第七章　二次曲面与二次型

第一节　曲面与空间曲线

第二节　实二次型

第一节 曲面与空间曲线

作业---习题7.1

1(2)(3)(6), 5, 7,

8(1)(2), 10, 12(1)

一、曲面方程的概念

曲面： 一个动点或一条动曲线按一定条件或规律运动而产生的轨迹。

曲面的实例： 水桶的表面、台灯的罩子面等.

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

一、曲面方程的概念

曲面方程的定义：

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

（1）曲面S上任一点的坐标都满足方程；

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S的方程，而曲面S就叫做方程的图形.

研究空间曲面有<u>两个基本问题</u>:

（1）已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程.

（讨论旋转曲面）

例 1 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点，

根据题意有 $|MM_0| = R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

所求方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

特殊地：球心在原点时方程为 $x^2+y^2+z^2 = R^2$

研究空间曲面有<u>两个基本问题</u>:

（1）已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程.

（讨论旋转曲面）

（2）已知坐标间的关系式，研究曲面形状.

（讨论柱面、二次曲面）

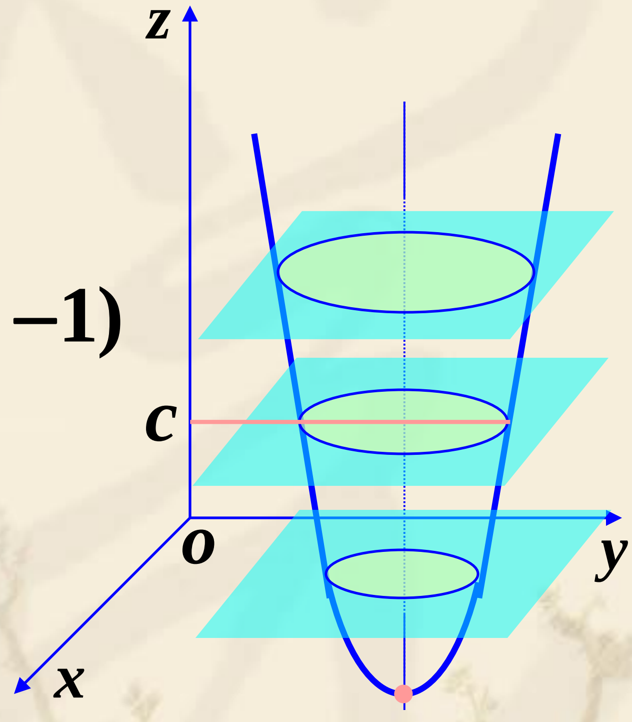
例2 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的？

解 根据题意有 $z \geq -1$

用平面$z=c$去截图形得圆：

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c \geq -1)$$

当平面$z=c$上下移动时，得到一系列圆



圆心在$(1,2,c)$，半径为$\sqrt{1+c}$

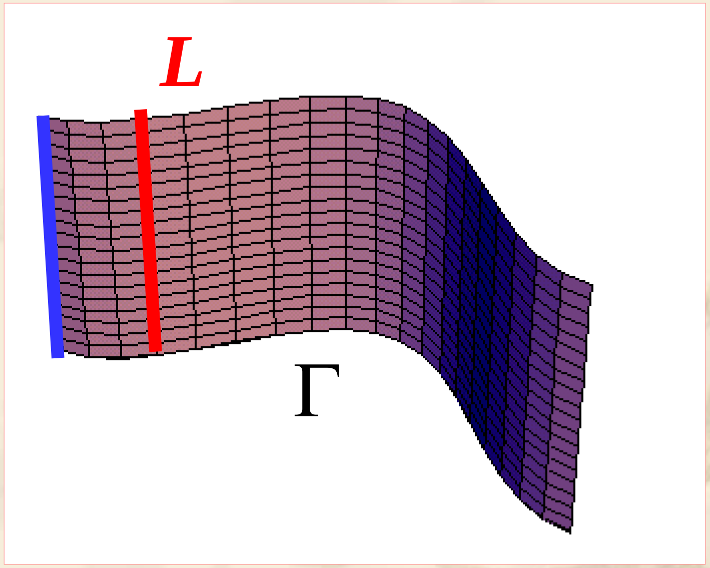
半径随c的增大而增大. 图形上不封顶，下封底.

二、柱面、锥面、旋转面

1、柱面

定义 平行于定直线C并沿定曲线 Γ移动的直线L所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线Γ叫柱面的**准线**，动直线L叫柱面的**母线**.

