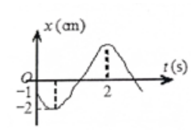
第十一次　机械振动-习题解析与知识点拓展

一、单选题

1.某简谐振动的振动曲线如图所示，位移单位为厘米，时间单位为秒。则此简谐振动的振动方程为：



A. $x=2\cos\left(\frac{2}{3}\pi t+\frac{2}{3}\pi\right)$　B. $x=2\cos\left(\frac{2}{3}\pi t-\frac{2}{3}\pi\right)$

C. $x=2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t+\frac{2}{3}\pi\right)$　D. $x=2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t-\frac{2}{3}\pi\right)$

[　**A**　]

[解析] 本题考查振动方程的简单求解。根据所给图像的基本信息需要确定 ω 及初相位 φ，由图中基本信息可以得到: $0<\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}<2\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$ ，以及 0 时刻质点经过平衡位置向负方向运动，且速度减小，位移绝对值变大，因此根据旋转矢量方法,质点初相位应该为 2π / 3，选 A。

[补充说明以及拓展] 关于机械振动以及波动一章最重要的方法- - - 旋转矢量法再回顾。

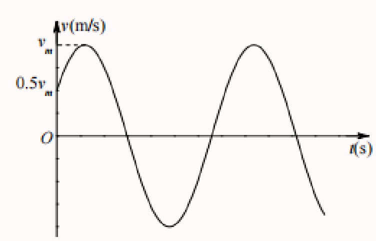
将 x 方向的简谐振动认为成 A 矢量绕圆心逆时针圆周运动时 x 方向的分量，所以在一切的旋转矢量法中一定先看是不是 cosl 这样 A 与四个轴方向交点 1, 2, 3, 4 对应的是从最大正位移出发向负方向运动一个周期的结果，即 1→2→3→4→1 对应于：正最大→负速度过平衡→负最大→正速度过平衡→再次正最大。

这样常见的是通过题目给你的图像的信息（包括后续的机械波），来判断某一个时刻的质点的速度方向，相位角的三角函数值通过广义上的“位移关系”可以给出，接下来通过上述方法看旋转矢量图就可以确定相位角。确定相位角往往是旋转矢量的第一大用处。

[变式练习] （同时本题解析也给出了另一种通过对于未定整数 n 讨论的方法）

【3396】一质点作简谐振动。其运动速度与时间的曲线如图所示。若质点的振动规律用余弦函数描述，则其初相应为

(A) $\pi/6$　　(B) $5\pi/6$　　(C) $-5\pi/6$　　(D) $-\pi/6$　　(E) $-2\pi/3$



【答案】C

【解析】简谐振动的振动曲线和特征量，相位。

用余弦函数表示的简谐振动的表达式一般可以写成

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

所以质点运动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)=-v_m\sin(\omega t+\varphi_0)$$

质点运动的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)=-a_m\cos(\omega t+\varphi_0)$$

由图可以看出，当 $t=0$ 时，$v=0.5v_m$，$a>0$，即

$$v = -v_m \sin\varphi_0 = 0.5v_m$$
$$\sin\varphi_0 = -0.5$$
$$\varphi_{01} = 2n\pi - \frac{\pi}{6}, \varphi_{02} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$
$$a = -a_m \cos\varphi_0 > 0$$
$$\cos\varphi_0 < 0$$
$$\varphi_0 = \varphi_{02} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

而一般初位相取值在 $0 \to 2\pi$ 或 $-\pi \to \pi$，所以上式中可以取 $n = -1$ 或 $n = 0$，得

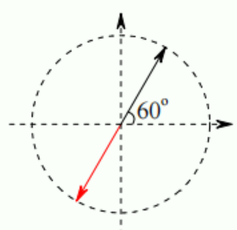
$$\varphi_0 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$
$$\varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

所以答案为题目中给出的选项 (C)。

【5178】一质点沿 x 轴作简谐振动，振动方程为 $x = 4\times10^{-2}\cos\left(2\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)$(SI)。从 $t=0$ 时刻起，到质点位置在 $x=-2$ cm 处，且向 x 轴正方向运动的最短时间间隔为

(A) $\frac{1}{8}$ s　　(B) $\frac{1}{6}$ s　　(C) $\frac{1}{4}$ s　　(D) $\frac{1}{3}$ s　　(E) $\frac{1}{2}$ s

根据旋转矢量图



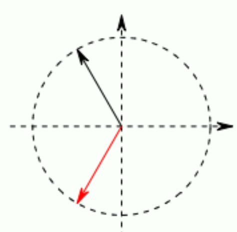
可得，质点从初始位置到所求位置的相位差为 π，因此所用的时间为半个周期，即

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\text{ s}$$

【5312】一质点在 x 轴上作简谐振动，振辐 $A = 4$ cm，周期 $T = 2$ s，其平衡位置取作坐标原点。若 $t=0$ 时刻质点第一次通过 $x=-2$ cm 处,且向 x 轴负方向运动,则质点第二次通过 $x=-2$ cm 处的时刻为

