

2018 年高数上期中试题

一、 选择题

1. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{2-x}$ 的 ()
A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点
2. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0 \\ x^2 g(x) & x\leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()
A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续 C. 连续但不可导 D. 可导
3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^2-x|$ 不可导点的个数是 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
4. 设 $\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在 $x=a$ 处 ()
A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a)\neq 0$ B. $f(x)$ 取得极大值
C. $f(x)$ 取得极小值 D. $f(x)$ 的导数不存在
5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 且 $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处切线的斜率为 ()
A. 2 B. -2 B. 1 D. -1
6. 在区间 (a, b) 内, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 的图像在 (a, b) 内是 ()
A. 单增且凸 B. 单减且凸 B. 单增且凹 D. 单减且凹

二、 解答题

1. 求极限 $\lim_{x\rightarrow\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

2. 设 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$, 求 dy .

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\cot x - \frac{1}{x})$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$, 求 $y'(0)$.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

6. 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 < xe^x$.

7. 求函数 $f(x) = x + 2\cos x$ 的最大值, 其中 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + b & x \leq 0 \\ \sin ax & x > 0 \end{cases}$, 问 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导? 并求 $f'(x)$.

9. 设 $f(x) = \frac{x^2}{2(x+1)^2}$, 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的单调区间和极值. (2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线方程.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上三阶可导, 且 $f(-1)=0$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, 证明: 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\eta) \geq 3$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: 在 $[0, 1]$ 存在两点 x_1, x_2 , 使得 $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

2017 年高数上期中试题

一、 填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2xe^x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 设 $y = (x + e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ b(1-x^2) & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. 已知 $(1, 2)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、 选择题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1 + 2\sin x)$ 与下列哪个表达式是等价无穷小 ()
 A. $1 + 2\sin x$ B. x C. $2x^2$ D. $2x$
2. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ()
 A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续 C. 连续 D. 以上结论都不成立
3. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ ()
 A. 不可导 B. 可导且 $f'(0) \neq 0$ C. 取得极大值 D. 取得极小值
4. 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ()
 A. $(1, 0)$ B. $(2, 0)$ C. $(3, 0)$ D. $(4, 0)$

三、 解答题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x \tan x}.$

2. 设 $y = \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, 求 y' .

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{1 - \cos x}$.

4. 设 $y^x = e^{x+y}$, 求 dy .

5. 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t = \frac{\pi}{2}}$.

6. 求曲线 $y = x^4(12 \ln x - 7)$ 的凹凸区间及拐点.

7. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x)}{2} & x \leq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}x) & \\ \sin \frac{\pi}{x^2-4} & x > 0 \end{cases}$ 的连续性, 并确定其间断点类型.

8. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$.
- (2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

2016 年高数上期中试题

一、 填空题

1. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+2}, & x \geq 0 \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 曲线 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ 确定, 则 $y = y(x)$ 的凸区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x}) (x > 0)$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、 选择题

1. 设 $f(x), \varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数且 $f(x) \neq 0, \varphi(x)$ 有间断点, 则 ()

- A. $\varphi(f(x))$ 必有间断点 B. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点
C. $f(\varphi(x))$ 必有间断点 D. $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则过曲线 $y = f(x)$ 上点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 ()

- A. 2 B. -1 C. 1 D. -2

3. 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在点 $x = a$ 处 ()

- A. $f'(a)$ 存在, 且 $f'(a) \neq 0$ B. $f(x)$ 取得极大值
C. $f(x)$ 取得极小值 D. $f(x)$ 的导数不存在

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

- A. 极限不存在 B. 极限存在, 但不连续
C. 连续, 但不可导 D. 可导

5. 下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $f''(x_0)=0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- B. 若 $f'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值
- C. 若 $f(x)$ 可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0)=0$
- D. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值, 则最大值一定是 $f(x)$ 在 (a, b) 内的极大值

三、 计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$.

2. 设 $y = \tan 2x + 2^{\sin x}$, 求 $dy \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

3. 设函数 $y = y(x)$ 由 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 求 $y''(0)$.

4. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x)}{\cos \frac{\pi}{2}x}, & x < 0 \\ \sin \frac{1}{x^2-4}, & x \geq 0 \end{cases}$ 的连续性, 并确定其间断点的类型.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$.
(1) 求 $f'(x)$. (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性.

6. 设 $f(x) = \frac{x^2}{2(x+1)^2}$, 求: (1) 函数 $f(x)$ 的单调区间和极值. (2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上三阶可导, 且 $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使 $f'''(\xi) \geq 3$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 试证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使 $e^{\xi-\eta}(f(\eta) - f'(\eta)) = 1$.

2015 年高数上期中试题

一、 填空题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} a+bx^2 & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则常数 a 与 b 应满足_____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^x - 1}{x \sin x} =$ _____.

3. 曲线 $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ ($x \neq -1$) 的斜渐近线方程为_____.

4. 函数 $y = xe^{-x}$ 的凸区间是_____.