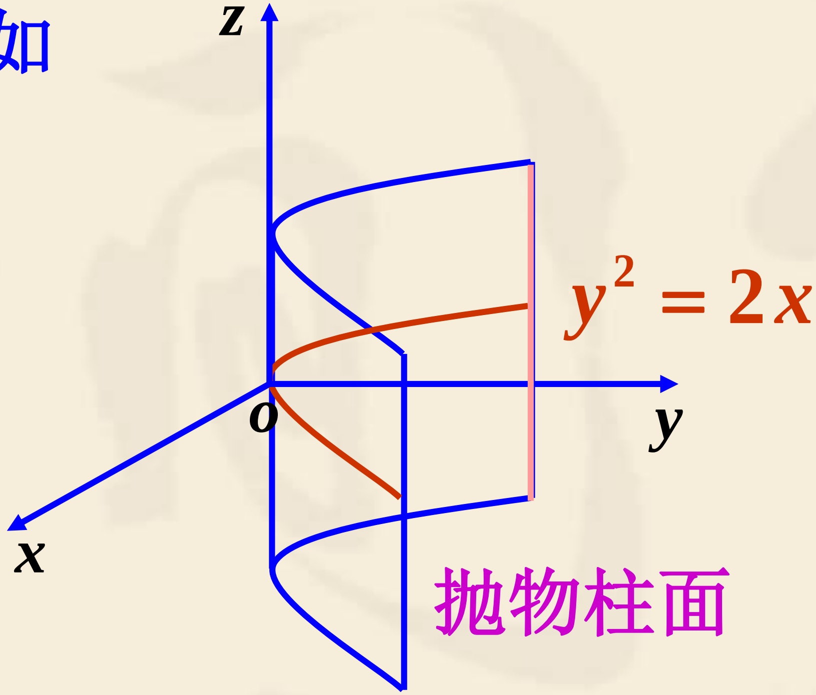


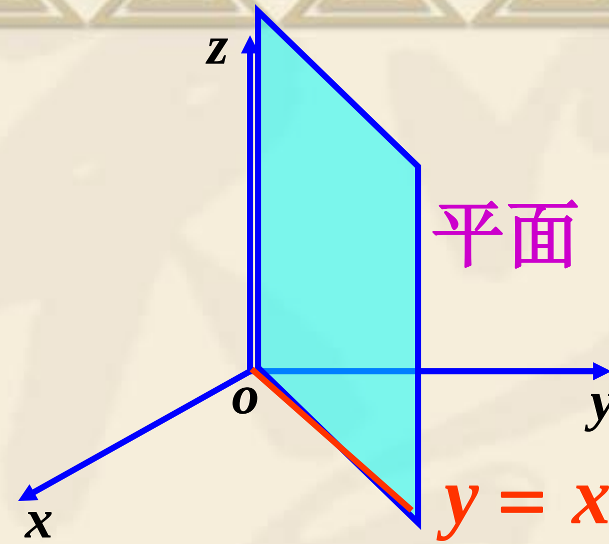
设柱面S的母线平行于z轴，准线为Oxy面的曲线

$$\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

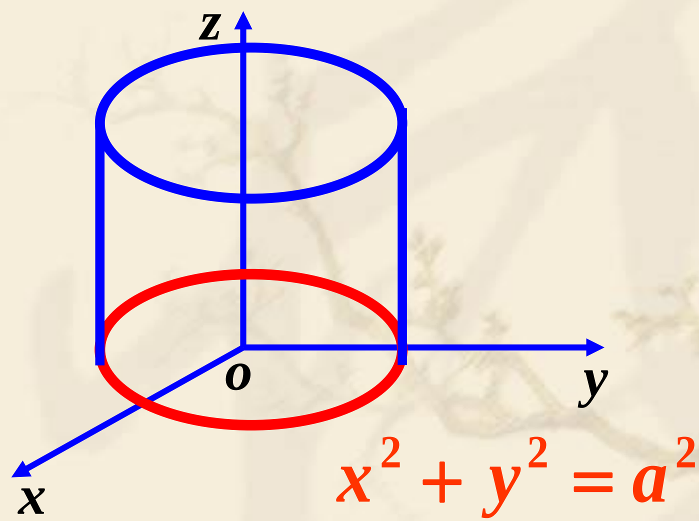
则柱面S的方程为 $f(x,y)=0$

例如





圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$



同理

$g(y,z)=0$ 表示母线平行于x轴的柱面

其准线方程为 $\begin{cases} g(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

$h(z,x)=0$ 表示母线平行于y轴的柱面

其准线方程为 $\begin{cases} g(z,x)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例如 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 母线 // z 轴的双曲柱面

$x^2=2pz$ 母线 // y 轴的抛物柱面

例3 建立母线平行于C: $x=y=z$,且准线为

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$ 的柱面方程

解 设$M(x,y,z)$为柱面上任一点,则由母线的方向向量$\vec{a}=(1,1,1)$,可知过点M的母线的参数方程为

$$X=x+t, Y=y+t, Z=z+t$$

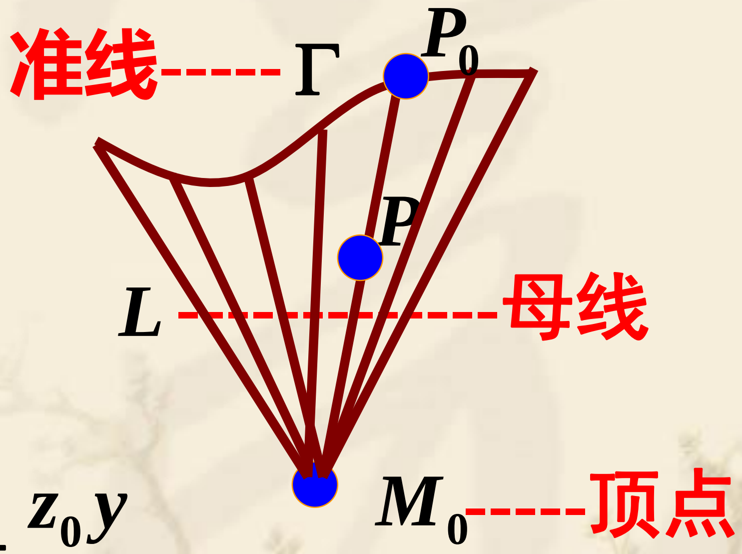
这条母线必与 Γ相交， 故它们的交点的坐标（X,Y,Z）必满足Γ的方程，即有

$$\begin{cases} (x+t)^2+(y+t)^2+(z+t)^2=a^2 \\ (x+t)+(y+t)+(z+t)=0 \end{cases}$$

消去t得 $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=3a^2$ 即为所求

二、锥面

定义 设动直线L沿定曲线Γ移动，移动时L始终通过定点 M_0。这条由动直线L移动所形成的曲面称为锥面.