(A) 1 s　　(B) (2/3) s　　(C) (4/3) s　　(D) 2 s

根据旋转矢量图



可知，相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

所以所花时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}T = \frac{1}{3}T = \frac{2}{3}\text{ s}$$

2. 水平放置的弹簧振子先后以振幅 A 和 $2A$ 的简谐运动，振子从左端最大位移第一次运动到右端最大位移的平均速度分别为 v_1 和 v_2，则下列说法正确的是

A. $v_1 = 2v_2$　B. $2v_1 = v_2$　C. $\sqrt{2}v_1 = v_2$　D. $v_1 = v_2$　[**B**]

[解析] 本题考查简谐振动中的速度依赖关系。

涉及到的速度有两种，其中根据位移对时间的倒数得到瞬时速度与振幅 A 成正比，而本题中给出的是平均速度，则 $|\bar{v}| = \dfrac{2A}{\frac{1}{2}T} = \dfrac{4A}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \dfrac{2A}{\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ **，弹簧振子本身不改变，因此 k、m 都是常量，平均速度(大小)正比于振幅，因此选择 B。**

3.一水平放置的弹簧振子作简谐运动，选平衡位置为坐标原点和势能零点，当其位移的大小为振幅的 1/4 时，其动能为振动总能量的　[**C**]

A.7/16　B.9/16　C.15/16　D.13/16

[解析] 本题考查简谐振动中的各种能量依赖关系。

根据 $E_{total} = E_k + E_p$ & $\begin{cases} E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m[-A\omega\sin(\omega t+\varphi)]^2 = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_p = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2[A\cos(\omega t+\varphi)]^2 = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$

以及 $x = A\cos(\omega t+\varphi) = \dfrac{1}{4}A, \sin^2(\omega t+\varphi) = \dfrac{15}{16}$ **，进而得到** $E_{total} = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$ **，则** $E'_k = \dfrac{1}{2}m(\dfrac{1}{4}A)^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2 \times \dfrac{15}{16} = \dfrac{15}{16}E_{total}$ **，故选择 C。**

[变式练习]

【3560】弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时，弹性力在半个周期内所作的功为

(A) kA^2　(B) $\frac{1}{2}kA^2$　(C) $\frac{1}{4}kA^2$　(D) 0

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0) = \left(\frac{1}{4}mA^2\omega^2\right)[1-\cos 2(\omega t+\varphi_0)]$$

而系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0) = \left(\frac{1}{4}kA^2\right)[1+\cos 2(\omega t+\varphi_0)]$$

即简谐振动中，动能和势能的变化频率都是振子振动频率的两倍，因此动能和势能变化的周期是振动变化周期的一半，即在振子振动的半个周期内，动能和势能都变化了一个周期，即恢复原来的值，因此弹性力在半个周期内所做的功为零。

【5505】一质点作简谐振动，其振动方程为 $x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$。在求质点的振动动能时，得出下面 5 个表达式：(1) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$；(2) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$；(3) $\frac{1}{2}kA^2\sin(\omega t+\varphi_0)$；(4) $\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$；(5) $\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$；其中 m 是质点的质量，k 是弹簧的劲度系数，T 是振动的周期。这些表达式中

(A) (1)，(4) 是对的　(B) (2)，(4) 是对的　(C) (1)，(5) 是对的

(D) (1)，(3)，(5) 是对的　(E) (2)，(5) 是对的

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

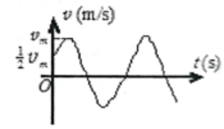
考虑到 $\omega^2=k/m$，所以质点的动能还可以写成

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

考虑到 $\omega=2\pi/T$，所以质点的动能还可以写成

$$E_k=\frac{1}{2}mA^2\frac{4\pi^2}{T^2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

4.一质点作简谐运动，其运动速度与时间的曲线如图所示。若质点的位移用余弦函数表示，则其初相应为



A.π/6　　B.5π/6

C.-5π/6　　D.-π/6　　[C]

[解析] 本题考查旋转矢量法以及正余弦表示位移&速度的熟练变换。

重要补充说明：旋转矢量不限于位移矢量，但是注意选定的 cos 还是 sin ,以及不同的振幅对应的具体的物理意义。在本题中，先不考虑从位移→速度，用 v 来看旋转矢量，则需要注意 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)\to v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$ **(这是因为我们习惯于用 cos 表示旋转矢量，当然习惯用 sin 的同学也当然可以)，则我们先确定** $\varphi_0+\frac{\pi}{2}$ **,这部分是“速度初相位”，根据旋转矢量确定为- π / 3,所以位移初相位为- 5π / 6，选择 C。**

