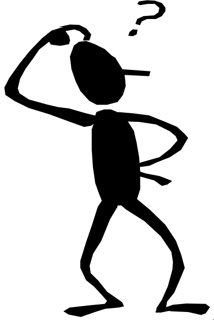
数学的巧妙应用

- 展示数学的奇妙应用
- 学会用数学语言‘翻译’实际问题
- 熟悉建模的基本过程
- 培养和发挥创造性思维能力



包饺子问题

通常，1公斤面， 1公斤馅，包100个饺子

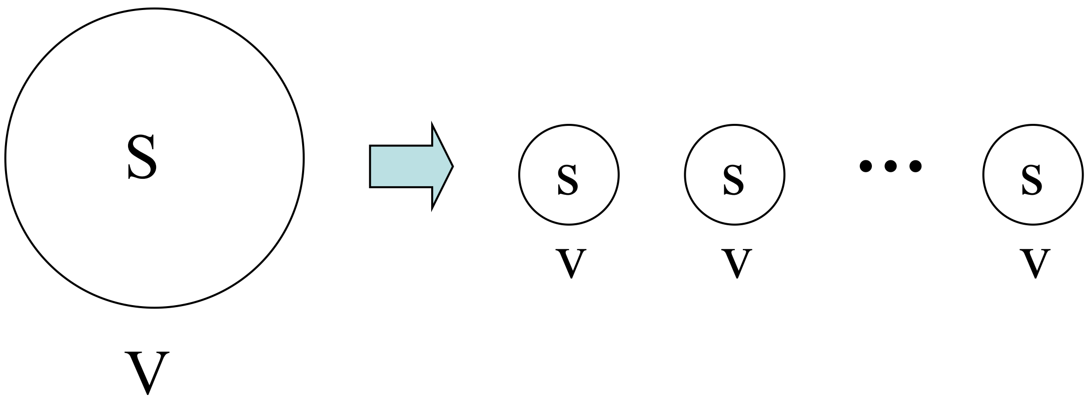
今天，1公斤面不变，馅比 1公斤多了0.4公斤，问：
是否可以多包几个（小一些），或少包几个（大一些）将这些馅仍用1公斤面包完？

多包：皮小一些；少包：皮大一些。

面积 体积

问题

面积为S的一个皮，包成体积为V的饺子。若分成n个皮，每个圆面积为s，包成体积为v。



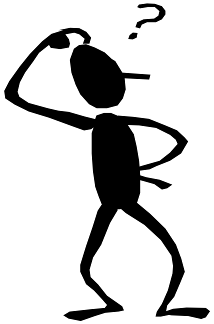
(共n个)

V和 nv 哪个大?

定性分析

V比 nv大或小多少?

定量分析



假设

1. 皮的厚度一样
2. 饺子的形状一样

模型

$\boldsymbol{R}$ ~大皮 的半径；$\boldsymbol{r}$ ~小皮的半径

$S = ns$

$S = k_1 R^2, \quad V = k_2 R^3 \Rightarrow V = kS^{3/2}$

$s = k_1 r^2, \quad v = k_2 r^3 \Rightarrow v = ks^{3/2}$

$V = n^{3/2} v$

应用

$V = \sqrt{n}(nv) \geq nv$

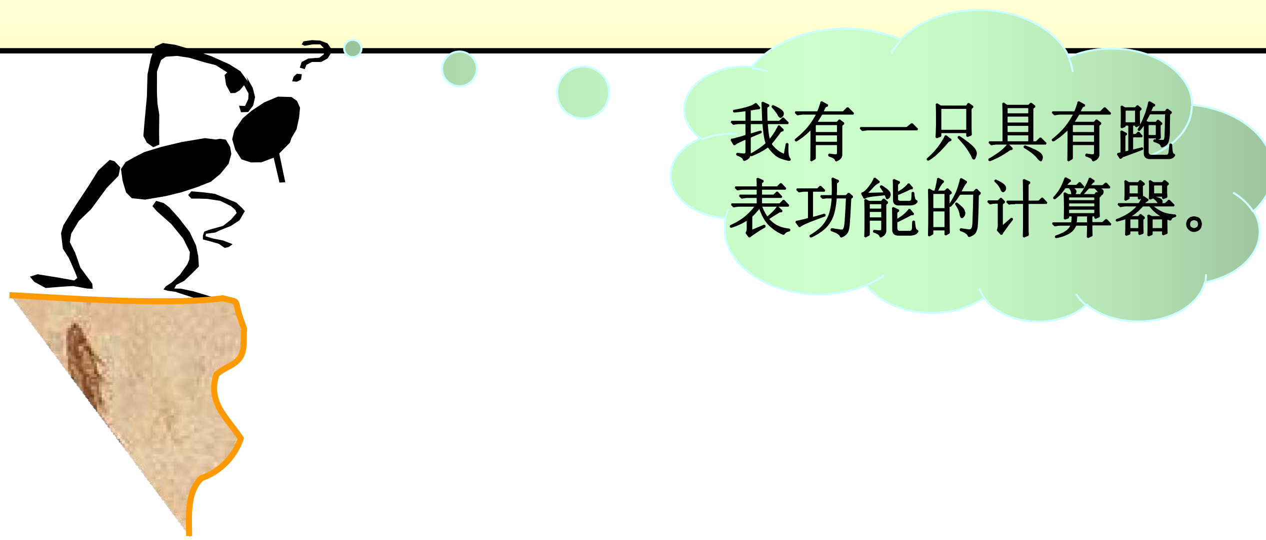
V是 nv的 $\sqrt{n}$ 倍

若100个饺子包1公斤馅,

则50个饺子可以包 1.4 公斤馅

崖高的估算

假如你站在崖顶且身上带着一只具有跑表功能的计算器，你也许会出于好奇心想用扔下一块石头听回声的方法来估计山崖的高度，假定你能准确地测定时间，你又怎样来推算山崖的高度呢，请你分析一下这一问题。



简单想法

记崖高为h

假定空气阻力不计，可以利用自由落体运动的公式来计算。

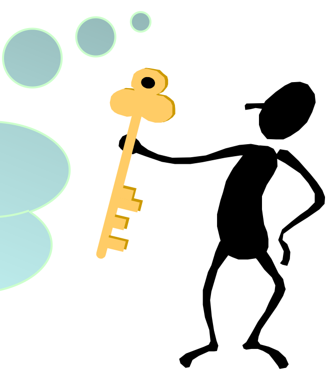
$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

