彭·高数

高等数学上期中试题集答案

（2021 版）

彭康书院学业辅导与发展中心

2020 年高数上期中试题答案

一、填空题 ($4' \times 5 = 20'$)

1. e^2　　2. $\frac{3}{2}$　　3. $\frac{1}{3}$　　4. $\frac{dx}{y^y(1+\ln y)}$　　5. $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

解析.

1. 取 ln 对数有. $(1+2xe^x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x}\ln(1+2xe^x))$，由 $\ln(1+x) \sim x$ 等价无穷小有.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2xe^x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(2xe^x) = \lim\limits_{x\to 0}2e^x = 2$，故原式极限为 e^2

2. 由于 $\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}$，其中 $\sum_{k=1}^{n}(n+k) = n^2+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$，

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}\quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}) = \frac{3}{2}$$

由夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right) = \frac{3}{2}$

3. $y'(x) = \frac{2}{3}(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})\frac{1}{\sqrt[3]{x+e^{-\frac{x}{2}}}}$，因此 $y'(0) = \frac{1}{3}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dy^y} = \frac{1}{y^y(1+\ln y)}$，其中 $\frac{dy^y}{dy} = (y^y)' = (e^{y\ln y})' = e^{y\ln y}(1+\ln y) = y^y(1+\ln y)$

所以 $dy = \frac{dx}{y^y(1+\ln y)}$

5. $y(x) = x+2\cos x$，则 $y'(x) = 1-2\sin x$，$y'(\frac{\pi}{6}) = 0$，$x\in[0,\frac{\pi}{6}]$ 时 $y'(x)\ge 0, y(x)$ 单调递增，$x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 时 $y'(x)\le 0, y(x)$ 单调递减，故 $y(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ 为函数 $y(x) = x+2\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值

二、计算题 ($8' \times 7 = 56'$)

1. 由 $x\to 0$ 时 $\tan x \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sin x \sim x$ 等价无穷小代换可得

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}) = \lim_{x\to 0}(\frac{(3x)^2}{1-\cos(\sin x)}) = \lim_{x\to 0}(\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x}) = \lim_{x\to 0}(\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}x^2}) = 18$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}) = 18$（注. 卷印刷有误，应为 $x\to 0$ 而不是 $x\to\infty$）

2. 对 $y(x)$ 求导. $y(x)=e^{\sin\frac{1}{x}}\tan(\frac{1}{x}), y'(x)=\tan\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}e^{\sin\frac{1}{x}})+e^{\sin\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2\cos^2(\frac{1}{x})})$

$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin(\frac{1}{x})}(\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2(\frac{1}{x})})$，将 $\frac{4}{\pi}$ 代入得到 $y'(\frac{4}{\pi})=-\frac{\pi^2}{16}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2+\frac{\sqrt{2}}{2})$

3. $t=0, x=f(0)-1=1, y=f(0)=2$，因此曲线经过点 $(1,2)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2e^{2t}f'(e^{2t}-1)}{f'(t)}, t=0, \frac{dy}{dx}=\frac{2f'(0)}{f'(0)}=2$，故切线的斜率为2

所以切线的方程是 $y=2x$

4. $F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)]\sin\frac{x}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}(t\sin\frac{x}{t})\left\{t[f(x+\frac{\pi}{t}-f(x)]\right\}$，其中

$$\lim_{t\to\infty}t\sin\frac{x}{t}=x\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t}{x}\sin\frac{x}{t}\right]=x \quad \lim_{t\to\infty}t\left[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)\right]=\pi\lim_{t\to\infty}\frac{\left[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)\right]}{\frac{\pi}{t}}=\pi f'(x)$$

所以 $F(x)=\pi xf'(x)$，进一步求导得到 $F'(x)=\pi(f'(x)+xf''(x))$

5. $a>0$, 因为 $\frac{\alpha(x)}{x^3}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+x^3}}{x^3}=\frac{-x^3}{x^3(\sqrt{a}+\sqrt{a+x^3})}=-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x^3}}$ 由于

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\alpha(x)}{x^3}=-\frac{1}{2\sqrt{a}}$ 是一个非 0 实数，故此时为 x 的3阶无穷小

$a=0, \alpha(x)=-x\sqrt{x}, \frac{\alpha(x)}{x\sqrt{x}}=-1$，此时为 x 的 $\frac{3}{2}$ 阶无穷小

因此 $a>0$ 时，$\alpha(x)$ 是 x 的3阶无穷小，$a=0$ 时，$\alpha(x)$ 是 x 的 $\frac{3}{2}$ 阶无穷小

6. 在 $x=0$ 处由定义求导可得 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$

$x\neq 0$ 时，对 $f(x)$ 直接求导有 $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t^3}{e^{t^2}}=0=f'(0)$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

7. $y(x)=x^4(12\ln x-7), y'(x)=16x^3(3\ln x-1), y''(x)=144x^2\ln x$

因为 $y''(1)=0, y(1)=-7$，而 $x\in(0,1), y''(x)<0, x\in(1,+\infty), y''(x)>0$

所以曲线的凸区间是 $(1,+\infty)$，凹区间是 $(0,1)$，拐点是 $(1,-7)$

三、解答题

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ 不存在，$x=-1$ 为第一类间断点

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\sin1$，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1$，$x=0$ 为第一类间断点

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\pi}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{4}{\pi}$，$x=1$ 为可去间断点

$\lim\limits_{x\to2k+1} f(x)=\infty$，$k\in\mathbb{N}$，$x=2k+1$ 为第二类间断点

连续区间为 R 中除去上述间断点的所有点

四、证明题

1. 不妨设 $x_1<x_2$，$\because \dfrac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}=f'(\xi_1), x_2<\xi_1<x_1+x_2$

$\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}=f'(\xi_2), 0<\xi_2<x_1$（4’）$\because \xi_2<\xi_1 \therefore f'(\xi_2)>f'(\xi_1)$ $(\because f''<0)$

故 $\dfrac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}<\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}$ 即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

$x_2<x_1$ 可以类似证明.

