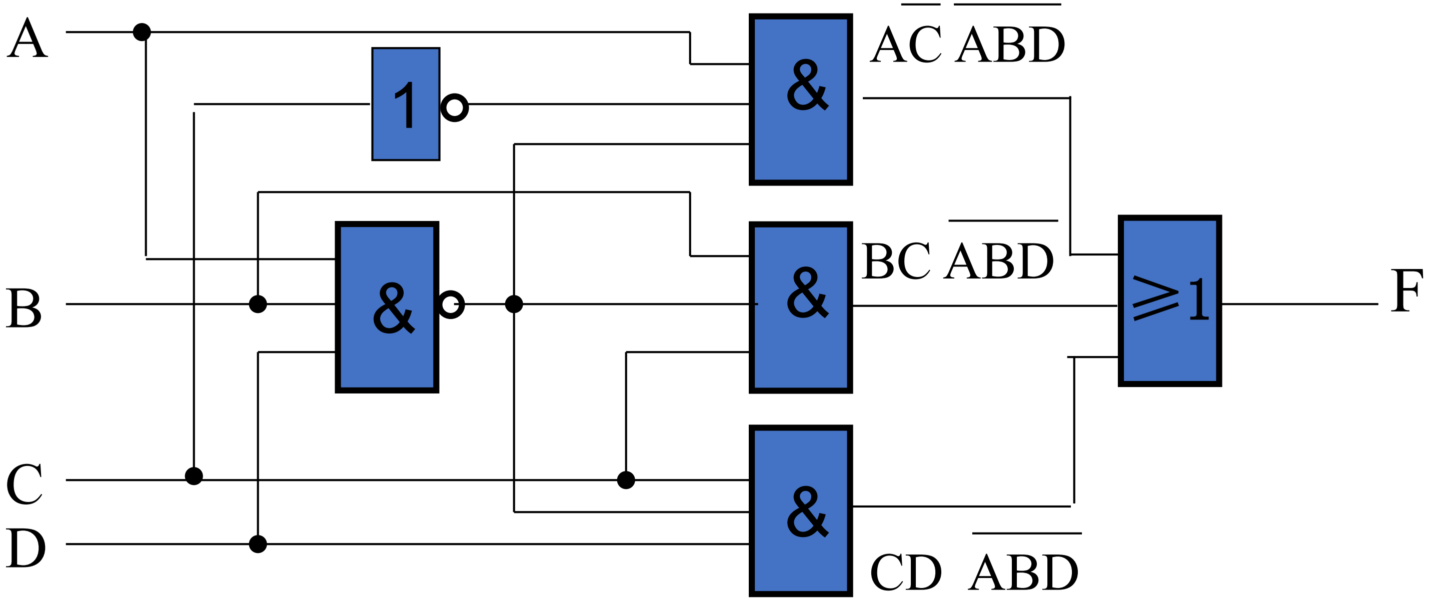
3、选择共享的替代尾因子，选择的原则如下：

替代尾因子共享数尽可能多

在共享数相等时选择最简单的

与项	头因子	尾因子	替代尾因子
$A\overline{C}\,\overline{BD}$	A	$\overline{C}$	$\overline{C}$，$\overline{AC}$
		$\overline{BD}$	$\overline{BD}$，$\boxed{\overline{ABD}}$
$BC\,\overline{AD}$	BC	$\overline{AD}$	$\overline{AD}$，$\boxed{\overline{ABD}}$，$\overline{ACD}$，$\overline{ABCD}$
$CD\,\overline{AB}$	CD	$\overline{AB}$	$\overline{AB}$，$\overline{ABC}$，$\boxed{\overline{ABD}}$，$\overline{ABCD}$