建立顶点在原点, 准线为

$$\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=z_0 \end{cases}$$

的锥面方程

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0} \Rightarrow x_0=\frac{z_0 x}{z}, y_0=\frac{z_0 y}{z}$$

$$f\left(\frac{z_0 x}{z}, \frac{z_0 y}{z}\right)=0$$ --------锥面方程

例4　求以原点为顶点，准线为椭圆

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$$

的锥面方程

解

$$f\left(\frac{cx}{z},\frac{cy}{z}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{z}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{z}\right)^2=1$$

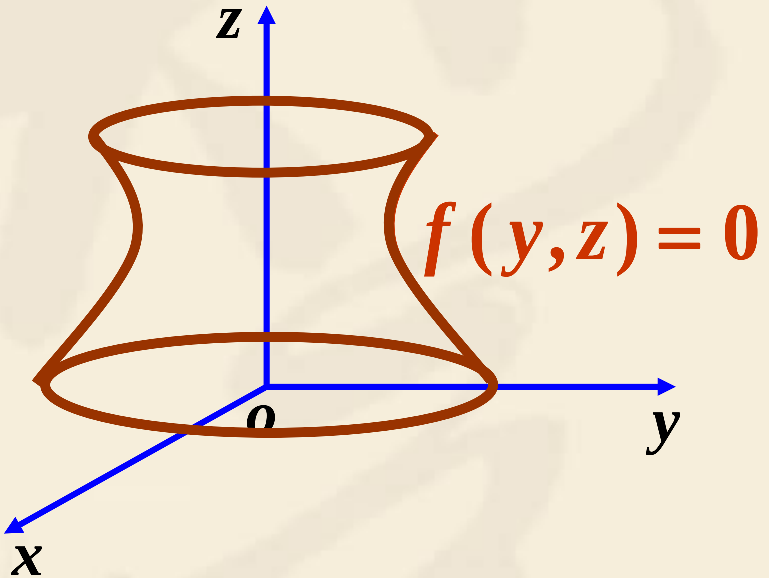
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

---------椭圆锥面

当$a=b$时，　$x^2+y^2=kz^2$　$k=\dfrac{a}{c}$ ---------圆锥面

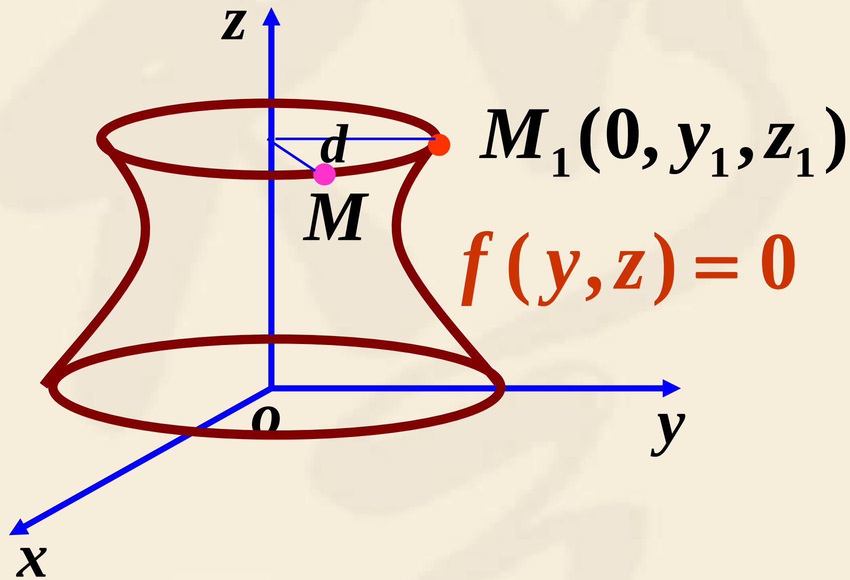
3、旋转面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.



这条平面直线称为旋转曲面的轴.

求 yoz 坐标面上的已知曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面方程.



如图，设 $M(x,y,z)$,

(1) $z=z_1$

（2）点 M 到 z 轴的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

将 $z_1=z,\quad y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 $f(y_1,z_1)=0$

得方程 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0,$

同理：yoz 坐标面上的已知曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周的旋转曲面方程为 $f\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0.$

例5　将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

（1）双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴；

绕 x 轴旋转 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$

绕 z 轴旋转 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转双曲面

（2）椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴和$z$轴；

绕y轴旋转 $$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

绕z轴旋转 $$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

旋转椭球面

（3）抛物线$\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴；

$$x^2+y^2=2pz$$ 旋转抛物面

三、5种典型的二次曲面

二次曲面的定义：

三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.

三元一次方程（平面方程）被称为**一次曲面**.

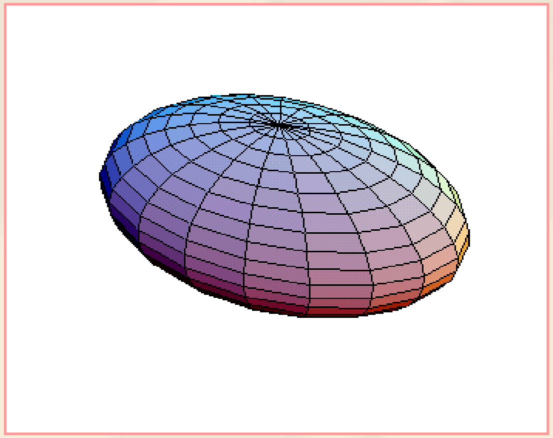
讨论二次曲面形状的**截痕法**：

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌.

以下用截痕法讨论5种特殊的二次曲面.