例如， 设测得时间为t=4秒，

g=9.81米/秒^2，则可求得

$h\approx 78.5$（米）

我学过微积分，我可以做得更好~



进一步考虑

除去地球吸引力外，对石块下落影响最大的当属空气阻力。根据力学知识，此时可设空气阻力正比于石块下落的速度，阻力系数 r 为常数。由牛顿第二定律可得：

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=mg-r\frac{dh}{dt}$$

$$h(0)=0,\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=0}$$

令$k\to 0^+$，即可得出前面不考虑空气阻力时的结果

令$k=r/m$，解得

$$h(t)=\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}e^{-kt}-\frac{g}{k^2} \qquad (1)$$

若设$k=0.05$，并仍设 $t=4$秒，则可求得$h\approx 73.6$米。

深入考虑

多测几次，取平均值

听到回声再按跑表，计算得到的时间中包含了反应时间。

不妨设平均反应时间为0.1秒。

假如仍设 $t=4$秒，扣除反应时间后应为3.9秒，代入式(1)求得

$$h\approx 69.9\text{（米）}$$

进一步深入考虑

声音传回需时间

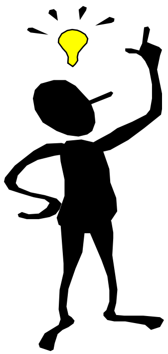
为此，令石块下落的真正时间为t_1，声音传回来的时间记为t_2，得一个方程组：

$$\begin{cases} h = \dfrac{g}{k}\left(t_1 + \dfrac{1}{k}e^{-kt_1}\right) - \dfrac{g}{k^2} \\ h = 340t_2 \\ t_1 + t_2 = 3.9 \end{cases}$$

这一方程组是非线性的，求解不容易。

为了估算崖高竟要去解一个非线性方程组似乎不合情理

近似求解



相对于石块速度，声音速度要快得多，我们可用前一方法先求一次 h，再由声速公式得 $t_2=h/340$，和$t=t_1+t_2$ 校正t。

仍设扣除反应时间后为$t=$ 3.9秒，代入式(1)求得

$$h\approx 69.9 \text{（米）}$$

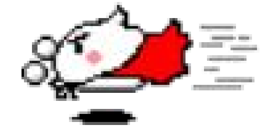
则回声传回时间为

$$t_2 = h/340 \approx 0.21 \text{（秒）}$$

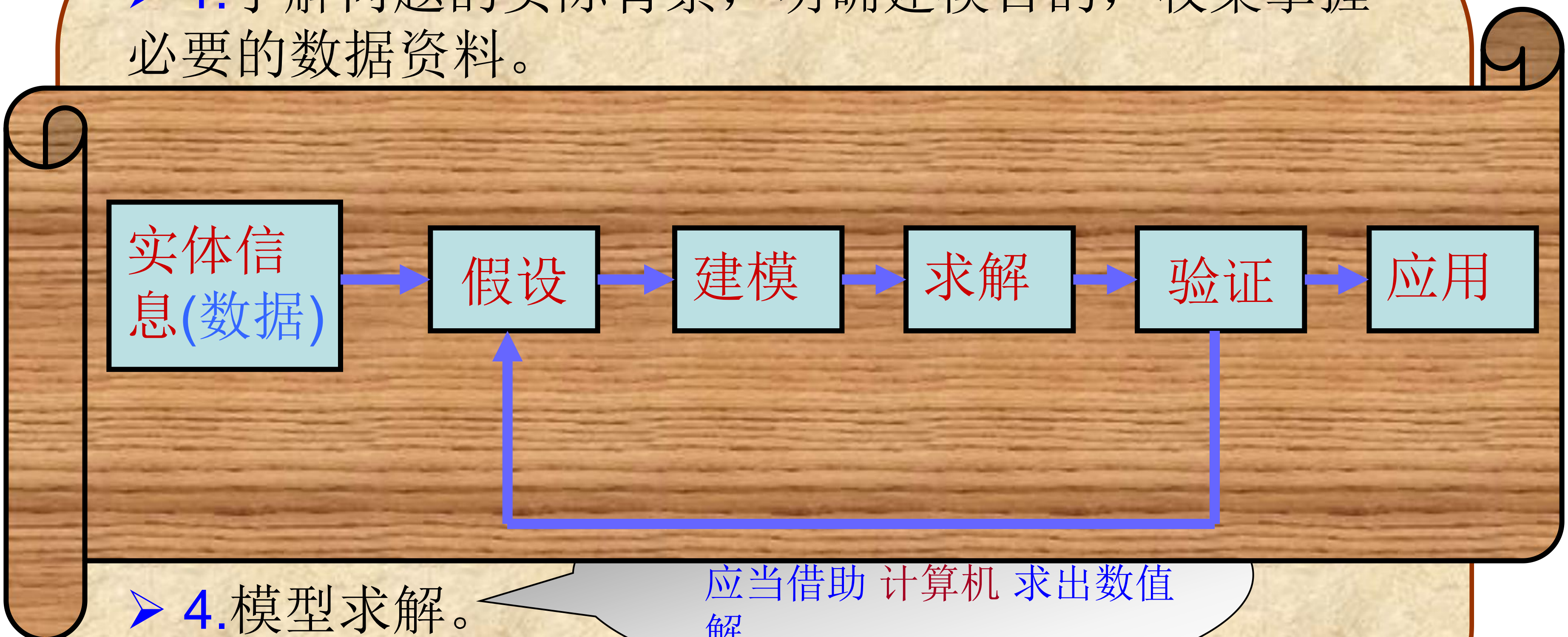
故 $t_1 = t - t_2 \approx 3.69$

求得 $h\approx 62.3$ （米）

数学建模的一般步骤



➢ 1.了解问题的实际背景，明确建模目的，收集掌握必要的数据资料。



➢ 4.模型求解。

应当借助 计算机 求出数值解。

➢ 5.模型的分析与检验。

在不同的理解和假设下可以建立不同的模型，得到不同的结果，但是，不同的假设都应该有一定的合理性，不同的模型都应该在不同的侧面反映实际问题的特征，不同的结果都应该在不同的程度上反映客观事物的变化规律。

流言蜚语的传播问题

假设在某地区的总人口为N，在短期内不变，$x(t)$表示知道消息的人数所占的百分比，初始时刻的百分比为$x_0<1$,传播率为h.