2. $f(x)-f(\frac{1}{2})=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\dfrac{f'''(\xi)}{6}(x-\frac{1}{2})^3$

$f(1)=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\frac{1}{8}$（3’）$f(0)=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\frac{1}{8}$

两式相减得 $1=\dfrac{1}{48}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$（5’）取 $f'''(\xi)=\max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$

则 $f'''(\xi)\ge24$

2019 年高数上期中试题答案

一、选择题

1.D

令$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\left(\dfrac{1}{x_n}\right)^2\sin\dfrac{1}{x_n}=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^2=+\infty,(n\to+\infty)$, 可见$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\sin\dfrac{1}{x}$无界

令$x_n=\dfrac{1}{2n\pi},\left(\dfrac{1}{x_n}\right)^2\sin\dfrac{1}{x_n}=0$, 可见$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\sin\dfrac{1}{x}$并非无穷大。选$D$

2.C

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$, 故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$, 函数在$x=0$处连续

$f_+'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\sqrt{\Delta x}}$, 极限不存在（证明方法与选择题第一题类似），故函数在$x=0$不可导

3.A　　解：$f(x)$为奇函数，由对称性知，x>0 时，f(x)单调递增

4.D

令$f(x)=-|x|$, $g(x)=-x^2$，$F(x)$在x=0处不能取得极大值。令$f(x)=-|x|$, $g(x)=\cos x$, $F(x)$在x=0有极大值。故不能确定F(x)能否在f(x)和g(x)的极大值点取得极大值，选D

5.D

对于A选项，$\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)]=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)}{\dfrac{1}{h}}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$由题意知该极限存在，但是$\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$不一定存在，所以$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$不一定存在，即$f(x)$在$x=a$处的导数不一定存在。对于 B、C 选项，若$x=a$为函数的跳跃间断点，选项中的极限存在，导数不存在。

二、填空题

1.$[1,e]$

$f(x)$的定义域为$x\in[0,1]$, 对于函数$f(lnx)$，$lnx\in[0,1]$, $x\in[1,e]$

2.$\ln 3$

$$原式=\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{x-a+a}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^a=e^{2a}=9,$$

$a=\ln 3$

3. e^2, e^2-1

$\lim\limits_{x\to 0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2, \lim\limits_{x\to 0^+}a\frac{\sin x}{x}=a$,由于$f(x)$连续， $e^2=b+1=a$解得 $a=e^2$

$b=e^2-1$

、

4. 0，1

易得，$f(x)$的间断点包括$x=0$和$x=1$。对于$x=0, \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{1-x}}=e$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{1-x}}=-e$,左右极限均存在，为第一类间断点。对于

x=1,$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{1-x}}=+\infty$,极限不存在，$x=1$为第二类间断点

5. 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}=a=1$$

三、计算题

1. 解：原式$=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2(\frac{1-\ln x}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{\cos x}=0$

2. 解： $y'=[\sin 2(\frac{1-\ln x}{x})]\cdot\frac{-1-(1-\ln x)}{x^2}=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2(\frac{1-\ln x}{x})$

3. 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2}{e^t(\sin t+\cos t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6te^t(\sin t+\cos t)-(3t^2+2)e^t\cdot 2\cos t}{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\sin t+\cos t)}$$

4. 解：对方程两边求导，得：$[\cos(xy)](y+xy')-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}\cdot y'=0$

注意到 x = 0 时 y = 0, 故 $y'(0)=e(1-e)$

切线： $y-e=e(1-e)x$

法线： $y-e=\frac{1}{e(e-1)}x$

5. $\because \dfrac{n^2+1+2+\ldots+n}{n^2+n} \le$ 原式 $\le \dfrac{n^2+1+2+\ldots+n}{n^2+1} = \dfrac{n^2+\frac{1}{2}\mathrm{n}(n+1)}{n^2+1} \to \dfrac{3}{2}(n\to+\infty)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\ldots\dfrac{n+n}{n^2+n})=\dfrac{3}{2}$

四、解答题

解：(1) 当$n=1$时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=o=f(o)$，故$f(x)$在x=0处连续

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$极限不存在，故$f(x)$在$x=0$处不可导

(2) 当$n=2$时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，

故$f(x)$在$x=0$处连续且可导

当$x\ne0$时，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=f'(0)$，故$f'(x)$在$x=0$处连续

(3) 当$n>2$时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$极限存在，故$f(x)$在$x=0$处连续且可导

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x})=0=f'(0)$，故$f'(x)$在$x=0$处连续

