数据插值

一、实验目的

1.掌握三种经典的插值方法：拉格朗日插值法、分段线性插值法、三次样条插值法；

2.学会用matlab软件进行数据插值计算；

3.学会用数据插值方法建立数学模型并求解.

二、实验内容

1.数据插值方法.

2.河道截面积估计.

理论知识

1.插值概念

设$f(x)$定义在区间$[a,b]$上，且有 $y_i = f(x_i)(i = 0,1,\Lambda\ ,n)$

试求函数$P(x)$，满足$P(x_i) = y_i(i = 0,1,\Lambda\ ,n)$ ，从而 $P(x) \approx f(x)$

$P(x)$称为$f(x)$在$[a,b]$上的插值函数，$f(x)$称为被插函数，x_i称为插值

结点.

x_0	x_1	x_2	……	x_0
y_0	y_1	y_2	……	y_n

多项式代数插值 $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)(i = 0,1,\mathrm{L}\ ,n)$

插值余项 $R_n(x) = P_n(x) - f(x)$

定理：满足条件 $P_n(x_i) = f(x_i)(i = 0,1,\mathrm{L}\ ,n)$的$n$次插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \Lambda\ + a_n x^n$$

唯一存在.

矩阵形式的拉格朗日插值公式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\Lambda+a_nx^n$$

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_{n-1}x_0^{n-1}+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow \quad X=A^{-1}Y$$

$$P=\left[a_n,a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0\right]$$

y0=polyval(P,x0)

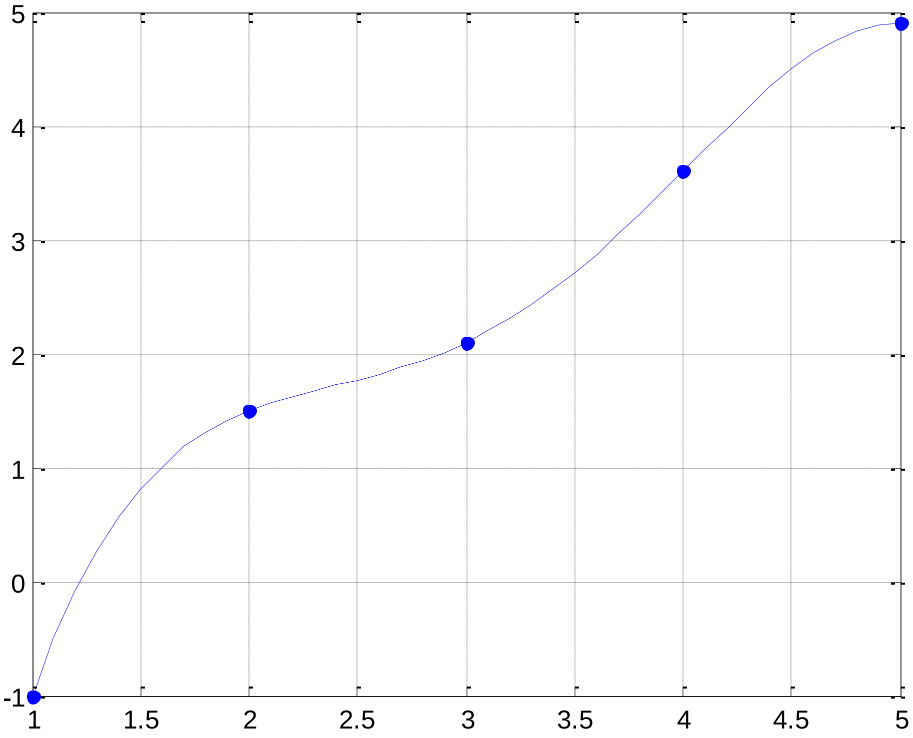
$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

```
function p=lagrange(x,y)
n=length(x);
A=ones(n);%n阶元素为1的方阵
for j=2:n
A(:,j)=A(:,j-1).*x‘;%生成方阵A
end
X=inv(A)*y';
for i=1:n
p(i)=X(n-i+1) %把多项式系数由高到低排列
end
```

