彭·高数

高等数学上期中试题集

（2021版）

彭康书院学业辅导与发展中心

2020 年高数上期中试题

一、 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x}) =$______

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}) =$______

3. 设 $\mathrm{y}=(\mathrm{x}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})^{\frac{3}{2}}$，则 $\mathrm{y}'(0) =$______

4. 设函数 $\mathrm{y}=\mathrm{y}(\mathrm{x})$由方程 $\mathrm{x}=\mathrm{y}^{\mathrm{y}}$确定，则 $\mathrm{dy} =$__________

5. 函数 $\mathrm{y}=\mathrm{x}+2\cos\mathrm{x}$在$[0,\pi/2]$上的最大值为__________

二、 计算题

1. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}$.

2. 设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\tan\dfrac{1}{x}$，求 $y'(\dfrac{4}{\pi})$.

3. 已知曲线$\begin{cases} x=f(t)-1 \\ y=f(e^{2t}-1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f(0)=2$， $f'(0)\neq 0$，求 $t=0$ 处曲线的切线方程.

4. 设$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f(x+\dfrac{\pi}{t})-f(x)\right]\sin(\dfrac{x}{t})$，其中$f$二阶可导，求$F(x),F'(x)$.

5. 当$x\to 0^+$时，$\alpha(x)=\sqrt{a}-\sqrt{a+x^3}(a\geq 0)$是$x$的几阶无穷小？说明理由.

6. 设$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0 \\ 0,\ x=0 \end{cases}$，证明其导函数$f'(x)$在$x=0$处连续.

7. 求曲线$y=x^4(12\ln x-7)$的凹凸区间及拐点.

三、 解答题

（本题 9 分）讨论函数$\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}},\ \ x\ge 0 \end{cases}$的连续性；若有间断点，说明间断点的类型.

四、 证明题

1. （本题 8 分）设 $f(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上二阶可导，且 $f(0)=0, f''(x)<0$，证明：对任意两点 $x_1>0$ 和 $x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

2.（本题 7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有三阶连续实导数，且 $f(0)=1, f(1)=2, f'(\frac{1}{2})=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $|f^{(3)}(\xi)|\ge 24$.

2019 年高数上期中试题

一、选择题

1. $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　）

A. 无穷小　　B. 无穷大　　C. 有界但非无穷小量　　D. 无界但非无穷大

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, x\neq 0\\ 0\ ,\quad x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续　　C. 连续　　D. 以上结论都不对

3. 已知 $f(x)$ 是奇函数且 $x<0$ 时单增，则当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是（　　）

A. 单增　　B. 单减　　C. 可能单增，也可能单减　　D. 既非单增也非单减

4. 设 $f(x),g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得最大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处（　　）

A. 必取得极大值　　B. 必取得极小值
C. 不可能取得极值　　D. 是否取得极值不能确定

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）

A. $\lim\limits_{h\to\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

二、填空题

8. 设 $f(x)$ 定义域为 $[0,1]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域为________

9. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=9$，则 $a=$________

10. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, x<0\\ b+1,\quad x=0\\ \frac{\sin x}{x},\quad x>0\end{cases}$，当 $a=$_____，$b=$_____时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

11. 函数 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$ 的第一类间断点 $x=$_____，第二类间断点 $x=$_____.

12. 已知 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 $\ln(1+ax)$ 是等价无穷小，则 $a=$_____.

三、计算题

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$

2. 设$y=\sin^2(\dfrac{1-\ln x}{x})$，求$y'$.

3. 设函数$y=y(x)$由$\begin{cases} x-e^t\sin t+1=0 \\ y=t^3+2t \end{cases}$确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 方程$\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$表示平面上一条曲线，试求该曲线在$x=0$处的切线方程与法线方程.

5. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n})$.

三、（本题 9 分）设 $n\in N_+$, 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、证明题（每题 7 分）

1. 设 $x_1<-1$，$x_{n+1}+\sqrt{1-x_n}=0$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 证明不等式：当 $e<x_1<x_2$ 时，有 $\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<\dfrac{x_2}{x_1}$.

