西安交通大学考试题

成绩	

课　　程　**高等数学 I**

学　　院 ____________

专业班号 ____________　　　考试日期　2020 年 11 月 15 日

姓　　名 ____________　　　学　号 ____________　期中 ✓

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\mathrm{e}^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ____________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)=$ ____________.

3. 设 $y=\left(x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$，则 $y'(0)=$ ____________.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^{y}$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$ ____________.

5. 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\pi/2\right]$ 上的最大值为 ____________.

二、 计算题（每小题 8 分，共 56 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}$.

0

2. 设 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\tan\dfrac{1}{x}$，求 $y'\left(\dfrac{4}{\pi}\right)$.

3. 已知曲线 $\begin{cases} x = f(t) - 1 \\ y = f(e^{2t} - 1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f(0) = 2, f'(0) \neq 0$，求 $t = 0$ 处曲线的切线方程.

4. 设 $F(x) = \lim\limits_{t \to \infty} t^2 \left[f\left(x + \dfrac{\pi}{t} \right) - f(x) \right] \sin \dfrac{x}{t}$，其中 f 二阶可导，求 $F(x), F'(x)$.

5. 当 $x \to 0^+$ 时，$\alpha(x) = \sqrt{a} - \sqrt{a + x^3}\ (a \geq 0)$ 是 x 的几阶无穷小？说明理由.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，证明其导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7. 求曲线 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凹凸区间及拐点.

三、（本题 9 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}, & x\geq 0 \end{cases}$ 的连续性；若有间断点，说明间断点的类型.

四、证明题

1.（本题 8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$, $f''(x)<0$，证明：对任意两点 $x_1>0$ 和 $x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$．

2.（本题 7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶连续导数，且 $f(0)=1$, $f(1)=2$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\left|f^{(3)}(\xi)\right|\geq 24$．

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：高等数学上（中） 课时：______ 考试时间：2020年11月15日

一、$4' \times 5 = 20'$

1. e^2. 2. $\frac{3}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{1}{y\,x(1+\ln y)}dx$. 5. $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

二、1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 3x}{1-\cos(\sin x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}(\sin x)^2}$ (5') $= 18$. (8')

2. $y' = e^{\sin\frac{1}{x}}(\cos\frac{1}{x})(\frac{-1}{x^2})\tan\frac{1}{x} + e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot(\frac{-1}{x^2})$ (6')

$y'(\frac{4}{\pi}) = -\frac{\pi^2}{16}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2+\frac{\sqrt{2}}{2})$ (8')

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(e^{2t}-1)\cdot e^{2t}\cdot 2}{f'(t)}$ (4') $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 2$ (6')

切线方程为：$y-2 = 2(x-1)$ (8')

4. $F(x) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)}{\frac{\pi}{t}}\cdot\pi\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot x = \pi x f'(x)$ (4') (6')

$F'(x) = \pi f'(x) + \pi x f''(x)$ (8')

5. ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+x^3}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^3}{x^3(\sqrt{a}+\sqrt{a+x})} = \frac{-1}{2\sqrt{a}}$ (5')

当$a>0$时，$\alpha(x)$为x的三阶无穷小. (7')

当$a=0$时，$\alpha(x) = -x^{3/2}$为x的$\frac{3}{2}$阶无穷小. (8')

6. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{t^2}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{2te^{t^2}}=0.$ (4')

$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (5') $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t^3}{e^{t^2}}=0$. (7')

∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续 (8')

7. $y'=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$ (2') $y''=144x^2\ln x$ (4')

$x>1$ 时上凹. $0<x<1$ 时下凹 (6') 拐点为 $(1,-7)$ (8')

三. 1. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 不存在. $x=-1$ 为振荡 (第二类) (2') (第一类)

2. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\sin1$. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1$. $x=0$ 为跳跃间断点 (4') (第一类)

3. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{4}{\pi}$ 可去 (6')

4. $\lim\limits_{x\to2k+1}f(x)=\infty$ $k\in N_+$. 无穷间断点 (第二类) (8')

连续区间为 R 中除去上述间断点的所有点 (9')

四. 1. 不妨设 $x_1<x_2$. ∵ $\dfrac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}=f'(\xi_1)$ $x_2<\xi_1<x_1+x_2$. (2')

$\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}=f'(\xi_2)$ (4') $0<\xi_2<x_1$ ∵ $\xi_2<\xi_1$ ∴ $f'(\xi_2)>f'(\xi_1)$ (∵ $f''<0$) (6')

故 $\dfrac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}<\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}$ 即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$ (8')

$x_2<x_2$ 可类似证之!

2. $f(x)-f(\frac{1}{2})=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\dfrac{f'''(\xi)}{6}(x-\frac{1}{2})^3$ (2')

$f(0)=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\frac{1}{8}$ (4') $0<\xi_2<\frac{1}{2}$

$f(1)=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\frac{1}{8}$ (3') $\frac{1}{2}<\xi_1<1$

两式相减得. $1=\frac{1}{48}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$ (5') 取 $f'''(\xi)=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$. (6')

则 $f'''(\xi)\geq24$ (7')