2019版

南卷汇

大一上高数期中试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

2018 年高数（上）期中

一、单选题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $x=2$是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的（）

A．连续点 B.可去间断点 C.跳跃间断点 D.第二类间断点

2.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2g(x), x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（）

A.极限不存在 B.极限存在，但不连续 C.连续，但不可导 D.可导

3.函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^2-x\right|$ 不可导点的个数是（）

A.0 B.1 C.2 D.3

4.设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处（）

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\ne 0$ B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值 D. $f(x)$ 的导数不存在

5.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处切线的斜率为（）

A.2 B.-2 C.1 D.-1

6.在区间 (a,b) 内，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 的图像在 (a,b) 内是（）

A.单增且凸 B.单减且凸 C.单增且凹 D.单减且凹

二、计算题（每小题 7 分，共 49 分）

1.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

2.设 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，求 dy

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\cot x-\dfrac{1}{x})$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y'(0)$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+9t \\ y=t^2-2t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

6. 证明：当 $x>0$ 时，$e^x-1<xe^x$.

7. 求函数 $f(x)=x+2\cos x$ 的最大值，其中 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

三、（本题 8 分） 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, x\le 0 \\ \sin(ax), x>0 \end{cases}$，问：a, b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？并求 $f'(x)$.

四、（本题 12 分） 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求

①函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

②曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线方程.

五、（本题 7 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且

$f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明：存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f^{(3)}(\eta)\geq 3$.

六、（本题 6 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：在

$[0,1]$ 存在两点 x_1,x_2，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.

2018 年高数（上）期中答案

一、选择题

1. C　　2. D　　3. C　　4. B　　5. B　　6. A

二、计算题

1.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}$$
$$=2$$

2.

$$\frac{dy}{dx}=\arctan x+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x$$
$$=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}$$
$$=\arctan x$$
则$dy=(\arctan x)dx$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cot x-\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2\tan x}\xrightarrow{洛}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{2x\tan x+x^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x\sin x\cos x+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin 2x+x}\xrightarrow{洛}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{z\cos 2x+1}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

4. 将 $x=0$ 代入方程 $e^y+bxy+x^2-1=0$ 得 $y(0)=0$

对方程中 x 求导：$e^y\cdot y'+by+bx\cdot y'+2x=0$

代入 $\begin{cases} x=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$ 得 $y'(0)=0$

5.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{2t-2}{3t^2+9}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}\rightarrow^{2}}\cdot\frac{1}{\dot{x}}$$

$$=\frac{(3t^2+9)\cdot 2-6t(2t-2)}{(3t^2+9)^3}$$

$$=\frac{-6(t-3)(t+1)}{(3t^2+9)^3}$$

$$=-\frac{2}{9}\cdot\frac{(t-3)(t+1)}{(t^2+3)^3}$$

6. 设 $F(x)=e^x-1-xe^x$

又 $\because F(0)=1-1-0=0$

则要证 $x>0$ 时，$F(x)<0$ 恒成立

只需证 $F'(x)\le 0$ 即可

$F'(x)=-xe^x<0$ 在 $x>0$ 时恒成立

$\therefore$ 当 $x>0$ 时 $e^x-1<xe^x$

7.

(1) 驻点:

$$f'(x)=1-2\sin x=0$$
$$x=\frac{\pi}{6}$$
$$f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

(2) 没有无意义点或不可导点

(3) 端点

$$f(0)=2,\ f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$
$$\because \frac{\pi}{6}+\sqrt{3}>2>\frac{\pi}{2}$$

$\therefore f(x)$ 的最大值是 $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

三、

$$\text{连续}\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{2x}+b)=1+b\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\sin ax=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1+b=0\Rightarrow b=-1$$

$$\text{左右偏导相等}\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}+b-(1+b)}{x-0}=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax-0}{x-0}=a\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=2$$

所以 $a=2,b=-1$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

且 $f'(x)=2$

四、

(1) 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot 2(x+1)^2-x^2\cdot 4(x+1)}{4(x+1)^4}=\frac{x}{(x+1)^3}$$

则 $x\in(-\infty,-1),\ f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 增

$x\in(-1,0),\ f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 减

$x\in(0,1),\ f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 增

极小值为 $f(0)=0$

(2)

$$a.f''(x)=\frac{1-2x}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)>0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\text{或}x\in(-1,\frac{1}{2})$$

凹区间 $(-\infty,-1),(-1,\frac{1}{2})$

$f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

凸区间$(\frac{1}{2}, +\infty)$

$b. f''(\frac{1}{2}) = 0$且$f''(x)$在$x = \frac{1}{2}$时变号$\Rightarrow$拐点$(\frac{1}{2}, \frac{1}{18})$

$c.$水平$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^2 = \frac{1}{2}$　　水平渐近线：$y = \frac{1}{2}$

