第四节 初等变换与初等矩阵

一 消元法

二 矩阵的初等变换

三 初等矩阵

作业

- 习题2.4(A) 3,7,9,11(2)

课前复习

1、矩阵的逆 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ $\quad A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

2、分块对角矩阵

1) $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$;

2) $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$;

3) 若 $A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_s & & \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_s^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$;

4) 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$, 则 $A^n=\begin{pmatrix} A_1^{\,n} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{\,n} \end{pmatrix}$;

3、线性方程组的几种形式

$$Ax=b \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1{}^T \\ \alpha_2{}^T \\ \vdots \\ \alpha_m{}^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = b$$

4、$A_{m\times n}$与 的乘法

$$\Lambda_m A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1{}^T \\ \lambda_2\alpha_2{}^T \\ \vdots \\ \lambda_m\alpha_m{}^T \end{pmatrix} \qquad A_{m\times n}\Lambda_n = (\lambda_1\alpha_1 \quad \cdots \quad \lambda_n\alpha_n)$$

一、消元法解线性方程组

引例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases} \qquad (B)$$

解 $$(B) \xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases} \qquad (B_1)$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2① \\ ④-3①}]{②-③} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & ④ \end{cases} \quad (B_2)$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5② \\ ④-3②}]{②\div 2} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & ② \\ 2x_4 = -6 & ③ \\ x_4 = -3 & ④ \end{cases} \quad (B_3)$$

$$\xrightarrow[④-③]{③\div 2} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & ② \\ x_4 = -3 & ③ \\ 0 = 0 & ④ \end{cases} \quad (B_3)$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad 即\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

总结　1、上述解方程组的方法称为**高斯消元法**.

2、始终把方程组看作一个整体变形，用三种变换

（1）交换方程次序;

（2）以不等于 0 的数乘某个方程;

（3）一个方程的 k 倍加到另一个方程.

3、这三种变换均可逆.

4、方程组的变换可以看成矩阵的变换.

二、矩阵的初等变换（*Elementary Transformation*）

1、定义 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**. *ERT*

（1）互换两行： $r_i \leftrightarrow r_j$

（2）数乘某行： $r_i \times k$

（3）倍加某行： $r_i + kr_j$

同理，把 r 换成 c 可定义矩阵的**初等列变换**. *ECT*

定义 矩阵的初等列变换与初等行变换统称为矩阵的**初等变换**. *ET*

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$; $r_i \times k$ 逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$;

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i - kr_j$.

定义 如果矩阵A经过有限次初等行(列)变换变成矩阵B就称矩阵 A 与 B 行（列）等价，记作 $A \cong B$

矩阵行等价与矩阵列等价统称为**矩阵等价**

等价关系的性质：

（1）自反性： $A \cong A$;

（2）对称性： if $A \cong B, \Rightarrow B \cong A$;

（3）传递性： if $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

三、初等矩阵

(1) 定义 $E \xrightarrow[\text{一次}]{ET} P$，$P$ 就称为**初等矩阵**，或**初等方阵**.

相应的，三种初等变换对应着三种初等方阵.

1）对调

$$P(i,j)=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (r_i) \\ \\ (r_j) \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} (c_i) & (c_j) \end{array} \end{array}$$

$r_i \leftrightarrow r_j$

$c_i \leftrightarrow c_j$

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$

$$P(i,j)A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ (r_i) \\ \\ (r_j) \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$AP(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & (c_i) & & (c_j) & & \phantom{a_{1n}} \end{array}\end{array}$$

2）数乘

$$P\big(i(k)\big)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& k &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ (r_i) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad\qquad (c_i) \end{matrix} & \end{array}$$

kr_i

kc_i

$$P\big(i(k)\big)^{-1}=P\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$P(i(k))A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (r_i) \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$AP\big(i(k)\big)=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ (c_i) \end{array}$$

3）倍加

$$P\big(i(k),j\big)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & k & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (r_i) \\ \\ (r_j) \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad\quad (c_i) & \quad\quad (c_j) \end{matrix} & \end{array}$$

$r_j + kr_i$

或 $c_i + kc_j$

$$P\big(i(k),j\big)^{-1} = P\big(i(-k),j\big)$$

$$AP(i(k),j)=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi}+ka_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad\quad\quad\quad (c_i) & \quad\quad\quad\quad\quad (c_j) \end{matrix} \end{array}$$

$$P(i(k),j)A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (r_i) \\ \\ (r_j) \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

定理2.4.1(初等变换与初等矩阵的关系)

(1)若$A_{m\times n}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B_{m\times n}$,则 $B=p(i,j)A$

(2)若$A_{m\times n}\xrightarrow{kr_i}B_{m\times n}$,则 $B=p(i(k))A$

(3)若$A_{m\times n}\xrightarrow{kr_i+r_j}B_{m\times n}$,则 $B=p(i(k),j)A$

例如 $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

容易验证3种初等矩阵的行列式都不等于零，即初等矩阵都是可逆的，且它们的逆矩阵也都是初等矩阵

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$

$$P\left(i(k)\right)^{-1}=P\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$P\left(i(k),j\right)^{-1}=P\left(i(-k),j\right)$$

行变换对应消元，列变换对应换元

四、行阶梯形矩阵

称满足下列两个条件的矩阵为行阶梯形矩阵：

1）若有零行（元素全为零的行），位于底部；

2）各非零行的首非零元位于前一行首非零元之右.

如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(a)$$

简化行阶梯形矩阵

称满足下列三个条件的矩阵为**简化行阶梯形矩阵**：

1）行阶梯形矩阵

2）各非零行的首非零元均为1.

3）首非零元所在列其它元素均为 0 .

如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理2.4.2

对于任一非零矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 都可通过有限次初等行变换把它化成**阶梯形矩阵**，也可把矩阵化为**简化行阶梯形矩阵**.

定理2.4.3 任一可逆方阵A必可通过若干次初等行变换化成同阶单位矩阵I.

例

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理2.4.4

方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A可以表示成若干个初等矩阵的乘积

证 "$\Rightarrow$" 设A可逆, A可由若干次初等行变换化成I,即$\exists$初等矩阵$p_1, p_2, \cdots p_m$,使

$$p_m \cdots p_2 p_1 A = I$$

或 $$A = (p_m \cdots p_2 p_1)^{-1} = p_1^{-1} p_2^{-1} \cdots p_m^{-1}$$

"$\Leftarrow$" 设A可以写成若干个初等方阵$Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$之积, $A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$,则由逆矩阵的性质知A可逆.

求逆矩阵的初等变换法:

由定理2.4.4知有初等矩阵

$p_1, p_2, \cdots, p_m$, 使得

$$p_m \cdots p_2 p_1 A = I$$

或 $$p_m \cdots p_2 p_1 I = A^{-1}$$

故有:

$$\begin{bmatrix} A \mid I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} \begin{bmatrix} I \mid A^{-1} \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等列变换}} \begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

例 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, 求$A^{-1}$

解 $$[A|I]=\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-2r_2} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

故 $$A^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理2.4.5 设A, B都是$m\times n$矩阵，则

（1）$A_{m\times n}$与$B_{m\times n}$行等价$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵$P_{m\times m}$,使PA=B;

（2）$A_{m\times n}$与$B_{m\times n}$列等价$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵$Q_{n\times n}$,使AQ=B;

（3）$A_{m\times n}$与$B_{m\times n}$等价$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P_{m\times m}$及可逆矩阵$Q_{n\times n}$, 使PAQ=B.

练习 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求$A^{-1}$