图与网络

定义

一个图(Graph) G是由一个非空有限集合$V(G)$和$V(G)$中某些元素的无序对集合$A(G)$构成的二元组，记为图$G=(V(G)，A(G))$.

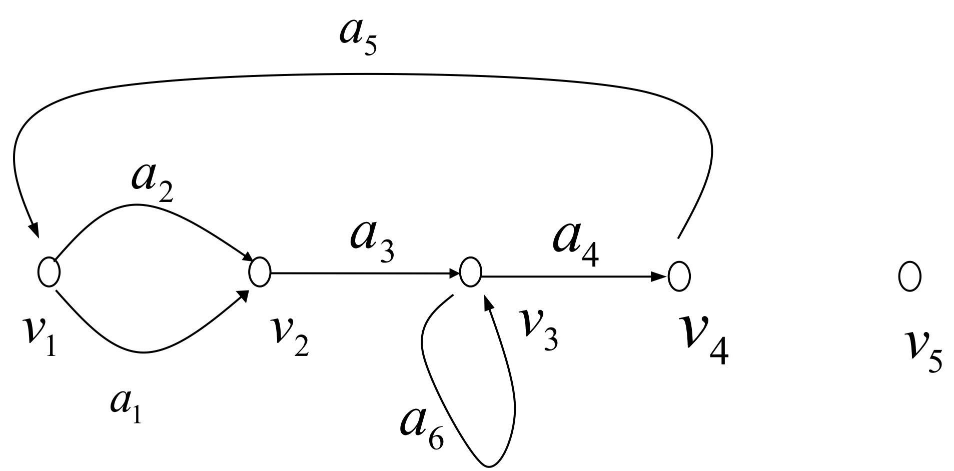
其中$V(G)$ 称为图G的结点集，$V(G)$中的每一个元素称为该图的一个结点或顶点； $A(G)$称为图G的边集，$A(G)$中的每一个元素称为该图的一条边.

记号$V(G)$和$A(G)$简记为V和A，而记图$G=$（V，A）.

有向图:对图G中的每条边赋予一个方向. (有序对; 边称弧）

赋权图: 对图G中的每条边赋予一个或多个实数，得到的图称为或网络(Network).

例



有向图$G=(V，A)$，顶点集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

边集$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$

边

$$a_1=(v_1,v_2)\quad a_2=(v_1,v_2)\quad a_3=(v_2,v_3)$$

$$a_4=(v_3,v_4)\quad a_5=(v_4,v_1)\quad a_6=(v_3,v_3)$$

基本概念

图的**阶(Order)** :顶点的个数.

顶点的**度**（Degree）:与顶点相连的边数. (出度,入度).

相邻点、相邻边、环、多重边.

简单图(Simple Graph): 没有环、且没有多重边的图.

链(chain): 由两两相邻的点及其相关联的边构成的点边序列.

如：v_0 , e_1 , v_1 , … , v_{n-1}, e_n , v_n ;

v_0 , v_n 分别称为链的**起点**和**终点** .

路（Path）：图的不包含重复顶点的链.

圈(Cycle): 起点和终点重合的路.

连通图(Connected Graph)： 图中任意两点之间均至少有一条路，否则称作不连通图。

树(tree): 无圈连通图称为树,无圈图称为森林.

完全图(Complete Graph)：

若图G的任意两个顶点间有且只有一条边相连，则称其为完全图. n阶完全图记为K_n.

K_n的边的数量为 $n(n-1)/2$

子图(Subgraph): $G=(V, A)$

$V' \subseteq V, A' \subseteq A$，$G' = (V', A')$ 称为G的子图(Subgraph)

图的支撑子图 (又称生成子图): 包含G 的所有顶点的子图.