铅直$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{2(x+1)^2} = \infty$　　铅直渐近线$x = -1$

斜：设斜渐近线为$y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4(x+1)} = 0$$

故不存在斜渐近线

水平渐近线：$y = \frac{1}{2}$

铅直渐近线$x = -1$

五、泰勒公式展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}(x - x_0)^3$$

取$x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}x^3 = \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\eta)}{6}x^3$$

$$\begin{cases} f(-1) = \dfrac{f''(0)}{2} + \dfrac{f'''(\eta_1)}{6}(-1) = 0 & \eta_1 \in (-1, 0) \quad (1) \\ f(1) = \dfrac{f''(0)}{2} + \dfrac{f^{(3)}(\eta_2)}{6}\cdot 1 = 1 & \eta_2 \in (0, 1) \quad (2) \end{cases}$$

$(2) - (1)$得：$f^{(3)}(\eta_2) + f^{(3)}(\eta_1) = 6$

取$f^{(3)}(\eta) = \max\left\{f^{(3)}(\eta_1), f^{(3)}(\eta_2)\right\}$其中$\eta \in (-1, 1)$

则$2f^{(3)}(\eta) \geq 6 \Rightarrow f^{(3)}(\eta) \geq 3$

故存在$\eta \in (-1, 1)$，使得$f^{(3)}(\eta) \geq 3$

六、

进行变形 $\dfrac{1}{f'(x_1)}-1=1-\dfrac{1}{f'(x_2)}$ (1)

$$\begin{cases} \dfrac{f(c)-f(0)}{c}=f'(x_1) & x_1\in(0,c) \\ \dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(x_2) & x_2\in(c,1) \end{cases}$$

代入（1）中得到：$\dfrac{c}{f(c)}+\dfrac{1-c}{1-f(c)}=2$

只需使$f(c)=\dfrac{1}{2}$可实现即可

又$\because f(x)$在$[0,1]$上可导，必连续，$f(0)=0, f(1)=1$

由介值定理，得，$f(x)=\dfrac{1}{2}$在$[0,1]$上有解

$\therefore$ c存在

故在$[0,1]$存在x_1,x_2,使得$\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$

2017 年高数（上）期中

一. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^x)^{\frac{1}{x}} =$ ________

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n} =$ ________

3. 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$ 则 $y'(0)=$ ________

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ b(1-x^2) & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则 $a=$ _____， $b=$ ______

5. 已知 $(1,2)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$ ______， $b=$ ______

二. 单选题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+2\sin x)$ 与下列哪个表达式是等价无穷小 （　　）

A. $1+2\sin x$　　B. x　　C. $2x^2$　　D. $2x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 （　　）

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续

C. 连续　　D. 以上结论都不成立

3. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，

则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ （　　）

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)\ne 0$

C. 取得极大值　　D. 取得极小值

4. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 （　　）

A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

三. 计算下列各题（每小题 9 分，共 54 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$.

2. 设 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 y'.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

4. 设 $y^x=e^{x+y}$， 求 dy.

5. 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\y=\cos t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

6. 求曲线 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凹向区间及拐点

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le ax\}\quad(a>0)$.

四.（10 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}, & x\le0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x>0\end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点类型

五. 证明题（9 分）.

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

2017年高数（上）期中试题答案

一．（每小题3分）

1. e^2　2. 3　3. $\frac{1}{3}$　4. $a=0,b=1$　5. $a=-1,b=3$

二．（每小题3分）

1.　D　2.　C　3.　C　4.　C

三．（每小题9分）

1.

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}\ \underline{\underline{(3')}}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+1-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}\ \underline{\underline{(6')}}\ \dfrac{3}{4}\quad(9')$

2. $y'=\dfrac{1}{1+x^2-1}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\quad(3')\quad -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-(\ln x)(-\dfrac{1}{2})(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\quad(6')$

$=x(\ln x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\quad(9')$

3. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-2x-1}{\sin x}\ \underline{\underline{(3')}}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x\cos x-2}{\cos x}\ \underline{\underline{(6')}}\ 0\quad(9')$

4. $x\ln y=x+y\quad(2')$　两边对x求导得：$\ln y+\dfrac{xy'}{y}=1+y'\quad(6')$

$dy=\left[\dfrac{y-x}{y(\ln y-1)}\right]^{-1}dx\quad(9')$

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}\quad(3')\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{\pi}\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\dfrac{1}{2t}\quad(7')$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi^3}\quad(9')$

6. $y'=4x^3(12\ln x-7)+12x^3\quad(3')$

$y''=12x^2(12\ln x-7)+84x^2=144x^2\ln x\quad(6')$

$x>1$时$y''>0$,上凹.
$x<1$时$y''<0$,下凹. $(8')$

拐点为$(1,-7)$ $(9')$

四.（10 分）

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 不存在 $x=2$为第二类（震荡）间断点（$2'$）

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ $x=0$为第一类（跳跃）间断点 （$4'$）

3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(1+x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\dfrac{2}{\pi}$ $x=-1$为第一类（可去）间断点 （$6'$）