例1 求插值多项式曲线

x	1	2	3	4	5
y	-1	1.5	2.1	3.6	4.9

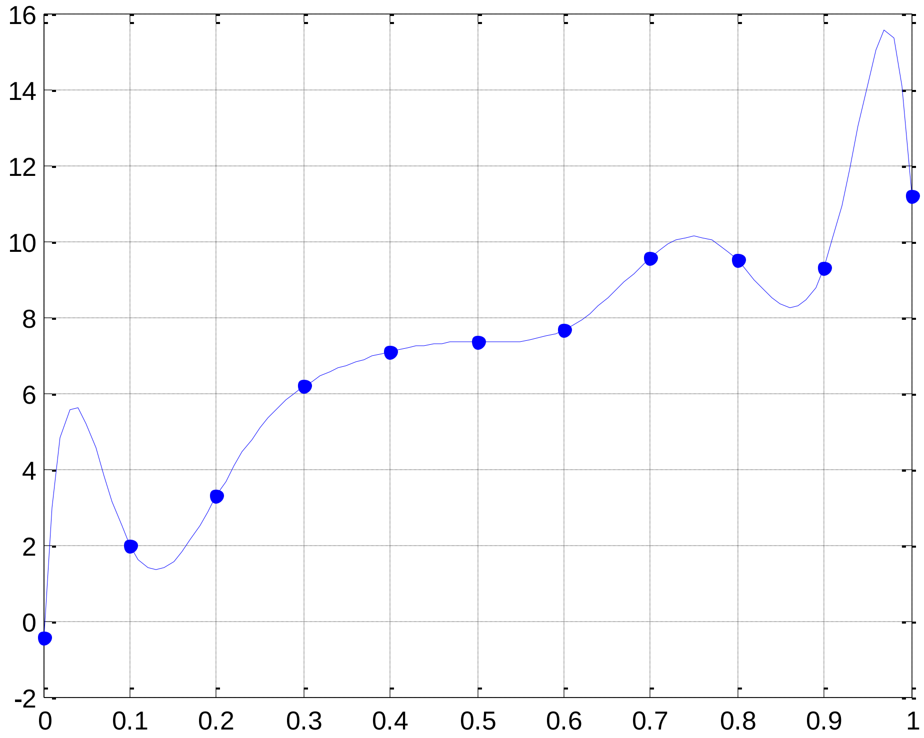
```
clc;clear;
x=[1,2,3,4,5];
y=[-1,1.5,2.1,3.6,4.9];
plot(x,y,'b.','markersize',15)
axis([1,5,-1,5])
grid;
hold on
p=lagrange(x,y)
t=1:0.1:5;
u=polyval(p,t);
plot(t,u,'b-')
```



例2 求插值多项式曲线

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	-0.447	1.978	3.28	6.16	7.08	7.34	7.66	9.56	9.48	9.3	11.2

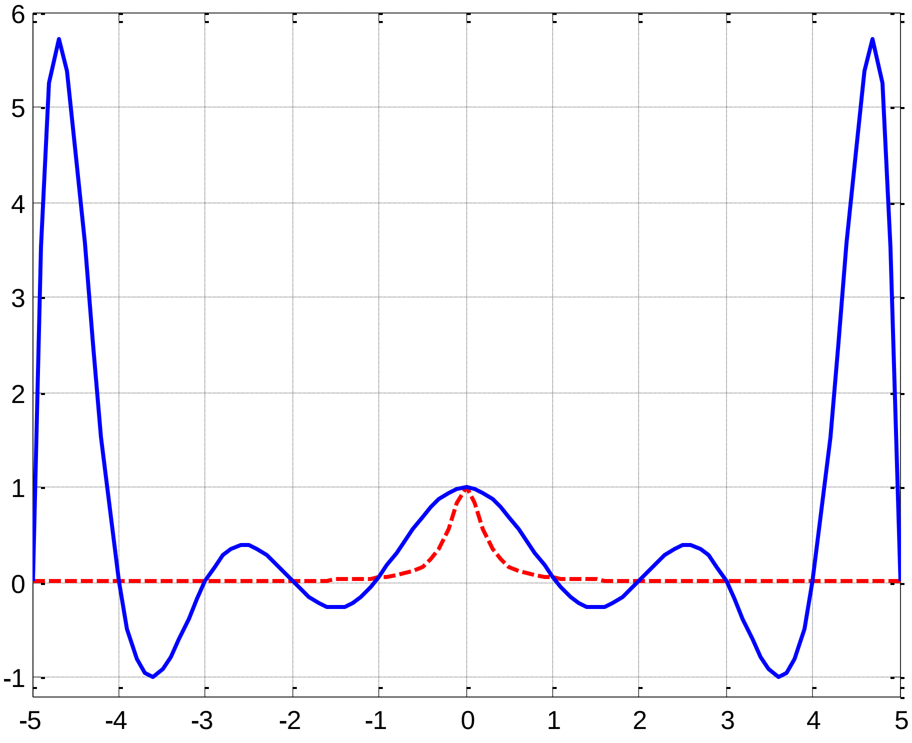
```
clc;clear;
x=0:0.1:1;
y=[-0.447,1.978,3.28,6.16,7.08,7.34,7.66,9.56,9.48,9.3,11.2];
plot(x,y,'b.','markersize',15)
axis([0,1,-2,16])
grid;
hold on
p=lagrange(x,y)
t=0:0.01:1;
u=polyval(p,t);
plot(t,u,'b-')
```