2018 年高数上期中试题

一、 选择题

1. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的（　　）

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续　　C. 连续但不可导　　D. 可导

3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^2-x\right|$ 不可导点的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处（　　）

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值　　D. $f(x)$ 的导数不存在

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处切线的斜率为（　　）

A. 2　　B. -2　　B. 1　　D. -1

6. 在区间 (a,b) 内，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 的图像在 (a,b) 内是（　　）

A. 单增且凸　　B. 单减且凸　　B. 单增且凹　　D. 单减且凹

二、 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

2. 设 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，求 dy.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cot x-\frac{1}{x})$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$，求 $y'(0)$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^{3}+9t \\ y=t^{2}-2t \end{cases}$ 确定，求 $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

6. 证明：当 $x>0$ 时，$e^{x}-1<xe^{x}$.

7. 求函数 $f(x)=x+2\cos x$ 的最大值，其中 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b & x\le 0 \\ \sin ax & x>0 \end{cases}$，问 a,b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？并求 $f'(x)$.

9. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求：

（1）函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线方程.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0$， $f(0)=0$， $f(1)=1$， $f'(0)=0$，证明：存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f'''(\eta)\ge 3$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$， $f(1)=1$，证明：在 $[0,1]$ 存在两点 x_1， x_2，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.

2017 年高数上期中试题

一、 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}}=$________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{n}+3^{n}}=$__________.

3. 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'(0)=$________________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ b(1-x^{2}) & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则 $a=$_______，$b=$________.

5. 已知 $(1,2)$ 是曲线 $y=ax^{3}+bx^{2}$ 的拐点，则 $a=$_______，$b=$________.

二、 选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+2\sin x)$ 与下列哪个表达式是等价无穷小（　　）

   A. $1+2\sin x$　　B. x　　C. $2x^{2}$　　D. $2x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^{2}} & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

   A.极限不存在　　B.极限存在但不连续　　C.连续　　D.以上结论都不成立

3. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）

   A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)\ne 0$　　C. 取得极大值　　D. 取得极小值

4. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^{2}(x-3)^{3}(x-4)^{4}$ 的拐点是（　　）

   A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

三、 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$.

2. 设 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 y'.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

4. 设 $y^x=e^{x+y}$，求 dy.

5. 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

6. 求曲线 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凹凸区间及拐点.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\dfrac{\pi}{2}x)} & x\le 0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4} & x>0\end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点类型.

8. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

2016 年高数上期中试题

一、 填空题

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geq 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$，则 $a=$________.

2. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$__________.

3. 曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，则 $y=y(x)$ 的凸区间是________________.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=$________.

5. 曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程为__________________.

二、 选择题

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义， $f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\neq 0,\varphi(x)$ 有间断点，则（　　）

A. $\varphi(f(x))$ 必有间断点　　B. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

C. $f(\varphi(x))$ 必有间断点　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为（　　）

A. 2　　B. -1　　C. 1　　D. -2

3. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（　　）

A. $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\neq 0$　　B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值　　D. $f(x)$ 的导数不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leq 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A.极限不存在　　B.极限存在，但不连续

B.连续，但不可导　　D.可导

5. 下列命题中正确的是（　　）

A. 若 $f''(x_0)=0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

B. 若 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值

C. 若 $f(x)$ 可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值，则最大值一定是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值

三、 计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$.

2. 设 $y=\tan 2x + 2^{\sin x}$，求 $dy\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(1+x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x<0 \\ \sin\dfrac{1}{x^2-4}, & x\geq 0 \end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点的类型.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$， $g'(0)=-1$.

（1）求 $f'(x)$.（2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

6. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求：（1）函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0,$ 证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $f'''(\xi)\geq 3$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $e^{\xi-\eta}(f(\eta)-f'(\eta))=1$.

2015 年高数上期中试题

一、 填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则常数 a 与 b 应满足______________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^x-1}{x\sin x}=$_______________.