（1）椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



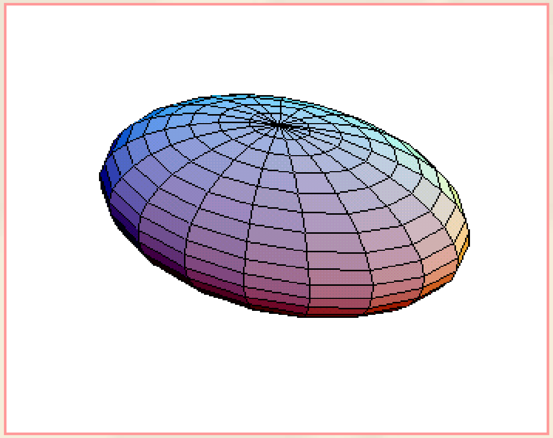
1. 取值范围

2. 对称性

3. 与坐标平面的交线

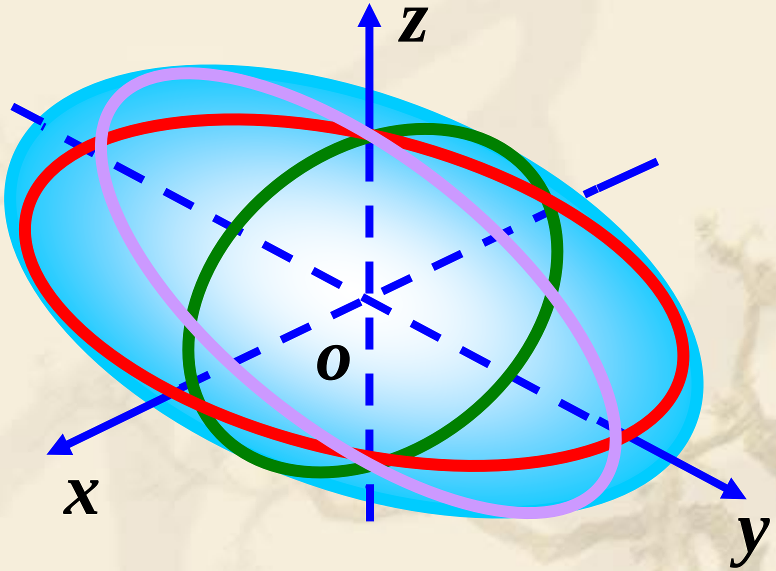
（1）椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



椭球面与三个坐标面的交线：
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ x=0\end{cases}$$



与平行坐标面的平面的交线

椭球面与平面 $z = z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \qquad\qquad |z_1| < c \end{cases}$$

同理与平面 $x = x_1$ 和 $y = y_1$ 的交线也是椭圆.

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

椭球面的几种特殊情况：

(1) $a=b,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **旋转椭球面**

由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

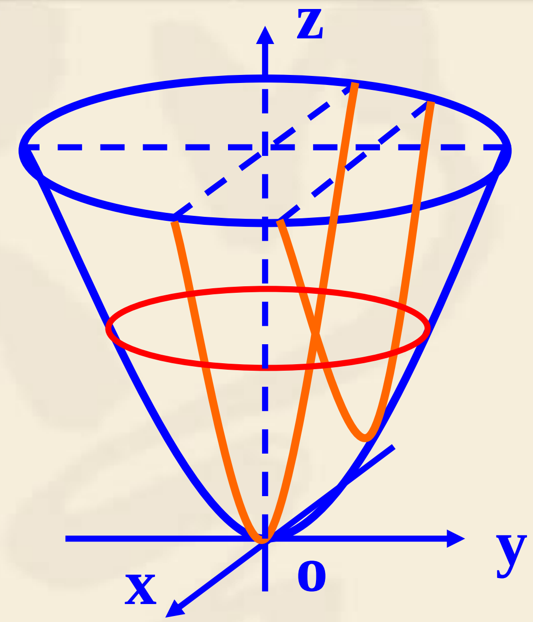
旋转椭球面与椭球面的区别：

与平面 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 的交线为圆.

(2) $a=b=c,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$ **球面**

方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2.$

（2） 椭圆抛物面



$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,\ q>0)$$

1）曲面在 xoy 平面上方，经过坐标原点 $O(0,0,0)$ ----顶点.

2）与平面 $z=z_1\ (z_1>0)$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1\\ z=z_1\end{cases}$$

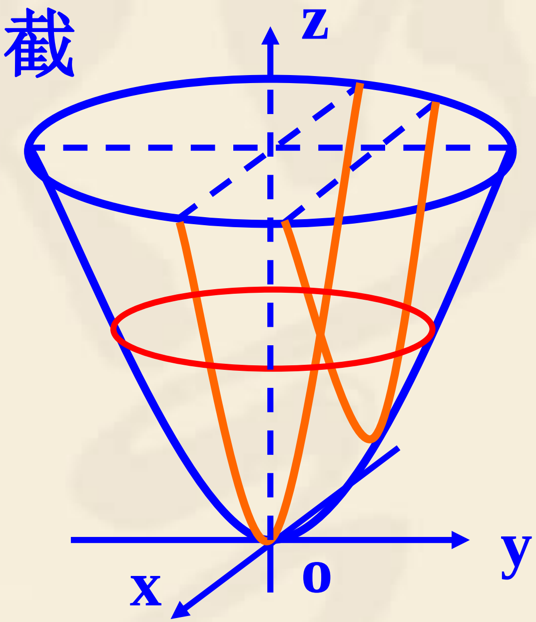
当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,\ q>0)$$

（3）用坐标面 $xoz\ (y=0)$ 与曲面相截

截得抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$



（4）用坐标面 $yoz\ (x=0)$，与曲面相截

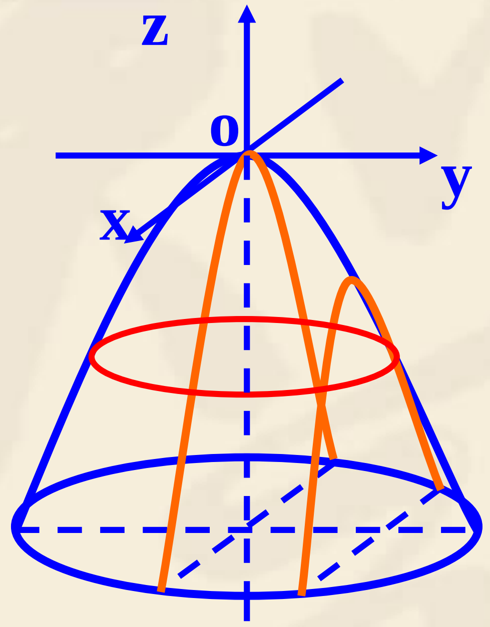
可得抛物线.