可以建立数学模型为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt}N = hN(1-x), \\
x(0) = x_0,
\end{cases}
$$

求解易得

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-ht} + 1,$$

且

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 1$$

显然这是不符合实际的，实际情况是未知者会从传播中得知，传播率为h，而有一部分人虽知消息，但不轻信，不去传播，于是可设不传播率为r，则数学模型可修正为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} N = N[h - (h + r)x], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

求解得

$$x(t) = (x_0 - \frac{h}{h+r})e^{-(h+r)t} + \frac{h}{h+r},$$

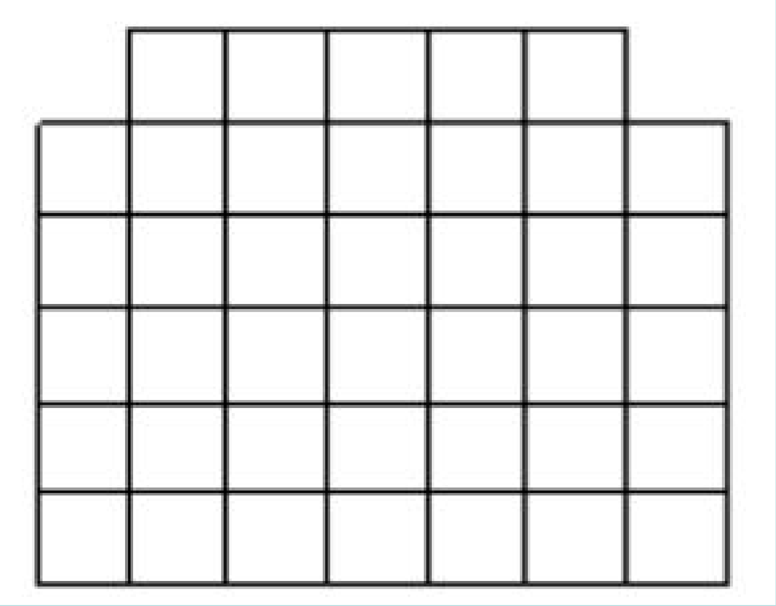
于是有

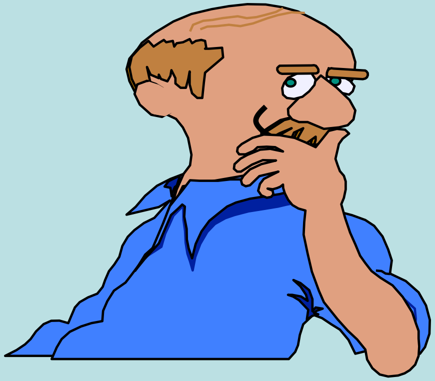
$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \frac{h}{h+r} < 1$$

这样的结论表明：
随着时间的增长，消息慢慢地会淡化，
这是符合实际情况的。

瓷砖问题

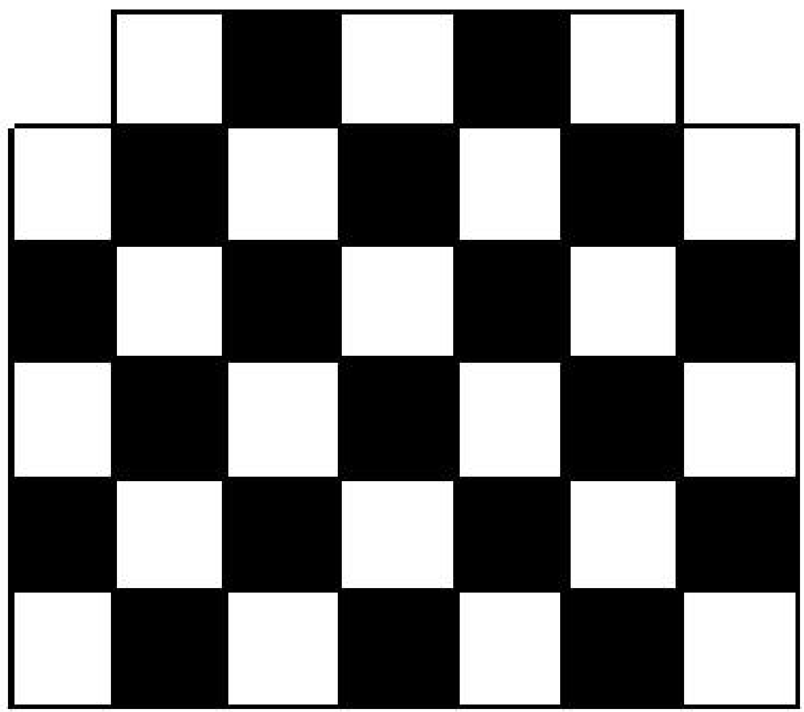
要用40块方形瓷砖铺如下图所示形状的地面,但当时市场上只有长方形瓷砖,每块大小等于方形的两块。一人买了20块长方形瓷砖，试着铺地面,结果弄来弄去始终无法铺好.试问是这人的功夫不到家还是这个问题根本无解呢?





首先必须解决可能性问题

在图上黑白相间地染色，共有19个白格和21个黑格.



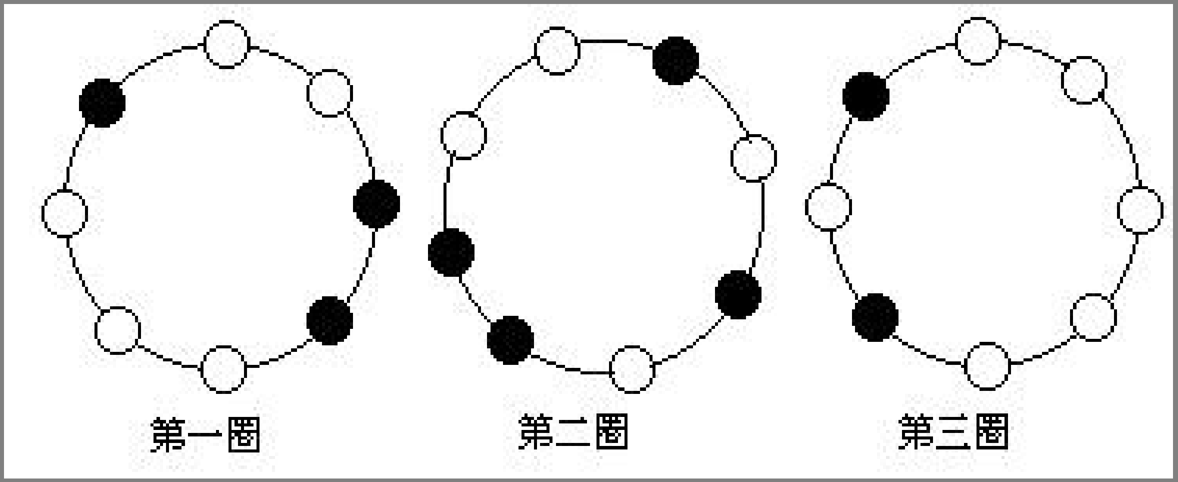
一块长方形瓷砖可以盖住一黑一白两个方格。所以铺上19块长方形瓷砖后,总要剩下2个黑格无法铺,因一块长方形瓷砖是无法盖住两个黑格的。唯一的解决办法是把最后一块瓷砖分为两个正方形瓷砖去盖住两个黑格.