图与网络中的几个重要问题

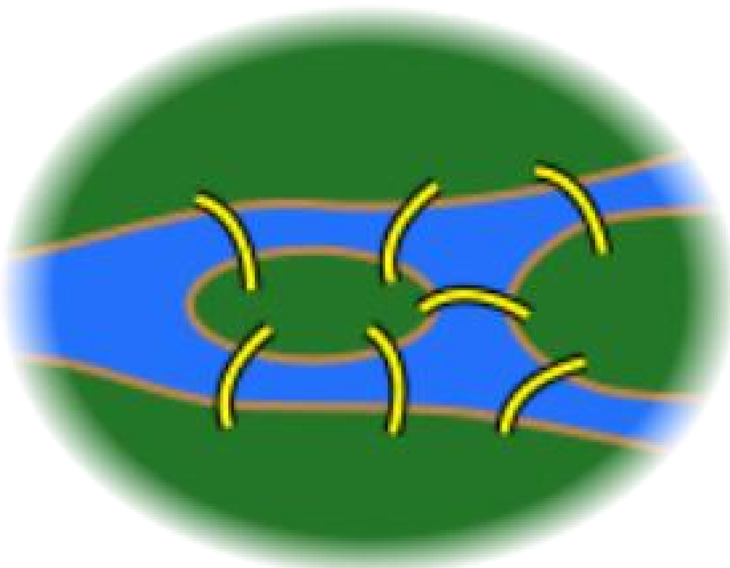
最短路径问题

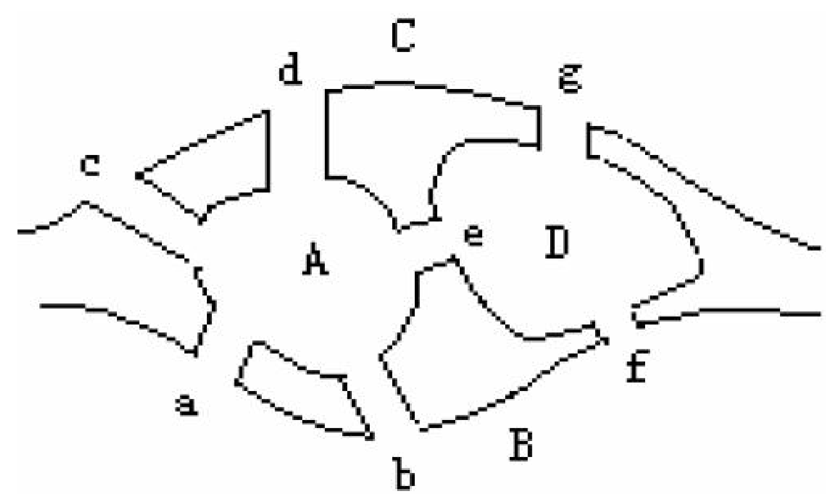
最小生成树问题

最小费用最大流问题

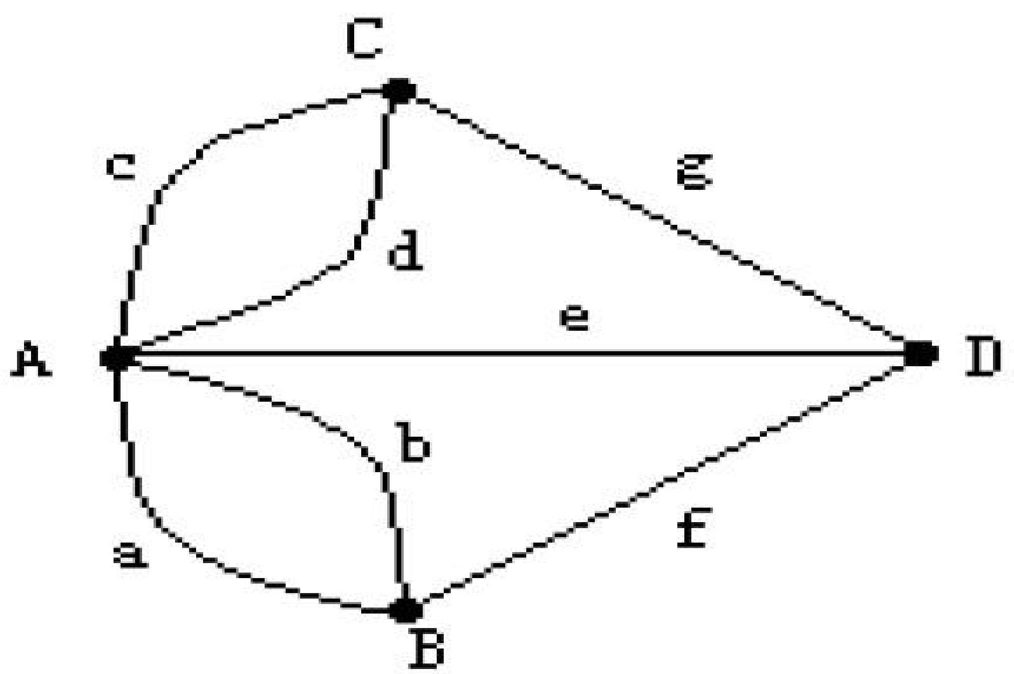
七桥问题

普鲁士哥尼斯堡镇上有一个小岛,岛旁流过一条河的两条支流,七座桥跨在河的两支流上.A表示岛,B表示河左岸,C表示右岸,D为两支流间地区,a,b,c,d,e,f,g分别表示七座桥.问一个人能否经过每座桥一次且恰好经过每座桥一次并最后回到原出发点?