$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

说明（1）当$p<0$, $q<0$时，

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$,

的图形如右：



（2）当 $p=q$时，方程变为

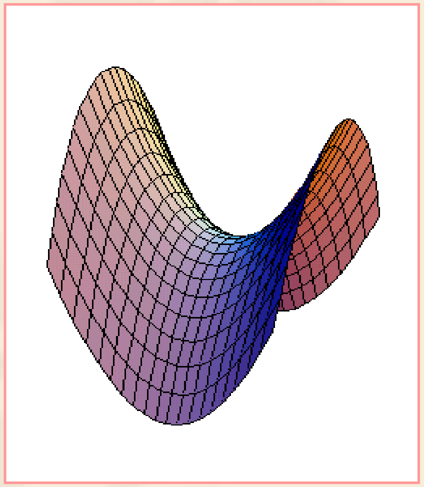
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \qquad (p>0)$$

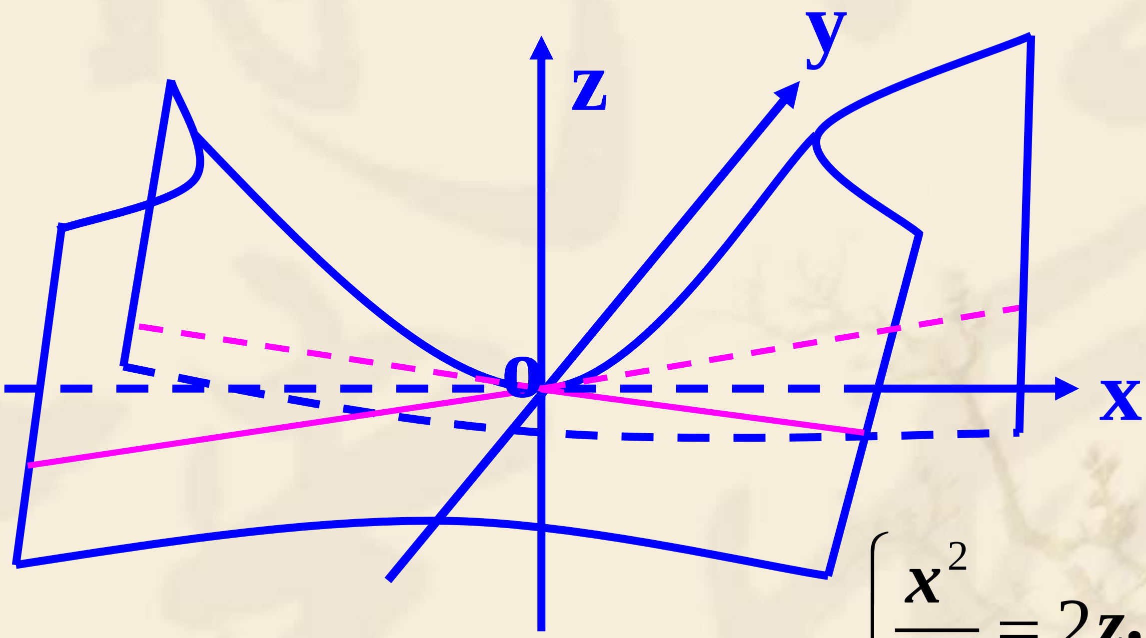
旋转抛物面

（由 xoz面上的抛物线 $x^2=2pz$绕它的z轴旋转而成的）

（3）双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,\ q>0)$$





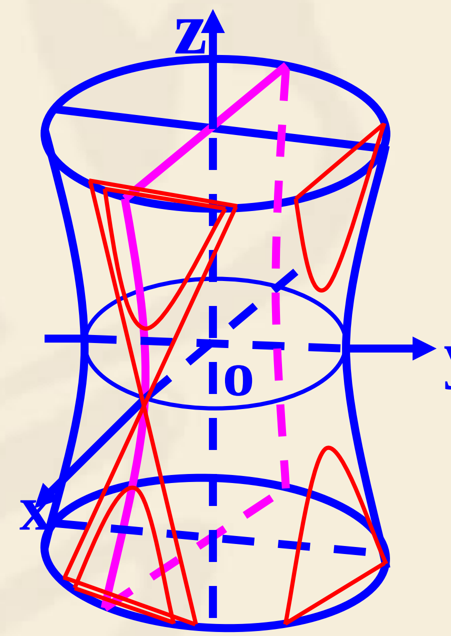
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}=2z,\\ y=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{q}=-2z,\\ x=0\end{cases}$$

1. 与xoy平面的截线是一对在原点相交的直线

2. 与xoz和yoz平面的截线都是剖物线

（4）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



与平面 $z=z_1$ 的交线为椭圆.

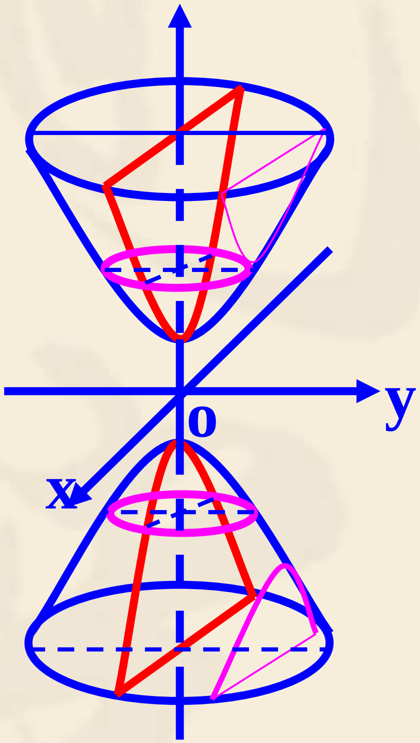
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1^2}{c^2}\\ z=z_1\end{cases}$$

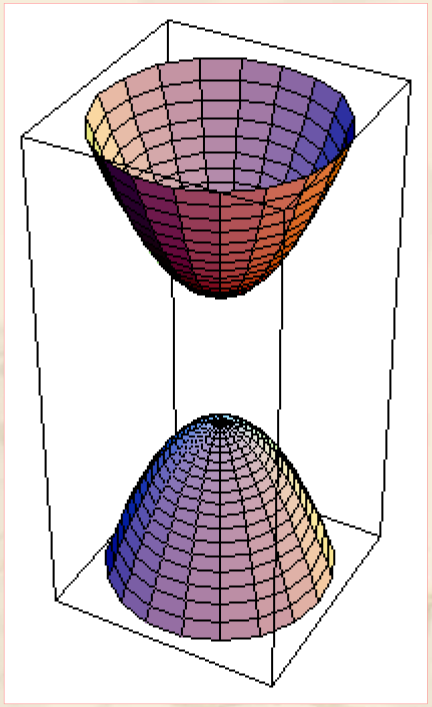
当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.

