第八章　习题课

本章基本要求

1. 理解线性变换的概念及基本性质, 会求某线性变换的核与值域.
2. 会应用相关定理判断线性变换是否为单射及可逆线性变换.
3. 理解线性变换的矩阵表示，掌握线性变换的矩阵的求法.
4. 掌握线性算子在不同基下矩阵之间关系的判断与求解.

第8章习题

例1

设有 R^2 的基 B： $\varepsilon_1=(1,0)^T,\varepsilon_2=(0,1)^T$ ； R^3 的基 B： $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$，$T\in L(R^2,R^3)$，定义为$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3,\forall x=(x_1,x_1)^T\in R^2$.

(1) 求T的值域与秩、核与零度；

(2) T是否为单射？是否为满射？

(3) 求T在基B,B'下的矩阵.

例1

设有 R^2 的基 B： $\varepsilon_1=(1,0)^T, \varepsilon_2=(0,1)^T$ ； R^3 的基 B： $\alpha_1=(1,1,0)^T, \alpha_2=(1,0,1)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$, $T\in L(R^2,R^3)$，定义为 $T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3, \forall x=(x_1,x_1)^T\in R^2$.

(1) 求T的值域与秩、核与零度；

$R(T)=\{\,T(\alpha)\ |\ \alpha\in V\}\sqsubset W$

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2$

$T(\alpha)=x_1T(\varepsilon_1)+x_2T(\varepsilon_2)$

$R(T)=\mathrm{span}\{T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2)\}$

$T(\varepsilon_1)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$

$=1\,\alpha_1+0\,\alpha_2+(1+0)\alpha_3$

$=\alpha_1+\alpha_3\triangleq\eta_1$

$T(\varepsilon_2)=\alpha_2+\alpha_3\triangleq\eta_2$

rank (T) = 2　　nullity (T) = 0

nullity (T) + rank (T) = dim (V)

例1

设有 R^2 的基 B： $\varepsilon_1=(1,0)^T,\varepsilon_2=(0,1)^T$ ； R^3 的基 B： $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$，$T\in L(R^2,R^3)$，定义为$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3,\forall x=(x_1,x_1)^T\in R^2$.

(1) 求T的值域与秩、核与零度；

$\mathrm{Ker(T)}=T^{-1}(0)=\{\alpha \mid T(\alpha)=0,\ \alpha\in V\}\sqsubset V$

$=\{\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2 \mid T(\alpha)=x_1T(\varepsilon_1)+x_2T(\varepsilon_2)=0\}$