4. $\lim\limits_{x\to -(2k+1)} f(x)=\infty$ $k\in N_+$ $x=-(2k+1)$为第二类（无穷）间断点 （$8'$）

连续区间为 R 除去上述间断点 （$10'$）

五.（9 分）

① $\because f(-1)=-f(1)=-1$ 令$F(x)=f(x)-x$ $(2')$

$F(0)=0$ $F(1)=0$ 据$Rolle$定理 $F'(\xi)=f'(\xi)-1$ $(4')$

② $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi_1)$ $\xi_1\in(0,1)$ $\dfrac{f(-1)-f(0)}{-1-0}=f'(\xi_2)$ $\xi_2\in(-1,0)$

令 $G(x)=e^x\left[f'(x)-1\right]$ $(6')$ $x\in\left[\xi_2,\xi_1\right]$ 据$Rolle$定理：

$G'(\eta)=0,$ $\eta\in(\xi_2,\xi_1)$ 即$f''(\eta)+f'(\eta)=1$ $(9')$

还可用$f'(x)$为偶函数，用G(x)在$\left[-\xi,\xi\right]$上应用$Rolle$定理

2016 年高数（上）期中

一、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$，则 $a=$______。

2. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\ne 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$______。

3. 曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，则 $y=y(x)$ 的凸区间是_______。

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=$______。

5. 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线方程为___________。

二、单项选择(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义， $f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0,\varphi(x)$ 有间断点，则（ ）

A. $\varphi\left(f(x)\right)$ 必有间断点　　B. $\left(\varphi(x)\right)^2$ 必有间断点

C. $f\left(\varphi(x)\right)$ 必有间断点　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为（ ）

A. 2　　B. -1　　C. 1　　D. -2

3. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在 $x=a$ 处（ ）

A. $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\neq 0$　　B. $f(x)$ 取最大值

C. $f(x)$ 取最小值　　D. $f(x)$ 的导数不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）

A. 极限不存在　　B. 极限存在，但不连续

C. 连续，但不可导　　D. 可导

5. 下列命题中正确的是（ ）

A. 若 $f''(x)=0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

B. 若 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处一定取极值

C. 若 $f(x)$ 可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x)=0$

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值，则最大值一定是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值

三、计算下列各题(每小题 9 分，共 45 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln\left(1+2x^3\right)}$。

2. 设 $y=\tan 2x+2^{\sin x}$，求 $dy\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$。

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$。

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}, & x<0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-4}, & x\ge 0\end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点的类型。

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.（1）求 $f'(x)$；（2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性。

四、（13 分）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$,求（1）函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点。

五、证明题（每小题 6 分，共计 12 分）

1、设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $f'''(\xi)\geq 3$。

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $e^{\xi-\eta}\left(f(\eta)-f'(\eta)\right)=1$。

2016 年高数（上）期中答案

一、（$3'\times5=15'$）

1. $a=1$　　2. $a=-2$　　3. $(-10,54)$　　4. 1　　5. $y=x+\dfrac{1}{e}$

二、（$3'\times5=15'$）

1. D　　2. D　　3. B　　4. D　　5. C

三、

1. 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}\overset{(3')}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}\overset{(6')}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{6\left(1+x^2\right)}\overset{(9')}{=\!=}-\dfrac{1}{6}$

2. $dy=\left[2\sec^2(2x)+2^{\sin x}(\ln 2)\cos x\right]dx\quad(7')\qquad dy\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=2dx\quad(9')$

3. 令 $x=0$得$y=0\quad(2')$

方程两边配对 x 求导得：　$e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0\quad(5')$

$$y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}\qquad y'(0)=0$$

$$y''=-\frac{(6y'+2)\left(e^y+6x\right)-(e^y\cdot y'+6)(6y+2x)}{\left(e^y+6x\right)^2}\quad(8')$$

$$y''(0)=-2\quad(9')$$

4. 1° $x=2$。$\lim\limits_{x\to2}f(x)$不存在。$x=2$为振荡间断点或第二类间断点。$(2')$

2° $x=0$。$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\sin\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$。$x=0$ 为跳跃间断点

3° $x=-1$。$\lim\limits_{x\to-1}f(x)\underline{\underline{x+1=t}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(t-1)t}{\cos\frac{\pi}{2}(t-1)}=-\dfrac{2}{\pi}$ $x=-1$ 为可去间断点

4° $x=-(2k+1)$。$k\in N_+$ 为无穷间断点或第二类间断点 $(9')$

5. ① $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\dfrac{g''(x)-1}{2}$ $(4')$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\left[g'(x)+e^{-x}\right]x-\left[g(x)-e^{-x}\right]}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{g''(x)-1}{2}, & x=0\end{cases}\quad(6')$$

