一、单项选择题（请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 30 分）

1 设A_{ij}是$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\0&2&3&1\\1&1&4&8\end{vmatrix}$的$(i,j)$元的代数余子式，则$A_{13}+2A_{23}+A_{43}=$（ ）

(A) 20 (B) 12 (C) 1 (D) 0

$$\boldsymbol{A}_{13}+2\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{43}=\boldsymbol{A}_{13}+2\boldsymbol{A}_{23}+0\cdot\boldsymbol{A}_{33}+\boldsymbol{A}_{43}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\0&2&3&1\\1&1&4&8\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1&2&1&4\\2&3&2&2\\0&2&0&1\\1&1&1&8\end{vmatrix}$$

2 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=3$，则 $|-2A|=$

(A) -6　　(B) 6　　(C) -24　　(D) 24

3 设 A,B 为 n 阶方阵，则下列等式成立的是

3 设 A,B 为 n 阶方阵，则下列等式成立的是

(A) $AB=BA$　　(B) $|AB|=|BA|$

(C) $|A+B|=|A|+|B|$　　(D) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

4 设 A 为 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=2$，则 $|A^*|=$　　(　)

(A) 2　　(B) 4　　(C) 8　　(D) 16

(　)

5 设同阶方阵 A 与 B 等价，则有 ( )

(A) $|A|=|B|$ (B) $|A|\neq|B|$ (C) $r(A)=r(B)$ (D) $r(A)\neq r(B)$

( )

6 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则

(A) $(A^{-1})^{*}=|A|^{-1}A$ (B) $(A^{-1})^{*}=|A|A$

(C) $(A^{-1})^{*}=|A|^{-1}A^{-1}$ (D) $(A^{-1})^{*}=|A|A^{-1}$

7 设 A 为 n 阶方阵，B 为 m 阶方阵，$C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$，则 $|C|=$ ( )

(A) $|A|\cdot|B|$ (B) $-|A|\cdot|B|$

(C) $(-1)^{m+n}|A|\cdot|B|$ (D) $(-1)^{mn}|A|\cdot|B|$

8 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，且 $ABC=I$（单位阵），则下式未必成立的是（ ）

(A) $BCA=I$ (B) $CAB=I$ (C) $ACB=I$ (D) $C^{T}B^{T}A^{T}=I$

9 设 $1\times n$ 矩阵 $\alpha=(\frac{1}{2},0,0,\cdots,0,\frac{1}{2})$，$A=I-\alpha^{T}\alpha,B=I+2\alpha^{T}\alpha$，则（ ）

(A) A,B都不可逆 (B) A可逆但B不可逆

(C) A不可逆而B可逆 (D) A,B都可逆且互为逆矩阵

第二章习题

1.填空题

(2) 设n维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^{T}$（其中常数$a<0$），已知矩阵 $A=I-\alpha\alpha^{T}$ 的逆矩阵为 $B=I+\frac{1}{a}\alpha\alpha^{T}$

则 $a=$ ___-1___ .

分析:

$$AB=I\Rightarrow(2a^{2}+a-1)=0$$

10 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若有下三角可逆矩阵 P 与上三角可逆矩阵 Q 使 PAQ 为对角阵，则 P,Q 可分别取为 ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$P(i(k),j)A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}+ka_{i1}&\cdots&a_{jn}+a_{in}\\ \vdots&&\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ (r_i)\\ \\ (r_j)\\ \\ \\ \end{array}$$

3）倍加

$$P(i(k),j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&k&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}(c_i)&(c_j)\end{array}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ (r_i)\\ \\ (r_j)\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

r_j+kr_i

或 c_i+kc_j

$P(i(k),j)^{-1}=P(i(-k),j)$

$$AP(i(k),j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i}+ka_{1j}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mi}+ka_{mj}&\cdots&a_{mj}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}(c_i)&(c_j)\end{array}\end{array}$$

二填空题（每题 3 分，共 15 分）

11 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0$ 的根为______

12 点 $M(1,2,3)$ 到平面 $x-2y+2z+3=0$ 的距离为______

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4+x & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1+a_2+a_3+a_4+x & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4+x & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+a_3+a_4+x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ 1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ 1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

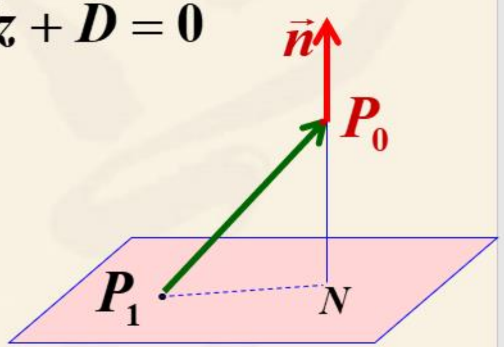
$$=(a_1+a_2+a_3+a_4+x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+a_3+a_4+x)x^3$$

六、距离

1、点到平面的距离

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到平面的距离.