5. 若 $f(x) = \frac{e^x - a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$, 则 $a =$ _____.

二、 选择题

1. 设 $f(x), \varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则 ()

A. $f(\varphi(x))$ 必有间断点

B. $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点

C. $\varphi(f(x))$ 必有间断点

D. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

2. 设函数 $f(x)$ 可导且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则过曲线 $y = f(x)$ 上点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则 $f^{(n)}(x) = ()$, ($n > 2$)

A. $[f(x)]^{2n}$

B. $(n!)[f(x)]^{2n}$

C. $(n!)[f(x)]^{n+1}$

D. $n[f(x)]^{n+1}$

4. 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导点的个数是 ()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

5. 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在点 $x=a$ 处 ()

A. $f(x)$ 取得极小值

B. $f(x)$ 的导数不存在

C. $f'(a)$ 存在, 且 $f'(a) \neq 0$

D. $f(x)$ 取得极大值

三、 计算题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{1}{n})^{n^2}$.

2. 设 $y = (\arcsin \frac{1}{x})^3$. 求 y' .

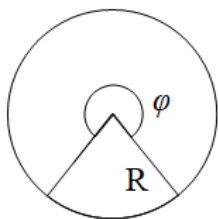
3. 求曲线 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

4. 求由方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

5. 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$.

①求 $\varphi(x)$ 及其定义域; ②求 $\varphi'(-1)$.

6. 如图, 从半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗, 留下的扇形的中心角 φ 取多大时做成的漏斗的容积最大?



7. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $g''(x) \neq 0, f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$. (2) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上二阶可导, $f(a) > 0, f'(a) < 0, x > a$ 时 $f''(x) < 0$, 证明: $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 上有且只有一个实根.

2014 年高数上期中试题

一、填空题

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} + n - \sqrt{n^2 - n}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \sin x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 的间断点是 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设函数 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, 则 $y^{(2014)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知函数 $f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta f = (\arctan x^2) \Delta x + o(\Delta x)$, 又 $y = f(2x-1)$, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题

1. 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则 ()

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

C. $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的极限至少有一个存在

D. $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的极限可能都不存在

2. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 ()

A. $f(x)$ 存在有限极限

B. $f(x)$ 无极限, 但有界

C. $f(x)$ 无界, 但不是无穷大

D. $f(x)$ 是无穷大

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\ln(\cos x + 2x^2)$ 等价无穷小的是 ()

A. $\frac{x^2}{2}$

B. x^2

C. $\frac{3x^2}{2}$

D. $2x^2$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内可导, 且 $f(0)=0, f'(0)>0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 ()

A. 对 $\forall x \in (0, \delta)$ 有 $f'(x) > 0$

B. 对 $\forall x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > 0$

C. 对 $\forall x \in (-\delta, 0)$ 有 $f'(x) > 0$

D. 对 $\forall x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > 0$

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且对于 $\forall x \in \mathbb{R}$ 满足 $x^2 f''(x) + x^2 (f'(x))^3 = 1 - \cos x, f'(0) = 0$ 则 ()

A. 必 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. $x=0$ 必是 $f(x)$ 的极大值点

C. $(0, f(0))$ 必是曲线的拐点

D. 不能判断原点是 $f(x)$ 的极值点还是拐点

三、判断题（命题正确需给出证明，命题错误需举出反例）

1. 设 $a < b$ 若 $\forall \delta \in (0, \frac{b-a}{2})$, 有 f 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上一致连续, 则 f 在 (a, b) 上一致连续.
2. 设可微函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸函数, 则函数 f 的图形必位于曲线过 $(a, f(a))$ 切线的上方, 即对任意 $x \in (a, b]$ 有 $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

四、计算题

1. 设 $x_1 = \frac{1}{2L}, L > 0, x_{n+1} = x_n(2 - Lx_n), n = 1, 2, \dots$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
2. 设方程 $e^{xy} + \sin x - y = 0$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.
3. 试确定常数 a, b , 使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos 2x + b \cos 4x}{x^4}$ 存在, 并求出极限值.

五、证明题

1. 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明:

(1) $\exists \xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

(2) 对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 必 $\exists \eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(x)$ 的每一个零点都是简单零点 (简单零点: 若 $f(x_0) = 0$, 则 $f'(x_0) \neq 0$), 证明: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点.

2013 年高数上期中试题

一、填空题

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 则 $a =$ _____.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} (1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ b+1, & x = 0 \\ \frac{\sin ax}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 当 $a =$ _____, $b =$ _____ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

3. 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}} \sin x}{|x|}$ 的第一类间断点 $x =$ _____, 第二类间断点 $x =$ _____.

4. 已知当 $x \rightarrow 0$, $\sin x$ 与 $\ln(1+ax)$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.

5. 设 $y = \log_a [x(\sec x + \tan x)]$, 则 $dy =$ _____.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} =$ _____.

7. 函数 $y = x + 2\cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 _____.