② $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left[g''(x)-e^{-x}\right]}{2x}=\dfrac{1}{2}\left[g''(0)-1\right]=f'(0)$ 连续 $(9')$

四、① $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)^2-2(1+x)x^2}{2(x+1)^4}=\dfrac{x}{(1+x)^3}$ $(3')$

在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单增，在 $(-1,0)$ 内单减 $(5')$

极小值为 $f(0)=0$。$(7')$

② $f''(x)=\dfrac{(1+x)^3-3(1+x)^2x}{(1+x)^6}=\dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$ $(9')$

在 $(-\infty,-1)$ 和 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 为凸的，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 为凹的 $(11')$

拐点为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{18}\right)$ (13′)

五、1. $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3$ (2′)

$f(-1)=f(0)+f'(0)\cdot(-1)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$。 $-1<\xi_1<0$ ①

$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$。 $0<\xi_2<1$ ② (4′)

②−①得 $1=\frac{1}{6}\left[f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)\right]\le\frac{1}{3}f'''(\xi)$

$f'''(\xi)=\max\left\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\right\}$ (6′)

2. $F(x)=e^{-x}f(x)$ (2′)

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)=e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]$ (4′)

而$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=-e^{-\xi}$ (6′)

2015 年高数（上）期中

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，刚常数 a 和 b 应满足__________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^x-1}{x\sin x}=$________________.

3. 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\ne 1)$ 的斜线渐近方程为______________________________.

4. 函数 $y=xe^{-x}$ 的凸区间是______________________________________.

5. 若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$，则 $a=$____________.

二、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0$，$\varphi(x)$ 有间断点则（　　）.

(A) $f(\varphi(x))$ 必有间断点　　(B) $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点

(C) $\varphi(f(x))$ 必有间断点　　(D) $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

2. 设函数 $f(x)$ 可导且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为（　　）.

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)=$（　　）$(n>2)$.

(A) $[f(x)]^{2n}$　　(B) $(n!)[f(x)]^{2n}$

(C) $(n!)[f(x)]^{n+1}$　　(D) $n[f(x)]^{n+1}$

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\,|\,x^3-x\,|$ 不可导点的个数是（　　）.

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

5. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（　　）.

(A) $f(x)$ 取得最小值　　(B) $f(x)$ 的导数不存在

(C) $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\neq 0$　　(D) $f(x)$ 取得极大值

三、计算下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\dfrac{1}{n})^{n^2}$.

2. 设 $y=(\arcsin\dfrac{1}{x})^3$，求 y'.

3. 求曲线 $\begin{cases} x=3^{t^2}+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

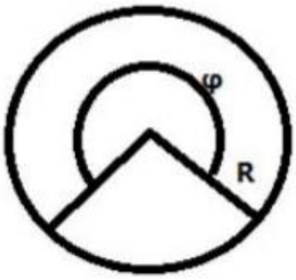
4. 求由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

5. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$.

（1）求 $\varphi(x)$ 及其定义域;

（2）求 $\varphi'(-1)$.

四、（9 分） 如图，从半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗，留下的扇形的中心角 φ 取多大时做成的漏斗最大?



五、（9 分） 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(b)=0$，证明:

（1）在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

（2）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

六、(7 分) 设 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，$f(a)>0, f'(a)<0, x>a$ 时 $f''(x)<0$，

证明：$f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 上有且只有一个实根。

2015 年高等数学（上）期中答案

一、填空题

1. $b=a$.

解析：分段函数如果在总定义域 D 内连续，则应在①各个分段 D_n 内连续②各个分段之间的节点处连续——函数值相等。

解答：易知各自分段内函数连续。故只需要求解 $\lim\limits_{x\to0}(a+bx^2)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin bx}{x}$.

2. 1.

解析：①熟记求极限时用的几个常用求等价小公式，包括：$e^x-1\sim x$ $\ln(1+x)\sim x$ $\tan x\sim x$ $\sin x\sim x$ 等。求复杂极限前先观察式子的形式，寻找相关等价小的形式。

②复杂幂函数形式 A^B 可化为指数形式 $e^{B\sin A}$ 简化计算（A、B 可为多项式或单项式）

解答：本体分子为多项式，并且观察到分子为 A^x-1 的形式，首先联想到 $e^x-1\sim x$. 通过上述②对该式变形，原式 $=\dfrac{e^{x\ln(1+\tan x)}-1}{x^2}=\dfrac{x\ln(1+\tan x)}{x^2}$ $=\dfrac{\ln(1+\tan x)}{x}=\dfrac{\tan x}{x}=1$.

3. $y=x-1$.