任取 $P_1(x_1,y_1,z_1)\in\Pi$

$$d=|(\overrightarrow{P_1P_0})_{\vec{n}}|$$

$$=\left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

13 已知向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}=(1,2,-2)$ 平行，且 $\vec{b}$ 与z轴正向的夹角为锐角，则 $\vec{b}$ 的方向余弦为______

14 设矩阵 X 满足矩阵方程 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&4\\1&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$

则 $X=$______

15 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，$a_{ij}=A_{ij}$，$a_{11}=2a_{12}=3a_{13}$，已知 $a_{11}>0$，则 $a_{11}=$______

三 解答题(第 16-20 题，每题 9 分；第 21 题，10 分)

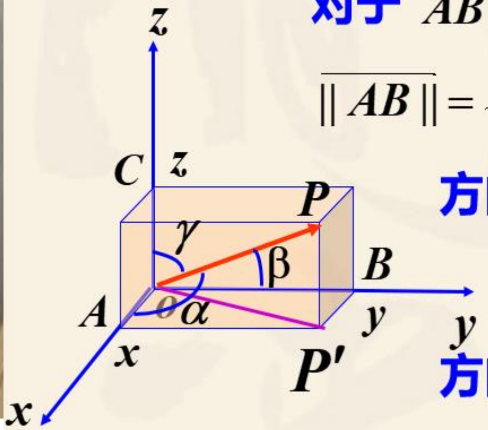
16 设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|=5,|B|=3,|A^{-1}+B|=3$,求 $|B^{-1}+A|$.

3、向量的长度与方向余弦

设 $\vec{a}=(x,y,z)$ 则 $\|\vec{a}\|=\|\overline{OP}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

对于 $\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

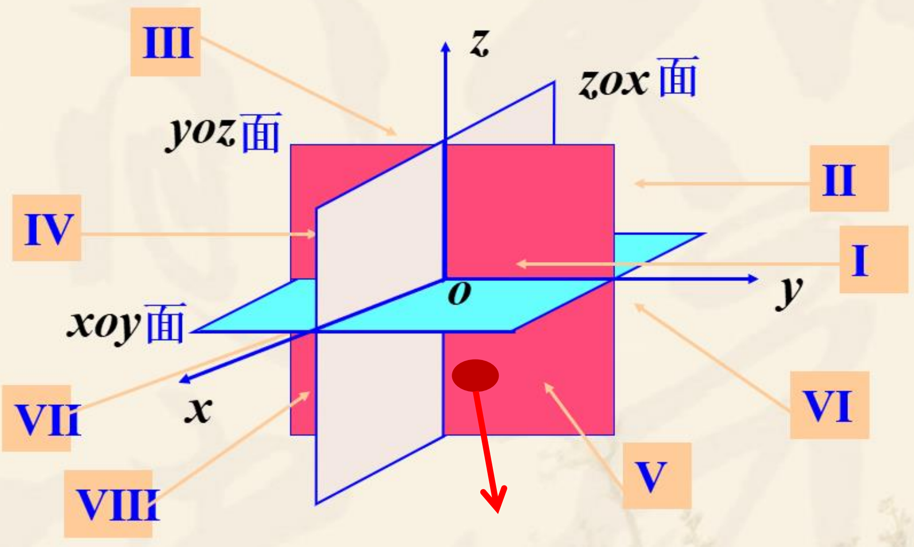
$$\|\overline{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