抓住问题关键!将七桥图转化为下图:



问题归结为一笔画问题

此问题引出一个重要数学分支：图论

从图中任意点出发，为了要回到原来的出发点，要求与每个点相关联的边数均为偶数，这样才能保证从一条边进入某点后再从另一条边出去，一进一出才能回到出发点。而图中ABCD确均为与奇数条边相连，由此可知所要求的回路是不存在的。

考虑一般化问题：

如果给定任意一个河道图与任意多座桥，可否判断每座桥能否恰好走过一次呢?此外，能否实现除起点和终点外，每块陆地恰好只通过一次呢?

相识问题（拉姆齐问题）

在6人的聚会中，假设认识是相互的，则必可找出这样的3人，他们或者彼此均认识或者彼此均不认识 。请问这个结论正确吗？

证明：

利用图的方法来描述该问题。将人看成顶点，两人彼此都认识用实线连，否则虚线。

问题转化为在一个6阶图中必存在实线三角形或虚线三角形。

任取一顶点，不妨 υ_1

与 υ_1相连的边必然有：

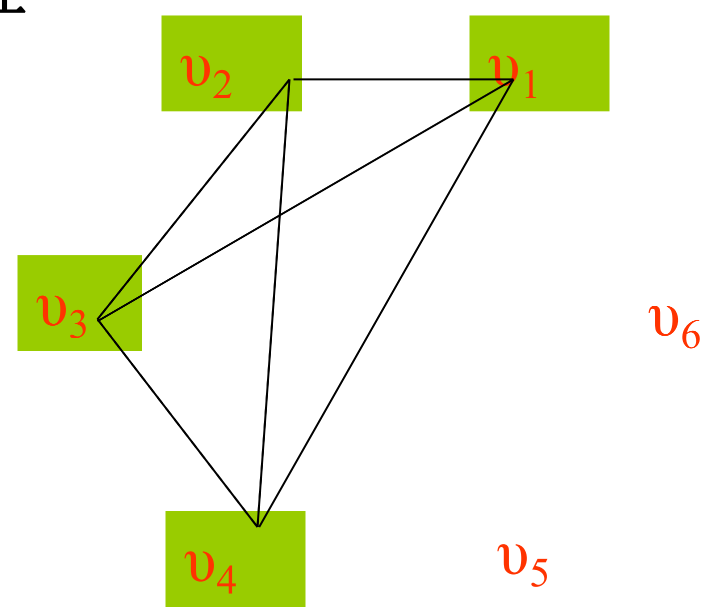
实线条数不小于3或虚线条数不小于3

不妨取$\upsilon_1\upsilon_2$、$\upsilon_1\upsilon_3$、$\upsilon_1\upsilon_4$实线

考察$\upsilon_2\upsilon_3$、$\upsilon_2\upsilon_4$和$\upsilon_3\upsilon_4$

$\upsilon_2\upsilon_3$、$\upsilon_2\upsilon_4$和$\upsilon_3\upsilon_4$只能是虚线，否则得证

但这样三角形$\upsilon_2\upsilon_3\upsilon_4$的三边均为虚线



其他类似可推出的结果：

命题1 任一6阶2色完全图中至少含有两个3阶单色完全图。

证明： 前面证明必存在3阶单色完全图，不妨设 $\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3$ 为红色完全图