解析：求 $f(x)$ 的斜渐近线方程，可用待定系数法。设 $g(x)=(kx+b)$ 为斜渐近线方程，当 $x\to\infty$ 时，$[f(x)-g(x)]$ 应趋于 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-(kx+b)=0$，根据极限性质解出 b、k 即可。

4. $(2,+\infty)$.

解析：根据凸函数的定义 $f''(x)>0$，①注意定义域区间，②注意不是闭区间。

5. e.

解答：若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to1}(e^x-a)=0$ 解得 $a=e$.

二、单项选择

1. B.

2. A.

解析：在用定义求极限的过程中若出现 $f(a-x)$ 而不是 $f(a+x)$ 的形式，灵活地用 t 代替 $-x$，将 $f(a-x)$ 改为 $f(a+t)$。不过要注意定义域以及其他自变量的正负号会改变。

解答：设 $t=-x$ 则原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t+1)-f(1)}{t}=-2$ 即为该处的切线。

3. C.

解析：当出现①求 n 阶导数并给出了② i 阶导数和 j 阶导数的关系式时尽量采用递推代换的方法，归纳出 n 阶导数的表示形式。例如本题给出了 1 阶导数和 0 阶导数（原函数）的关系式时，则同时对两侧求导，再将其中的 1 阶导数用原函数替换，不停递推，归纳出用原函数表示 n 阶导数的函数式。

4. B.

解析：根据函数可导性的定义可知，函数在 $x=a$ 处可导，需满足：①函数在 $x=n$ 处连续②函数在 $x\to a$ 的左右两侧极限相等。由于题干出现了绝对值，则会出现左右两侧极限值不同的情况，分类讨论即可。如果式子是分母含自变量的分数形式，则会出现不连续的情况（这只是一种可能）。鉴于本题的绝对值形式比较简单，可采用序轴标根法求解个数。

解答：序轴标根法：将 $f(x)$ 化为简单多项式乘积的形式：$(x-1)(x-2)$ $|x(x+1)(x-1)|$ 并作图，该题可以对绝对值进行分类讨论，再分别求左右极限，得出原式只有 $x=0$ 和 $x=1$ 时不可导，其他节点可导。

5. D.

解析：对于问极大值还是极小值的问题，实际是问的该函数在 $x=a$ 时，$f''(x)$ 与 0 的大小关系，即该函数在这一点是凸的还是凹的。注意明确 $f(x)$ 是个函数，而 $f(a)$ 是个函数值。

解答：原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{2x-2a}=-1$，设 $x-a=t$，则原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t+a)}{t}=\dfrac{f'(t+a)}{1}=-2<0$，则该函数在此处取得极大值，且 $f(x)$ 的导数存在。由于 $f'(a)$ 是一个函数值，则 $f'(a)=0$.

三、计算题

1. 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\ln(n\sin\frac{1}{n})}$，因为是指数形式故不能变形为$\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$化简，应先分部求幂部分。设$x=\dfrac{1}{n}$，则原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln(\dfrac{1}{x}\sin x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\bullet\dfrac{\sin x-x}{x}=-\dfrac{1}{6}$（洛必达），结果为$e^{-\frac{1}{6}}$.

2. 解：$y'=3(\arcsin\dfrac{1}{n})^2\times\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\times(-\dfrac{1}{x^2})=-\dfrac{3(\arcsin\frac{1}{n})^2}{x\sqrt{1-x^2}}$.

3. 解：$\dot{x}=6t+2$，隐函数求导可得$\dot{y}=\dfrac{-e^y\cos t}{e^y\sin t-1}$，$k=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{-e^y\cos t}{(e^y\sin t-1)(6t+2)}$，当$t=0$时，$x=3$，$y=1$有$y-1=k(x-3)$，将$x$，$y$的值代入$k$中可得到：$y=\dfrac{e}{2}x-\dfrac{3}{2}e-1$.

4. 解：利用隐函数求导公式可得$\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\times\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\times(2x+2y'y)$，化简可得$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$，再对两边求导有$y''=\dfrac{-2y+2xy'}{(x-y)^2}$，代入$y'$得到$y''=\dfrac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$. 注意复合函数求导时要对内部复合函数求导。

5. 解：① $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，故$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$1-x>0$且$\ln(1-x)\geq0$，解得$x\leq0$.

② 对$\varphi(x)$求导并代入$x=-1$解得$\varphi'(-1)=-\dfrac{1}{4\sqrt{\ln2}}$.