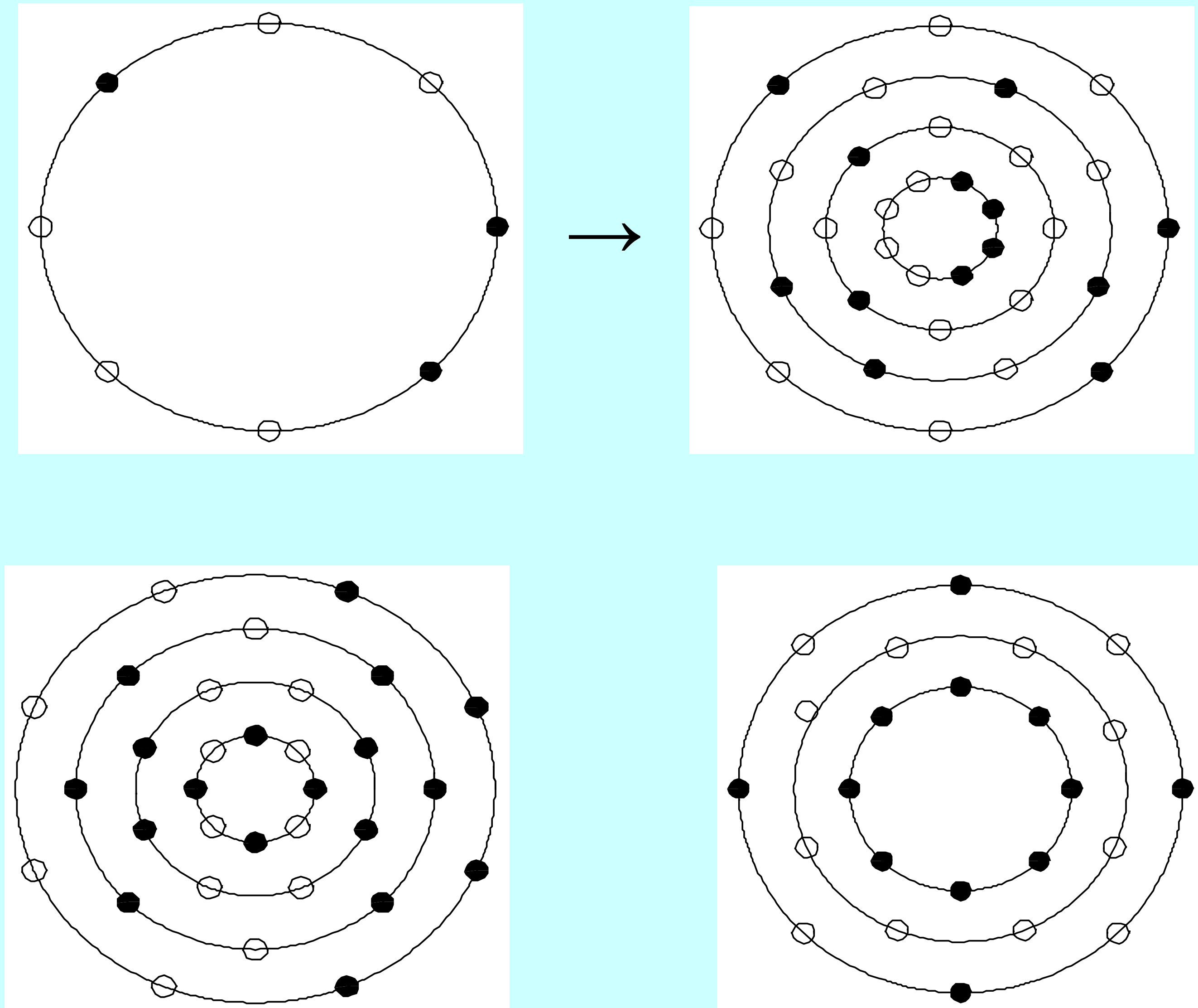
方法：奇偶校验法

说明：任何改变铺设方式的努力都是徒劳

棋子颜色的变化

任意拿出黑白两种颜色的棋子共八个，排成一个圆圈．然后在两颗颜色相同的棋子中间放一颗黑色棋子，在两颗颜色不同的棋子中间放一颗白色棋子，放完后撤掉原来所放的棋子．再重复以上的过程，这样放下一圈后就拿走前次的一圈棋子，问这样重复进行下去各棋子的颜色会怎样变化呢？





分析

注意：规则是黑黑得黑，白白得黑，
黑白得白，与有理数符号规则
或二进制加法规则类似。

方法：用+1表示黑色，-1表示白色，开始
八颗棋子记为a_1，a_2，...，a_8，
并且a_k＝+1或-1，
$a_k a_{k+1}$正好给出了所放棋子的颜色。

椅子的稳定性

4条腿长度相等的椅子放在起伏不平的地面上，问4条腿能否同时着地而放稳?

分析

“放稳”： 4条腿能否同时着地。

量化：任意三点共面，三条腿可以同时着地，关键在第四条腿是否也能着地?

将其转化为两对腿是否能同时着地?

总有一对腿能同时着地，另一对腿是否也能着地?