5.有一质量为 m 的物体以振幅为 A 做简谐运动，其最大加速度为 a_m，则下列说法正确的是

A.振动周期为 $2\pi\sqrt{\frac{A}{a_m}}$　　B.振动周期为 $\pi\sqrt{\frac{A}{a_m}}$　　[A]

B. 通过平衡位置的总能量为 $\frac{1}{2}m\sqrt{a_mA}$　　D.通过平衡位置的总能量为 $m\sqrt{a_mA}$

[解析] 本题考查描述简谐运动基本量的简单变形。

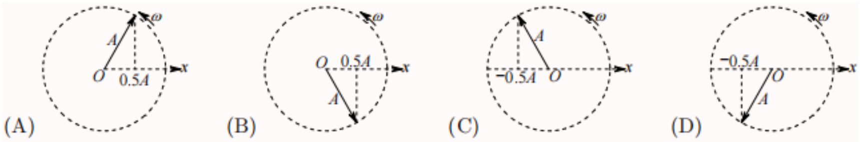
$$a=\dot{v}=A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)\to a_m=A\omega^2\to T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a_m}{A}}}$$

根据速度进一步得到加速度为：

$$E_{total}=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}mA^2\frac{a_m}{A}=\frac{1}{2}mAa_m$$

故本题选择 A。

6.一个质点作简谐运动，振幅为 A，在起始时刻质点的位移为 $\frac{1}{2}A$，且向 x 轴的负方向运动，代表此简谐运动的旋转矢量图为　　[A]



[解析] 本题考查旋转矢量法 很容易看出只有 A 图下一时刻才→- A 运动，选择 A。

7. 劲度系数为 k 的轻弹簧一端固定，另一端连接一个质量为 m 的物体构成水平方向的弹簧振子。若振子做振幅为 A、初相位为 φ_0 的简谐振动，其动能作简谐振动的初相位为 2π/3，则 φ_0 一定等于

A. $\frac{\pi}{3}$　B. $-\frac{2\pi}{3}$　C. $-\frac{\pi}{6}$　D. $\frac{5\pi}{6}$　E.条件不足，无法确定　　[**E**]

[解析] 本题考查用动能描述简谐振动。

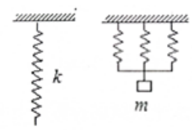
根据

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m[-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)]^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{4}mA^2\omega^2[1+\cos 2(\omega t+\varphi_0)]$$

虽然看似 φ_0 可以唯一确定，但是不要忽略平方在这里的贡献，实际上动能相位与速度相位存在平方之前与之后的正负的隐藏关系，即第三个等号实际上 φ_0 是可以±整数倍 π 的，因此无法单一方向通过动能相位唯一确定速度相位，选择 E。

思考：如果从速度相位确定动能相位有何种结果呢？与本题一样吗？

8.一劲度系数为 k 的轻弹簧截成三等份，并将它们并联，下面挂一质量为 m 的物体，如图所示，则振动系统的周期 T 为



A. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$　B. $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$　C. $2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$　D. $2\pi\sqrt{\frac{m}{6k}}$

[**A**]

[解析] 本题考查周期公式以及弹簧的串并联知识。

弹簧串联与并联的结果详细原理可查阅应力与应变关系的相关教材，通过简单的胡克定律可以得到按照三等份剪开并联之后等效的劲度系数为原先的 9 倍(每根弹簧为 3k,三根累加为 9k)，带入周期公式即可。注意剪开和并联是两个过程，分别分析。

[变式练习]

【3008】一长度为 l、劲度系数为 k 的均匀轻弹簧分割成长度分别为 l_1 和 l_2 的两部分，且 $l_1=nl_2$，n 为整数。则相应的劲度系数 k_1 和 k_2 为

(A) $k_1=\frac{nk}{n+1}$，$k_2=(n+1)k$　　(B) $k_1=\frac{(n+1)k}{n}$，$k_2=\frac{k}{n+1}$

(C) $k_1=\frac{(n+1)k}{n}$，$k_2=(n+1)k$　　(D) $k_1=\frac{nk}{n+1}$，$k_2=\frac{k}{n+1}$

两个弹簧串联在一起，两端施加一定的力，二者均发生变形，那么有

$$F=kx=k_1x_1=k_2x_2$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{l_1}{l_2}=n\Rightarrow x_1=nx_2$$

$$x=x_1+x_2=(n+1)x_2$$

$$\frac{F}{k}=(n+1)\frac{F}{k_2}\Rightarrow k_2=(n+1)k$$

$$k_1=\frac{x_2}{x_1}k_2=\frac{1}{n}k_2=\frac{n+1}{n}k$$

9.两个质点各自作简谐运动，它们的振幅相同、周期相同。第一个质点的振动方程为 $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$，当第一个质点在平衡位置向 x 轴正方向运动时，第二个质点的加速度达到正向最大值，则第二个质点的振动方程为