从结果图示可以看出，插值处的**10**次多项式在数据点之间产生大的起伏波动，曲线不能很好地反映数据点的变化规律。如果继续增加数据节点，会出现“龙格现象”

例3 对函数$y=\dfrac{1}{1+20x^2}$在上以1为步长进行划分作拉格朗日插值，观察曲线（虚线）与插值曲线（实线）的变化.

```
clc;clear;
x=-5:0.1:5;
y=1./(1+20*x.^2);
plot(x,y,'r--','linewidth',2)
axis([-5,5,-1.2,6])
grid;
hold on
x=-5:5
y=1./(1+20*x.^2);
p=lagrange(x,y)
t=-5:0.1:5;
f=polyval(p,t);
plot(t,f,'b-','linewidth',1.5)
```

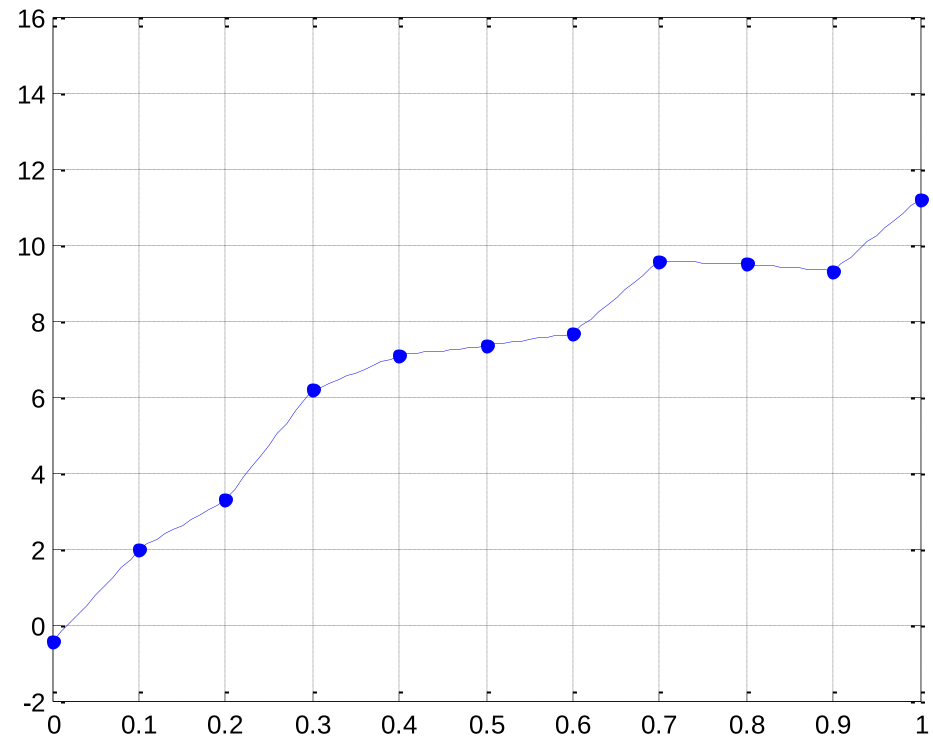


针对高次多项式插值时容易发生的“龙格现象”，在实际插值计算时，常采用分段低次多项式插值的方法，即在相邻两个数据点构成的子区间上分别进行低次插值。整个区间上的插值函数是一个分段的多项式函数。

例4 利用分段线性插值求例2中的插值多项式曲线

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	-0.447	1.978	3.28	6.16	7.08	7.34	7.66	9.56	9.48	9.3	11.2

```
clc;clear;
x=0:0.1:1;
y=[-0.447,1.978,3.28,6.16,7.08,7.34,7.66,9.56,9.48,9.3,11.2];
plot(x,y,'b.','markersize',15)
axis([0,1,-2,6])
grid;
hold on
t=0:0.01:1;
u=interp1(x,y,t);
plot(t,u,'b-')
```