用数学语言将椅腿着地的条件与结论表示出来

模型假设

1.椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触处可视为一个点，四脚的连线呈正方形

2.地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可视为数学上的连续曲面

3.对于椅脚的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子的任何位置至少有三只脚同时着地

模型构成

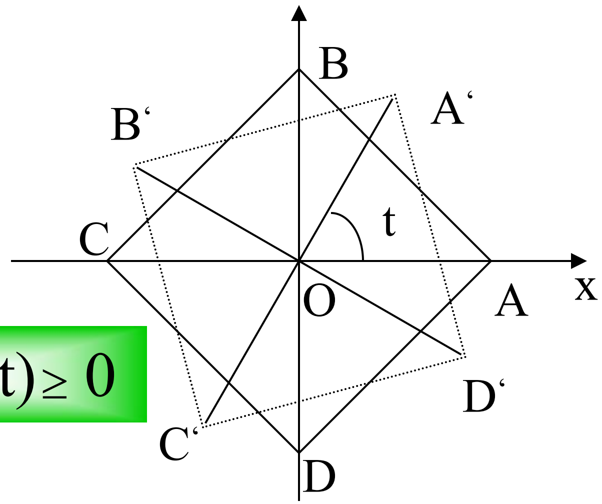
椅脚连线为正方形ABCD(如右图)

t ~椅子绕中心点O旋转角度

f(t)~A,C两脚与地面距离之和

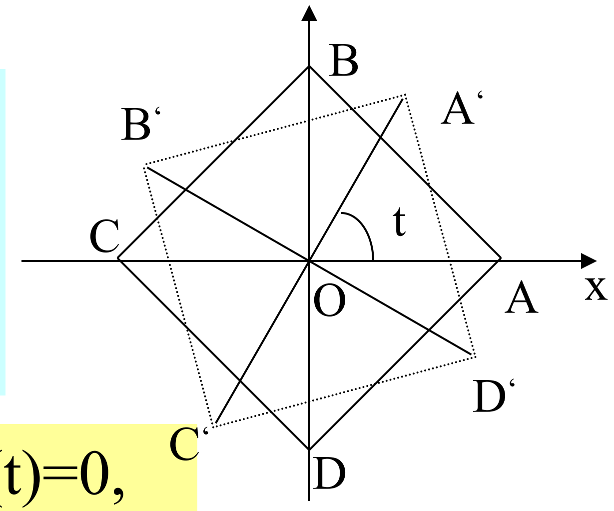
g(t)~B,D两脚与地面距离之和

$f(t), g(t) \geq 0$



由假设2，知f和g都是连续函数

由假设3，椅子在任何位置至少有三只脚同时着地：对任意t，f(t)和g(t)中至少有一个为0。当t=0时,不妨设g(t)=0,f(t)>0,原题归结为证明如下的数学命题：



已知f(t)和g(t)是t的连续函数,对任意t, $f(t)\cdot g(t)=0$,且g(0)=0,f(0)>0。则存在t_0，使$f(t_0)=g(t_0)=0$

模型求解

将椅子旋转90º,对角线AC与BD互换。由g(0)=0,f(0)>0可知$g(\frac{\pi}{2})>0,f(\frac{\pi}{2})=0$

令h(t)= f(t)-g(t),则h(0)>0和$h(\frac{\pi}{2})<0$，由f和g的连续性知h也是连续函数。根据连续函数的基本性质,必存在t_0（$0<t_0<\frac{\pi}{2}$),使$h(t_0)=0$，即$f(t_0)=g(t_0)$。

最后，因为$f(t)\cdot g(t)=0$，所以$f(t_0)=g(t_0)=0$。

评注和思考

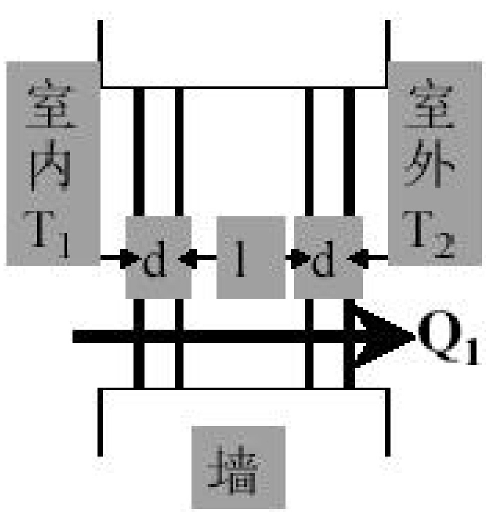
建模的关键～ t 和 $f(t)$, $g(t)$的确定，$h(t)$的定义

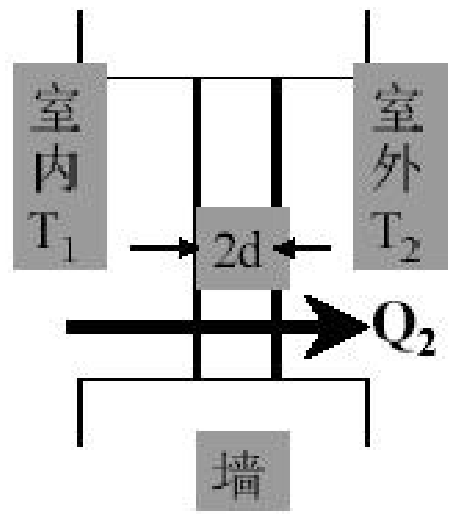
假设条件的本质与非本质

考察四脚呈长方形的椅子

双层玻璃的功效

北方城镇的有些建筑物的窗户是双层的，即窗户上装两层玻璃夹着一层空气，如图所示。据说这样做是为了保暖，即减少室内向室外的热量流失。试建立一个模型来描述热量通过窗户的热传导（即流失）过程，并将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层玻璃窗的热量传导进行对比。





1　模型假设

1. 热量的传播过程只有传导，没有对流。即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃之间的空气是不流动的；
2. 室内温度和室外温度保持不变，热传导过程已处于稳定状态。即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数；
3. 玻璃材料均匀，热传导系数是常数。