五、证明题

1. $\because x_{n+1}-x_n=\sqrt{1-x_{n-1}}-\sqrt{1-x_n}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{1-x_{n-1}}-\sqrt{1-x_n}}$

$\therefore\left|x_{n+1}-x_n\right|\le\dfrac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\ldots\le\dfrac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$

$\therefore\forall p\in N_+,\left|x_{n+p}-x_n\right|\le\left|x_{n+p}-x_{n+p-1}\right|+\left|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|x_{n+1}-x_n\right|$

$\left|x_{n+p}-x_n\right|\le\left(\dfrac{1}{2^{n+p-1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\left|x_2-x_1\right|$

由柯西收敛原理知，原数列收敛，设$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\alpha$,等式两边取极值知$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

2. 当$x>e$.令$f(x)=x\ln x$,则$f'(x)=1+\ln x>0$

$\therefore$当$e<x_1<x_2,x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$，即$\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<\dfrac{x_2}{x_1}(e<x_1<x_2)$

3. $\dfrac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=F'(\eta)=f'(\eta)-\eta^2(\dfrac{1}{2}<\eta<1)$，即得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

令$F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3,\dfrac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=F'(\xi)=f'(\xi)-\xi^2(0<\xi<\dfrac{1}{2})$

2018 年高数上期中试题答案

一、选择题

1. C

解析：$\lim\limits_{x\to 2^+}\arctan\dfrac{1}{2-x}=-\dfrac{\pi}{2}$　　$\lim\limits_{x\to 2^-}\arctan\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{\pi}{2}$

2. D

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0$　　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2g(x)=0$　　$f(0)=0$　　$\therefore$ 连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$　　$\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xg(x)=0$　　$\therefore$ 可导

3. C

解析：$x^2-x-2=0\Rightarrow x=0$ 或 1　　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^2-x-2)(x-x^2)}{x}=-2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x^2-x-2)(x^2-x)}{x}=2$　　$\therefore x=0$ 不可导

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2-x-2)(x^2-x)}{x-1}=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x^2-x-2)(x-x^2)}{x-1}=2$　　$\therefore x=1$ 不可导

4. B

解析：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}/(x-a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)=-1<0$

$f(a)=0$　　$f'(a)=0$　　$\therefore$ 取极大值

5. B

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=f'(1)=-2=f'(5)$

6. A

二、解答题

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{x\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2$

2. $dy=(\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2})dx=\arctan xdx$

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$

4. $y'e^y+6(y+xy')+2x=0$　　$y'=\dfrac{-2x-6y}{6x+e^y}$　　又 $y(0)=0$　$\therefore y'(0)=0$

5. $\dot{x}=3t^2+9$　　$\dot{y}=2t-2$　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2t-2}{3t^2+9}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{2t-2}{3t^2+9}\right)'/\dot{x}=\dfrac{-6t^2+12t+18}{(3t^2+9)^3}$

6. 设 $f(x)=e^x-1-xe^x$　　$f'(x)=-xe^x<0$　$\therefore f(x)$ 单调减　　又 $f(0)=0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时 $f(x)<0$　　即 $e^x-1-xe^x<0\Rightarrow e^x-1<xe^x$

7. $f'(x)=1-2\sin x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$　$f(x)$ 先增后减，在 $\dfrac{\pi}{6}$ 处取最大值，　$f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

[注：也可以算出端点值进行比较]

8. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin ax=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{2x}+b=b+1\quad\therefore b+1=0\Rightarrow b=1$

$f(0)=0\quad \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a\quad \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2\quad\therefore a=2\qquad f'(0)=2$

当$x>0$时，$f'(x)=2\cos 2x$；当$x<0$时，$f'(x)=2e^{2x}$ $\qquad\therefore f(x)=\begin{cases}2\cos 2x & x>0\\ 2e^{2x} & x\le 0\end{cases}$

9. (1) 定义域：$\{x|x\ne-1\}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{4x(x+1)}{4(x+1)^4}=\dfrac{x}{(x+1)^3}\qquad f'(x)=0\Rightarrow x=0$

当$x<-1$时，$f'(x)>0$；当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$；当$x>0$时，$f'(x)>0$

$\therefore$增区间：$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$ 减区间：$(-1,0)$ 极小值：$f(0)=0$ 无极大值

(2) $f''(x)=\dfrac{1-2x}{(x+1)^4}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 凹区间：$(-\infty,-1)$，$(-1,\dfrac{1}{2})$ 凸区间：$(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 拐点：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{18})$

$\lim\limits_{x\to-1}=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}=+\infty\qquad \lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2(x+1)^2}=0\qquad \lim\limits_{x\to\infty}=f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$渐近线：$x=-1$(垂直渐近线)；$y=\dfrac{1}{2}$(水平渐近线)

10. 证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{6}x^3=\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{6}x^3$

$\begin{cases}f(1)=\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6} & \xi_1\in(0,1)\\ f(-1)=\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{6} & \xi_2\in(-1,0)\end{cases}$ 两式相减：$f(1)-f(-1)=\dfrac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=1$

令$f'''(\eta)=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$，则$f'''(\eta)>\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3\qquad \eta\in(-1,1)$

11. $\because f(x)$在$[0,1]$上连续 $\qquad\therefore\exists\eta$使得$f(\eta)=\dfrac{1}{2}$

