西安交通大学考试题

成绩	

课　程 高等数学（Ⅰ,Ⅱ）

系　别 ________　　考试日期　2015 年 11 月 8 日

专业班号 ________

姓　名 ________　　学　号 ________　　期中 ✓　　期末

一、填空（每小题 4 分，共 20 分）

1　设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则常数 a 与 b 应满足 a=b .

2　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^x-1}{x\sin x}=$ 1 .

3　曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\ne -1)$ 的斜渐近线方程为 y=x-1 .

4　函数 $y=xe^{-x}$ 的凸区间是 (-∞,2) .

5　若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$，则 $a=$ e .

二、单项选择 (每小题 4 分，共 20 分)

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0,\varphi(x)$ 有间断点，则（ B ）

A. $f\left(\varphi(x)\right)$ 必有间断点　　B. $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点

C. $\varphi\left(f(x)\right)$ 必有间断点　　D. $\left(\varphi(x)\right)^2$ 必有间断点

定义 ✓ 2. 设函数 $f(x)$ 可导且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线的斜率为（ A. ）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

总结 个导数

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=\left[f(x)\right]^2$，则 $f^{(n)}(x)=$（ C ）$(n>2)$.

A. $\left[f(x)\right]^{2n}$　　B. $(n!)\left[f(x)\right]^{2n}$　　C. $(n!)\left[f(x)\right]^{n+1}$　　D. $n\left[f(x)\right]^{n+1}$

讨论. 可导性.

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是（ B ）.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

5. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（ D ）.

A. $f(x)$ 取得极小值　　B. $f(x)$ 的导数不存在

C. $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\neq 0$　　D. $f(x)$ 取得极大值

三、计算下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ $= e^{-\frac{1}{6}}$. (Heine定理. L'Hospital 法则).

回顾.

2. 设 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^3$，求 y' $=\begin{cases} -3\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & x>1 \\ 3\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & x<-1 \end{cases}$

3. 求曲线 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.　　对应的点 $(3,1)$,

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{y'}{x'}\Big|_{t=0}=\frac{e}{2}$. ∴ 切线方程: $y-1=\frac{e}{2}(x-3)$.

4. 求由方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

两边求导. $y'x-y=x+yy'$, $y'=\frac{x+y}{x-y}$

$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$ 代入即可.

5. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geq 0$.

① 求 $\varphi(x)$ 及其定义域; ② 求 $\varphi'(-1)$.

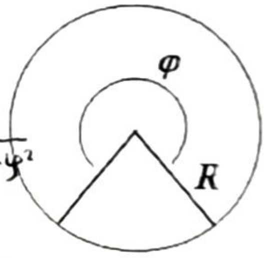
$f[\varphi(x)]=e^{(\varphi(x))^2}=1-x$, $(\varphi(x))^2=\ln(1-x)$.

$\varphi(x)=[\ln(1-x)]^{\frac{1}{2}}$, $x<1$.

$\varphi'(x)=\frac{1}{2}[\ln(1-x)]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-1}{1-x}$

$\varphi'(-1)=\frac{-1}{4}[\ln 2]^{-\frac{1}{2}}$.

四、（9 分）如图，从半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗，留下的扇形的中心角 φ 取多大时做成的漏斗的容积最大？



参见P3三题. 设留下的扇形围成的漏斗的底半径r, 高h.

则 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$. 又 $2\pi r=R\varphi$. ∴ $V=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$

$(0<\varphi<2\pi)$. $\frac{dV}{d\varphi}=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\varphi\pi^2-3\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}=0$, $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

$\varphi\in(0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi)$, $\frac{dV}{d\varphi}>0$, $\varphi\in(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi,2\pi)$, $\frac{dV}{d\varphi}<0$. $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 为唯一

极大值点. ~~V最大~~ $=V_{最大}=V(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi)=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi)^2\cdot\sqrt{4\pi^2-(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi)^2}$

五、（9 分）设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x) \neq 0$，$f(a) = f(b) = g(a) =$ (已证明)

$g(b) = 0$，证明：（1）在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$；（2）存在 $\xi \in (a, b)$，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

(2). 令 $F(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$，应用Rolle定理.

