第二节 数量积 向量积 混合积

一 两个向量的数量积

二 两个向量的向量积

三 三个向量的混合积

作业

- 习题3.2(A)

1，3，8，11

13，14，18

一、两向量的数量积

实例　一物体在常力$\vec{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2，以$\vec{s}$表示位移，则力$\vec{F}$所作的功为

$$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta \quad (\text{其中}\theta\text{为}\vec{F}\text{与}\vec{s}\text{的夹角})$$

启示　两向量作这样的运算, 结果是一个数量.

定义　向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**为$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (\text{其中}\theta\text{为}\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{的夹角})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}=\|\vec{b}\|\left(\vec{a}\right)_{\vec{b}}$$

数量积也称为“**点积**”、“**内积**”.

数量积的基本性质

（1）交换律： $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$

（2）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c};$

（3）若 λ 为数：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),$

若 λ、μ 为数：$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}).$

（4）非负性：$\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2\geq 0$，而且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\because \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},\quad \therefore \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$$

$$\because \left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1,$$

$$\therefore \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

数量积的坐标表达式

数量积在几何上的几个应用

（1）求向量的模 $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

（2）求非零向量间的夹角

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

（3）求射影

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{b}\|(\vec{a})_b = \|\vec{a}\|\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}$$

$$\left(\vec{a}\right)_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|},\quad \left(\vec{b}\right)_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}.$$

例 1 已知$\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；（3）$\vec{a}$在$\vec{b}$上的射影.

解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3)

$$\therefore (\vec{a})_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=-3.$$

例 2 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证 $[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=(\vec{c}\cdot\vec{b})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=0$$

$$\therefore[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

二、两向量的向量积

定义

向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积**为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)

$\vec{c}$的方向既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$，指向符合右手系.

向量积也称为“叉积”、“外积”.

向量积的基本性质

（1） $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

（2）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

（3）若 λ 为数：$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$

关于向量积的说明：

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.$ $(\because \theta=0\Rightarrow \sin\theta=0)$

(2) $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$ $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\because\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

$$\because\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

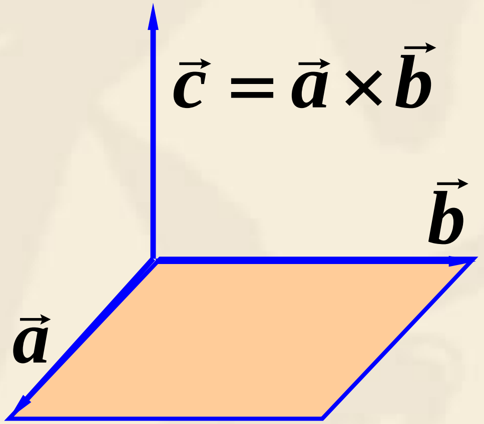
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

计算公式

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

向量积在几何上的几个应用

（1）求平行四边形的面积



$\|\vec{a}\times\vec{b}\|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.

（2）判定向量共线

$$\vec{a}\,//\,\vec{b} \Longleftrightarrow \sin(\vec{a},\vec{b})=0$$

$$\Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}. \quad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$$

$$\Longleftrightarrow a_y b_z - a_z b_y = a_z b_x - a_x b_z = a_x b_y - a_y b_x = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_x : b_x = a_y : b_y = a_z : b_z \Longleftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}$$

（3）求与两个不共线的向量都垂直的向量

例 3 求与 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ 都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

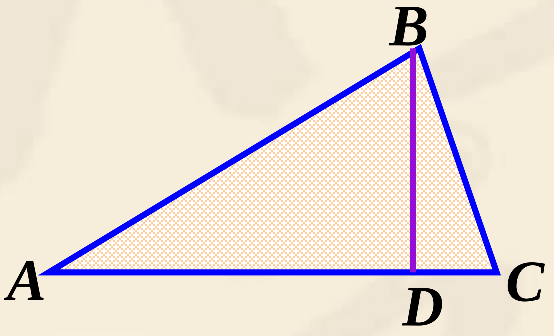
$$\because \|\vec{c}\|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{c^0}=\pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例 4　在顶点为 $A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD.