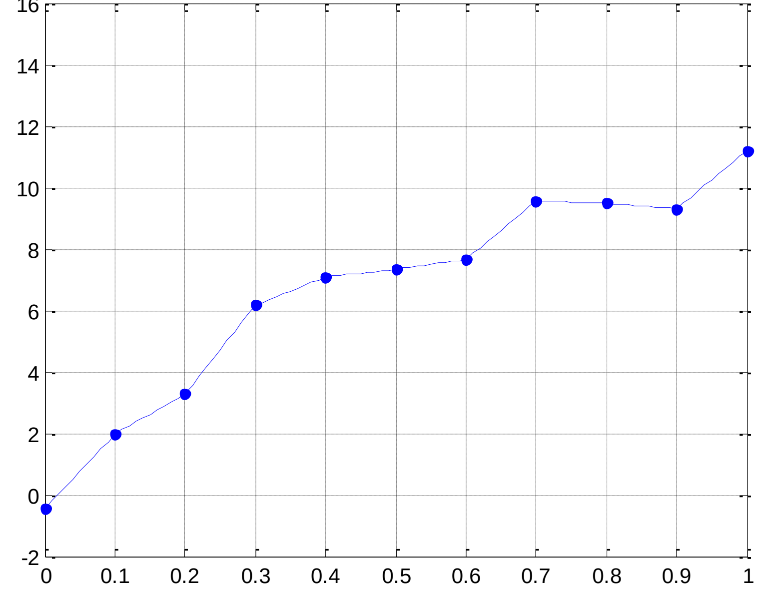


分段线性插值回避了“龙格现象”，
但曲线在节点处不光滑。

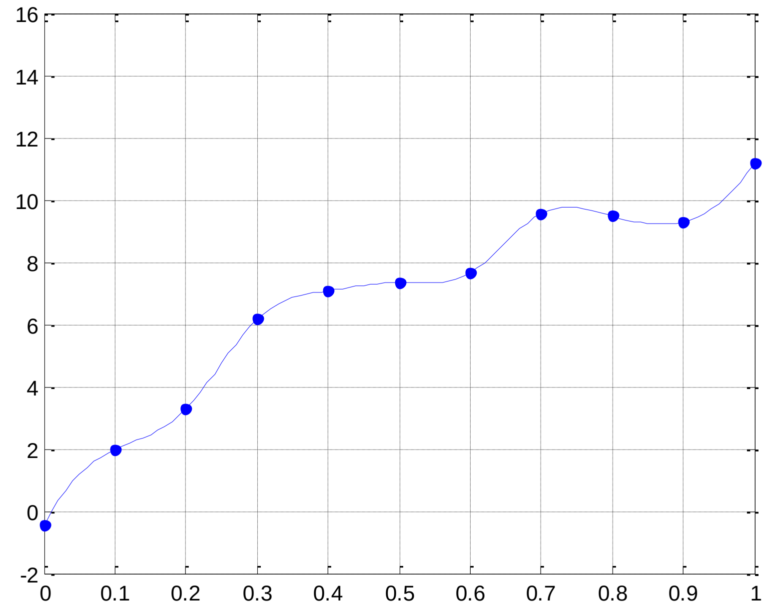
三次样条插值法

y0=interp1(x,y,x0,’spline’)

y0=spline(x,y,x0)




```
clc;clear;
x=0:0.1:1;
y=[-0.447,1.978,3.28,6.16,7.08,7.34,7.66,9.56,9.48,9.3,11.2];
plot(x,y,’b.’,’markersize’,15)
axis([0,1,-2,6])
grid;
hold on
t=0:0.01:1;
u=spline(x,y,t);
plot(t,u,’b-’)
```