四、解析：解应用题首先应对相应公式熟悉，例如本题圆锥体积公式为$\dfrac{1}{3}\pi r^2h$。根据公式估算有多少个未知量，例如本题有 2 个未知量r和h。由于已经给出了母线长度R和圆周角角度φ，则根据公式$r=R\dfrac{\varphi}{2\pi}$求出底面半径r，再用勾股定

理求出高度 h。求 V 的最大值就是求函数 $V(\varphi)$ 在定义域内的最大值。

解：根据上述公式可知 $V(\varphi)=\dfrac{\varphi^2R^3\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}{24\pi^2}$，令 $\varphi=t>0$，$R^3>0$，$\pi^2>0$，

取 $g(t)=t\sqrt{4\pi^2-t}$，求导有 $g'(t)=\dfrac{-3t+8\pi^2}{2\sqrt{4\pi^2-t}}=0$，解得 $\varphi^2=t=\dfrac{8\pi^2}{3}$，故在

$\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$ 时容积最大。注意适当换元，可以极大简化计算。

五、 证明：（1）由 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$，可知 $g''(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有拐点并且是单调的，单增或单减。由于 $g(a)=g(b)=0$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个拐点 $g(z)$，作图可知在 (a,b) 上 $g(x)\neq 0$.

（2）由题目知，只需要证明：$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$ 即可。令 $F(x)=g(x)f'(x)-f(x)g'(x)$，可知 $F(a)=F(b)$。由 Role 定理可知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$，代入 ξ 后消去相同式子有 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$，得证。

六、 当有条件“$f(x)$ 在定义域上 n 阶可导”时，常常采用泰勒公式导出 n 阶导数。

证明：由泰勒公式可得：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$，其中 $\xi\in(a,x)$ 则 $f''(\xi)<0$，$\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2<0$。设 $g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)>f(x)$.

（$f(x)$ 的零点求不出来，可以根据泰勒公式设 $g(x)$ 求出 $f(x)$ 的部分零点范围）

当 $g(x_1)=0$ 时，$x_1=-\dfrac{f(a)}{f'(a)}+a>a$，则 $f(x)$ 在 (a,x_1) 上有一个零点。

而当 $x>x_1$ 时，$f(x)<g(x)<0$，则不存在零点。由于 $x>a$ 时 $f''(x)<0$，故 $f'(x)$ 单减，又因为 $f'(a)<0$，故 $f'(x)<0$，即该零点存在且唯一，得证。

2014 年高等数学（上）期中

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}+n-\sqrt{n^2-n})=$ ________.

2、函数$f(\mathrm{x})=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\sin x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$的间断点是x = _____.

3、设函数$\mathrm{y}=\frac{1}{x^2-1}$，则$y^{(2014)}(0)=$ ________.

4、已知函数f（x）在任意点x处的增量$\Delta f=(\arctan\ \mathrm{x}^2)\Delta x+o(\Delta\mathrm{x})$, 又 $\mathrm{y}=f(2\mathrm{x}-1)$, 则$\mathrm{d}y\,|_{x=0}=$ _______.

二、单项选择题（每小题三分，共 15 分）

1、设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足：$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则（　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$；（B）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$；

（C）$\{a_n\},\{b_n\}$的极限至少一个存在；

（D）$\{a_n\},\{b_n\}$的极限可能都不存在.

2、设函数$f(\mathrm{x})=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, 则当$\mathrm{x}\to 0$时，（　　）

（A）$f(\mathrm{x})$存在有限极限　　（B）$f(\mathrm{x})$无极限，但有界

（C）$f(\mathrm{x})$无界，但不是无穷大　　（D）$f(\mathrm{x})$是无穷大

3、当$\mathrm{x}\to 0$时，与$\ln(\cos x+2\mathrm{x}^2)$等价的无穷小是（　）

（A）$\frac{x^2}{2}$　　（B）x^2　　（C）$\frac{3}{2}x^2$　　（D）$2x^2$

4、设$f(x)$在$x=0$的某邻域内可导，且$f(0)=0$，$f'(0)>0$，则$\exists\delta>0$，使得（　）

（A）对$\forall x\in(0,\delta)$有$f'(x)>0$;　　（B）对$\forall x\in(0,\delta)$有$f(x)>0$;

（C）对$\forall x\in(-\delta,0)$有$f'(x)>0$;　　（D）对$\forall x\in(-\delta,0)$有$f(x)>0$;

5、设函数$f(x)$二阶可导，且对于$\forall x\in R$满足$x^2 f''(x)+x^2(f'(x))^3=1-\cos x$，$f'(0)=0$，则（　　）

（A）$x=0$必是$f(x)$的极小值点；　　（B）$x=0$必是$f(x)$的极大值点；

（C）$(0, f(0))$必是曲线的拐点；

（D）不能判断原点是$f(x)$的极值点还是拐点

三、判断题(命题正确的给出证明，错误的举出反例说明. 每小题6分，共12分)

1、设$a<b$，若$\forall\delta\in(0,\frac{b-a}{2})$，有$f$在$[a+\delta,b-\delta]$上一致连续，则$f$在$(a,b)$上一致连续.