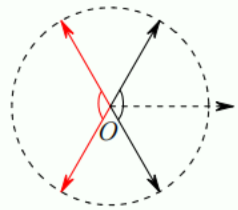
A. $x_2 = A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{1}{2}\pi\right)$　B. $x_2 = A\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{1}{2}\pi\right)$

C. $x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$　D. $x_2 = A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$　[**B**]

[解析] 本题考查旋转矢量由已知相位确定未知相位。

根据题目所描述的，2 质点加速度正向最大值是横轴负方向，1 质点是纵轴负方向，所以 2 质点相位比 1 质点落后 π/2,因而在 1 的基础上减去 π/2，所以选择 B。

【3819】两质点沿水平 x 轴线作相同频率和相同振幅的简谐振动，平衡位置都在坐标原点。它们总是沿相反方向经过同一个点，其位移 x 的绝对值为振幅的一半，则它们之间的相位差为______。



由以上旋转矢量图很容易看出，两种情况下二者的相位差都是 $\frac{2}{3}\pi$。

【3818】两个弹簧振子的周期都是 0.4 s，设开始时第一个振子从平衡位置向负方向运动，经过 0.5 s 后，第二个振子才从正方向的端点开始运动，则这两振动的相位差为______。

依题意，第一个振子的初位相为 $\frac{1}{2}\pi$，经过 0.5 s，即 1.25 个周期，相位变成 3π，或称为 π，此时第二个振子的相位为零，所以二者的相位差为 π。

10.将频率为 348Hz 的标准音叉振动和一待测频率的音叉振动合成，测得拍频为 3Hz。若在待测频率音叉的一端加上一小块物体，则拍频将减小。那么待测音叉的固有频率为　[**B**]

A.345Hz　B.351Hz　C.368Hz　D.382Hz

[解析] 本题考查简谐振动的合成问题，拍现象的规律应用。

首先回顾一下简谐振动的合成的分类：

(1) 同方向同频率→两个余弦方程相加，本质是三角函数的和差化积→口诀 ：“花自飘零水自流，sin 加 sin 得 2 sin cos”，这里经常用到的是 cos+cos=2 cos cos，等式右边的相位分别是左边的两者的和的二分之一和差的二分之一，口算不明白就最好列方程求一下。其余方式的和差化积都可以用二分之 π 来转化 sin cos涉及到求相位角的相关问题时，用旋转矢量可以一目了然，同理合成之后的振幅就是一个余弦定理，相位就是简单的加减。

(2) 同方向不同频率→依然按照(1) 中的做法去解决，但是注意，这个时候得到的合振动的表达式 $x = A_{(t)}\cos\overline{\omega}t = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$，可以近似分离成时间缓变项和快变项，在两个频率相差不大的情况下近似为简谐振动，而此时就会出现合成的振动周期性变大变小的现象→拍现象，所以在涉及到“频率相差不大”的信息的时候要有一定的敏感。要会求拍频以及周期。

（3）垂直方向的合成→同频率一般不太涉及（因为在后续的时候不学椭圆偏振光和圆偏振光），不同频率在计算之后可以用李萨如图型表示，这里大概需要掌握的就是两个频率比对应的图形要会看（有可能给你图给一个方向的频率然后求另一个方向的频率）

方法→去用沿 x,y 两个相互垂直方向的线去截李萨如图形（其中频率比为整数的时候轨迹闭合，不为整数的时候永远不闭合），频率比等于截线与图形的最大交点个数比化简的结果。

因此本本题中，待测音叉的频率暂定为 345Hz 或者 351Hz，进一步分析，加小物体之后 m 变大影响其频率变小，而题中说明此时拍频减小，也就是说变小了之后的频率与标准音叉 348Hz 频率差值减小，而若为 345Hz 则差值变大，351Hz 则恰好差值变小，故选择 B。

二、填空题

11.某一质点的位移可以用两个简谐运动叠加来表示：$x = A\sin 2\omega t + B\sin\omega t$，则该质点自身的运动_不是__（填"是"或"不是"）简谐运动。

[解析] 本题考查简谐振动的合成问题。

根据 10 题详细分析，不同频率合成之后不会产生恒定的振幅，故不是简谐运动。

12. 一质点沿 x 轴以 x=0 为平衡位置作简谐运动，频率为 0.5Hz。$t=0$ 时 $x=-0.5cm$ 而速度等于零，则振幅是__**0.5cm**___,振动的运动方程是__ $x = 0.5\cos(\pi t + \pi)$ ___。