求解实际问题

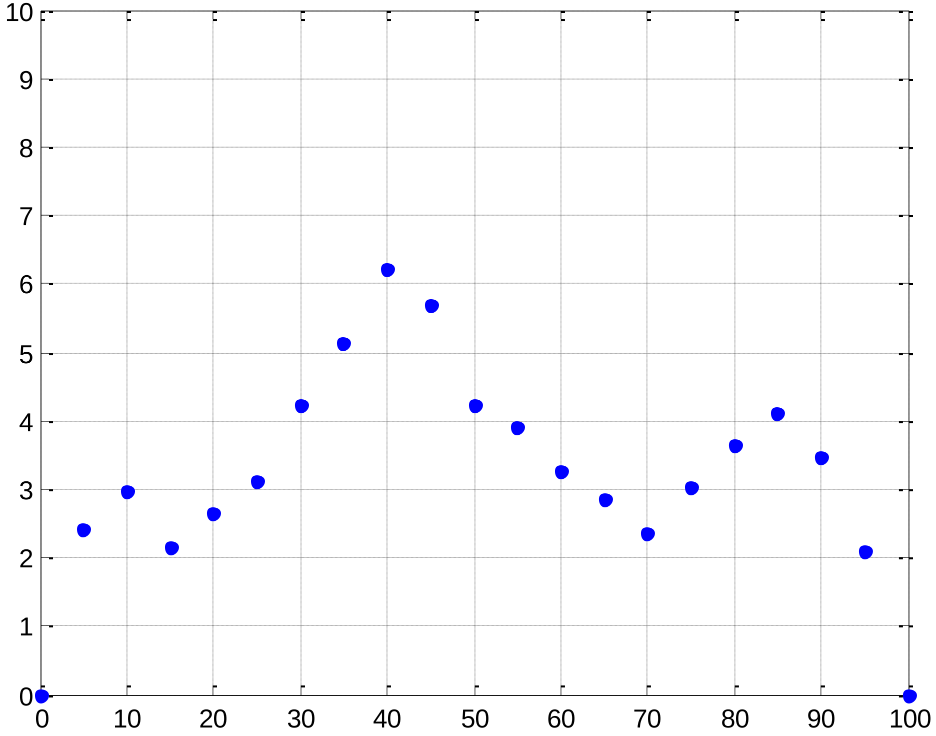
一条宽为**100m**的河道河床截面如图所示，为计算和流量，工程师需要估算河道的截面积，为此从河的一端开始每隔**5m**测量出河床的深度，测量数据如表所示

坐标	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
深度	0	2.96	2.15	2.65	3.12	4.23	5.12	6.21	5.68	4.22

坐标	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20
深度	3.91	3.26	2.85	2.35	3.02	3.63	4.12	3.46	2.08	0

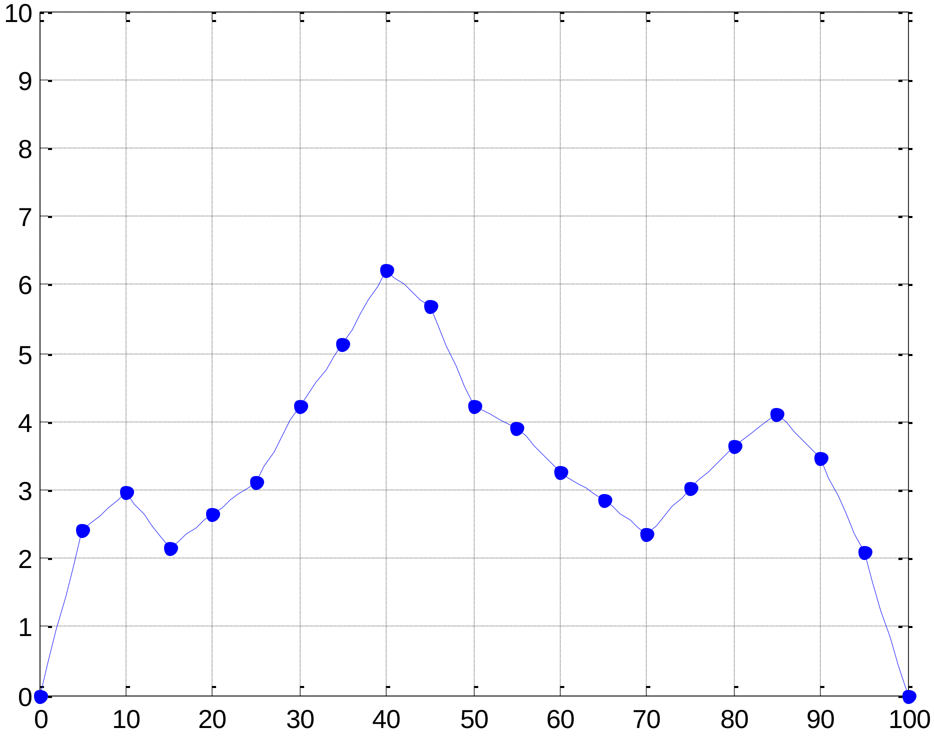
1.画出河床观测点的散点图

```
clc;clear;
x=0:5:100;
y=[0,2.41,2.96,2.15,2.65,3.12,4.23,5.12,6.
21,5.68,4.22,3.91,3.26,2.85,2.35,3.02,3.63,
4.12,3.46,2.08,0];
plot(x,y,'b.','markersize',15)
axis([0,100,0,10])
grid
```



2.利用分段线性插值绘制河床曲线

```
clc;clear;
x=0:5:100;
y=[0,2.41,2.96,2.15,2.65,3.12,4.23,5.12,6.
21,5.68,4.22,3.91,3.26,2.85,2.35,3.02,3.63,
4.12,3.46,2.08,0];
plot(x,y,'b.','markersize',15)
axis([0,100,0,10])
grid;hold on;
t=0:100;
u=interp1(x,y,t);
plot(t,u)
s=trapz(x,y);
p=sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2);
L=sum(p);
fprintf('s=%.2f,L=%.2f\n',s,L)
```