由拉格朗日中值定理：$\begin{cases}\dfrac{f(\eta)-f(0)}{\eta}=f'(x_1) & x_1\in(0,\eta)\\ \dfrac{f(1)-f(\eta)}{1-\eta}=f'(x_2) & x_2\in(\eta,1)\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$

2017 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. e^2

解析：$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+2xe^x)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2xe^x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{2e^x}=e^2$

2. 3

解析：$\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{1+2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n+3^n}\quad\because\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{3^n}=3$，$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{3\cdot3^n}=3$ 由夹逼准则知原极限为 3

3. $\dfrac{1}{3}$

解析：$y'=\dfrac{2}{3}(x+e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{1}{3}}(1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})=\dfrac{1}{3}$

4.0；1

解析：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=b\qquad \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1\qquad\therefore b=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-x^2-1}{x}=0$ $\qquad\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a$ $\qquad\therefore a=0$

5. -1； 3

解析： $y''=6ax+2b=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{3a}=1$ $\qquad$ 且 $2=a+b$ $\qquad\therefore a=-1,b=3$

二、选择题

1. D

解析： $\ln(1+2\sin x)\sim2\sin x\sim2x$

2. C

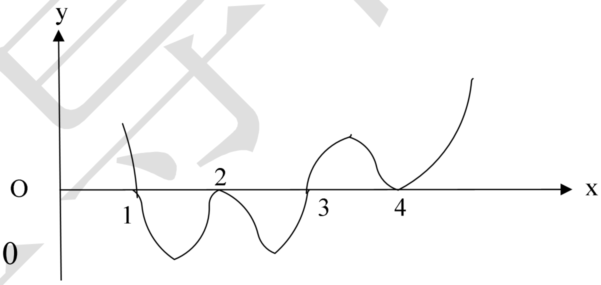
解析： $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$（因为 $\sin\dfrac{1}{x^2}$ 有界） $\qquad\therefore$ 连续

3. D

解析： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}/x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1>0$ $\qquad f(0)=0$ $\qquad f'(0)=0$ $\qquad\therefore x=0$ 处取极小值

4. C



解析：根据“奇过偶不过”画草图：

容易看出 $x=3$ 为拐点

证明：令 $g(x)=(x-1)(x-2)^2(x-4)^4$，则 $y=(x-3)^3g(x)$

$y'=3(x-3)^2g(x)+(x-3)^3g'(x)$

$y''=6(x-3)g(x)+6(x-3)^2g'(x)+(x-3)^3g''(x)$ $\qquad y''(3)=0$

$y'''=6g(x)+18(x-3)g'(x)+9(x-3)^2g''(x)+(x-3)^3g'''(x)$ $\qquad y'''(3)=6g(3)=2$ $\qquad$ 故 $x=3$ 为拐点

[注：该点的二阶导数为 0，三阶导数不为 0，是该点为拐点的充分条件。对于幂函数的 n 重根，若 $n\geq3$ 且为奇数，则此 n 重根为函数的拐点。]

三、解答题

1. 原式

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x\tan x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x+\sin x}{4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{4}=\frac{3}{4}$$

2. $y'=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}-\dfrac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)-2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos xe^x-2}{1}=0$

4. $\ln y^x=\ln e^{x+y}\Rightarrow x\ln y=x+y\Rightarrow\ln y+\dfrac{x}{y}y'=1+y'\Rightarrow dy=\dfrac{y(\ln y-1)}{y-x}dx$

5. $\dot{x}=2t$， $\dot{y}=-\sin t$ $\qquad\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin t}{t}$ $\qquad\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin t}{t}\right)'/\dot{x}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^3}=\dfrac{2}{\pi^3}$

6. $y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot\dfrac{12}{x}=16x^3(3\ln x-1)$ $\qquad y''=16\left[3x^2(3\ln x-1)+x^3\cdot\dfrac{3}{x}\right]=144x^2\ln x=0\Rightarrow x=1$

$\therefore$ 凹区间 $(1,+\infty)$ $\qquad$ 凸区间 $(0,1)$ $\qquad$ 极点 $(1,-7)$

7. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=0$ $\therefore x=0$ 为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 不存在 $\therefore x=2$ 为振荡间断点

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)}=-\dfrac{2}{\pi}$ $\therefore x=-1$ 为可去间断点

$\lim\limits_{x\to1-2k}f(x)=\lim\limits_{x\to1-2k}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=\infty$ $\therefore x=1-2k\ (k=2,3,4...)$ 为无穷间断点

连续区间为 R 除去上述间断点

8. （1） $f(-1)=-f(1)=-1$ 令 $F(x)=f(x)-x$ $F(0)=0$ $F(1)=0$

由罗尔定理：$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)-1=0\Rightarrow f'(\xi)=1$

[注：由拉格朗日中值定理：$\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(\xi)=1$，但 $\xi\in(-1,1)$ 不在题中要求范围]

（2）由（1）知 $f'(\xi)=1$，由奇函数性质知，$f'(-\xi)=1$ 令 $G(x)=e^x[f'(x)-1]$

$F(\xi)=F(-\xi)=0$ 由罗尔定理：$\exists\eta\in(-\xi,\xi)$ 使 $G'(\eta)=0$

即 $e^\eta[f''(\eta)+f'(\eta)-1]=0\Rightarrow f''(\eta)+f'(\eta)=1$

[注：解此类题的技巧在于辅助函数的构建]