方向角 向量 $\vec{a}$ 与x轴,y轴,z轴正向之间的夹角α,β,γ

方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\|\vec{a}\|}$

$$\cos\beta=\frac{y}{\|\vec{a}\|}\qquad \cos\gamma=\frac{z}{\|\vec{a}\|}$$



空间直角坐标系共有八个卦限

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

$$=(A^*)^T$$

$$AA^*=AA^T=|A|E$$

$$|A|=1$$

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1$$

$$a_{11}^2+\frac{a_{11}^2}{4}+\frac{a_{11}^2}{9}=1 \qquad a_{11}=\frac{6}{7}$$

三、解答题

16 解 $B^{-1}+A=B^{-1}(I+BA)=B^{-1}(A^{-1}+B)A$ 5分

$|B^{-1}+A|=|B^{-1}|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|A|$ (7分) $=|B|^{-1}\cdot|A^{-1}+B|\cdot|A|=5$ 9分

17 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+3a & 2+3b & 2+3c & 2+3d \\ 4a+5a^2 & 4b+5b^2 & 4c+5c^2 & 4d+5d^2 \\ 6a^2+7a^3 & 6b^2+7b^3 & 6c^2+7c^3 & 6d^2+7d^3 \end{vmatrix}$.

17 解

$$D \xlongequal{r_{12}(-2),\, r_{23}(-\frac{4}{3}),\, r_{34}(-\frac{6}{5})} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c & 3d \\ 5a^2 & 5b^2 & 5c^2 & 5d^2 \\ 7a^3 & 7b^3 & 7c^3 & 7d^3 \end{vmatrix}$$ ………4 分

………9 分

$$=105(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

………5 分

17 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+3a & 2+3b & 2+3c & 2+3d \\ 4a+5a^2 & 4b+5b^2 & 4c+5c^2 & 4d+5d^2 \\ 6a^2+7a^3 & 6b^2+7b^3 & 6c^2+7c^3 & 6d^2+7d^3 \end{vmatrix}$.

18 求过直线 $L\begin{cases}2x-z=0\\ x+y-z+5=0\end{cases}$ 且垂直于平面 $\pi_0: 7x-y+4z=4$ 的平面方程.

(1) 交线L上所有的点必满足两个平面方程，当然也就满足平面束方程；

(2) λ可为任意实数，改变λ的值，便得到一个不同的平面；但不论λ取何值，所得平面必过交线L。

(3) 两个平面的交线L必垂直于这两个平面的法向量a和b，而a+λb可用来表示所有过L的平面的法向量。

18 解　设过直线的平面束为：$x+y-z+5+\lambda(2x-z)=0$，　……3分

即　$(1+2\lambda)x+y+(-1-\lambda)z+5=0$，

又平面束与已知平面的法向量垂直，因此有 $7(1+2\lambda)-1-4(1+\lambda)=0$ ……7分

解之得 $\lambda=-\frac{1}{5}$，因此，所求平面的方程为 $3x+5y-4z+25=0$。　……9分

法向量为 $\vec{n}_1$，过点 $P_0(-3,5,9)$

19 **解法 1** 设过点 $P_0(-3,5,9)$ 及直线 L_1 的平面为 π_1，法向量为 $\vec{n}_1$，过点 $P_0(-3,5,9)$ 及直线 L_2 的平面为 π_2，法向量为 $\vec{n}_2$.

化 L_1 为对称式方程 $L_1: x=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{2}$，知 L_1 过点 $P_1(0,5,-3)$，方向向量为 $\vec{a}_1=(1,3,2)$. 则 ……3 分

$\vec{n}_1=\vec{a}_1\times\overrightarrow{P_1P_0}=(36,-18,9)//(4,-2,1)$，

所以平面 π_1 的方程为：$4(x+3)-2(y-5)+(z-9)=0$， ……5 分

即 $4x-2y+z+13=0$.