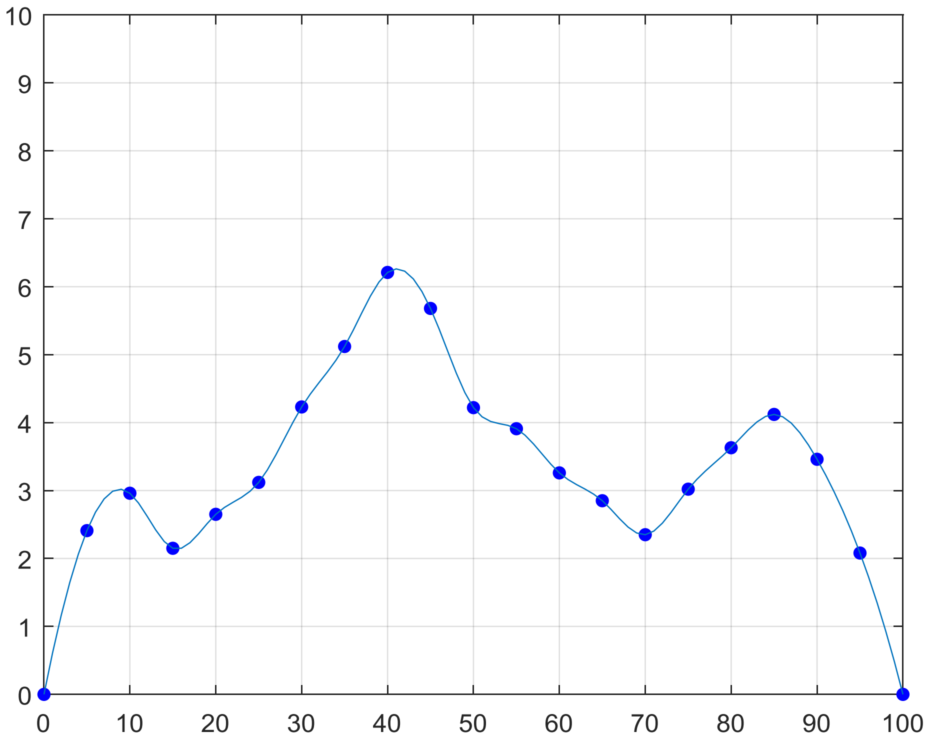


s=337.15,L=102.09

3.利用样条插值绘制河床曲线

```
clc;clear;
x=0:5:100;
y=[0,2.41,2.96,2.15,2.65,3.12,4.23,5.12,6.
21,5.68,4.22,3.91,3.26,2.85,2.35,3.02,3.63,
4.12,3.46,2.08,0];
plot(x,y,'b.','markersize',15)
axis([0,100,0,10])
grid;hold on;
t=0:100;
u=spline(x,y,t);
plot(t,u)
s=trapz(t,u);
p=sqrt(diff(t).^2+diff(u).^2);
L=sum(p);
fprintf('s=%.2f,L=%.2f\n',s,L)
```

s=339.43,L=102.22



代数插值的拉格朗日插值形式

线性插值

x	x_0	x_1
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$ 点斜式

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = l_{0,1}(x) f(x_0) + l_{1,1}(x) f(x_1)$$ 两点式

拉格朗日插值

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

$$P_n(x)=l_{0,n}(x)f(x_0)+l_{1,n}(x)f(x_1)+l_{2,n}(x)f(x_2)+\cdots l_{n,n}(x)f(x_n)$$

其中 $l_{i,n}(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$ $\quad i=0,1,\cdots,n$ **插值基函数**

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)+a_1(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

抛物插值

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

$$P_2(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)+a_1(x-x_0)(x-x_2)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}f(x_2)$$

抛物插值的拉格朗日形式

$$=l_{0,2}(x)f(x_0)+l_{1,2}(x)f(x_1)+l_{2,2}(x)f(x_2)$$

方法二：设 $P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$

$$P_2(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}(x-x_0)(x-x_1)$$

例1 已知函数$f(x)$的函数表如下：

x	1	2	3	4
$f(x)$	2.5	1.8	2.1	3

求其拉格朗日插值多项式，并求 $f(2.5)$**的近似值。**

$$P_3(x) = -0.0667x^3 + 0.9x^2 - 2.933x + 4.6$$

$$\boldsymbol{P_n(x) = l_{0,n}(x)f\left(x_0\right) + l_{1,n}(x)f\left(x_1\right) + l_{2,n}(x)f\left(x_2\right) + \cdots\ l_{n,n}(x)f\left(x_n\right)}$$