二. 引入符号

T_1 ——室内温度

T_2 ——室外温度

d ——单层玻璃厚度

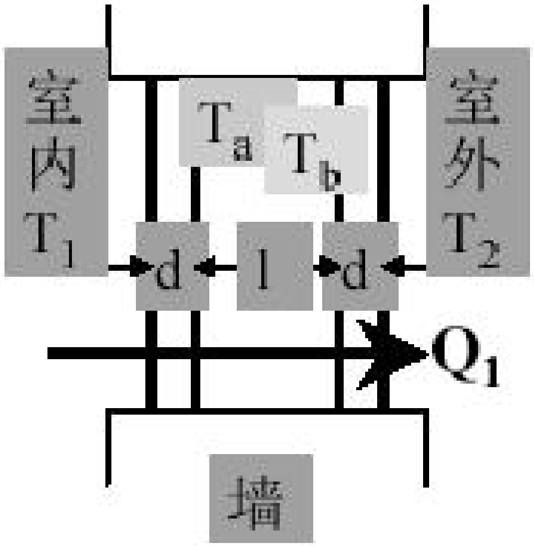
l ——两层玻璃之间的空气厚度

T_a ——内层玻璃的外侧温度

T_b ——外层玻璃的内侧温度

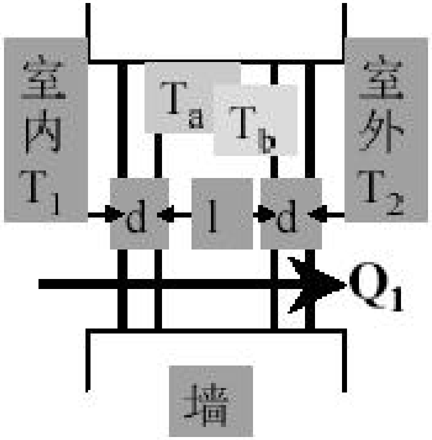
k ——热传导系数

Q ——热量损失



三． 模型建立与求解

由物理学知道，在上述假设下，热传导过程遵从下面的物理规律：厚度为d 的均匀介质，两侧温度差为ΔT，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量Q，与ΔT成正比，与d成反比，即



$$Q = k\frac{\Delta T}{d} \qquad (1)$$

其中k为热传导系数。

1. 双层玻璃的热量流失

内窗玻璃的外侧温度为T_a，外层玻璃的内侧温度为T_b，玻璃的热传导系数为k_1，空气的热传导系数为k_2，由(1)式知单位时间单位面积的热量传导(热量流失)为：

$$Q = k_1\frac{T_1 - T_a}{d} = k_2\frac{T_a - T_b}{l} = k_1\frac{T_b - T_2}{d} \qquad (2)$$

由 $Q=k_1\dfrac{T_1-T_a}{d}$ 及 $Q=k_1\dfrac{T_b-T_2}{d}$ 可得:

$$T_a-T_b=(T_1-T_2)-2\frac{Qd}{k_1}$$

再代入 $Q=k_2\dfrac{T_a-T_b}{d}$ 变形可得:

$$Q=\frac{k_1(T_1-T_2)}{d(s+2)}\ ,\quad s=h\frac{k_1}{k_2}\ ,\ h=\frac{l}{d} \qquad （3）$$

2. 单层玻璃的热量流失

对于厚度为2d的单层玻璃窗户，容易写出热量流失为:

$$Q'=k_1\frac{T_1-T_2}{2d} \qquad （4）$$

3. 单层玻璃窗和双层玻璃窗热量流失比较

比较（3）（4）有:

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{2}{s+2} \qquad （5）$$

显然 $Q<Q'$

进一步从有关资料可知，不流通、干燥空气的热传导系数

$$k_2 = 2.5\times 10^{-4}$$ （焦耳/厘米.秒.度）

常用玻璃的热传导系数

$$k_1 = 4\times 10^{-3} \sim 8\times 10^{-3}$$ （焦耳/厘米.秒.度）

则 $\dfrac{k_1}{k_2} = 16 \sim 32$ 我们作最保守的估计，即取 $\dfrac{k_1}{k_2} = 16$

由（3）（5）可得: $\dfrac{Q}{Q'} = \dfrac{1}{8h+1} \qquad h = \dfrac{l}{d}$ （6）

(6) 式反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效，它只与 $h=l/d$ 有关。

四. 结果分析

- 通常，建筑规范要求 $h = l/d \approx 4$ ，按照这个模型有

$$Q/Q' \approx 3\%$$

即双层玻璃窗比用同样多的玻璃材料制成的单层窗节约热量97%左右。制作双层玻璃窗虽然工艺复杂会增加一些费用，但它减少的热量损失却是相当可观的。

- 不难发现，之所以有如此高的功效主要是由于层间空气的极低的热传导系数，而这要求空气是干燥、不流通的。作为模型假设的这个条件在实际环境下当然不可能完全满足，所以实际上双层玻璃窗的功效会比上述结果差一些。

放射性废物的处理问题

控辩双方:

美国原子能委员会；　民众/工程师

缘起:

处理浓缩放射性废物的做法（把这些废物装入密封性能很好的圆桶中，然后扔到水深300英尺的海里）是否会造成放射性污染?

让事实说话!

问题关键:

圆桶到底能承受多大速度的碰撞？圆桶和海底碰撞时的速度有多大？

已知： 圆桶在40英尺／秒的冲撞下会发生破裂

圆桶： 55加仑 (1加仑=3.785411升)

装满放射性废物时的圆桶重量W=527.436磅

在海水中受到的浮力B=470.327磅

下沉时圆桶所受海水的阻力D= Cv (C = 0.08)

问题： 计算圆桶沉入300英尺深的海底时,其末速度=?

模型及其求解

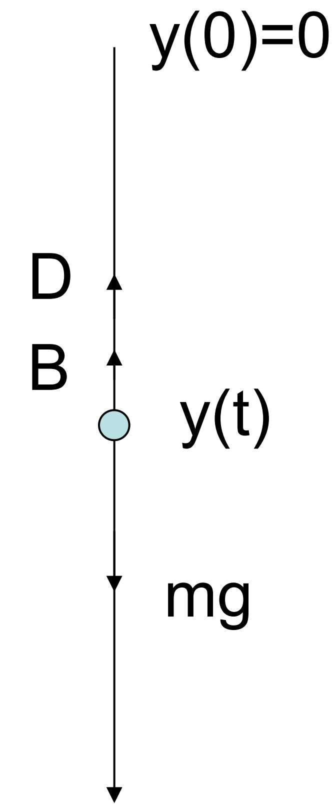
根据牛顿第二定律，圆桶下沉时应满足方程

质量·加速度=重力−浮力−摩擦阻力

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - B - c\frac{dy}{dt}$$

$$y(0)=0, y'(0)=0$$

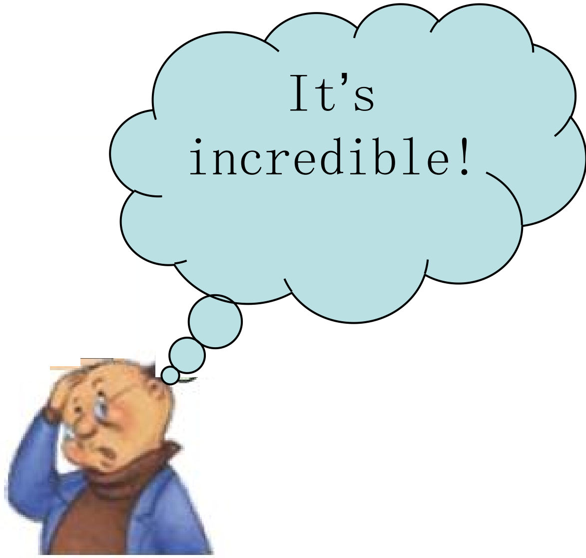
$$y = \frac{m^2g - mB}{c^2}(1 - e^{-ct/m}) + \frac{mg - B}{c}t$$