与坐标面 $xoy(z=0)$ 的交线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$

（5）双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$





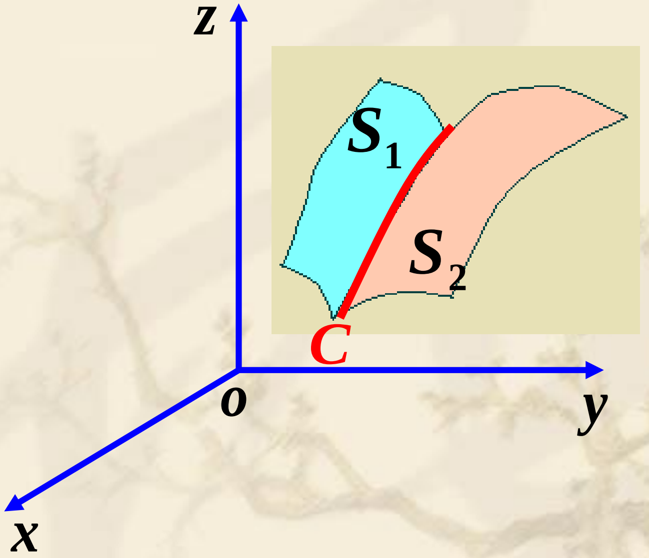
四、空间曲线

1、空间曲线的一般方程

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

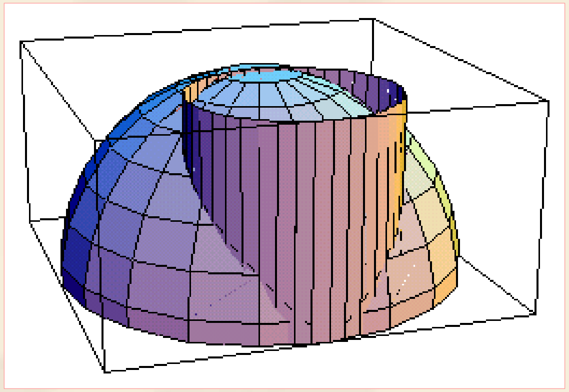
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程



特点： 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.

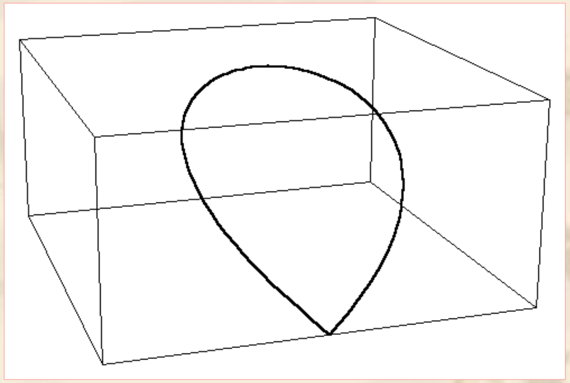
例6 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线?



解 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

上半球面,

$(x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ 圆柱面,



交线如图.

2、空间曲线的参数方程

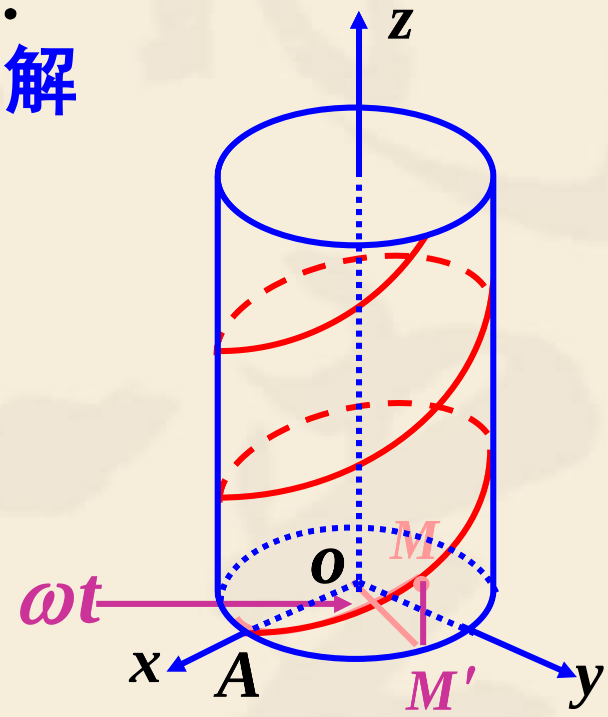
$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}}$$

空间曲线的参数方程

当给定$t = t_1$时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

例 7 如果空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升（其中ω、v都是常数），那么点M构成的图形叫做**螺旋线**．试建立其参数方程．

解



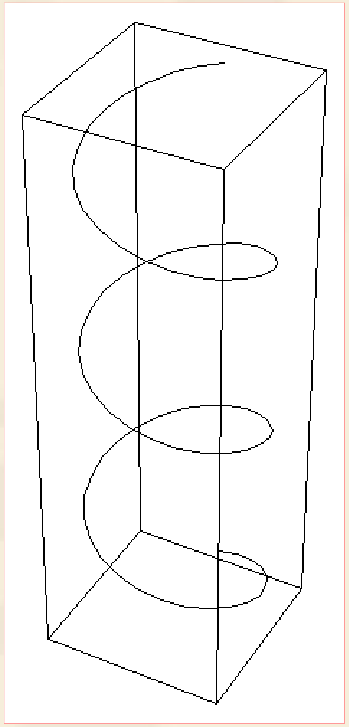
取时间t为参数，动点从A点出发，经过t时间，运动到M点

M在xoy面的投影$M'(x,y,0)$

$$\boxed{\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}}$$

螺旋线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为



$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \qquad (\theta = \omega t,\quad b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质:

上升的高度与转过的角度成正比.