2、设可微函数f在$[a,b]$上是凸的，则函数f的图形必位于曲线过$(a, f(a))$切线的上方，即对任意$x\in(a,b]$, 有$f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$

四、计算题（每小题10分，共30分）

1、设$x_1=\frac{1}{2L}, L>0, x_{n+1}-x_n(2-Lx_n), n=1,2,\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2、设方程$e^{xy}+sinx-y=0$确定了函数$y=y(x)$,求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$和$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

3、试确定常数a,b，使极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+acos2x+bcos4x}{x^4}$存在，并求出它的值.

五、(本题10分)

证明：当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$\frac{2}{\pi}<\frac{sinx}{x}<1$.

六、(本题共10分)

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, 证明：

（1）$\exists\xi\epsilon\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得$f(\xi)=\xi$；

（2）对$\forall\lambda\epsilon R$，必$\exists\eta\epsilon(0,\xi)$：$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$.

七、(本题7分)

设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(x)$的每一个零点都是简单零点（简单零点：若$f(x_0)=0$，则$f'(x_0)\neq0$）. 证明：$f(x)$在$[0,1]$上只有有限个零点.

2014 年期中

一、

1、$\frac{5}{2}$　　2、0;1　x=0 是跳跃间断点　x=1 为无穷间断点

3、-2014！　　4、$\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x$

二、1、D　2、C　3、C　4、B　5、A

三、1、错误 反例：$f(x)=\frac{1}{x}$，$a=0,b=1$时，在$[a+\delta,b-\delta]$上一致连续，但在(0,1)上不一致连续

（证明：存在$\eta>0$，令$x_1,x_2\in[a+\delta,b-\delta],x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{b-\delta}-\frac{1}{a+\delta}$　取$\eta=\frac{1}{b-\delta}-\frac{1}{a+\delta}$　则$f(x_1)-f(x_2)<\eta$

恒成立

$f(x)$一致连续

然而在(0,1)上，取$x_1=\frac{1}{n+1},x_2=\frac{1}{n}$，$(x_2-x_1)\to 0$　而$f(x_1)-f(x_2)=1$

取$\eta=\frac{1}{2}$时，$f(x_1)-f(x_2)>\frac{1}{2}$

所以此时$f(x)$不一致连续）

2、正确 证明：$\because f(x)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$　　$\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$

得：$(x_2-x_1)f(x)\le(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\qquad(1)$$

令$x_1=a,x_2=a+\Delta x$代入(1)化简得

$$f(x)\ge f(a)+f'(a)(x-a)$$

四、1、略（数学归纳法）

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{L}$$

2、解：$\because e^{xy}(y+xy')+\cos x-y'=0$

$\because x=0$时，$y=1$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=y'|_{x=0}=\frac{e^{xy}\cdot y+\cos x}{1-e^{xy}\cdot x}=2$$

∵两边再求导得

$$e^{xy}(y+xy')(y+xy')+e^{xy}(y'+y'+xy'')+\sin x-y''=0$$

$\because x=0, y=1$， $y'=2$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=5$

3、解：∵极限存在　$\therefore 1+a\cos 2x+b\cos 4x=0$

$\because \lim_{x\to 0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin 2x\cdot 2-b\sin 4x\cdot 4}{4x^3}$

$=\lim_{x\to 0}-\frac{4a\cos 2x+16b\cos 4x}{12x^2}$

$\therefore 4a\cos 2x+16b\cos 4x=0$

$\because x=0\quad \therefore a+b=-1\qquad 4a+16b=0$

$\therefore a=-\frac{4}{3}, b=\frac{1}{3}$

原式$=\lim_{x\to 0}\frac{16a+16^2b}{24}=\frac{8}{3}$

五、证明：令$f(x)=\frac{\sin x}{x}\quad \therefore f'(x)=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$

令$g(x)=x\cdot\cos x-\sin x$

$\therefore g'(x)=-x\cdot\sin x+\cos x-\cos x=-x\sin x$

$\because x\in(0,\frac{\pi}{2})\quad \therefore g'(x)<0\ \therefore g(x)$单调递减

$\because g(0)=0\quad \therefore f'(x)<0$ 恒成立

$\therefore f(x)$单调递减　$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)<f(x)<\lim_{x\to 0}f(x)$

$\therefore \frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$

六、证明

(1)令$g(x)=f(x)-x\quad \therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$ ，$g(1)=-1<0$

由连续函数的零点定理得，必$\exists\xi\in(\frac{1}{2},1)$使得$g(\xi)=0$ ，即$f(\xi)=\xi$

(2)令$H(x)=[f(x)-x]e^{-\lambda x}$

$H'(x)=[f'(x)-1]e^{-\lambda x}+[f(x)-x]e^{-\lambda x}\cdot(-\lambda)$

$H'(x)=e^{-\lambda x}\{f'(x)-1-\lambda[f(x)-x]\}$

$\because H(0)=0$，$H(\xi)=0$，$H(x)$在$[0,\xi]$上连续，$(0,\xi)$上可导，由 Rolle 定理得：

定$\exists\eta\in(0,\xi)$使得$H'(x)=0$

即$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$

七、证明思路：（1）反证法　　（2）推有一个零点不是简单零点

需用到 Weistrass 原理（或闭区间套定理），　具体证明略

2013 年高等数学（上）期中

一、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则$a=$__________。

2.设$f(\mathrm{x})=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b+1, & x=0\\ \frac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$，当$a=$ ______，$b=$ ______时，$f(\mathrm{x})$在$(-\infty,+\infty)$内连续。