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2$

$T(\alpha)=x_1T(\varepsilon_1)+x_2T(\varepsilon_2)$

$T(\varepsilon_1)=\alpha_1+\alpha_3\triangleq\eta_1$

$T(\varepsilon_2)=\alpha_2+\alpha_3\triangleq\eta_2$

$T(\alpha)=x_1T(\varepsilon_1)+x_2T(\varepsilon_2)$

$=x_1(\alpha_1+\alpha_3)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)$

$=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3=0$

$\Rightarrow$

$x_1=x_2=0$

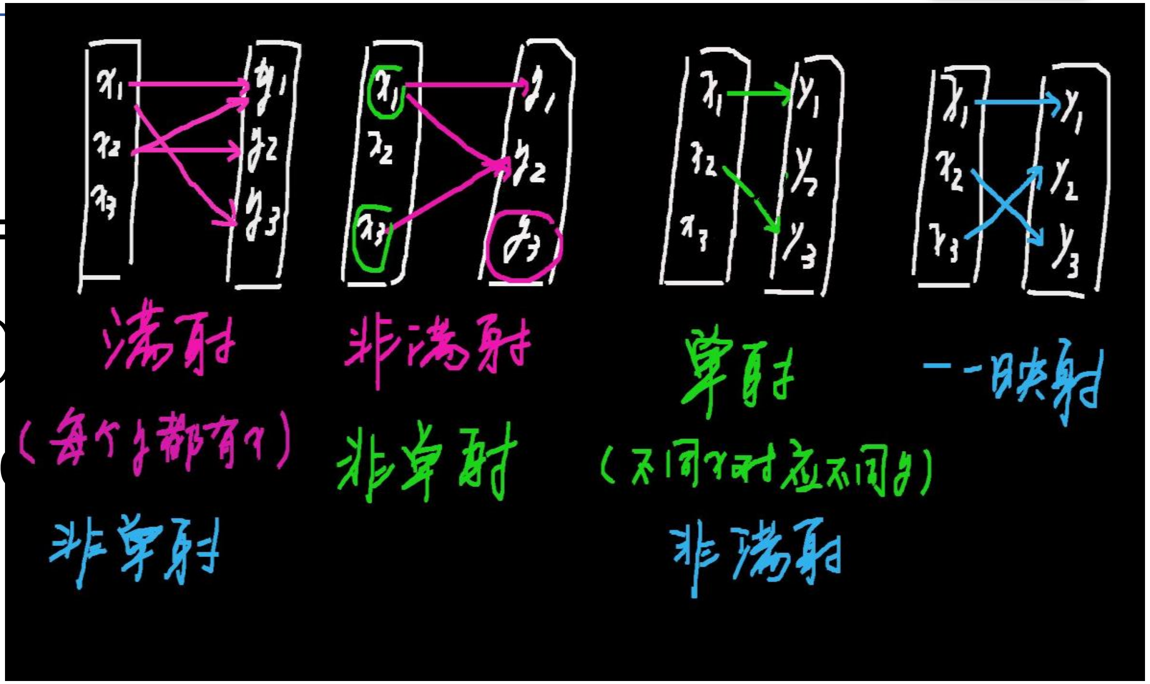
$\mathrm{Ker(T)}=\{0\}$

例1

设 有 R^2 的 基 B ： $\varepsilon_1=(1,0)^T,\varepsilon_2=$

$(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3,\forall x=(x_1,x_1)^T$



(2) T是否为单射？是否为满射？

定理8.1.9

设dim(V)=dim(W)=n, T∈ *L*(V,W), *则下列条件相互等价：*

1. *T是可逆线性变换；*
2. *T是单射；*
3. *T是满射；*
4. *rank(T) = n;*
5. *nullity(T) = 0.* （ ker(T)={0} ）

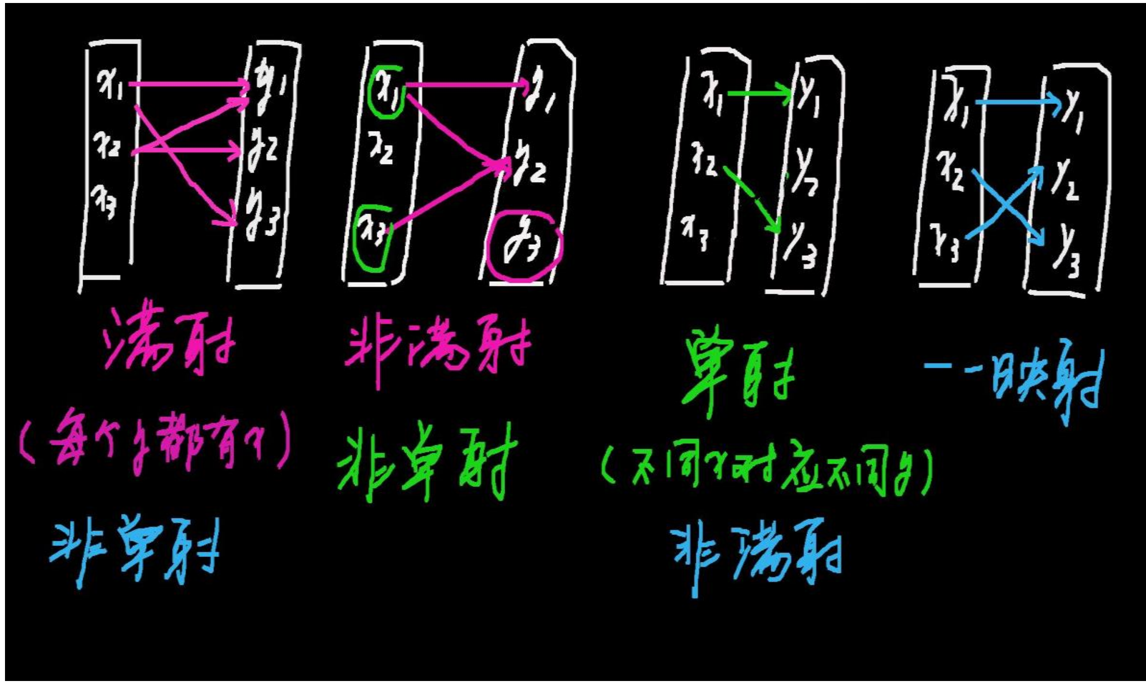
定理 8.1.5 设 T 是 线性空间 *V*到线性空间W的一个线性变换，dim(V) = n，则下列条件相互等价：