[解析] 本题考查描述简谐振动的相关物理量以及方程的求解。

根据所给频率，以及初始状态的速度位置很容易确定振幅，初始状态的描述选择旋转矢量中相位位置为横轴负方向，初相位为 π 。

13. 两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 2m，合振动的位相与第一个简谐振动的相位差为 π/6，若第一个简谐振动的振幅为$\frac{\sqrt{3}}{2}$m，则第二个简谐振动的振幅为__ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ __，两个简谐振动的相位差为____ $arc\tan\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ___。

[解析] 本题考查简谐振动的合成计算。

一般采用旋转矢量的另一种应用手段，详见变式练习中的解法，与本题完全一致。

[变式练习]

【3839】两个同方向的简谐振动，周期相同，振幅分别为 $A_1 = 0.05$ m 和 $A_2 = 0.07$ m，它们合成为一个振幅为 $A = 0.09$ m 的简谐振动。则这两个分振动的相位差______rad。

根据同方向同频率简谐振动合成的合振幅的公式

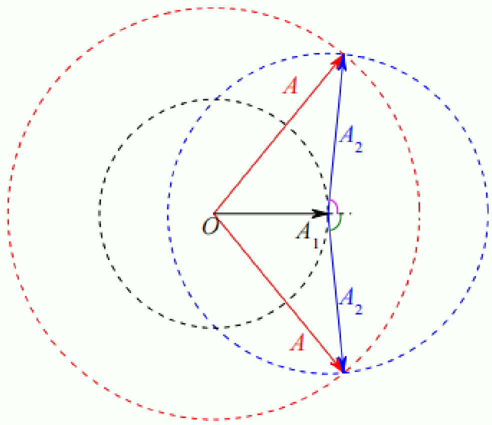
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}$$

可得

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)$$
$$\cos(\Delta\varphi) = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}$$

$$\Delta\varphi = \arccos\frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = \arccos\frac{0.09^2 - 0.05^2 - 0.07^2}{2\times 0.05\times 0.07} = \arccos\frac{1}{10} \approx 1.47\ \mathrm{rad}$$

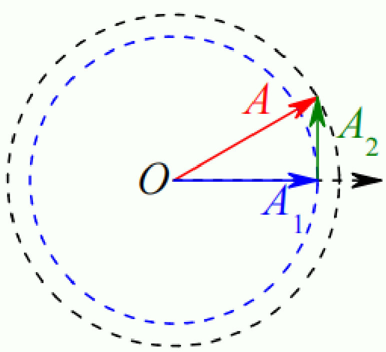
另外，根据以下旋转矢量图



结合三角形余弦定理，也可以求得所求相位差。

【5315】两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 20 cm，与第一个简谐振动的相位差为 $\varphi-\varphi_1=\pi/6$。若第一个简谐振动的振幅为 $10\sqrt{3}$ cm $=17.3$ cm，则第二个简谐振动的振幅为_____cm，第一、二两个简谐振动的相位差 $\varphi_1-\varphi_2$ 为_____。

根据以下旋转矢量图



很容易求得第二个简谐振动的振幅为 $A_2=10$ cm，第一、二两个简谐振动的相位差 $\varphi_1-\varphi_2=-\dfrac{1}{2}\pi$。

14.一以周期 T 作简谐运动的系统，以余弦函数表达振动运动时，初相为 π/6。若振动状态所处的时刻 t 在 $0\le t\le \frac{1}{2}T$ 范围内，则系统在 $t=$___ $\frac{T}{24}$ ____或__ $\frac{7T}{24}$ ____时刻动能和势能相等。

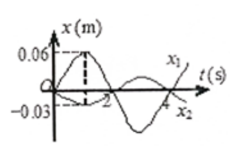
[解析] 本题考查能量关系的应用。

首先自行把时间条件与三角函数相位进行对应，根据能量关系以及题中限制的时间范围，

$E_k=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\frac{\pi}{6})=E_p=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\frac{\pi}{6})$，**故反推得到两个时间。**

$$\Rightarrow \sin^2(\omega t+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2},\rightarrow \frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$$

15.图中所示为两个简谐运动的振动曲线。若以余弦函数表示这两个振动的合成结果，则合振动的方程为



$x = x_1 + x_2 =$ $0.03\sin\frac{\pi}{2}t / 0.03\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)$ (SI)。