3. 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\ne -1)$ 的斜渐近线方程为_____________________.

4. 函数 $y=xe^{-x}$ 的凸区间是________________.

5. 若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$，则 $a=$___________.

二、 选择题

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义， $f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0,\varphi(x)$ 有间断点，则（　　）

A. $f(\varphi(x))$ 必有间断点　　B. $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点

C. $\varphi(f(x))$ 必有间断点　　D. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

2. 设函数 $f(x)$ 可导且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)=($　　　$)$，$(n>2)$

A. $[f(x)]^{2n}$　　B. $(n!)[f(x)]^{2n}$　　C. $(n!)[f(x)]^{n+1}$　　D. $n[f(x)]^{n+1}$

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是（　　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

5. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（　　）

A. $f(x)$ 取得极小值　　B. $f(x)$ 的导数不存在

C. $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\ne 0$　　D. $f(x)$ 取得极大值

三、 计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}$.

2. 设 $y=(\arcsin\frac{1}{x})^3$.求 y'.

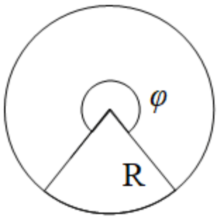
3. 求曲线 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

4. 求由方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

5. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\ge 0$.

   ①求 $\varphi(x)$ 及其定义域；②求 $\varphi'(-1)$.

6. 如图，从半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗，留下的扇形的中心角 φ 取多大时做成的漏斗的容积最大？



7. 设 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0,$ 证明：

（1）在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.（2）存在 $\xi\in(a,b)$ ，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导， $f(a)>0, f'(a)<0, x>a$ 时 $f''(x)<0,$ 证明： $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 上有且只有一个实根.

三、判断题（命题正确需给出证明，命题错误需举出反例）

1. 设 $a<b$ 若 $\forall\delta\in(0,\frac{b-a}{2})$，有 f 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上一致连续，则 f 在 (a,b) 上一致连续.

2. 设可微函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸函数，则函数 f 的图形必位于曲线过 $(a,f(a))$ 切线的上方，即对任意 $x\in(a,b]$ 有 $f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$.

四、计算题

1. 设 $x_1=\frac{1}{2L},L>0,x_{n+1}=x_n(2-Lx_n),n=1,2,\cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设方程 $e^{xy}+\sin x-y=0$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

3. 试确定常数 a,b，使极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+a\cos2x+b\cos4x}{x^4}$ 存在，并求出极限值.

五、证明题

1. 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，证明：

（1）$\exists\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

（2）对 $\forall\lambda\in R$，必 $\exists\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(x)$ 的每一个零点都是简单零点（简单零点：若 $f(x_0)=0$，则 $f'(x_0)\neq 0$），证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点.

2013 年高数上期中试题

一、填空题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=9$,则 $a=$__________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b+1, & x=0\\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$ 当 $a=$______，$b=$______时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$ 的第一类间断点 $x=$______，第二类间断点 $x=$_______.

4. 已知当 $x\to 0$，$\sin x$ 与 $\ln(1+ax)$ 是等价无穷小，则 $a=$__________.

5. 设 $y=\log_a[x(\sec x+\tan x)]$，则 $dy=$_________.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})\bullet\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=$__________.

7. 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为__________.

二、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^3\sin x}$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^x-1}=A$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}(n\in N_+)$，试证明$\lim\limits_{x\to\infty} x_n=\sqrt{2}$.

4. 设$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，说明其导函数$f'(x)$在$x=0$处连续.

6. 当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，试证明$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$|f'(x)|\le 2a+\frac{b}{2}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域内二阶可导，且 $f'(0)=0$，试计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界且可导，证明：方程 $f'(x)(1+x^2)=2xf(x)$ 至少有一个实根.

彭康学导团2.0招新重启中，欢迎大家加入官方招新答疑群“彭小招1.0”，ｐｉｃｋ彭康学辅大家庭～

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码，关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

彭小招1.0

群号：647383944

PKSTU 微信公众号