1. T是单射；
2. ker(T)={0};
3. T将V中线性无关组映射为W中线性无关组；
4. rank(T) = n

例1

设有 R^2 的基 B： $\varepsilon_1=(1,0)^T,\varepsilon_2=(0,1)^T$ ； R^3 的基 B： $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$，$T\in L(R^2,R^3)$，定义为$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3,\forall x=(x_1,x_1)^T\in R^2$.

(2) T是否为单射？是否为满射？



$\alpha\in R^3,\qquad \exists\ \varepsilon=(x_1,x_2)\in R^2$

$$\alpha=T(\varepsilon)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$$

$$=(\alpha_1+\alpha_3)x_1+(\alpha_2+\alpha_3)x_2$$

$$=(1,2,1)^T\ x_1+(1,1,2)^T\ x_2$$

$\alpha=(0,0,1)^T$时，方程组无解。所以， T不是满射。

例1 设有 R^2 的基 B： $\varepsilon_1=(1,0)^T,\varepsilon_2=(0,1)^T$； R^3 的基 B： $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$, $T\in L(R^2,R^3)$，定义为 $T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3, \forall x=(x_1,x_1)^T\in R^2$.

(3) 求 T 在基 B,B' 下的矩阵.

$B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, $B'=\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

$T(\alpha_1)=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\dots a_{m1}\beta_m$

$T(\alpha_2)=a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+\dots a_{m2}\beta_m$

…

$T(\alpha_n)=a_{1n}\beta_1+a_{2n}\beta_2+\dots a_{mn}\beta_m$

$T[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]=[T(\alpha_1),T(\alpha_2),\dots,T(\alpha_n)]$
$=[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m]A$

$T(\varepsilon_1)=\alpha_1+\alpha_3$

$T(\varepsilon_2)=\alpha_2+\alpha_3$

$T[\varepsilon_1,\varepsilon_2]=[T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2)]$

$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

例2

设$T \in L(R[x]_2)$，定义为$T(f(x)) = xf'(x) + f''(x), \forall f(x) \in R[x]_2$.

(1) 求T在基$\{1, x, x^2\}$下的矩阵A；

(2) 求T在基$\{1, x, 1 + x^2\}$下的矩阵B;

(3) 求矩阵S，使得$B = S^{-1}AS$;

例2

设$T \in L(R[x]_2)$，定义为$T(f(x)) = xf'(x) + f''(x), \forall f(x) \in R[x]_2$.

(1) 求T在基$\{1, x, x^2\}$下的矩阵A；

$$T[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]A$$

$$T[1, x, x^2] = \big[\, T[1], T[x], T[x^2] \,\big] = [1, x, x^2]A$$

$$T[1] = x \cdot 0 + 0 = [1, x, x^2](0, 0, 0)^T$$

$$T[x] = x \cdot 1 + 0 = [1, x, x^2](0, 1, 0)^T$$

$$T[x^2] = x \cdot 2x + 2 = [1, x, x^2](2, 0, 2)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例2

设$T \in L(R[x]_2)$，定义为$T(f(x)) = xf'(x) + f''(x), \forall f(x) \in R[x]_2$.