$$v(t)=\frac{W-B}{C}\left(1-e^{\frac{-Cg}{W}t}\right)$$

极限速度： 713.86（英尺／秒）

！ 713.86 >> 40



困难： 无法知道下沉到海底的时间

$$\frac{dy}{dt}=v,\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$$

$$mv\frac{dv}{dy}=mg-B-cv,v(0)=0$$

$$\frac{mv\,dv}{mg-B-cv}=dy,$$

积分并代入初始条件得:

$$-\frac{m}{c}v+\frac{mg-B}{c^2}\ln\frac{mg-B-cv}{mg-B}=y$$

用数值计算方法得到

v(300)≈45.1英尺／秒＞40英尺／秒

THE WINNER:

+ MATHEMATICS

动物体重的变化问题

某动物从食物中每天得到2500卡的热量，其中1200卡用于基本的新陈代谢，每天每公斤的体重需要再消耗16卡。假如它每增加1公斤体重需要10000卡的热量。问该动物的体重怎样变化？

解1. 离散模型

设该动物的原始体重为w(0)kg，每天剩余的热量全部转化为体重，由题目可设1卡热量可增加1/10000kg体重。w(n)为第n天的体重。（n>=1）可得关系式

w(n)=w(n-1)＋(2500-1200－16w(n-1))/10000

$$w(n)=(1-\frac{16}{10000})w(n-1)+\frac{13}{100}=\frac{624}{625}w(n-1)+\frac{13}{100}$$

递推得

$$
\begin{aligned}
w(n) &= \frac{624}{625} w(n-1) + \frac{13}{100} \\
&= \frac{13}{100}\left(1 + \frac{624}{625} + \frac{624^2}{625^2} + \ldots + \frac{624^{n-1}}{625^{n-1}}\right) + \frac{624^n}{625^n} w(0) \\
&= \frac{13}{100} \frac{1 - \frac{624^n}{625^n}}{1 - \frac{624}{625}} + \frac{624^n}{625^n} w(0)
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} w(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{13}{100} \frac{1 - \frac{624^n}{625^n}}{1 - \frac{624}{625}} + \frac{624^n}{625^n} w(0) = 81.25\,(kg)
$$

解2.　连续模型

设该动物t时刻的体重为x(t)，原始体重为x(0)kg，每天剩余的热量全部转化为体重，由题意得

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\frac{2500\Delta t-1200\Delta t-16x(t)\Delta t}{10000}$$

整理后得

$$x'(t)=\frac{1300-16x(t)}{10000},\quad x(0)=x_0$$

求解得

$$x(t)=(x_0-81.25)\exp\left(-\frac{16}{10000}t\right)+81.25$$

极限情况

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=81.25$$

问题的推广

- 每天得到的热量和基本的新陈代谢热量依赖于体重的变化；
- 每天每公斤的体重需要再消耗；
- 每天单位体重消耗的热量与年龄有关；

……

每天所吸收的热量在变化

自然状态:体重大时多摄入热量, 小时少摄入

$$x'(t)=\frac{\frac{2500x(t)}{81.25}-1200-16x(t)}{10000}$$

调节体重:体重大时少摄入热量, 小时多摄入

$$x'(t)=\frac{2500\left(2-\frac{x(t)}{81.25}\right)-1200-16x(t)}{10000}$$

两者的结合

$$x'(t)=\frac{\frac{2500x(t)}{81.25}(2-\frac{x(t)}{81.25})-1200-16x(t)}{10000}$$

体重控制计划

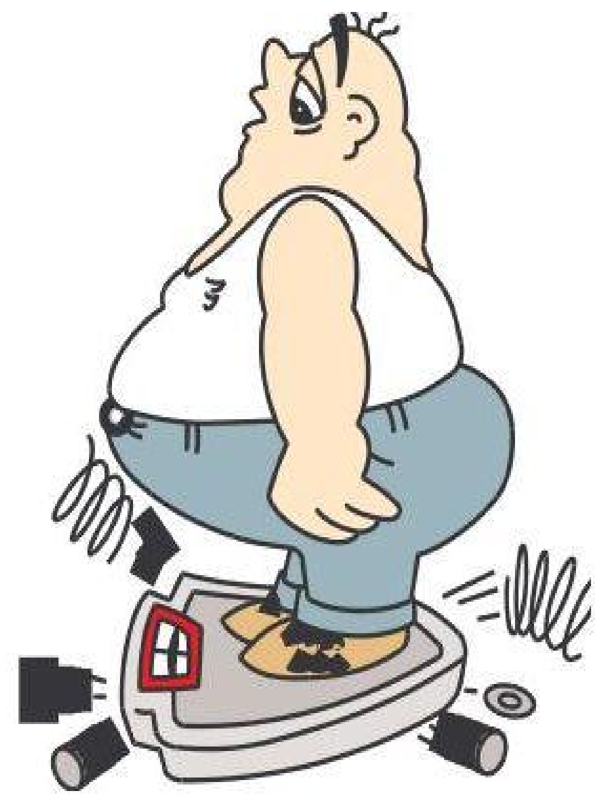
例：某人体重100千克，目前每周吸收20000千卡热量，体重保持不变。现欲通过节食和运动等多种方式，控制体重至75千克，请在不运动的情况下安排一个两阶段计划：