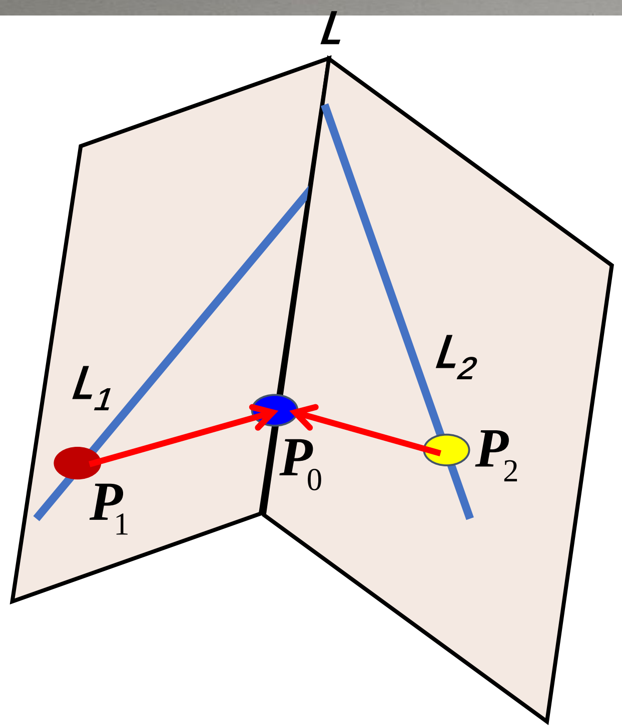
化 L_2 为对称式方程 $L_2: x=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-10}{5}$，知 L_2 过点 $P_2(0,-7,10)$，方向向量为 $\vec{a}_2=(1,4,5)$.

则 $\vec{n}_2=\vec{a}_2\times\overrightarrow{P_2P_0}=(-64,-14,24)//(32,7,-12)$，所以平面 π_2 的方程为

$32(x+3)+7(y-5)-12(z-9)=0$，即 $32x+7y-12z+169=0$ ……7 分

故所求直线的方程为：$\begin{cases}4x-2y+z+13=0,\\32x+7y-12z+169=0.\end{cases}$ ……9 分

19 求过点 $P_0(-3,5,9)$ 且与直线 $L_1\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases}$ 及 $L_2\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$ 都相交的直线 L 的方程.



解法 2 分别化 L_1、L_2 为对称式方程 $L_1: x=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{2}$，$L_2: x=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-10}{5}$.知 L_1 过点 $P_1(0,5,-3)$，方向向量为 $\vec{a}_1=(1,3,2)$；L_2 过点 $P_2(0,-7,10)$，方向向量为 $\vec{a}_2=(1,4,5)$.

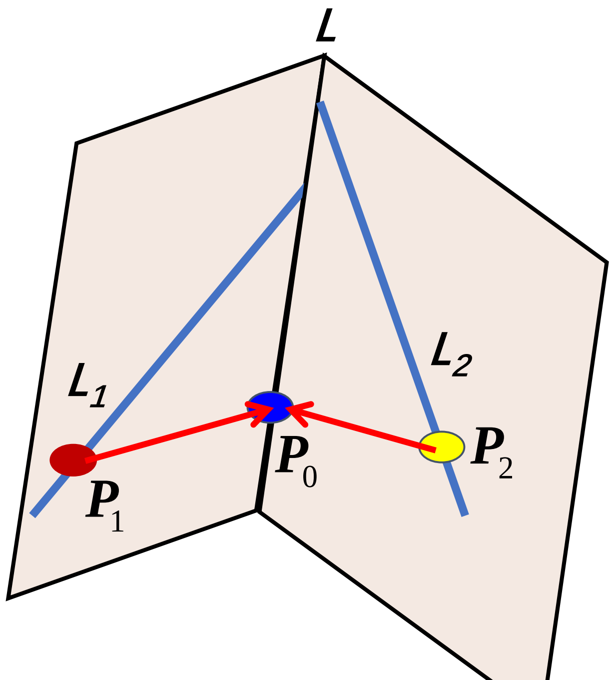
设所求直线的方向向量为 $\vec{a}=(l,m,n)$，以题意有 $[\vec{a},\vec{a}_1,\overrightarrow{P_1P_0}]=0$, $[\vec{a},\vec{a}_2,\overrightarrow{P_2P_0}]=0$, … 5 分

即 $\begin{cases}36l-18m+9n=0\\-64l-14m+24n=0\end{cases}$，于是取 $\vec{a}=(17,80,92)$ ……7 分

所求直线的方程为 $\dfrac{x+3}{17}=\dfrac{y-5}{80}=\dfrac{z-9}{92}$. ……9 分

$B^T[(BB^T)^{-1}]^T B = I - B^T[(BB^T)^T]^{-1} B$

19 求过点 $P_0(-3,5,9)$ 且与直线 $L_1\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases}$ 及 $L_2\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$ 都相交的直线 L 的方程.



20 设 B 是 $m\times n$ 矩阵，且 BB^{T} 可逆，$A=I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B$.