(2) 求T在基$\{1, x, 1+x^2\}$下的矩阵B;

$$T[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]B$$

$$T[1, x, 1+x^2] = \left[\, T[1], T[x], T[1+x^2] \,\right] = [1, x, 1+x^2]B$$

$$T[1] = x \cdot 0 + 0 = [1, x, 1+x^2](0,0,0)^T$$

$$T[x] = x \cdot 1 + 0 = [1, x, 1+x^2](0,1,0)^T$$

$$T[1+x^2] = x \cdot 2x + 2 = [1, x, 1+x^2](0,0,2)^T$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例2

设$T \in L(R[x]_2)$，定义为$T(f(x)) = xf'(x) + f''(x), \forall f(x) \in R[x]_2$.

(3) 求矩阵S，使得$B = S^{-1}AS$;

$$T[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]A$$

$$T[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]B$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]C$$

$$T[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = T[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]C$$
$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]AC$$
$$= [\beta_1, \beta_2, \beta_3]C^{-1}AC$$

$$[1, x, 1 + x^2] = [1, x, x^2]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例3

已知 $T \in L(R^3)$，T 在基 $B: \alpha_1 = (-1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,0,-1)^T$，$\alpha_3 = (0,1,1)^T$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 T 在基 B': $\varepsilon_1 = (1,0,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1,0)^T$，$\varepsilon_3 = (0,0,1)^T$ 下的矩阵；

(2) 求 $T(1,2,-5)^T$.

例3

已知$T\in L(R^3)$， T在基$B:\alpha_1=(-1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

(1) 求T在基B': $\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$下的矩阵；

$$T[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$$

$$T[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]B$$

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C$$

$$B=C^{-1}AC$$

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]C^{-1}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

例3

已知 $T \in L(R^3)$， T 在基 $B: \alpha_1 = (-1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,0,-1)^T$， $\alpha_3 = (0,1,1)^T$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 求 $T(1,2,-5)^T$.

$\alpha = (1,2,-5)^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]\,(1,2,-5)^T$

$T[\alpha] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]y$

$y = Bx$

例4

已知$T\in L(V)$， T在V的基e_1,e_2,e_3下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\-4&3&2\\-4&-2&3\end{pmatrix}$.

(1) 问T是否可逆？若T可逆，求T^{-1}；

(2) 求V的另一个基，使得T在该基下的矩阵为对角矩阵.

定理8.2.4 设$T\in L(V,W)$, $\dim(V)=\dim(W)=n$, 线性空间V和W的一组基分别为：

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\quad \{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$$

T在这两组基下的矩阵为A，则 T是可逆线性变换的充要条件是A为可逆矩阵，且当 T可逆时， T^{-1}在这两组基下的矩阵是 A^{-1}

$$T[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$$

$$T[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]D$$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C$$

$$\begin{aligned}T[\beta_1,\beta_2,\beta_3]&=T[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C\\&=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]AC\\&=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]C^{-1}AC\end{aligned}$$

例5

设$T\in L(V,W)$，V为有限维空间，已知$\mathrm{T}(e_1),\cdots,\mathrm{T}(e_r)$为$\mathrm{R}(T)$的基(其中$e_i\in V, i=1,2,\cdots,r$)，又知$\beta_1,\cdots,\beta_s$为$\ker(T)$的基．试证明：向量组$(I)$：$e_1,\cdots,e_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$为$V$的基.

先证明(Ⅰ)线性无关.再证明V中任意向量α都可由(Ⅰ)线性表示,设$T(\alpha)=a_1T(e_1)+\cdots+a_rT(e_r)$,记向量$\alpha_0=\alpha-(a_1e_1+\cdots+a_re_r)$,可证$\alpha_0\in\ker(T)$,从而得$\alpha$可由(Ⅰ)线性表示.

例6

已知$T\in L(V)$，T在V的基e_1,e_2,e_3下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

(1) 证明$T^2=T$；

(2) 求$\mathrm{R}(T)$及$\ker(T)$的基，并证明它们合在一起可构成V的基B'.