2016 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $a=1$

解析：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$ $a=1$

2. $a=-2$

解析：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos2x+2ae^{2ax}}{1}=2+2a$ $\therefore 2+2a=a$ $a=-2$

3. $(-10,54)$

解析：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}=\dfrac{2(3t^2+9)-6t(2t-2)}{(3t^2+9)^3}\ge0$ 解得：$1\le t\le3$

又 $x=t^3+9t$ 单调增 $\therefore -10<x<54$ （凹凸区间一般不考虑端点）

4. 1

解析：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x+1)e^{x\ln x}}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to1}e^{x\ln x}=1$

5. $y=x+\dfrac{1}{e}$

解析：设渐近线为 $y=kx+b$，则 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}[x\ln(e+\dfrac{1}{x})-x]=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\dfrac{1}{ex})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e}\ln(1+\dfrac{1}{ex})^{ex}=\dfrac{1}{e}$

二、选择题

1. D

解析：设$\varphi(x)$在x_0处间断，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}{f(x_0)}\neq\dfrac{\varphi(x_0)}{f(x_0)}$.

A 反例：若$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f(x)=1$，则$\varphi[f(x)]=\varphi(1)=1$无间断点

B 反例：若$\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & x\geq 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0}[\varphi(x)]^2=1=[\varphi(0)]^2$无间断点.

C 反例：若$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f(x)=1$，则$f[\varphi(x)]=1$无间断点.

2. D

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f'(1-x)\cdot(-1)}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(1-x)}{2}=\dfrac{f'(1)}{2}=-1$　　$\therefore f'(1)=-2$

3. B

解析：同 2018 年选择题第 4 题

4. D

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2g(x)=0$　　$\therefore f(x)$在$x=0$处连续

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xg(x)=0$　　$\therefore f(x)$在$x=0$处可导

5. C

解析：对 A、B，若$f(x)=1$，则$f''(x_0)=f'(x_0)=0$　　故 A、B 错误

对 D，$f(x)$的最大值可在端点处$x=a$或$x=b$取到.

三、计算题

1. $-\dfrac{1}{6}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{\frac{6x^2}{1+2x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1+2x^3}{1+x^2}=-\dfrac{1}{6}$

2. $2dx$

解析：$dy=\left[\dfrac{2}{\cos^2 2x}+2^{\sin x}(\ln 2)\cos x\right]dx$　　$\therefore dy|_{x=\frac{\pi}{2}}=(2+0)dx=2dx$

3. -2

解析：$\because e^y+6xy+x^2-1=0$　　$\therefore y(0)=0$

$\because y'e^y+6(y+xy')+2x=0$　　$\therefore y'(0)=0$

$\because y'^2e^y+y''e^y+6(y'+y'+xy'')+2=0$

4. $x=0$为跳跃间断点；$x=-1$为可去间断点；

$x=-(2k+1)$,k=1,2,$\cdots$为无穷间断点；$x=2$为震荡间断点.

解析：$f(0)=-\sin\dfrac{1}{4}$　　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}=0\neq f(0)$　　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{x^2-4}=f(0)$

$\therefore x=0$ 处不连续，为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$ $\quad\therefore x=-1$ 为可去间断点

当 $\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 2k+1} f(x)=\infty$ $\quad\therefore x=-(2k+1)$,k=1,2,$\cdots$ 为无穷间断点

当 $x=2$ 时，$x^2-4=0$，此时 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{1}{x^2-4}$ 不存在 $\quad\therefore x=2$ 为振荡间断点

5. （1）$x\neq 0$ 时 $f'(x)=\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$

$x\neq 0$ 时 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+e^{-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(0)-1}{2}$

（2）$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})+x(g''(x)-e^{-x})-g'(x)-e^{-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$ $\quad\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

6. 同 2018 年解答题第 9 题

7. 同 2018 年解答题第 10 题

8. 设 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则存在 η 使 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)$

即 $\dfrac{e^{-b}f(b)-e^{-a}f(a)}{b-a}=e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]$ $\quad\therefore e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]=\dfrac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}$

设 $G(x)=e^{-x}$，则存在 ξ 使 $\dfrac{G(b)-G(a)}{b-a}=G'(\xi)$ 即 $\dfrac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=-e^{-\xi}$

$\therefore e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]=-e^{-\xi}$ $\qquad e^{\xi-\eta}\left[f(\eta)-f'(\eta)\right]=1$

2015 年高数上期中试题答案

一、填空题

1．$a=b$

解析：$f(0)=a$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{bx}{x}=b$ $\quad\therefore a=b$

1. 1

解析：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(1+\tan x)}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+\tan x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

2. $y=x-1$

解析：设 $y=kx+b$ $\qquad k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ $\qquad b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+1}{x+1}=-1$

3. $(-\infty,2]$

解析：$y''=(x-2)e^{-x}\le 0$　　$\therefore x\le 2$

4. e

解析：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-a}{x(x-1)}$极限存在　　$\therefore a=e$

