第二章 矩阵(Matrix)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{3n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第二节 矩阵及其运算

一　矩阵的概念

二　矩阵的代数运算

三　矩阵的转置

四　方阵的行列式

五　伴随矩阵

一、矩阵的概念

1、矩阵的引入

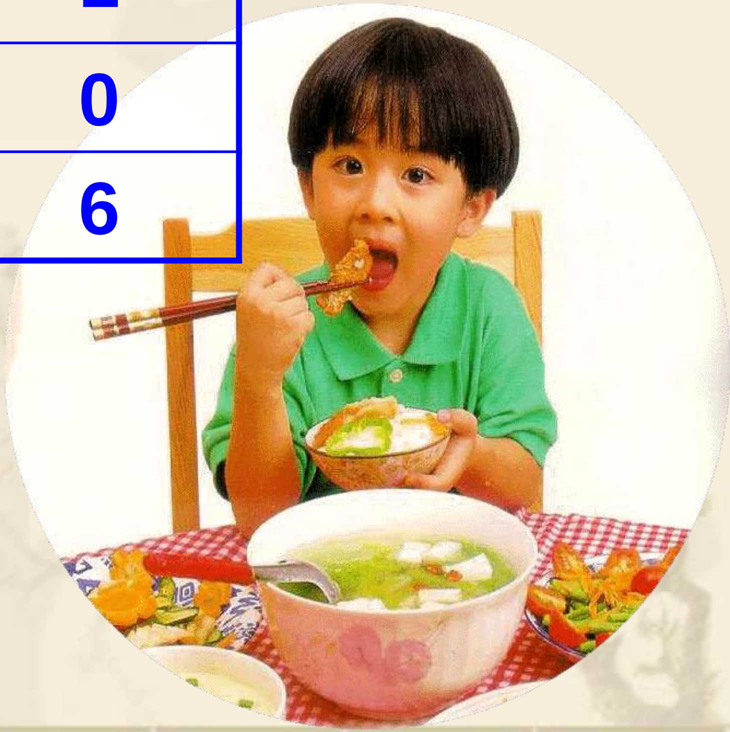
（1）某班级同学早餐情况

姓名	馒头	包子	鸡蛋	稀饭
周**	4	2	2	1
张**	0	0	0	0
陈**	4	9	8	6

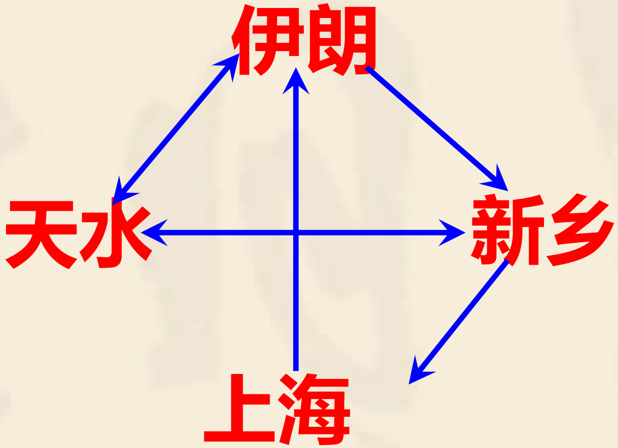
为了方便，常用下面的**数表表示**

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

这个数表反映了学生的早餐情况.



（2）某航空公司在*A*，*B*，*C*，*D*四城市之间的航线图



为了方便，常用下面的数表表示　其中√ 表示有航班.

为了便于计算,把表中的√ 改成1,空白地方填上0,就得到一个数表:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{到站} \\
 & \begin{array}{cccc} \text{天水} & \text{伊朗} & \text{新乡} & \text{上海} \end{array} \\
\text{发站}\;\begin{array}{c} \text{天水} \\ \text{伊朗} \\ \text{新乡} \\ \text{上海} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

(3）某班4个同学两次考试的成绩

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix}\text{数} & \text{政} & \text{英}\end{matrix} \\
\begin{matrix}\text{张}\\ \text{李}\\ \text{王}\\ \text{陶}\end{matrix} & A=\begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
B=\begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}
$$

（4）线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

的解取决于 $\begin{cases} \text{系数} \quad a_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n(m)\right), \\ \text{常数项} \quad b_i\left(i=1,2,\cdots,m\right) \end{cases}$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2、矩阵的定义

定义 由数域 F 中的 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m;$ $j=1,2,\cdots,n$）排成的 m行 列的**矩形数表**，称为数域 F 中的一个 **$m\times n$ 矩阵.**

记作：$A=(a_{ij})_{m\times n}$　　$A_{m\times n}$　　(a_{ij})

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

元素

行标

列标

a_{ij} 称为矩阵 A 的 (i,j) 元素.

