回顾

1.二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2.n阶行列式， 余子式 M_{ij}

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

3.三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

-------对角线法则

4.行列式的基本性质

性质1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^T = D$

性质2 互换行列式的两行（列）的位置,行列式的值反号.

性质3 行列式D等于它的任一行（列）各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, i = 1,2,\ldots,n.$$

性质4 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，则可将此行列式写成如下两个行列式的和，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 若行列式D有两行（列）的对应元素相等，

则此行列式为零， 即：$D = 0$

性质7 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

性质8 行列式的任一行（列）各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于0；即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} D, & if\ k = i \\ 0, & if\ k \neq i \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{is} = \begin{cases} D, & if\ s = j \\ 0, & if\ s \neq j \end{cases} \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

推论 若行列式D的某行元素全为零，则D=0.

推论 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

例1 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = n(-1)^{n+1} M_{nn}$$

$$= (-1)^{n+n} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

例2

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod a_{ii}$$

$$D=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod a_{ii}$$

例3

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n-1,n-1} & \vdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod a_{i,n-i+1}$$

行列式的计算方法

1. 直接用定义（非零元素**很少**时可用）

2. 化三角形行列式法

此法特点：

(1) 程序化明显，对**阶数较低**的数字行列式和一些**较特殊**的字母行列式适用。

(2) 灵活性差，死板。

3. 降阶法

利用性质，将某行(列)的元尽可能化为0，然后**按行(列)展开.**

$$n\text{阶} \rightarrow \quad n-1\text{阶} \rightarrow \cdots \rightarrow \quad 2\text{阶}$$

此法灵活多变，易于操作，是最常用的手法。

4. 递推公式法

5. 数学归纳法

6. 几个重要结果

（1）三角形行列式的值等于对角元之乘积

$$\begin{vmatrix} A_{k\times k} & O_{k\times l} \\ C_{l\times k} & B_{l\times l} \end{vmatrix} = |A||B|$$

（2）范德蒙行列式

1. 直接用定义（非零元素很少时可用，某行（列）至多有两个非零元素的行列式）

例1 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

习题1.1 6（1）

解

$$D_n=n(-1)^{n+n}M_{nn}$$

$$=(-1)^{n+n}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

例2

习题1.1 6（2）

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

n阶

按第一列展开

$$=a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

n-1阶　　n-1阶

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

例3

习题1.2 7（2）

$$D = \begin{vmatrix} & & & \cdots & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & & \end{vmatrix}.$$

$$D \xlongequal{Exp\ r_n} a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + a_{n-1}(-1)^{n+2}(-1)^{n-2}x$$

$$+a_{n-2}(-1)^{n+3}(-1)^{n-3}x^2 \cdots +(-1)^{n+n}(x+a_1)\,x^{n-1}$$

$$= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n$$

2. 特殊行列式的计算

（1）奇数阶反对称行列式 的值为零。

证

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各行提}-1} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

当n为奇数时有 $D=-D \Rightarrow D=0$

(2)“箭形”行列式 化成三角形行列式

例

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & \\ c_n & 0 & 0 & & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

$$\xlongequal{-\frac{c_i}{a_i}\times l_{i+1}+l_1}\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}b_i & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_n \end{vmatrix} = (a_0-\sum_{i-1}^{n}\frac{c_i}{a_i}b_i)a_1\cdots a_n$$

习题1.2 P20 1 (2)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - xr_2 - yr_3 - zr_4} \begin{vmatrix} 1-x^2-y^2-z^2 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(3) 除对角线以外各行元素对应相同,可化成三角形行列式或箭形行列式

可化箭形行列式

例

$$\begin{vmatrix} x_1-b & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2-a & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3-a & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4-a \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^3 x_1$$

另

$$D = x_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2-a & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3-a & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4-a \end{vmatrix} \overset{-x_i l_1 + l_i}{\underset{i=2,3,4}{=\!=\!=\!=}} x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$$

习题1.2 P20 1（3）

习题1.2 P22 2（2）

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - \frac{a_i}{a_1} r_1} \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ \frac{-\lambda a_2}{a_1} & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-\lambda a_n}{a_1} & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1 + \frac{a_j}{a_1} c_j} \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

(4) 各行(列)总和相等的行列式 (赶鸭子法)

例 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \underline{\underline{c_i + c_1 (i = 2, 3, \cdots, n)}}$$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y]\begin{vmatrix}1 & y & y & \cdots & y\\ 1 & x & y & \cdots & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & y & y & \cdots & x\end{vmatrix}$$ *

$$\underline{\underline{-r_1+r_i(i=2,3,\ldots,n)}}\quad [x+(n-1)y]\begin{vmatrix}1 & y & y & \cdots & y\\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y]\times 1\times(x-y)^{n-1}$$

$$=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

*或 - y 乘第1列加到后面各列:

$$=[x+(n-1)y]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x-y & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-y\end{vmatrix}$$

习题1.2 P20 1（1）

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} 2\ x+y & 2\ x+y & 2\ x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$= 2\ x+y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

(5) 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$\begin{aligned}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_1)\\ (x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_2)(x_n-x_2)\\ (x_4-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_3)(x_n-x_3)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\\ (x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

习题1.2 P20 2（2）

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&x\\a^2&b^2&c^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&x^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(x-a)(c-b)(x-b)(x-c)$$

$$=\ldots+(-1)\cdot x^2(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)+\cdots$$

$$=-1\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}+x^3\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$$