二、选择题

1. B

同 2016 年选择题第 1 题

2. A

同 2016 年选择题第 2 题

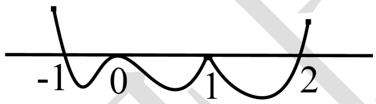
3. C

解析：不妨取$n=3$，$f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)=2f^3(x)$　　$f'''(x)=6f^2(x)\cdot f'(x)=6f^4(x)$

归纳法知：$f^n(x)=6f^2(x)\cdot f'(x)=n![f(x)]^{n+1}$

4. B

解析：$f(x)=(x-2)(x+1)\left|x(x-1)(x+1)\right|$　　草图：



由图知不可导点为$x=0$和$x=1$

5. D

解析：同 2016 年选择题第 3 题

三、计算题

1. $e^{-\frac{1}{6}}$

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\frac{1}{x})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\ln(x\sin\frac{1}{x})}$　令$t=\frac{1}{x}$，则$x=\frac{1}{t}$　　原式$=\lim\limits_{t\to 0}e^{\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}e^{\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^2\ \sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{-t\sin t}{6t^2}=-\frac{1}{6}$$

2. $-3(\arcsin\frac{1}{x})^2\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$　　$(x>1或x<-1)$

解析：$y'=3(\arcsin\frac{1}{x})^2\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-3(\arcsin\frac{1}{x})^2\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$　　$(x>1或x<-1)$

3. $y=\frac{e}{2}(x-3)+1$

解析：$t=0$时$x=3,y=1$　　$\dot{x}|_{t=0}=6t+2=2$　　$\dot{y}e^y\sin t+e^y\cos t-\dot{y}=0$　　$\dot{y}|_{t=0}=e$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{e}{2}$　　切线方程为$y=\frac{e}{2}(x-3)+1$

4. $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

解析：$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$　　$\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$　　$y'x-y=x+yy'\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}$

$$y'+y''x-y'=1+y'^2+yy''\Rightarrow y''=\frac{y'^2+1}{x-y}=\frac{(\frac{x+y}{x-y})^2+1}{x-y}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

5. （1）$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域$(-\infty,0]$　　（2）$-\frac{1}{4\sqrt{\ln 2}}$

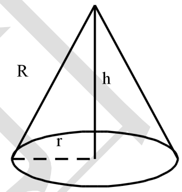
解析：（1） $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$ 又 $\varphi(x)\ge 0$ $\therefore \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ 定义域 $(-\infty,0]$

（2） $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(1-x)}}\cdot\dfrac{-1}{1-x}$ $\therefore \varphi'(-1)=-\dfrac{1}{4\sqrt{\ln 2}}$

6. $(2-\dfrac{2\sqrt{6}}{3})\pi$

解析： $\begin{cases}2\pi r=R\theta\\ h=\sqrt{R^2-r^2}\end{cases}$ $V=\dfrac{\pi}{3}r^2h=\dfrac{\pi}{3}(\dfrac{R\theta}{2\pi})^2\sqrt{R^2-(\dfrac{R\theta}{2\pi})^2}=\dfrac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$

$V'=\dfrac{R^3}{24\pi^2}\left(2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}+\dfrac{-2\theta\cdot\theta^2}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right)=0$ $\theta=0$ 或 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ $\therefore \varphi=2\pi-\theta=(2-\dfrac{2\sqrt{6}}{3})\pi$ 时容积最大



7. （1）假设存在 x_0，使 $g(x_0)=0$，$(a<x_0<b)$，则 $g(a)=g(x_0)=g(b)=0$

由罗尔定理知：存在 x_1,x_2 使 $g'(x_1)=g'(x_2)=0$，$(a<x_1<x_0,x_0<x_2<b)$

$\therefore$ 存在 x_3，使 $g''(x_3)=0$，$(x_1<x_3<x_2)$ 与 $g''(x)\ne 0$ 矛盾

$\therefore$ 假设不成立 故在 (a,b) 内 $g(x)\ne 0$.

（2）令 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理知：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

又 $g(x)\ne 0$，$g''(x)\ne 0$ $\therefore \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

8. $\because f''(x)<0$ $\therefore x>0$ 时 $f'(x)$ 为减函数 又 $f'(a)<0$ $\therefore f'(x)<0$ $\therefore f(x)$ 在 $(a.+\infty)$ 上单调递减

当 $x_0=a+\dfrac{f(a)}{|f'(a)|}$ 时，存在 $a<x_1<x_0$ 使 $f'(x_1)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$ 又 $f'(x)$ 为减函数 $\therefore f'(x_1)<f'(a)$

即 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<f'(a)$ $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{\dfrac{f(a)}{|f'(a)|}}<f'(a)$ $f(x_0)-f(a)<f'(a)\cdot\dfrac{f(a)}{|f'(a)|}$

$f(x_0)-f(a)<f'(a)\cdot\dfrac{f(a)}{-f'(a)}$ $\therefore f(x_0)<0$ 又 $f(a)>0$，故在 (a,x) 中必有一实根

2014 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $\dfrac{5}{2}$

解析：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}+\dfrac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}})=\lim\limits_{n\to\infty}(2^{1-\frac{1}{2^n}}+\dfrac{n}{n+\sqrt{n^2-n}})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{5}{2}$