注：（1）元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，

元素是复数的矩阵称为**复矩阵**.

（2）只有一行的矩阵称为**行矩阵**，

只有一列的矩阵称为**列矩阵**.

（3）行数与列数相等的矩阵称为 **n 阶方阵**，

（4）$|A|$ 称为**方阵的行列式**.

（5）若 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{s\times t}$ ，且 $m=s, n=t$，

称**两矩阵同型**.

（6）若 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$ ，且 $a_{ij}=b_{ij}$ ，

称**两矩阵相等**.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ 2×4实矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ 3×1矩阵
(列矩阵)

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ 3×3
复矩阵
3 阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

两矩阵同型

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

1×4 矩阵（行矩阵)

$$\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

1×1矩阵（1 阶方阵)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

两矩阵相等

例如：

$$\begin{bmatrix} a+b & 3 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ c & 8 \end{bmatrix}$$

问： a, b, c, d各等于多少？

$$\left.\begin{aligned} a+b&=1 \\ a-b&=3 \end{aligned}\right\} \quad a=2,\ b=-1$$

$$c=0$$

$$d=8$$

3、几种特殊的矩阵

（1）零矩阵

$m\times n$ 个元素全为零的矩阵称为**零矩阵**.

记作 $O_{m\times n}$ 或 O.

注意 不同的零矩阵未必相等的.

（2）对角矩阵

主对角线以外的所有元素全为零的n阶方阵称为**对角矩阵**.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

不全为0

记作 $\Lambda = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

（3）单位矩阵

主对角线上的所有元素全为1的对角阵称为**单位阵**.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

记作 E或I

(4) 数量矩阵

主对角线上的所有元素全为 λ的对角阵称为**数量阵**.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & O \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}$$

全为λ

记作 λE.

(5) 三角矩阵

形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的矩阵称为**上三角矩阵**.

形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的矩阵称为**下三角矩阵**.

上三角矩阵与下三角矩阵统称为**三角阵**.

记作 $tria(A)$.

(6) 负矩阵

若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，则称 $\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

为 A 的负矩阵. 记作 $-A$.

二、矩阵的代数运算

1、矩阵的加法

（1）定义　若 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$,

规定 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

注意:只有**同型矩阵**才能进行**加法**运算.

（2）运算规律（设 A B C O 均是同型矩阵）

（1）$A+B=B+A$（交换律）

（2）$(A+B)+C=A+(B+C)$（结合律）

（3）$A+O=A$　　（4）$A+(-A)=O$

（5）$A-B=A+(-B)$（减法）

两次考试成绩单：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{数} & \text{政} & \text{英} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{张} \\ \text{李} \\ \text{王} \\ \text{陶} \end{array} & A=\begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{bmatrix} 9 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

问：两次考试各科总成绩 ？

$$\begin{bmatrix} 10+9 & 9+9 & 8+8 \\ 9+9 & 10+10 & 8+9 \\ 8+8 & 9+9 & 10+7 \\ 9+7 & 8+8 & 10+10 \end{bmatrix} = A+B$$

2、数乘矩阵

（1）定义 若 $A=(a_{ij})_{m\times n}, k\in F$,

规定 $kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}$

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots\cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots\cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots\cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}=Ak$$

(2) 运算规律（设 A, B 均是 $m\times n$ 矩阵，$\lambda,\mu\in F$）

1) $1A=A$

2) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

5) $0A=O$

6) $\lambda O=O$

注意: 1) 数乘矩阵是数 λ 去乘 A 中的每一个元素.