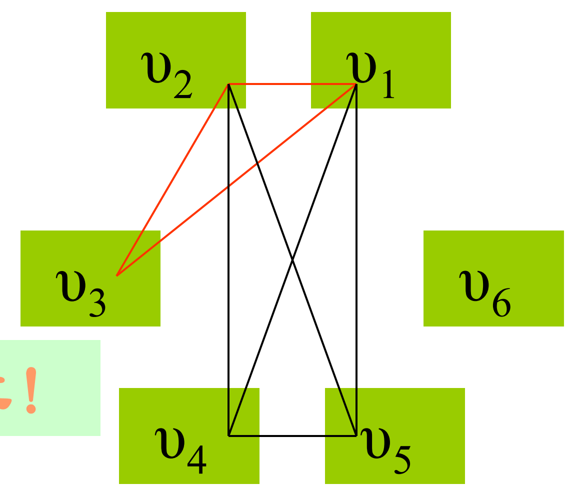
若$\upsilon_4\upsilon_5\upsilon_6$也是红色三角形，命题已得证 。反之，

至少一边与$\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3$的边异色，不妨设$\upsilon_4\upsilon_5$黑色

$\upsilon_1\upsilon_4$、$\upsilon_2\upsilon_4$、$\upsilon_3\upsilon_4$至少应有两条黑色，不妨设 $\upsilon_1\upsilon_4$、$\upsilon_2\upsilon_4$ 黑色

$\upsilon_1\upsilon_5$、$\upsilon_2\upsilon_5$、$\upsilon_3\upsilon_5$中至少有两条黑色、故$\upsilon_1\upsilon_5$与$\upsilon_2\upsilon_5$中至少有一条是黑色

所以存在第二个3阶单色完全图。



直接推广：以上结论对于人数大于6人仍成立！

命题2 7阶2色完全图至少含有4个3阶单色完全图

命题3 9阶2色完全图中必含有一个3阶红色完全图或4阶绿色完全图

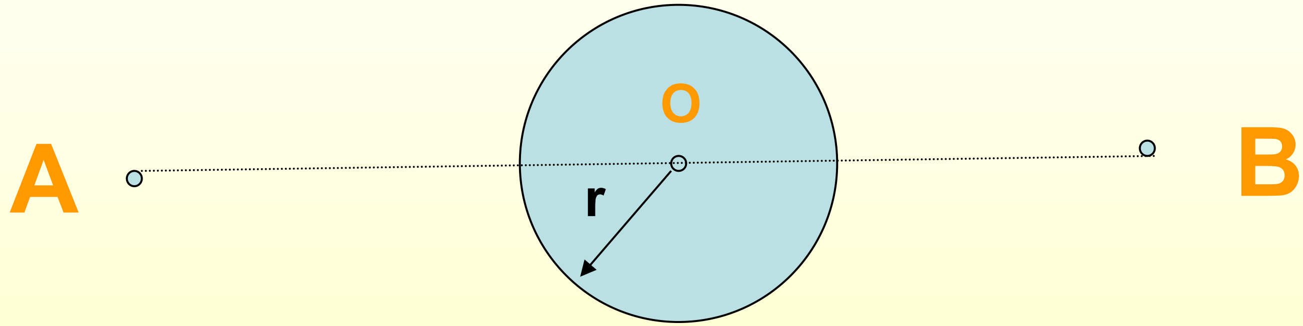
对拉姆齐问题的认识不能仅仅停留在本例的水平上。利用逻辑推理方法，实际上还可获得一大批结果。命题2和命题3的证明留给大家自己去完成。

最短路径问题

设有一个半径为r的圆形湖，圆心为O.