第一阶段：每周减肥1千克，每周吸收热量逐渐减少,直至达到下限；

第二阶段：每周吸收热量保持下限，达到控制体重的目标。

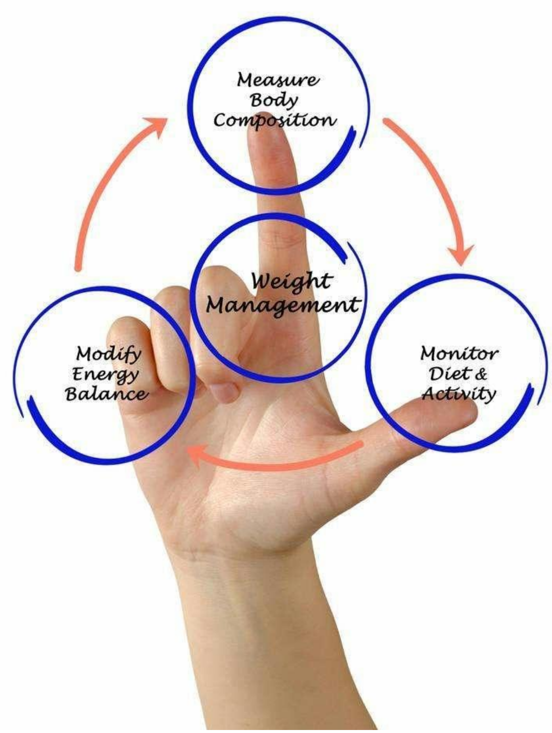
进一步，若要加快进程，第二阶段增加运动，试安排相应计划。

最后，试给出达到目标后维持体重的方案。



通常，体重变化由体内能量守恒破坏引起。饮食（吸收热量）引起体重增加，代谢和运动（消耗热量）引起体重减少。
参考有关生理数据，做出以下假设：

- 体重增加正比于吸收的热量，平均每8000千卡增加体重1千克；
- 正常代谢引起的体重减少正比于体重；
- 运动引起的体重减少正比于体重，且与运动形式有关；
- 为了安全与健康，每周体重减少不宜超过1.5千克，每周吸收热量不要小于10000千卡.



对于该问题，我们需要制定一个控制体重的详细计划。

令w(k) 为第k周(末)体重；c(k) 为第k周吸收热量，建立基本模型：

$$w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-\beta w(k) \tag{1}$$

其中，由已知 $\alpha=1/8000$（千克/千卡），β 为新陈代谢消耗系数（因人而异）。

1）不运动情况的两阶段控制体重计划

首先需确定该人的代谢消耗系数。由于每周吸收20000千卡，w=100千克不变，故有

$$w = w + \alpha c - \beta w$$

进而

$$\beta = \frac{\alpha c}{w} = \frac{20000}{8000 \times 100} = 0.025$$

也就是可以得到该人每周每千克体重消耗20000/100=200千卡。

第一阶段： $w(k)$每周减1千克，$c(k)$减至下限10000千卡。

将 $w(k)-w(k+1)=1$

代入式（1），得到 $c(k+1)=\frac{1}{\alpha}(\beta w(k)-1)$

由 $w(k)=w(0)-k$

进而解得 $c(k+1)=\frac{\beta}{\alpha}w(0)-\frac{1}{\alpha}(1+\beta k)$

将 α =1/8000和 β =0.025带入上式，得 $c(k+1)=12000-200k$

要使得 $c(k+1)\geq 10000$

需 $k\leq 10.$

故得方案：第一阶段10周，每周减1千克，第10周末体重90千克.吸收热量公式为：

$$c(k+1)=12000-200k \qquad k=0,1,\cdots,9$$

第二阶段： 每周c(k)保持10000千卡，w(k)减至75千克。

由基本模型得到：

$$w(k+1) = (1-\beta)w(k) + \alpha C_m$$

其中cm=10000

进而 $w(k+n) = (1-\beta)^n w(k) + \alpha C_m[1+(1-\beta)+\cdots+(1-\beta)^{n-1}]$

$$= (1-\beta)^n[w(k) - \frac{\alpha C_m}{\beta}] + \frac{\alpha C_m}{\beta}$$

将α=1/8000和β=0.025及cm=10000带入上式得

$$w(k+n) = 0.975^n[w(k)-50]+50$$

现在问题转化为：已知w(k)=90，且w(k+n)=75，求n.

由于75=0.975ⁿ(90-50)+50，故得 $n = \dfrac{\lg(25/40)}{\lg 0.975} = 19$

第二阶段19周，每周吸收热量保持10000千卡，体重按下式减少至75千克：

$$w(n) = 40\times 0.975^n + 50\ (n=1,2,\cdots 19)$$

2）第二阶段为增加运动的控制体重计划

根据资料，可知不同运动方式对应的每小时每公斤体重消耗的热量 γ（千卡）为：

跑步	跳舞	乒乓	自行车(中速)	游泳(50米/分)
7.0	3.0	4.4	2.5	7.9

可得模型为：

$$w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-\beta' w(k)$$

其中 $\beta'=\beta+\alpha\gamma t$，$t$为每周运动时间（小时）。

取 γt=24，α=1/8000，β=0.025，得

$$\beta' = 0.025 + 0.003 = 0.028$$

进而 $$w(k+n) = (1-\beta')^n [w(k) - \frac{\alpha C_m}{\beta'}] + \frac{\alpha C_m}{\beta'}$$

带入所求，得

$$75 = 0.972^n (90 - 44.6) + 44.6$$

解得n=14.

可以看出，运动 γt=24（比如：每周跳舞8小时或自行车9.6小时），14周即可达到目标。

进一步分析：

由于增加运动相当于提高代谢消耗系数 β ，而

$$\beta(=0.025)\rightarrow\beta'=\beta+\alpha\gamma t(=0.028)$$

只需提高12%；同时所需时间从19周降至14周，时间上则减少了25%. 从以上分析可以看出：以上所建立模型的结果对代谢消耗系数 β 很敏感。

此外，应用该模型时要仔细确定代谢消耗系数 β (比如：对不同的人；对同一人在不同的环境等)。

3）达到目标体重75千克后维持不变的方案

即：每周吸收热量$c(k)$，保持某常数C，使体重w不变。

建立模型：

$$w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-(\beta+\alpha\gamma t)w(k)$$

利用题设，可得 $w=w+\alpha C-(\beta+\alpha\gamma t)w$

进而

$$C=\frac{(\beta+\alpha\gamma t)w}{\alpha}$$

依上可知：

当不运动时， $C=8000\times0.025\times75=15000$ （千卡）；

当运动时，$C=8000\times0.028\times75=16800$ （千卡）。