2) 若 $\lambda A=O$ 则

$$\lambda=0 \quad .or. \quad A=O \quad .or. \quad \lambda=0 .and. A=O$$

矩阵的**加法**与**数乘**运算统称为矩阵的**线性运算**.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{数} & \text{政} & \text{英} \\ \text{张} & & & & \\ \text{李} & A= & \multicolumn{3}{c}{\multirow{4}{*}{}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}\text{数} & \text{政} & \text{英}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{张}\\ \text{李}\\ \text{王}\\ \text{陶}\end{array} A= & \begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \quad B=\begin{bmatrix} 9 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

若期末(A)占0.5，期中(B)占0.3，平时(C)占0.2，

问：学期总体平均成绩是多少 ？

$$\begin{pmatrix} 10\text{X}0.5 & 9\text{X}0.5 & 8\text{X}0.5 \\ 9\text{X}0.5 & 10\text{X}0.5 & 8\text{X}0.5 \\ 8\text{X}0.5 & 9\text{X}0.5 & 10\text{X}0.5 \\ 9\text{X}0.5 & 8\text{X}0.5 & 10\text{X}0.5 \end{pmatrix} =0.5A$$

$$\begin{pmatrix} 9\text{X}0.3 & 9\text{X}0.3 & 8\text{X}0.3 \\ 9\text{X}0.3 & 10\text{X}0.3 & 9\text{X}0.3 \\ 8\text{X}0.3 & 9\text{X}0.3 & 7\text{X}0.3 \\ 7\text{X}0.3 & 8\text{X}0.3 & 10\text{X}0.3 \end{pmatrix} =0.3B$$

$$\begin{pmatrix} 7\text{X}0.2 & 9\text{X}0.2 & 8\text{X}0.2 \\ 9\text{X}0.2 & 6\text{X}0.2 & 9\text{X}0.2 \\ 8\text{X}0.2 & 9\text{X}0.2 & 7\text{X}0.2 \\ 8\text{X}0.2 & 8\text{X}0.2 & 8\text{X}0.2 \end{pmatrix} =0.2C$$

学期总体平均成绩为：

$$0.5A+0.3B+0.2C=\begin{pmatrix} 9.1 & 9 & 8 \\ 9 & 9.2 & 8.5 \\ 8 & 9 & 8.5 \\ 8.2 & 8 & 9.6 \end{pmatrix}$$

3、矩阵的乘法

（1）定义 若 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，

规定 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$

（$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{mxr}B_{rxn}=C_{mxn}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

从成绩单A中选一名攻硕,一名出国,

数、政、英三科权值分别为

攻硕:0.5、0.2、0.3;

出国:0.4、0.1、0.5.　　如何选?

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}} \overset{T}{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 10X0.5+9X0.2+8X0.3 & 10X0.4+9X0.1+8X0.5 \\ 9X0.5+10X0.2+8X0.3 & 9X0.4+10X0.1+8X0.5 \\ 8X0.5+9X0.2+10X0.3 & 8X0.4+9X0.1+10X0.5 \\ 9X0.5+8X0.2+10X0.3 & 9X0.4+8X0.1+10X0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{M}{\begin{pmatrix} 9.2 & 8.9 \\ 8.9 & 8.6 \\ 8.8 & 9.1 \\ 9.1 & 9.4 \end{pmatrix}}$$

AT=M

矩阵乘法运算性质：

(1) $0A=0$，$A0=0$ ；

(2) $IA=A$，$AI=A$ ；(单位矩阵的作用)

(3) $(AB)C=A(BC)$ (结合律)

(4) $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$ (分配律)

(5) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

(数与矩阵可交换)

?

(1) 计算: $$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $B=[b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]$,

求AB与BA.

计算:

(1) $$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

(3)已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

求: AB 和 AC

矩阵乘法的特殊性：

(i) 无交换律：$AB \neq BA$

若$AB=BA$，称A与B乘积可换

(ii) 有零因子：

$AB=0$不能推出$A=0$或$B=0$

(iii) 无消去律：

$AB=AC$不能推出$B=C$

特别:

$1\times s$与 $s\times 1$矩阵的乘积 为一阶方阵，即一个数

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{s1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots a_{1s}b_{s1} = \sum a_{1k}b_{k1}$$

$s\times 1$与 $1\times s$矩阵的乘积为 一个 s 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1s} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}b_{11} & a_{s1}b_{12} & \cdots & a_{s1}b_{1s} \end{pmatrix}$$

例1 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix},$

求$M-N, A(M-N), (M-N)A, AM, AN.$

解 $B=M-N=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 12\\ -12 & -12\end{pmatrix}$$

$$AM=\begin{pmatrix}16 & 6\\ -16 & -6\end{pmatrix} \qquad AN=\begin{pmatrix}16 & 6\\ -16 & -6\end{pmatrix}$$

例2 设甲、乙两家公司生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的计算机，月产量（单位：台）为

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
甲	25	20	18
乙	24	16	27

$$A=\begin{pmatrix}25 & 20 & 18\\ 24 & 16 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

如果生产这三种型号的计算机每台的利润(单位：万元 / 台)为

Ⅰ	0.5
Ⅱ	0.2
Ⅲ	0.7

$$B=\begin{pmatrix}0.5\\ 0.2\\ 0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix}$$

那么这两家公司的月利润 (单位：万元) 为多少?