其中 $\boldsymbol{l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$ $\quad \boldsymbol{i = 0, 1, \cdots, n}$

定理2：插值余项

设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的n阶导数，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，$P_n(x)$为$f(x)$的以x_0, x_1, Λ, x_n为结点的插值多项式，则当$x \in [a,b]$时，有

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x) \quad \xi \in [a,b] \quad \omega(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

进一步，若记 $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$

则 $$R_n(x) \le \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

拉格朗日插值法适合节点较少的情况，当节点较多的大范围高次插值的逼近效果往往并不理想且当插值结点增加时，计算越来越繁。为了提高精度和减少计算，还有分段线性插值法、三次样条插值等。

MATLAB软件实现插值法

MATLAB软件提供了专门做各种插值的命令：interp1（一维插值），interp2（二维插值），interp3（三维插值），interpn（n维插值），spline（样条插值）等。

1．一维插值命令interp1的具体使用格式

yy=interp1(x,y,xx,’method’)

其中x,y是插值结点的数据向量，如果y是矩阵，则对矩阵y的每一列与x配对进行插值，xx是待求函数值的插值结点向量，可以缺省。’method’是可选项，说明插值使用的方法。对于一维插值，MATLAB提供可选的方法有：nearest，linear，spline，cubic，它们分别表示最近插值、线性插值、三次样条插值和三次插值。

2．二维插值命令interp2的具体使用格式

zz=interp2(x,y,z,xx,yy,’method’)

该指令的意思是根据数据向量x，y，z按method指定的方法来做插值，xx，yy是待求函数值的插值结点向量，如果xx，yy在插值范围之内，则返回值在zz中，否则返回值为空——NaN。’method’是插值方法可选项，具体要求同一维插值的情况。

该命令还有以下几种省略格式：

zz=interp2(z,xx,yy)

zz=interp2(x,y,z,xx,yy)

zz=interp2(z,ntimes)

3．三维插值命令interp3的具体使用格式

vi=interp3(x,y,z,v,xi,yi,zi,’method’)

它的具体含义跟前面的一、二维插值是相似的，在此不作解释，读者可在MATLAB工作空间中用help interp3命令获得。

4．样条插值命令spline的具体使用格式

yy=spline(x,y,xx)

它的意思等同于命令yy=interp1(x,y,xx,’cubic’)

5．曲面插值命令griddata的使用格式

zb=griadata(x,y,z,xb,yb,’method’)

注意：**interp2**和**griddata**都是二维插值命令，但**interp2**的插值数据必须是矩形域，**griddata**函数的已知数据点不要求规则排列**.**

例2　在用外接电源给电容器充电时，电容器两端的电压V将会随着充电时间t发生变化，已知在某一次实验时，通过测量得到下列观测值，分别用拉格朗日插值法、分段线性插值法、三次样条插值法画出V随着时间t变化的曲线图，分别计算当时间t=7s时，三种插值法各自算得电容器两端电压的近似值。

t/s	1	2	3	4	6.5	9	12
V/v	6.2	7.3	8.2	9.0	9.6	10.1	10.4

解　由于MATLAB没有提供现成的拉格朗日插值命令，我们可以编写一个函数来完成，其他两种插值法可用现成的命令。

用MATLAB软件进行三种插值计算的程序为：

$$P_n(x)=l_{0,n}(x)f\left(x_0\right)+l_{1,n}(x)f\left(x_1\right)+l_{2,n}(x)f\left(x_2\right)+\cdots l_{n,n}(x)f\left(x_n\right)$$