$$F = A\overline{C}\,\overline{ABD} + BC\,\overline{ABD} + CD\,\overline{ABD}$$



2.5.5 多输出函数的化简

逻辑电路多输出，每个输出函数最简，整个电路未必最简

解决途径：尽可能共享中间变量

卡诺图化简法

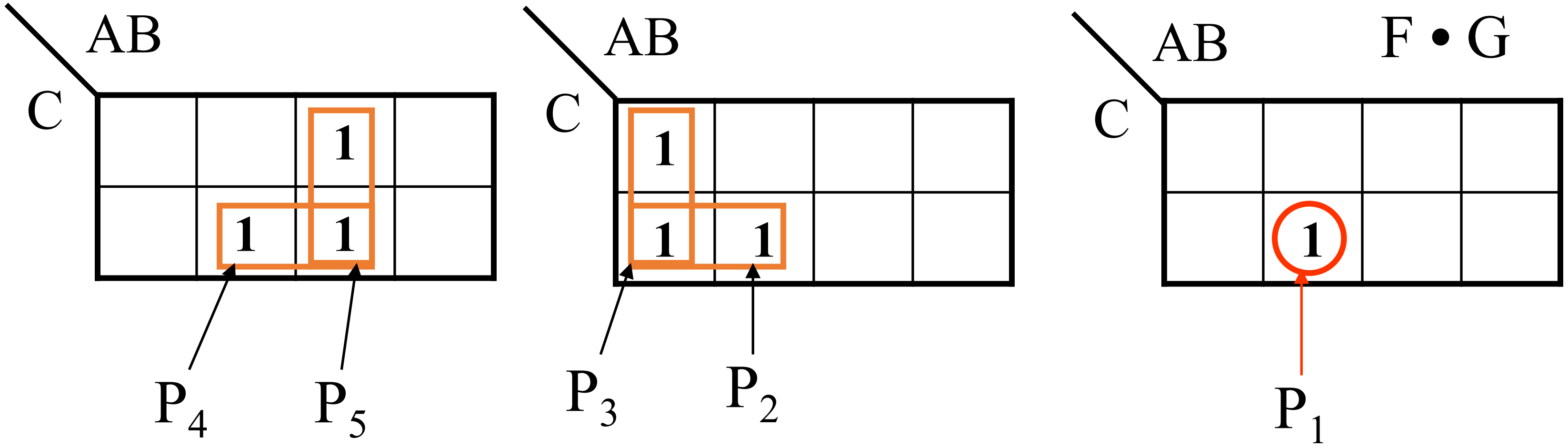
1、将函数一一填入卡诺图

2、函数相互作与运算，找出它们之间较多可被共享的与项

3、根据分析结果选择全部函数的质蕴涵

4、写出各函数的与或表达式

$$F = \sum m^3(3,6,7) \qquad G = \sum m^3(0,1,3)$$



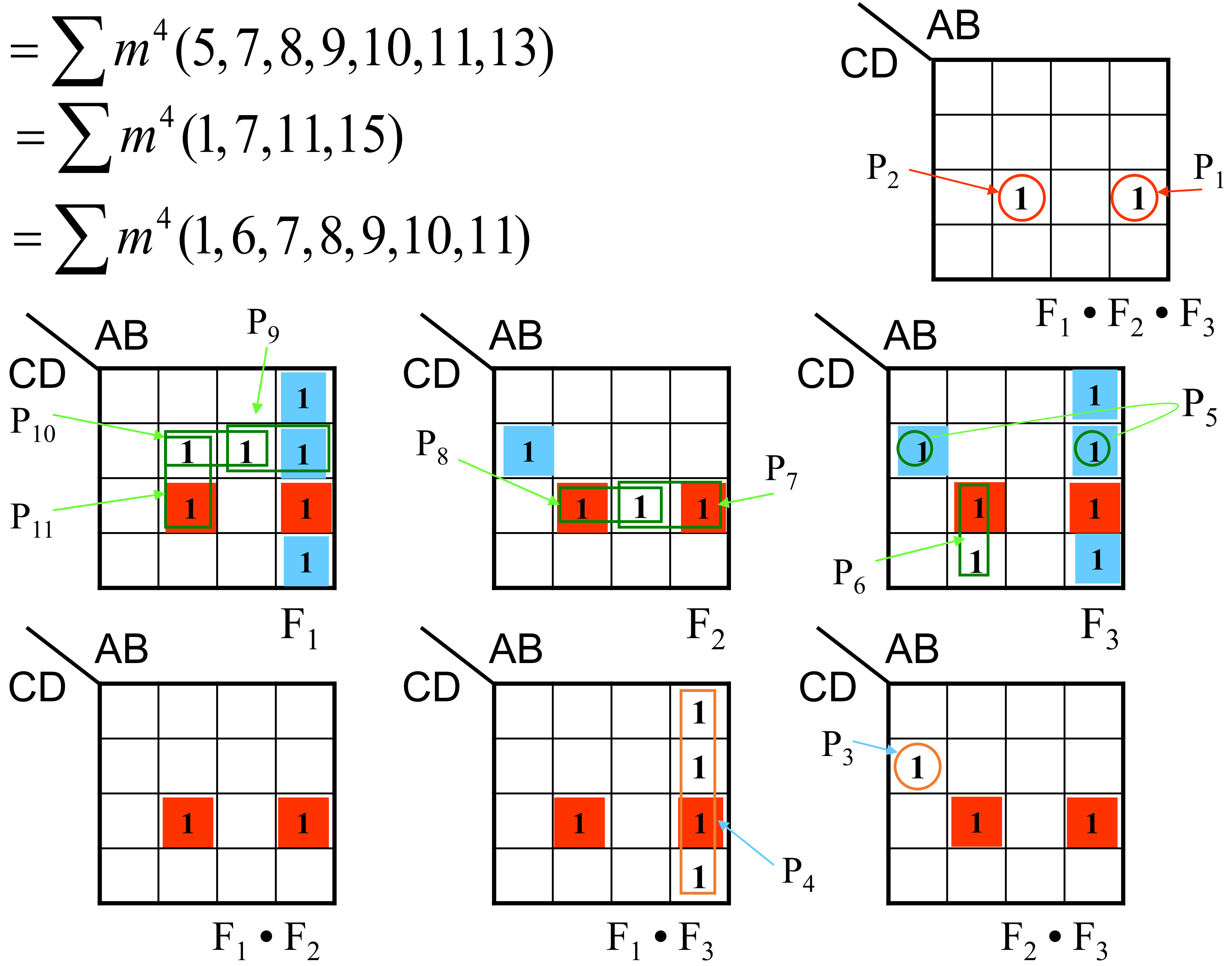
$$F = P_1 + P_5 = \overline{A}BC + AB$$

$$G = P_1 + P_3 = \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}$$

$$F_1 = \sum m^4(5,7,8,9,10,11,13)$$

$$F_2 = \sum m^4(1,7,11,15)$$

$$F_3 = \sum m^4(1,6,7,8,9,10,11)$$



$$F_1 = P_1 + P_2 + P_4 + P_{10} = P_2 + P_4 + P_{10}$$
$$F_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_7 = P_2 + P_3 + P_7$$
$$F_3 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_6 = P_3 + P_4 + P_6$$