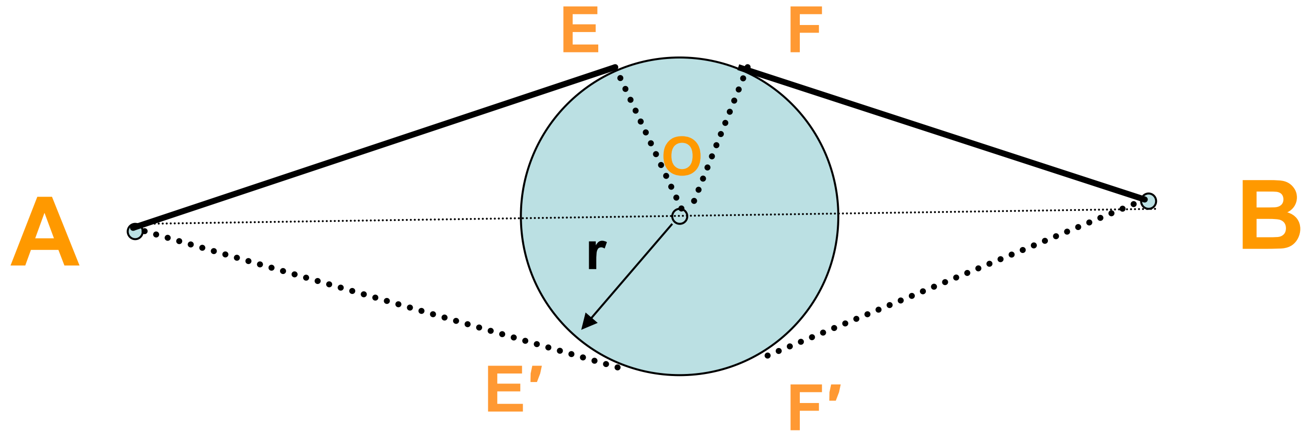
A、B位于湖的两侧，连线过O，见图。

现拟从A点步行到B点，在不得进入湖中的限制下，问怎样的路径最近?



将湖想象成凸出地面的木桩，在AB间拉一根软线，当线被拉紧时将得到最短路径。根据这样的想象，猜测可以如下得到最短路径：

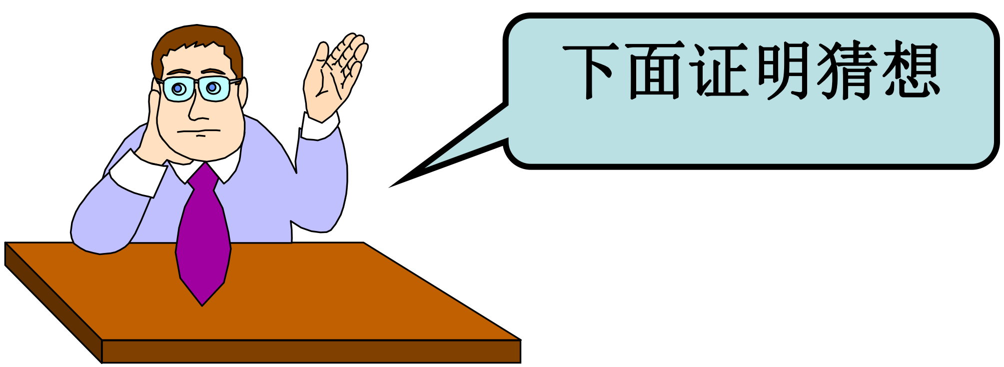
过A作圆的切线切圆于E，过B作圆的切线切圆于F。最短路径为由线 段AE、弧EF和线段FB连接而成的连续曲线（根据对称性，AE′，弧E′F′，F′B连接而成的连续曲线也是）。

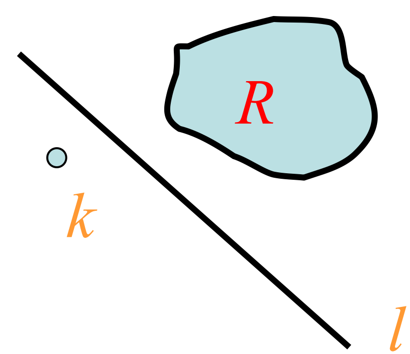


以上只是一种猜测，现在来证明这一猜测是正确的。为此，先介绍一下凸集与凸集的性质。

定义1（凸集）称集合 R为凸集，若x_1、$x_2\in R$及$\lambda\in[0，1]$，总有$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in R$。即若$x_1$、$x_2\in R$，则$x_1$、$x_2$的连线必整个地落在$R$中。

定理1（分离定理）对平面中的凸集R与R外的一点K，存在直线l，l分离R与K，即R与K分别位于l的两侧（注：对一般的凸集R与R外的一点K，则存在超平面分离R与K），见图。





猜测证明如下：

（方法一）显然， 由AE、EF、FB及AE′，E′F′，F′B围成的区域 R是一凸集。利用分离定理易证最短径不可能经过R外的点，若不然，设 Γ为最短路径，Γ过R外的一点M，则必存在直 线l分离M与R，由于路径Γ是连续曲线，由A沿Γ到M，必交l于M_1，由M沿Γ到B又必交l于M_2。这样，直线段M_1M_2的长度必小于路 径M_1MM_2的长度，与Γ是A到B的最短路径矛盾，至此，我们已证明最短路径必在凸集R内。不妨设路径经湖的上方到达B点，则弧EF必在此最短路径之上，又直线段AE是由A至E的最短路径，直线FB是由F到B的最短路径，猜测得证。