(3) 求T在基B'下的矩阵；

(4) 证明：$\forall\alpha\in R(T)$，恒有$\mathrm{T}(\alpha)\in R(T)$，$\forall\beta\in\ker(T)$，恒有$\mathrm{T}(\beta)\in\ker(T)$.

例6

已知$T \in L(V)$， T在V的基e_1, e_2, e_3下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 证明$T^2 = T$;

线性空间$L(V,W)$ $\longleftrightarrow$ 线性空间$F^{m x n}$

$A^2 = A$

例6

已知$T \in L(V)$， T在V的基e_1, e_2, e_3下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 求$\mathrm{R}(T)$及$\ker(T)$的基，并证明它们合在一起可构成V的基B'.

T 的值域 $\mathrm{R}(T)$与矩阵A的列空间同构, 所以 $\mathrm{R}(T)$的基的坐标为矩阵 A 的列向量组的最大线性无关向量组.

$\mathrm{T}[e_1, e_2, e_3] = [\mathrm{T}(e_1), \mathrm{T}(e_2), \mathrm{T}(, e_3)] = [e_1, e_2, e_3]A$

$\mathrm{T}[\alpha] = x_1\mathrm{T}(e_1) + x_2\mathrm{T}(e_2)) + x_3\mathrm{T}(e_3) = [e_1, e_2, e_3]Ax$

$\mathrm{T}\,[\alpha] = \mathrm{T}[e_1, e_2, e_3]x = [\mathrm{T}(e_1), \mathrm{T}(e_2), \mathrm{T}(e_3)]\,x = [e_1, e_2, e_3]A\,x = 0$

知：$\ker(T)$的基由线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系构成.

例6

已知$T \in L(V)$， T在V的基e_1, e_2, e_3下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 证明$T^2 = T$；

(2) 求$\mathrm{R}(T)$及$\ker(T)$的基，并证明它们合在一起可构成V的基B'.

(2)' $V = \mathrm{R}(T) \oplus \ker(T)$

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，令 $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha} - T(\boldsymbol{\alpha})] + T(\boldsymbol{\alpha})$，因为 $T[\boldsymbol{\alpha} - T(\boldsymbol{\alpha})] = T(\boldsymbol{\alpha}) - T^2(\boldsymbol{\alpha}) = T(\boldsymbol{\alpha}) - T(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha} - T(\boldsymbol{\alpha}) \in \ker(T)$，而 $T(\boldsymbol{\alpha}) \in R(T)$，所以有 $V = \ker(T) + R(T)$. $\forall \boldsymbol{\beta} \in R(T)$，必有 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，使 $T(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$，故 $T(\boldsymbol{\beta}) = T^2(\boldsymbol{\alpha}) = T(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$，由此可知 $\ker(T) \cap R(T) = \{\mathbf{0}\}$.

例6

已知$T\in L(V)$， T在V的基e_1,e_2,e_3下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{pmatrix}$.

(3) 求T在基B'下的矩阵；

$$T[e_1,e_2,e_3]=[e_1,e_2,e_3]A$$

$$T[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]D$$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[e_1,e_2,e_3]C$$

$$\begin{aligned}T[\beta_1,\beta_2,\beta_3]&=T[e_1,e_2,e_3]C\\&=[e_1,e_2,e_3]AC\\&=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]C^{-1}AC\\&=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]D\end{aligned}$$

$$T[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]D$$

线性算子T在不同基下的矩阵是相似的。

例6

已知$T \in L(V)$，T在V的基e_1, e_2, e_3下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(4) 证明：$\forall \alpha \in R(T)$，恒有$\mathrm{T}(\alpha) \in R(T)$，$\forall \beta \in \ker(T)$，恒有$\mathrm{T}(\beta) \in \ker(T)$.

$$\forall \alpha \in R(T), \exists \eta, 使得 \alpha = \mathrm{T}(\eta)$$

$$T(\eta) = T^2(\eta) = T(\alpha) \in R(T)$$

$$\forall \beta \in \ker(T), 有 \mathrm{T}(\beta) = 0$$

$$T(T(\beta)) = T^2(\beta) = T(\beta) = 0 \in \ker(T)$$