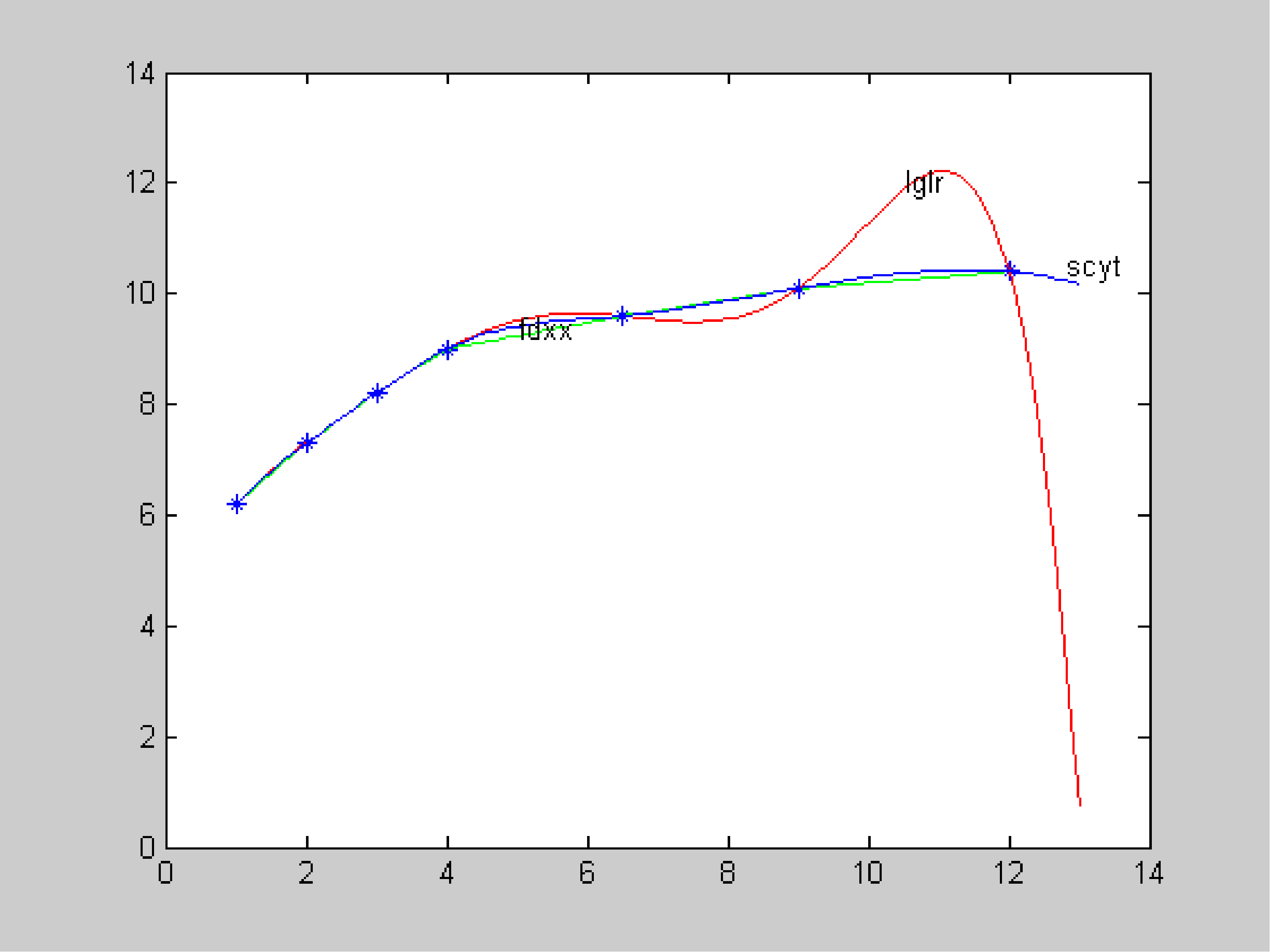
其中 $$l_{i,n}(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\qquad i=0,1,\cdots,n$$

程序lglrcz.m：

```
function y=lglrcz(x0,y0,x)
n=length(x0)；
m=length(x) ；
for k=1:m
      s=0；
  for i=1:n
    p=1；
    for j=1:n
      if j~=i
      p=p*(x(k)-x0(j))/(x0(i)-x0(j)) ；
      end
      end
      s=p*y0(i)+s；
    end
    y(k)=s；
  end
```

chazhi.m

```
t=[1,2,3,4,6.5,9,12]；
v=[6.2,7.3,8.2,9.0,9.6,10.1,10.4]；
t0=1:0.1:13；
lglr=lglrcz(t,v,t0)；
laglr=lglrcz(t,v,7)；
fdxx=interp1(t,v,t0)；
fendxx=interp1(t,v,7)；
scyt=interp1(t,v,t0,’spline’)；
sancyt=interp1(t,v,7,’spline’)
plot(t,v,’*’,t0,lglr,’r’,t0,fdxx,’g’,t0,scyt,’b’)
gtext(‘lglr’)
gtext(‘fdxx’)
gtext(‘scyt’)
```



laglr = 9.52988980716254 fendxx =9.70000000000000 sancyt =9.67118039327444

本次上机任务

（1）读懂P248-252页示例6,示例7,示例8的命令；

（2）完成P270页第1题,第2题.