即 $\theta:\quad \theta_0 \to \theta_0 + \alpha,\qquad z:\quad b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$

$\alpha = 2\pi,$ 上升的高度 $\boxed{h = 2b\pi}$ 螺距

五、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线的一般方程: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

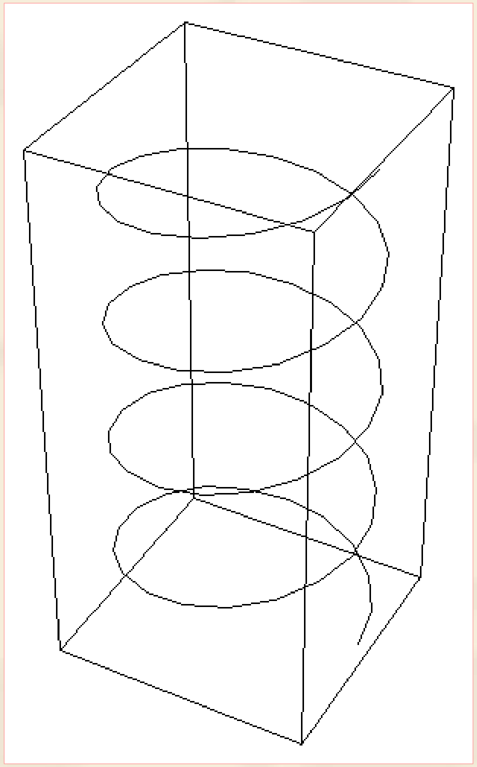
消去变量z后得: $\underline{H(x,y)=0}$

曲线关于xoy的投影柱面

投影柱面的特征:

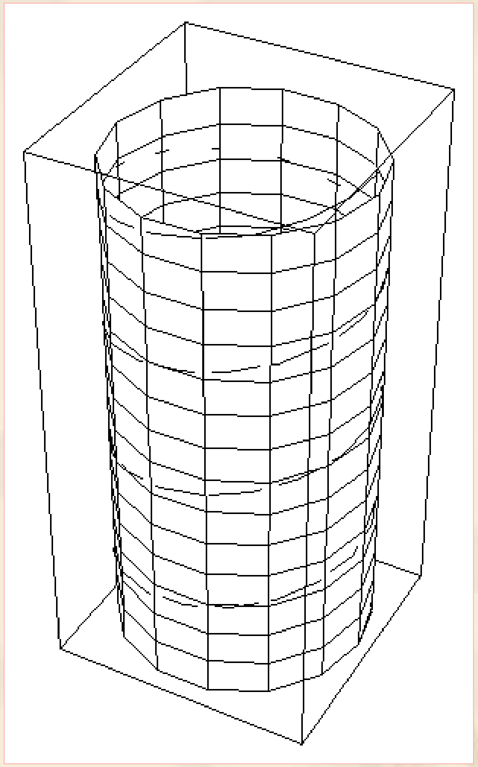
以此空间曲线为准线，垂直于所投影的坐标面.

如图:投影曲线的研究过程.



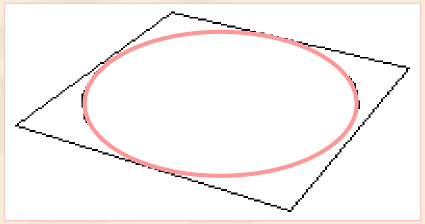
空间曲线

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



投影柱面

$$H(x,y)=0$$



投影曲线

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

空间曲线在xoy面上的投影曲线

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线在其他坐标面上的投影

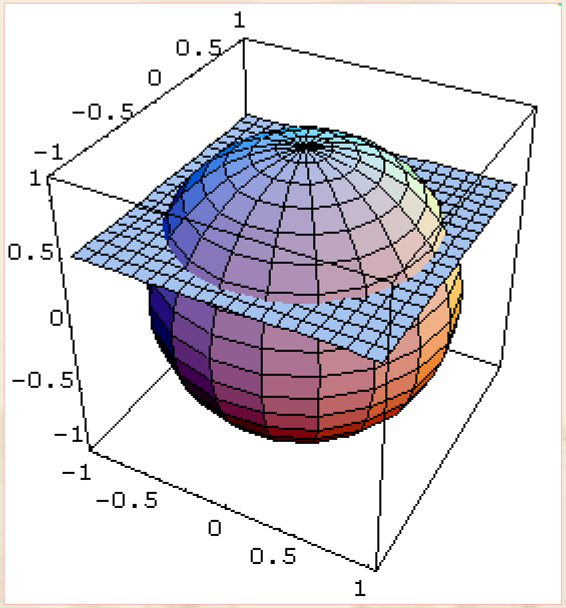
yoz面上的投影曲线，

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

xoz面上的投影曲线，

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

例8 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各坐标面上的投影.



解 （1）消去变量z后得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

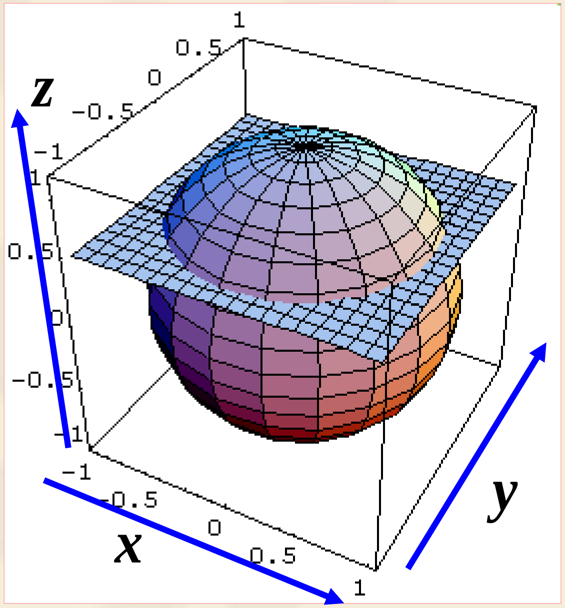
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

（2）因为曲线在平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上，

所以在 xoz 面上的投影为线段.