（1） 证明 A 是对称矩阵，且 $A^2=A$；（2） A 是否可逆，为什么？

20. 解（1） $A^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}-[B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B]^{\mathrm{T}}=I-B^{\mathrm{T}}[(BB^{\mathrm{T}})^{-1}]^{\mathrm{T}}B=I-B^{\mathrm{T}}[(BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]^{-1}B$ ……3 分

$=I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=A$，所以 A 是对称矩阵。

$A^2=[I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B][I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B]$ ……5 分

$=I-2B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B+B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}BB^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=A$ ……6 分

（2） A 是不可逆。

如果 A 可逆，由（1）知 $A^2=A$，则 $AAA^{-1}=AA^{-1}$，即 $A=I$，于是 $B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=O$ 从

而 $BB^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=BO=O$，得 $B=O$，进而 $BB^{\mathrm{T}}=O$ 与 BB^{T} 可逆矛盾。………9 分

定理2.5.2

设$r(A_{m\times n})=r$,则$\exists$可逆矩阵P及Q,使得PAQ成为下列矩阵之一：

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [I_m, \ 0], \quad I_n$$

(当$r<m$且$r<n$) (当$r=n<m$) (当$r=m<n$) (当$r=m=n$)

21 设有$m\times n$矩阵A，$r(A)$表示A的秩.

(1) 证明：$r(A)=r$的充分必要条件是存在$m\times r$的列满秩矩阵G和$r\times n$的行满秩矩阵H，使$A=GH$.

(2) 证明：若$r(A)=r$，则A可表示为r个秩为1的矩阵之和。

思考题

设A是n阶矩阵，r(A)=r.证明：必存在n阶可逆矩阵B及秩为r的n阶矩阵C满足$C^2=C$，使A=BC.

解 由定理2.5.2知存在n阶可逆方阵P,Q,使

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}Q^{-1}=P^{-1}Q^{-1}Q\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}Q^{-1}$$

$$令B=P^{-1}Q^{-1},C=Q\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}Q^{-1}$$

则B为n阶可逆矩阵,C为秩为r的n阶矩阵,满足 $C^2=C$

使得A=BC

定理2.5.2

设$r(A_{m\times n})=r$,则∃可逆矩阵P及Q,使得PAQ成为下列矩阵之一：

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [I_m, \ 0], \quad I_n$$

(当$r<m$且$r<n$) (当$r=n<m$) (当$r=m<n$) (当$r=m=n$)

21 设有$m\times n$矩阵A，$r(A)$表示A的秩.

(1) 证明：$r(A)=r$的充分必要条件是存在$m\times r$的列满秩矩阵G和$r\times n$的行满秩矩阵H，使$A=GH$.

(2) 证明：若$r(A)=r$，则A可表示为r个秩为1的矩阵之和。

21. 证（1）若$r(A)=r$，则存在可逆矩阵P,Q，使得$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ......1 分

即 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r \quad O)$ ......2 分

所以$A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r \quad O)Q^{-1}=GH$

其中$G=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$,$H=(I_r \quad O)Q^{-1}$，$r(G)=r\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}=r$,$r(H)=r(I_r \quad O)=r$. ......3 分

反之，因为G列满秩，存在可逆矩阵$\tilde{P}$，使得$\tilde{P}G=\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$ ......4 分

而H行满秩，存在可逆矩阵$\tilde{Q}$，使得$H\tilde{Q}=(I_r \ O)$ ......5 分

于是$\tilde{P}A\tilde{Q}=\tilde{P}GH\tilde{Q}=\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r \ O)=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，所以$r(A)=r$ ......6 分

证（2）由（1）知，$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=I_{11}+I_{22}+\cdots+I_{rr}$ ......8 分

其中I_{ii}为(i,i)元是1其余元素均为0的$m\times n$矩阵，则$r(I_{ii})=1(i=1,2,\cdots,r)$.

而$A=P^{-1}(I_{11}+I_{22}+\cdots+I_{rr})Q^{-1}=P^{-1}I_{11}Q^{-1}+P^{-1}I_{22}Q^{-1}+\cdots+P^{-1}I_{rr}Q^{-1}$ ......9 分

且$r(P^{-1}I_{ii}Q^{-1})=r(I_{ii})=1(i=1,2,\cdots,r)$. ......10 分

故A可表示为r个秩为1的矩阵之和。