2. 0 或 1

解析：$x(e^{\frac{1}{x}}-e)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=1$

3. $-2014!$

解析：$y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1})$ $\because \left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

$\therefore\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$　　$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$　　$\therefore y^{(2014)}(0)=\frac{1}{2}\left[\frac{2014!}{-1}-\frac{2014!}{1}\right]=-2014!$

4. $\frac{\pi}{2}dx$

解析：令 $z=2x-1$，则 $\begin{cases}y=f(z)\\z=2x-1\end{cases}$

$x=0$ 时 $z=-1$　　$dy\big|_{x=0}=\arctan z^2dz\big|_{z=-1}=\frac{\pi}{4}dz=\frac{\pi}{4}d(2x-1)=\frac{\pi}{2}dx$

二、选择题

1. D

解析：例如：若 $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$，$b_n=\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{2}}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n,\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 均不存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

2. C

解析：若取 $x=\frac{1}{n\pi}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\sin n\pi=0$

若取 $x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\infty$　　$\therefore f(x)$ 无界但不是无穷大

3. C

解析：$\ln\left(\cos x+2x^2-1+1\right)\sim\cos x+2x^2-1\sim kx^2$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x+2x^2-1}{kx^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x+4x}{2kx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cos x+4}{2kx}=\frac{3}{2k}$

4. B

解析：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}>0$　　$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$

5. A

解析：若 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^3=\frac{1-\cos x}{x^2}$,则 $f''(0)+\left[f'(0)\right]^3=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore f''(0)=\frac{1}{2}>0$　　又 $f'(0)=0$　　$\therefore x=0$ 为极小值点

三、判断题

1. ×

解析：例如：$y=\frac{1}{x}$，$a=0$，$b=1$ 时，在 $[\delta，1-\delta]$ 上一致连续，而在 $(0,1)$ 上不一致连续.

2. √

解析：设 $x\in[x_1，x_2]$，由凸函数定义可知：$f(x)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$　其中 $\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$

带入上式：$(x_2-x_1)f(x)\le(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$　　化简得：$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\ge\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

令 $x_1=a$，$x_2=a+\Delta x$，则 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}$

当 $\Delta x\to0$ 时：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<f'(a)$　　$\therefore f(x)\ge(x-a)f'(a)+f(a)$

四、计算题

1. $\frac{1}{L}$

解析：由数学归纳法，假设 $x_k=\frac{2^{2^{k-1}}-1}{2^{2^{k-1}}L}$，带入 $x_{n+1}=x_n(2-Lx_n)$，得 $x_{k+1}=\frac{2^{2^k}-1}{2^{2^k}L}$

又 $x_1=\frac{1}{2L}$ 成立　　$\therefore x_n=\frac{2^{2^{n-1}}-1}{2^{2^{n-1}}L}$　　故 $\lim\limits_{x_n\to\infty}x_n=\lim\limits_{x_n\to\infty}\frac{1}{L}-\frac{1}{2^{2^{n-1}}L}=\frac{1}{L}$

2. 2 ；5

解析：$e^{xy}+\sin x-y=0$　　当 $x=0$ 时，$y=1$　　$(y+xy')e^{xy}+\cos x-y'=0$　　当 $x=0$ 时，$y'=2$

$(y'+y'+xy')e^{xy}+(y+xy')^2e^{xy}-\sin x-y''=0$　　当 $x=0$ 时，$y''=5$

3. $a=-\frac{4}{3}$，$b=\frac{1}{3}$

解析：$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}1+a\cos2x+b\cos4x=1+a+b=0\\ \lim\limits_{x\to0}\left(1+a\cos2x+b\cos4x\right)''=-4a-16b=0\end{cases}$　　$\therefore a=-\frac{4}{3},b=\frac{1}{3}$

五、证明题

1. 证明：令 $f(x)=\frac{\sin x}{x},x\in(0,\frac{\pi}{2})$　　$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$　　令 $g(x)=x\cos x-\sin x$

则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$　　$\therefore g(x)$ 单调递减　　又 $g(0)=0$

$\therefore g(x)<0$ 即 $f'(x)<0$　　$\therefore f(x)$ 单调递减

又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$　　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\frac{2}{\pi}$　　$\therefore\frac{2}{\pi}<f(x)<1$　　即 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$

2. （1）令 $F(x)=f(x)-x$　　$\because F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$　　$F(1)=f(1)-1=-1<0$

又 $F(\frac{1}{2})$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导　　$\therefore\exists\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\xi)$=0 即 $f(\xi)$=ξ

（2）令 $G'(x)=[f'(x)-\lambda f(x)+\lambda x-1]e^{-\lambda x}$　　则 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

又 $G(0)=f(0)=0$　　$G(\xi)=e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0$

由罗尔定理知：$\exists\eta\in(0,\xi)$，使 $G'(x)=0$ 即 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$

3. （使用闭区间套定理或 weierstrass 定理证明）

反证法：假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有无穷多个零点，对 $[0,1]$ 进行二分，则在 $[0,\frac{1}{2}]$ 与 $[\frac{1}{2},1]$ 中至少有一个区间内有无穷多个零点。对有无穷多个零点的区间在进行二分，不断二分后总有一个区间内有无穷多个零点。当区间长度小于 Δx 时，取区间内任意两零点 x_0，$x_0+\Delta x'$，且 $|\Delta x'|<|\Delta x_0|$，则