二、计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \sin x}.$

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^x - 1} = A$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} (n \in N_+)$, 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

4. 设 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 说明其导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 试证明 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0,1)$ 内任意一点, 证明: $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域内二阶可导, 且 $f'(0)=0$, 试计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界且可导, 证明: 方程 $f'(x)(1+x^2) = 2xf(x)$ 至少有一个实根.

2012 年高数上期中试题

一、填空题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $y = \cos^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{(x+1)x^2} & x < 0 \\ \frac{x-1}{x^2+x-2} & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 是第一类间断点, $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 是第二类间断点.

4. 要使 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-2x)}{x} & x < 0 \\ a+1 & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 必须 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 无穷小 $f(x) + g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题

1. 设 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \arctan \frac{x}{2} + \arcsin 2x$, 求 $y'(0).$

2. 设 $y = f(\sin x) \cdot \sin[f(x)]$, 其中 $f(x)$ 设可导, 求 $dy.$

3. 已知 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$, 其中 f 为二阶可导, 且 $f''(t) \neq 0$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

4. 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) \geq k > 0, f(0) < 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点.

6. 求 $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{1}{2^x} \sin e^x + [\ln(1+2^x)] \cdot \ln(1+\frac{3}{x})]$.

8. 若火车每小时所耗燃料费用与火车速度的立方成正比, 已知速度为 20km/h 时, 每小时的燃料费用为 40 元。其他费用每小时 200 元, 求最经济的行驶速度.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 讨论导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

10. 求 $\ln x$ 在 $x=3$ 处带有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.
证明: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $ef'(\xi) = 1$.

2011 年高数上期中试题

一、填空题

1. 要使 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-2x)}{x} & x < 0 \\ a+1 & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 必须 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $y = \cos^2(\frac{1-\ln x}{x})$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2(x+1)} & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$ 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点; $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 是 $f(x)$ 的第

二类间断点.

4. 已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(1 + \frac{1}{t})^{2tx}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知函数 $y = (x-5)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}$, 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 为极小值, 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 为极大值.

二、计算题

1. 设 $y = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$, 求 y' .

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x^2+1)}{1-\cos(x)}$.

3. 已知 $\begin{cases} x = f'(t) + 2 - \sin 3 \\ y = tf'(t) - f(t) + 3 \end{cases}$, 其中 f 二阶可导, 且 $f''(t) \neq 0$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设 $f(x)$ 满足方程 $xf''(x) + 3x^2[f'(x)]^2 = 1 - e^x$, 且 $f(x)$ 具有二阶连续导数. 若 $f(x)$ 在 $x = \tau (\tau \neq 0)$ 处取得极值, 问 $f(\tau)$ 必为极大值还是极小值, 并证明你的结论.

5. 已知 $\sin(xy) - \ln \frac{x+1}{y} = 1$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(0) = 1$.

(1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

(2) 求 $f'(x)$.

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

7. 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比, 当速度为 10km/h, 每小时的燃料费为 80 元, 又其他费用每小时需 480 元, 问轮船的速度多大时才能使 20km 航程的总费用最少? 此时每小时的总费用等于多少?

三、证明题

1. 证明: (学习工科数学分析者做第(2)题, 其余做(1))

(1) 当 $x \geq 1$ 时, $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

(2) 设 $0 < x < 1$, 证明 $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 且 $\max_{0 < x < 1} f(x) = 1, \min_{0 < x < 1} f(x) = 0$. 证明: 至少存在一点 $\zeta \in (0,1)$, 使 $f''(\zeta) > 2$.

2010 年高数上期中试题

一、填空题

1. 若 $f(x) = \frac{e^x - a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 曲线 $y = xe^{2x}$ 的拐点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 曲线由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ 确定, 则曲线在 $t=0$ 的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ ($x > 0$) 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. $x=2$ 是函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{2-x}$ 的 ()
 A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()
 A. 极限不存在 B. 极限存在, 但不连续 C. 连续但不可导 D. 可导

3. 在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内是 ()
 A. 单增凸 B. 单减凹 C. 单增凹 D. 单减凸

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -1$, 则在点 $x=a$ 处 ()
 A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$ B. $f(x)$ 取得极大值
 C. $f(x)$ 取得极小值 D. $f(x)$ 的导数不存在

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x})$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\cos x) \ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$.

3. 求函数 $y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 的导数.

4. 设 $y = y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

5. 求函数 $\ln x$ 在 $x=2$ 处带有皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

四、解答题

1. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(a)=0, g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x-a}, & x \neq a \\ A, & x = a \end{cases}$.

(1) 试确定 A 的值, 使 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

(2) 求 $g'(x)$.

(3) 证明: $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

2. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x)=x(x^2-4)$. 假若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式.

(2) 当 k 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

3. 设函数 $f(x), g(x)$ 都在 $[1, 6]$ 上连续, 在 $(1, 6)$ 内可导, 且 $f(1)=5, f(5)=1, f(6)=12$.

求证: 至少存在一个点 $a \in (1, 6)$ 使 $f'(a) + g'(a)[f(a) - 2a] = 2$.