解 依题意

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 25\times 0.5+20\times 0.2+18\times 0.7 \\ 24\times 0.5+16\times 0.2+27\times 0.7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29.1 \\ 34.1 \end{pmatrix}$$

甲公司每月的利润为29.1万元，乙公司的利润为34.1万元.

(2）矩阵相乘的三大特征

1、无交换律　$AB \overset{?}{=} BA$

2、无消去律　$AM = AN \overset{?}{\Longrightarrow} M = N$

3、若　$AB = O \overset{?}{\Longrightarrow} A = O \ .or. \ B = O$

(3）运算规律

(假定所有运算合法，$A\ B$是矩阵，　$\lambda, \mu \in R$

(1）$ABC = A(BC)$　　(2）$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

(3）$A(B+C) = AB + AC$　　$(A+B)C = AC + BC$

(4）$AO = OA = O$　　(5）$EA = AE = A$

注　O 不尽相同，E亦不尽相同.

定义 对于矩阵A, B，若 $AB = BA$，称A与B可交换.

例2 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的所有可交换矩阵.

解 设$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，于是 $AX = XA$

即 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & x_2 \\ x_3 + 2x_4 & x_4 \end{pmatrix}$$

建立方程组得 $x_1 = x_4, x_2 = 0, x_3 \in R$

所以 $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}$ $.or.$ $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b \in R)$

4、方阵的幂

(1) 定义 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}, k\in Z^{+}$,

规定 $\underbrace{AA\cdots A}_{k}=A^{k}$

注： 1、一般矩阵的幂无意义，除了方阵.

2、k只能是正整数.

(2) 运算规律(设 A 均是 n 阶方阵， $k,k_1,k_2\in Z^{+}$)

1) $A^{k_1}\cdot A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$　　2) $(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$

3) $(\lambda A)^{k}=\lambda^{k}A^{k}$　　4) $E^{k}=E$

5) $A^{k}=AA^{k-1}=A^{2}A^{k-2}=\cdots=A^{k-2}A^{2}=A^{k-1}A$

6) $(AB)^{k}=A(BA)^{k-1}B$

7) $(A+\lambda E)^k$

$$= A^k + C_k^1 \lambda A^{k-1} + C_k^2 \lambda^2 A^{k-2} + \cdots + C_k^{k-1} \lambda^{k-1} A + \lambda^k E$$

注：1) $(AB)^k \overset{?}{=} A^k B^k$

2) $(A+B)^2 \overset{?}{=} A^2 + 2AB + B^2$

例3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，计算 $A^2, A^3, \cdots A^k$.

解 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

猜想 $$A^k=\begin{pmatrix}1 & k\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

下用数学归纳法证明

当 $n=$时，等式显然成立.

当 $n=$时，等式成立，即

$$A^k=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & k\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad(k=1,2,\cdots)$$

要证 $n=k$ 时成立，此时有

$$A^{k+1}=AA^k=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (k+1)\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

等式成立.所以猜想正确.

例4 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，计算 A^k.

解 $A=B+\lambda E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$

易见 $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$$B^k=B^3B^{k-3}=OB^{k-3}=O\ \ (k>3)$$

$$A^k=\left(B+\lambda E\right)^k$$

$$=B^k+C_k^1\lambda B^{k-1}+C_k^2\lambda^2B^{k-2}+\cdots+C_k^{k-1}\lambda^{k-1}B+\lambda^kE$$

$$=\lambda^kE+C_k^1\lambda^{k-1}B+C_k^2\lambda^{k-2}B^2+C_k^3\lambda^{k-3}B^3+O+\cdots+O$$

$$=\left(\lambda^k\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\left(k\lambda^{k-1}\right)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$+\left(\frac{k\left(k-1\right)}{2}\lambda^{k-2}\right)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{pmatrix}.$$