$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x')-f(x_0)}{\Delta x'}=0$，与 $f'(x_0)\neq0$ 矛盾。

故假设不成立，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点。

2013 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $\ln3$

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{2a}{x-a})}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2a}{x-a}x}=e^{2a}=9$　　$a=\frac{\ln9}{2}=\ln3$

2. e^{-2}；$e^{-2}-1$

解析：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}\cdot(-2x)}=e^{-2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{x}=a$

$\therefore \begin{cases} a=b+1 \\ e^{-2}=b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=e^{-2} \\ b=e^{-2}-1 \end{cases}$

3. 0;1

解析：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{-x}=-e$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{-x}=e$ $\quad\therefore x=0$ 为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}\sin 1=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}}\sin 1=\infty$ $\quad\therefore x=1$ 为无穷大间断点

4. 1

解析：$\ln(1+ax)\sim ax,\sin x\sim x$ $\qquad\therefore a=1$

5. $\dfrac{\cos+x}{x\cos x\ln a}dx$

解析：$y'=\dfrac{\sec x+\tan x+x(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x})}{x(\sec x+\tan x)\ln a}=\dfrac{\cos x+\sin x\cos x+x\sin x+x}{x(\cos x+\sin x\cos x)\ln a}=\dfrac{\cos x+x}{x\cos x\ln a}$

6. 2

解析：原式$=\lim\limits_{n\to 0}(2-\dfrac{1}{2^n})\cdot\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=2$

7. $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

解析：$y'=1-2\sin x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$ $\qquad y''=-2\cos x<0$ $\qquad\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 为极大值点

故 $y_{\max}=y|_{x=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{6}+2\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

二、计算题

1. $\dfrac{1}{2}$

解析：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

2. 2A

解析：$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\mathrm{A}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2\mathrm{A}$

3. 定义法：$x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}>1$ $\left|x_n-\sqrt{2}\right|=\left|\dfrac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}-\sqrt{2}\right|=\left|1-\sqrt{2}+\dfrac{1}{x_{n-1}+1}\right|$

$\left|\dfrac{(1-\sqrt{2})\ x_{n-1}+2-\sqrt{2}}{x_{n-1}+1}\right|=\dfrac{\sqrt{2}-1}{x_{n-1}+1}\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^2\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<\cdots<$

$(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^{n-2}\left|x_2-\sqrt{2}\right|=(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^{n-1}\left|\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right|<(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^{n-1}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{\sqrt{2}-1}{2}}+1\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|x_n-\sqrt{2}\right|<\varepsilon$ $\qquad\therefore\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

4. $\tan t;\dfrac{1}{at\cos^3 t}$

解析： $\dot{x}=a(t\cos t)$ $\ddot{x}=a(\cos t-t\sin t)$ $\dot{y}=a(t\sin t)$ $\ddot{y}=a(\sin t+t\cos t)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\tan t$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{1}{at\cos^3 t}$

5. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{e^{-y^2}}{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{2ye^{y^2}}=0\ \therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2y^3}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{6y^3}{2ye^{y^2}}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{3y}{e^{y^2}}=0=f'(0)$ $\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

5. 设 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$， $f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$， $f''(x)=-\sin x<0$ $\therefore f'(x)$ 单调递减

又 $f'(0)=1-\dfrac{2}{\pi}>0$ $f'(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{2}{\pi}<0$， $\therefore f(x)$ 先增后减

又 $f(0)=0$ $f(\dfrac{\pi}{2})=0$ $\therefore f(x)>0$，即 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$

7. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$ $\begin{cases}f(0)=f(c)-cf'(c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2 & \xi_1\in(0,c)\\ f(1)=f(c)-(1-c)f'(c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\left(1-c^2\right) & \xi_2\in(c,1)\end{cases}$

$\therefore f(1)-f(0)=f'(c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\left(1-c^2\right)-\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2$

$|f'(c)|=\left|f(1)-f(0)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\left(1-c^2\right)\right|\le|f(1)|+|f(0)|+\dfrac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2+\dfrac{1}{2}|f''(\xi_2)|\left(1-c^2\right)$

$\le2a+\dfrac{b}{2}\left[c^2+(1-c^2)\right]\le2a+\dfrac{b}{2}$

8. $\dfrac{1}{2}f''(0)$

解析： $\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x-\ln(1+x)}=f'(\xi)$ $\ln(1+x)<\xi<x$， 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\xi)\left[x-\ln(1+x)\right]}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{x}\cdot\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=f''(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{x+1}}{2x}=f''(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\cdot\dfrac{1}{2(1+x)}$

$=\dfrac{1}{2}f''(0)$

9.设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$， $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{1+x^2}=0$， $\lim\limits_{x\to\infty}F'(x)=\dfrac{(1+x^2)f'(x)-2xf(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$， $\because$ 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，又 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，由罗尔定理可知：$\exists\xi\in\mathrm{R}$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)(1+\xi^2)=2\xi f(\xi)$ 成立.

彭康学导团 2.0 招新重启中，欢迎大家加入官方招新答疑群“彭小招 1.0”，ｐｉｃｋ彭康学辅大家庭～

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码，关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

彭小招1.0

群号：647383944

PKSTU 微信公众号