六、（7 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，$f(a) > 0, f'(a) < 0, x > a$ 时 $f''(x) < 0$，

证明：$f(x) = 0$ 在 $(a,+\infty)$ 上有且只有一个实根.

∵ $f''(x) < 0$，$f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 严格递减，$\forall x > a$，

$f'(x) < f'(a) < 0$，∴ $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上严格递减

只需证 $\exists x_0 \in (a,+\infty)$ 使 $f(x_0) < 0$，

∵ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x-a)^2$，$\left(\xi = a + \theta(x-a),\ 0<\theta<1\right)$

$< f(a) + f'(a)(x-a)$

当 $x > a + \dfrac{-f(a)}{f'(a)}$ 时，$f(x) < 0$，而 $f(a) > 0$.

∴ $\exists x_0 \in (a,+\infty)$，使 $f(x_0) = 0$.

1. (2002). 设$f(x)$三阶可导，且$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明$\exists\,\eta\in(-1,1)$，使$f'''(\eta)\ge3$. 证明 $f(0)=0$, $f'(0)=0$. 由 $f(x)=\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$ 可得

$1=f(1)-f(-1)\le\frac{2}{3!}\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$. 即$\exists\,\eta\in(-1,1)$，使$f'''(\eta)\ge3$.

2. (2002) 设$f(x)$在$x=0$处可导，且$x\to0$时，$f(x)-1$与x为等价无穷小，求 $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$

解. $\because \lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=1$ $\therefore f(0)=1$, $f'(0)=1$.

$\therefore$ 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-1}{\sin x}\cdot\frac{x}{\ln(1+f(x)-1)}=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)-1}=1$.

3. (2001). 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，且 $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$.

证明① $\exists\,\xi\in(0,1)$，使$f(\xi)=0$; ② $\exists\,\eta\in(0,1)$，使$f''(\eta)=f(\eta)$.

证明 (1) $\because \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ $\therefore \exists\,\xi_1\in(0,\frac12)$，使$f(\xi_1)>0$，而$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$ $\therefore \exists\,\xi_2\in(\frac12,1)$ 使

$\frac{f(\xi_2)}{\xi_2-1}>0$, $f(\xi_2)<0$, $\therefore \exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使$f(\xi)=0$.

(2) 由题设有 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(1)=0$, $f'(1)=2$, 要 $e^xf''(x)-e^xf(x)=0$

分析 只要令 $F(x)=e^xf'(x)-e^xf(x)$. $F(0)=1$, $F(1)=2e$. 而$f(0)=f(1)=0$

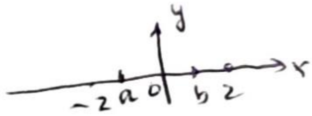
$\therefore \exists\,\xi_1\in(0,1)$ 使 $f'(\xi_1)=0$, $\{f(\xi_1)=\max f(x)>0\}$. $F(\xi_1)=-e^{\xi_1}f(\xi_1)\le0$ $\therefore \exists\,\xi\in(\xi_1,1)$，使

$F(\xi)=1$. $\therefore \exists\,\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使 $F'(\eta)=0$. 从而$f''(\eta)=f(\eta)$

4. 判断极值和拐点. $f(x)=x^2(x-1)^3(x-2)^4$.

5. (2008). 设$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|\le1$，又$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$. 证明

$\exists\,\xi\in(-2,2)$，使$f''(\xi)+f(\xi)=0$.



分析: 令$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$.

$\because \frac{f(0)-f(-2)}{2}=f'(a)$, $a\in(-2,0)$; $\frac{f(2)-f(0)}{2}=f'(b)$, $b\in(0,2)$

$|f'(a)|\le1$, $|f'(b)|\le1$. $F(a)=[f(a)]^2+[f'(a)]^2\le2$, $F(b)\le2$,

$F(0)=4$. $\therefore F(x)$在(a,b)内有最大值，设其为ξ，则$F'(\xi)=0$.

从而有 $2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$. $f'(\xi)\ne0$，反证法 若$f'(\xi)=0$

则 $F(\xi)=[f(\xi)]^2\le1$. 而$F(\xi)\ge4$. 矛盾. $\therefore f(\xi)+f''(\xi)=0$.