解　$\overrightarrow{AC}=\{0,4,-3\}$

$\overrightarrow{AB}=\{4,-5,0\}$



三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$$

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD| \qquad \therefore |BD|=5.$$

例 5 设向量$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$两两垂直，符合右手规则，且 $|\vec{m}| = 4$，$|\vec{n}| = 2$，$|\vec{p}| = 3$，计算$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

解 $|\vec{m}\times\vec{n}| = |\vec{m}||\vec{n}|\sin(\widehat{\vec{m},\vec{n}})$

$= 4\times2\times1 = 8,$

依题意知$\vec{m}\times\vec{n}$与$\vec{p}$同向,

$\therefore \theta = (\widehat{\vec{m}\times\vec{n},\vec{p}}) = 0$

$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p} = |\vec{m}\times\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cos\theta = 8\cdot3 = 24.$

三、向量的混合积

定义 设已知三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，数量$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$称为这三个向量的**混合积**，记为$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$,

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

混合积的坐标表达式

混合积的性质

⑴ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

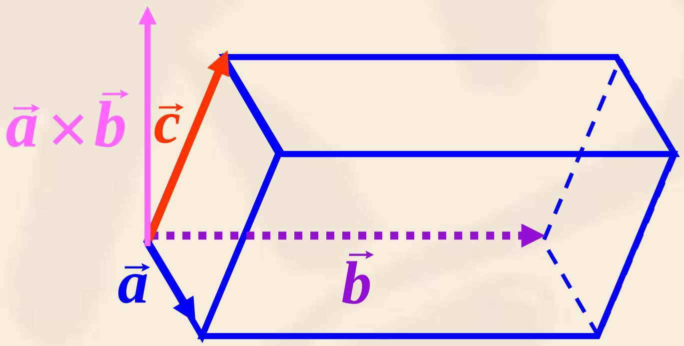
即 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

(2) 互换混合积中任意两个向量的位置，则混合积变号

例如 $[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

向量混合积的几何意义

向量的混合积 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.



三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0.$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

例6 已知$[\vec a\ \vec b\ \vec c]=2$，

计算$[(\vec a+\vec b)\times(\vec b+\vec c)]\cdot(\vec c+\vec a)$.

解 $[(\vec a+\vec b)\times(\vec b+\vec c)]\cdot(\vec c+\vec a)$

$$=[\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec b+\vec b\times\vec c]\cdot(\vec c+\vec a)$$

$$=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c+\underbrace{(\vec a\times\vec c)\cdot\vec c}_{=0}+\vec 0\cdot\vec c+\underbrace{(\vec b\times\vec c)\cdot\vec c}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec a\times\vec b)\cdot\vec a}_{=0}+\underbrace{(\vec a\times\vec c)\cdot\vec a}_{=0}+\vec 0\cdot\vec a+\underbrace{(\vec b\times\vec c)\cdot\vec a}_{=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c}$$

$$=2(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=2[\vec a\vec b\vec c]=4.$$

例 7　已知空间内不在一平面上的四点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$、$D(x_4,y_4,z_4)$，求四面体的体积.

解　由立体几何知，四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的六分之一.

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$$

$$\because\ \overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\}$$

$$\overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1\}$$

$$\therefore V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择必须和行列式的符号一致.

四、小结

向量的数量积（结果是一个数量）

向量的向量积（结果是一个向量）

向量的混合积（结果是一个数量）

（注意共线、共面的条件）

思考题

已知向量$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，

证明$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

思考题解答

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\sin^2(\vec{a},\hat{}\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2[1-\cos^2(\vec{a},\hat{}\vec{b})]$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a},\hat{}\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$