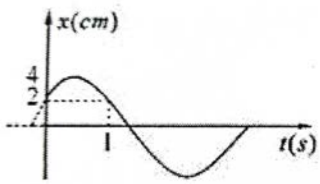
[解析] 本题考查简谐振动的合成计算。

先根据两个图形写出运动方程，注意原点处 1 与 2 的相位关系，两者振幅已给出，周期频率一致也已给出，则不难写出：

$$\begin{cases} x_1 = 0.06\cos(\frac{2\pi}{4}t-\frac{\pi}{2}) = 0.06\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ x_2 = 0.03\cos(\frac{2\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}) = -0.03\sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \Rightarrow x = x_1 + x_2 = 0.03\sin(\frac{\pi}{2}t)$$

一个有趣的发现是，在物理上我们习惯通过 cos 寻找相位来写出第一组等号之后的详细表达式，但是我们如果把这个题目 totally 数学化之后，习惯的是用 sin 以及整体的正负来描述，也就是第二组等号之后的表达，两种思考都会有所收获。

16.下图为质点做简谐振动的振动图，则振动的周期为__3s__。



[解析] 本题考查描述简谐振动的相关物理量以及方程的求解。

这个题目我们选择将他 totally 数学化,初始位置对应的是纵坐标的一半，作水平线交另一侧得到的“宽度”为 1s，这部分宽度对应的角度是 5π / 6- π / 6=2π / 3,对应周期的三分之一，则周期为 3s，这样我们就可以避免了处理具体的物理问题了。

17.一水平放置的弹簧振子作简谐振动，总能量为 E 。当离开平衡位置的位移是振幅 A 的一半时，振子的动能为___ $\frac{3}{4}E$ ___,势能为___ $\frac{1}{4}E$ ___；当位移为__ $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ __，动能与势能相等。

[解析] 本题考查简谐振动的能量综合应用，

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$E_{total} = E_k + E_p \ \& \begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-A\omega\sin(\omega t+\varphi)]^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2[A\cos(\omega t+\varphi)]^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases},$$

把振幅 A 一半的条件带入计算即可得到一系列答案，注意我们是把 cos 项当成一个整体去计算，不用考虑具体是什么。

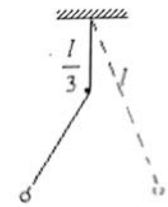
18.一简谐运动的运动方程为 $x = A\cos(3t+\varphi)$，已知 $t=0$ 时的初位移为 0.03m，初速度为 0.12m/s，则振幅 $A=$__0.05m___，初相 $\varphi=$___ $-\arctan\frac{4}{3}$ ____。

[解析] 本题考查描述简谐振动的相关物理量以及旋转矢量。

注意要结合速度的表达式进行综合应用，其余计算很简单。

$$\begin{cases} A\cos\varphi = 0.03 \\ -3A\sin\varphi = 0.12 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\arctan\frac{4}{3}, \Rightarrow A = 0.03m$$

19.如图，单摆长为l，在顶端固定点的正下方$\frac{l}{3}$处有一小钉，则单摆左右两边振动的周期之比为______ $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ______。



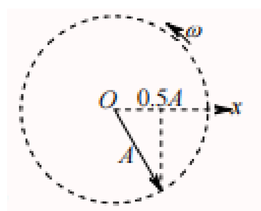
[解析] 本题考查周期公式的应用。

由 $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}, \frac{T_{left}}{T_{right}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{g}{\frac{2}{3}l}}}{2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}} = \sqrt{2}:\sqrt{3}$

20.一质点作简谐运动的角频率为ω、振幅为A。当$t=0$时，质点位于$x=\frac{1}{2}A$处，且向x正方向运动，试画出此振动的旋转矢量图。

[解析] 本题考查旋转矢量法。

根据选择题 6 的分析可以直接得到。



三、计算题

21.一质量为 3kg 物体放在光滑的水平面上，在力$F=-6x$的作用下运动。已知该物体偏离坐标原点的最大位移为$A=0.15$m，求：（1）物体运动的周期 ；（2）物体动能的最大值。

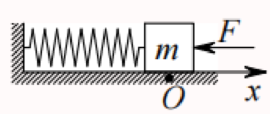
[解析] 本题考查简谐振动的动力学简单应用。

[解析]:（1）根据外力的特征可以判断外力是一个线性回复力，运动类型判定为简谐振动，第一问可以直接根据公式得角频率$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，得到周期$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\sqrt{2}\pi$ (s)。

（2）没有外力系统能量守恒,所以最大动能=最大弹性势能$=\frac{mA^2}{2}=0.0675$J

[变式练习]

【5511】如图，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k=24$ N/m，重物的质量 $m=6$ kg，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 $F=10$ N 向左作用于物体（不计摩擦），使之由平衡位置向左运动了 0.05 m 时撤去力 F。当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。



由功能原理可知，外力对弹簧所做的功等于系统机械能的增加，以重物在平衡位置时的势能为势能零点，则外力撤去时，弹簧振子的能量为

$$\Delta E = E - 0 = W = Fs = 10 \times 0.05 = 0.5 \text{ J}$$

此能量等于弹簧振子的最大势能，即

$$E = E_{p\max} = \frac{1}{2}kA^2$$
$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.5}{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \approx 0.204 \text{ m}$$

而圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = 2 \text{ rad/s}$$

$t = 0$ 时，$x_0 = -A$，所以 $\varphi_0 = \pi$，所以物体做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.204\cos(2t + \pi)$$

22.将一质量为 0.5kg 的物体悬挂于一轻弹簧下端，弹簧上端固定。物体原先静止于平衡位置，后来在向下外力作用下运动，在弹簧伸长到一定长度后静止不动，现将外力瞬间撤掉，释放物体。已知物体振动的周期为 2s，振幅为 10cm。问：（1）在撤力前瞬间，作用在物体上向下的外力是多大？（2）设平衡位置为重力和弹性势能的零点，则当物体在平衡位置以下 5cm 处时，此振动系统的动能和势能各是多少？

[解析] 本题考查简谐振动动力学以及能量的综合求解。

(1)根据已知周期和质量结合公式T=2π$\sqrt{\frac{m}{k}}$

得到弹簧倔强系数k=$\frac{\pi^2}{2}$；

撤去拉力前弹簧位于最低点即初始位置位于平衡点下方10cm处，即有外力F_w满足 F_w+mg=kA+kx_0;(说明：x_0：为平衡时候弹簧的形变量，即有kx_0=mg);

于是F_w=kA=$\frac{\pi^2}{20}$(N)

(2)注意题目问的是势能而不是弹性势能；

有机械能守恒$E_v + E_p = const$;

在平衡位置处有：势能$E_p = 0 + 0 = 0$,

动能达到最大E_{vmax}=$\frac{m(Aw)^2}{2}$=$2mA^2(\frac{\pi^2}{T^2})$

若取向下为正方向则：平衡位置下5cm处相位可取$\phi_0 = arccos(\frac{5}{10}) = \frac{\pi}{3}$

[变式练习]

【3835】在竖直悬挂的轻弹簧下端系一质量为 100 g 的物体，当物体处于平衡状态时，再对物体加一拉力使弹簧伸长，然后从静止状态将物体释放。已知物体在 32 s 内完成 48 次振动，振幅为 5 cm。(1) 上述的外加拉力是多大？(2) 当物体在平衡位置以下 1 cm 处时，此振动系统的动能和势能各是多少？

【解析】简谐振动的特征量，简谐振动的能量。

(1) 依题意，物体做简谐振动的频率为

$$\nu = \frac{48}{32} = 1.5\ \text{Hz}$$

所以圆频率为

$$\omega = 2\pi\nu = 3\pi\ \text{rad/s}$$

根据弹簧振子的圆频率与弹簧劲度系数之间的关系

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

可得弹簧的劲度系数为

$$k = m\omega^2 = 0.9\pi^2\ \text{N/m}$$

当施加题目所说的拉力时，物体共受到三个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向下的拉力 T_1，竖直向上的弹簧弹力 T_2，所以有

$$mg + T_1 = T_2$$
$$T_2 = k(l_0 + A)$$
$$kl_0 = mg$$

所以外加拉力为

$$T_1 = kA = 0.9\pi^2 \times 0.05 = 0.045\pi^2\ \text{N} \approx 0.444\ \text{N}$$

(2) 设物体做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

当物体在平衡位置以下 1 cm 处时，

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.01$$
$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A} = 0.2$$
$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) = 0.96$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = 0.96 \times 0.5 \times 0.1 \times 0.05^2 \times (3\pi)^2 \approx 0.0107\ \text{J}$$
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.5 \times 0.9\pi^2 \times 0.01^2 \approx 4.44 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

注意，这里的势能其实包含重力势能和弹性势能，但二者之和刚好可以表示成 $\frac{1}{2}kx^2$，这里的 x 是物体离开平衡位置的距离，并不是弹簧的形变量。而且这里势能的零点选择为平衡位置，即让平衡位置重力势能和弹性势能之和等于零。

23.一摆长为l=120cm的单摆，在t=0时摆球正好经过$x_0 = -5cm$处，并以$v_0 = 10cm/s$的速率沿着x轴负向运动。若单摆近似看成简谐运动。试求：

（1）振动周期；

（2）振幅和初相；

[解析] 本题考查简谐振动动力学。

（1）由振幅公式$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$=2.858($rad/s^{-1}$)
于是周期有T=2$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$=2.197(s)
（2）单摆近似看成简谐运动，故不妨设其位移表达式为
$x = Acos(\omega t + \phi_0)$，其中$\omega$为角频率，A为振幅，$\phi_0$为初相位,