3.函数$f(\mathrm{x})=\frac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$的第一类间断点$x=$ ______，第二类间断点$x=$ ______。

4.已知当$x\to 0$时，$\sin x$与$\ln(1+ax)$是等价无穷小，则$a=$ ______。

5.设$y=\log_a[x(\sec x+\tan x)]$，则$\mathrm{d}y=$ __________。

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=$ ______。

7.函数$y=x+2\cos x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为______。

二、计算或证明题（每小题 8 分，共 72 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^3\sin x}$

2. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^x-1}=A$, 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=1$，$x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}(n\in N_+)$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

4. 设$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，说明其导函数$f'(x)$在$x=0$处连续.

6. 当$0<\mathrm{x}<\frac{\pi}{2}$时，试证明$\sin x>\frac{2}{\pi}x$.

7. 设$f(x)$在$[0，1]$上具有二阶导数，且满足条件$|f(x)|\le a,|f''(x)|\le b$. 其中$a,b$

都是非负常数，c是$(0,1)$内任意一点，证明：$|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

8. 设$f(x)$在$x = 0$的邻域内二阶可导，且$f'(0) = 0$。试计算$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.

9. 设$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$内有界且可导，证明：方程$f'(x)(1 + x^2) = 2xf(x)$至少有一个实根.

2013 年期中

一、1. ln3　　2. $e^{-2};e^{-2}-1$　　3. 0;1　　4. 1　　5. $\frac{1+x\sec x}{x\ln a}dx$

6. 2　　7. $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

二、1.原式=$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}=\frac{1}{2}$

2.A=$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin x}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f(x)$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}f(x)=2\mathrm{A}$

3.证明：$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+2}{x_n+1}-\frac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}=\frac{x_{n-1}-x_n}{(x_n+1)(x_{n-1}+1)}$；$\therefore\{x_n\}$不单调

$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n+1}>1;$

$$|x_n-\sqrt{2}|=\left|\frac{x_n+2}{x_n+1}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{(1-\sqrt{2})x_n+(2-\sqrt{2})}{x_n+1}\right|=\frac{(\sqrt{2}-1)}{x_n+1}|x_n-\sqrt{2}|$$

$$<\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}|x_n-\sqrt{2}|<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2|x_{n-1}-\sqrt{2}|<\cdots<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n|x_1-\sqrt{2}|$$

$$<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n<\varepsilon$$

取$\mathrm{N}=\log_p\varepsilon,p=\frac{\sqrt{2}-1}{2},0<p<1,$

$\forall\varepsilon>0,\exists\mathrm{N},$ 当 $\mathrm{n}>\mathrm{N}$ 时，$|x_n-\sqrt{2}|<\varepsilon.$

4.$\frac{dx}{dt}=at\cos t,\frac{dy}{dt}=at\sin t;$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\tan t;$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\sec^2t}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3t}.$

5.$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}\overset{t=\frac{1}{x}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0;$

$x\neq0,f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3};$

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\overset{t=\frac{1}{x}}{\Longrightarrow}\lim_{t\to\infty}\frac{2t^3}{e^{t^2}}=0;\quad \lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0).$$

6.证明：设$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x,\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi};$$

$$\therefore \exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f'(x_0)=0.f''(x)=-\sin x<0;$$

$\therefore f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$有唯一零点;

$0<x<x_0$时，$f'(x)>0,f(x)\uparrow;x_0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)<0,f(x)\downarrow$

又$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f(x)>0;$

即$\sin x>\frac{2}{\pi}x.$

7.证明：$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2.$

分别令$x=0,1;\ f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2;$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2;$$

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2];$$

$$f'(c)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2];$$

$$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}|(1-c)^2-c^2|\le 2a+\frac{b}{2}.$$

8. 原式$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)[x-\ln(1+x)]}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}f''(0);$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{\xi}{x}<1;\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2};$$

9.证明：构造$g(x)=\frac{f(x)}{1+x^2};\lim_{x\to\infty} g(x)=0;$

① $g(x)\equiv 0,f(x)\equiv 0,$成立；

② $g(x)\not\equiv 0$，不妨设$c\in(-\infty,+\infty),g(c)>0;$

$\because \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0, \therefore$ 至少$\exists\xi \in (-\infty, +\infty)$,

$g(x)$在$x = \xi$处取极大值，则$g'(\xi) = 0$,成立。