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \quad |x|\le\frac{\sqrt{3}}{2};$$



（3）同理在 yoz 面上的投影也为线段.

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases} \quad |y|\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例9 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

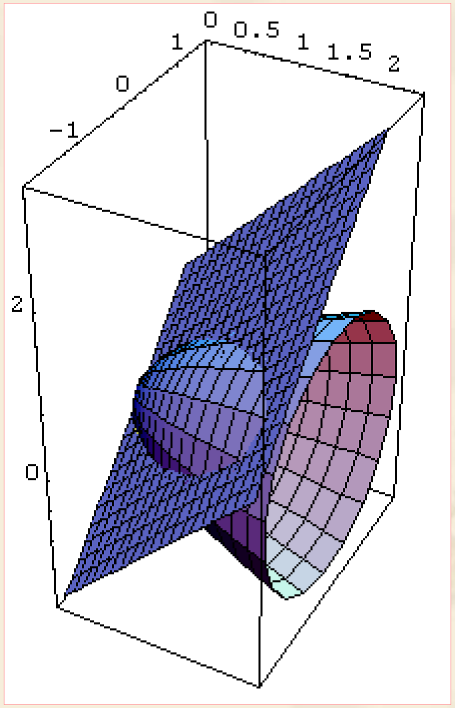
抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴;

$x^2+y^2=2pz$ 旋转抛物面

解 截线方程为

旋转抛物面

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$



如图,

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

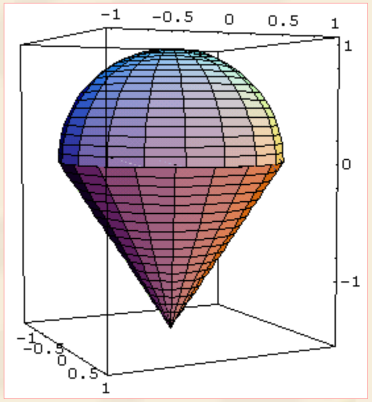
（1）消去z得投影 $\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}$，

（2）消去y得投影 $\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$，

（3）消去x得投影 $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

例6 设一个立体,由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 锥面所围成,求它在 xoy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为



$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}, \end{cases}$$

消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1$,

当$a=b$时, $x^2+y^2=kz^2 \quad k=\dfrac{a}{c}$ --------圆锥面

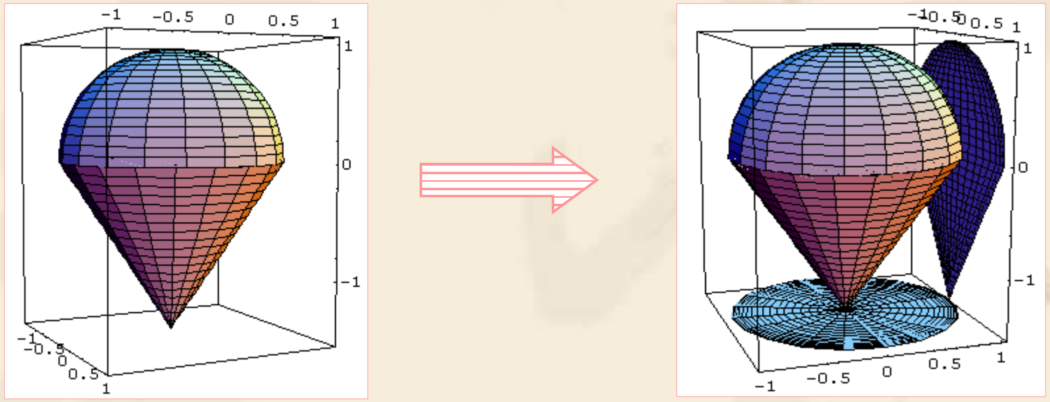
$\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ --------椭圆锥面

则交线 C 在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$ 一个圆,

$\therefore$ 所求立体在 xoy 面上的投影为

$$x^2+y^2\le 1.$$



四、小结

1、曲面方程的概念 $F(x,y,z)=0.$

2、柱面、锥面、旋转曲面的概念及求法.

(母线、准线) (平面曲线、轴)

3、空间曲线的一般方程、参数方程.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

4、空间曲线在坐标面上的投影.

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

思考题

指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形?

(1) $x = 2;$　　(2) $x^2 + y^2 = 4;$

(3) $y = x + 1.$

思考题解答

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=2$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=4$	圆心在$(0,0)$，半径为2的圆	以z轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于z轴的平面

练 习 题

一、 填空题：

1、与 Z 轴和点 $A(1,3,-1)$ 等距离的点的轨迹方程是________________；

2、以点 $O(2,-2,1)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程是__________________；

3、球面：$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$ 的球心是点______________，半径 $R=$ _____________；

4、设曲面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，当 $a=b$ 时，曲面可由 xoz 面上以曲线____________________绕_________轴旋转面成，或由 yoz 面上以曲线___________________绕__________轴旋转面成 ；

5、 若柱面的母线平行于某条坐标轴，则柱面方程的特点是____________；

6、 曲面 $(z-a)^2 = x^2 + y^2$ 是由__________________绕______轴旋转一周所形成的；

7、 方程$x=2$在平面解析几何中表示_______________在空间解析几何中表示__________________________；

8、 方程 $x^2 + y^2 = 4$ 在平面解析几何中表示____________________，在空间解析几何中表示____________________.

二、画出下列各方程所表示的曲面：

1、$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$ ；

2、$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ ；

3、$z=2-x^2$.

练习题答案

一、1、$z^2-2x-6y+2z+11=0$；

2、$x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z=0$；3、$(1,-2,2),4$；

4、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, z, \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, z, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, y,$

$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, y$；　5、不含与该坐标轴同名的变量；

6、yoz 面上的直线　$z=y+a, z$；

7、平行于 y 轴的一条直线, 与 yoz 面面平行的平面；

8、圆心在原点, 半径为 2 的圆, 轴为 z 轴, 半径为 2 的圆柱面.