习题1.2 P21 6

$$D=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$D=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$D=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\cdot(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a-n)^{n-1} & (a-n+1)^{n-1} & & a^{n-1} \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}k!$$

3. 降阶法

4. 递推公式法

特征：某行（列）至多有两个非零元素。

方法：按此行（列）展开，可能会导出递推公式。

形式①：$D_n = pD_{n-1} + q$

形式②：$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$

例1

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

按第一行展开好，还是按第一列展开好？

n-1阶

$$\underline{\underline{\text{按第一列展开}}}\; x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{vmatrix} + a_0(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$= xD_{n-1} + a_0$$

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

由此得递推公式：

$$D_n = xD_{n-1} + a_0$$

因此有：

$$D_n = xD_{n-1} + a_0 = x(xD_{n-2} + a_1) + a_0$$

$$= x^2 D_{n-2} + xa_1 + a_0 \quad = x^2\left(xD_{n-3} + a_2\right) + xa_1 + a_0$$

$$= x^3 D_{n-3} + x^2 a_2 + xa_1 + a_0$$

$$= \cdots = x^{n-2} D_2 + x^{n-3} a_{n-3} + \cdots xa_1 + a_0$$

D_2=?

而 $$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = x^2 + xa_{n-1} + a_{n-2}$$

于是得： $$D_n = x^n + x^{n-1}a_{n-1} + x^{n-2}a_{n-2} + \cdots + xa_1 + a_0$$

例2

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2&1&0\\0&0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第一行展开}}}$$

$$2D_{n-1}-\begin{vmatrix}1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&2&1&\cdots&0&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2&1&0\\0&0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第一列展开}}}\;2D_{n-1}-D_{n-2}$$

由此可得递推公式:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

技巧!

因此有 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1$

又因为 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_1 = |2| = 2$

故 $D_n - D_{n-1} = 1$

则 $D_n = n + 1.$

递推公式法的 步骤:

1. 降阶，得到递推公式;

2. 利用高中有关数列的知识，求出行列式 D_n。

P20 习题1.2 P21 5

5. 数学归纳法

P21 习题1.2 7

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\left(a_i d_i - b_i c_i\right)$$

证明： **1. 当n=1时，将D_{2n}按第1行展开**

$$\begin{vmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & a_1 & b_1 & \\ & c_1 & d_1 & \\ c_2 & & & d_2 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \\ c_1 & d_1 & \\ & & d_2 \end{vmatrix} + b_2 \; -1 \;^{1+4} \begin{vmatrix} & a_1 & b_1 \\ & c_1 & d_1 \\ c_2 & & \end{vmatrix}$$

$$= a_2 d_2 \; a_1 d_1 - b_1 c_1 \; - b_2 c_2 \; a_1 d_1 - b_1 c_1$$

$$= \prod_{i=1}^{2} \; a_i d_i - b_i c_i$$

2. 假设当阶数为2（n-1）时结论成立，则当阶数为2n时

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix} = a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ d_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & & & d_n \end{vmatrix} + b_n \, -1^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_n d_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} \text{-b}_n c_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \; a_n d_n \text{-b}_n c_n \; \prod_{i=1}^{n-1} a_i d_i - b_i c_i \; = \prod_{i=1}^{n} a_i d_i - b_i c_i$$

习题1.3

2，5

一、Cramer法则

1、非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，则称此方程组为**齐次线性方程组**.

使得方程组成立的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**此方程组的解**.

2、Cramer法则

定理 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组有解，并且解可以唯一表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式.

二、几个结论

1、线性方程组的相关定理

定理 如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则线性方程组一定有解,且解是唯一的 .

定理 如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

2、齐次线性方程组的相关定理

定理 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组只有零解.

定理 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.

小结

1、用克拉默法则解方程组的两个条件

(1)方程个数等于末知量个数;

(2)系数行列式不等于零.

2、Cramer法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.它主要适用于理论推导.

3、如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则线性方程组一定有解,且解是唯一的 .

4、如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

思考题

证明平面上三条不同的直线

$ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$

相交于一点的充分必要条件是$a+b+c=0.$

证明 必要性 设所给三条直线交于一点$M(x_0, y_0)$,

则$x=x_0, y=y_0, z=1$可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ bx+cy+az=0, \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$ 的非零解.

从而有系数行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$D = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(a+b+c)\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

因为三条直线互不相同,所以a,b,c也不全相同,

故$a+b+c=0$.

充分性 如果$a+b+c=0$,将方程组

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \quad (1) \\ cx+ay=-b \end{cases}$$

的第一、二两个方程加到第三个方程，得

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \quad (2) \\ 0=0. \end{cases}$$

下证此方程组（2）有唯一解.

如果$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$, 则$ac = b^2 \geq 0$.

由$b = -(a+c)$ 得$ac = [-(a+c)]^2 = a^2 + 2ac + c^2$,

于是$ac = -(a^2 + c^2) \leq 0$, 从而有$ac = 0$.

思考题

设有5阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ f & g & h & s & t \end{vmatrix}$$

求(1)$A_{31}+A_{32}+A_{33}$;　(2)$A_{34}+A_{35}$;　(3)$\sum_{k=1}^{5}A_{5k}$.

例 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_n \end{vmatrix}$$

（按第一列拆成两个行列式计算得递推公式）