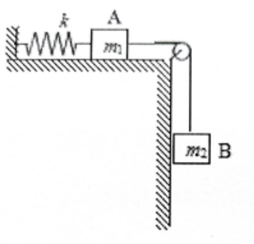
依题意有初始位置$x_0 = Acos(\phi_0)$=-5cm；

初速度$v_0 = -A\omega sin(\phi_0)$=10cm/s;

于是有A=$\sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$=0.061(m)=6.1(cm)

$\phi_0 = arccos\frac{x_0}{A}$=0.609(rad)

24.一轻弹簧劲度系数为k，其左端固定，右端与质量为m_1的物体A相连，放置于光滑水平桌面上，物体A右端的细绳绕过一定滑轮连接一质量为m_2的物体B，如图所示。若细绳不可伸长，且与定滑轮之间无相对滑动，定滑轮可看作质量为m、半径为R的均匀圆盘，求该系统振动的角频率。



[解析] 本题考查简谐振动动力学以及力学规律的综合应用。

设A物体偏移平衡位置的位移为x,速度为v,加速度为a，上端绳子拉力为T_1,下端绳子拉力为T_2. 滑轮角加速度为β,滑轮的角速度为ω 取向右为正方向则有：

$$-kx+T_1 = m_1 a$$
$$(T_2 - T_1)R=\frac{1}{2}mR^2\beta$$
$$R\omega = v$$
$$R\beta = a$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

整理化简，消去T_1, T_2：

$$m_2 g - kx_1 = (m1 + \frac{1}{2}m + m_2)a$$

于是角频率:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m+2m_1+2m_2}}$$

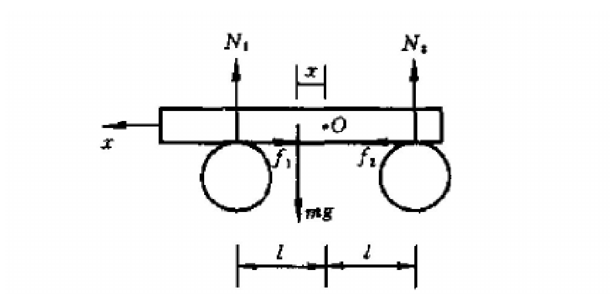
说明：在简谐振动这一章中一些有难度的题目会涉及到上册介绍的转动惯量相关知识，但是只需要记住一些典型的结论以及会运用刚体的动力学方程即可，回顾如下：

质点运动	定轴转动	
位移 $\Delta\vec{r}$	角位移 $\Delta\theta\vec{e}$	$\vec{e}$沿转轴的单位矢量
速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	角速度 $\vec{\omega}=\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}$	
动量 $\vec{p}=m\vec{v}$	角动量 $L_{\omega}=I\omega$	
力 $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$	力矩 $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$	力的两种效果： 力 --- 动量 力矩 — 角动量
$\vec{F}=m\vec{a}$	$M_{\omega}=I\beta$	

刚体	转动惯量
单个质点	$J=mr^2$
细长棒	$J=\frac{1}{12}mL^2$
中空圆柱体	$J=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
薄圆盘、圆柱体	$J=\frac{1}{2}mR^2$
薄圆环、圆筒	$J=mR^2$
球体	$J=\frac{2}{5}mR^2$
球壳	$J=\frac{2}{3}mR^2$

[拓展题]

[2022.9.17] 如图1：两个完全相同的圆柱滚轮在水平面内水平放置，各自绕自身中心按照图示方向匀高速旋转，两轴线的距离为2L，在两个滚轮上方平放一块质量为G的均匀木板，木板与滚轮间的摩擦因数都为μ,如果木板重心偏离两轴中点位置一个微小距离，试定量描述木板的运动。



【提示】：方程与简谐振动等价。

[解答]：如图中所示，滚轮与木板之间存在相对滑动，因为两滑轮旋转方向不一致，木板收到如图所示的两个反向的摩擦力f_1, f_2,两个摩擦力的大小正比于对应的正压力N_1, N_2

设木板质量为m,竖直方向有： $N_1 + N_2 - mg = 0$ ————————(1)

以滚轴中心为转轴，和力矩应该为0 即：$N_1(L-x) = N_2(L+x)$ ———(2)

由（1）（2）解之得：

$N_1 = \dfrac{(L+x)mg}{2L}$, $N_2 = \dfrac{(L-x)mg}{2L}$;

合外力$F = f_2 - f_1 = \mu(N_2 - N_1) = -\dfrac{\mu mgx}{L}$;

再有牛顿第二定律： $ma = F$

即$ma = -\dfrac{\mu mgx}{L}$

方程符合简谐振动的规律。

得板子做圆频率为$\omega = \sqrt{\dfrac{\mu g}{L}}$的简谐振动；

周期为$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\mu g}}$