第6章 特征值与特征向量

第6章 特征值与特征向量

第一节　矩阵的特征值与特征向量

第二节　相似矩阵与矩阵的相似对角化

第一节　矩阵的特征值与特征向量

作业

习题６．１（A）

1, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18

一、特征值与特征向量的概念

定义6.1.1 A为n阶方阵，λ为复数，ξ为n维非零向量，若

$$A\xi = \lambda\xi \tag{1}$$

则λ称为A的**特征值**，ξ称为A的对应于λ的**特征向量**.

例如
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故$\lambda = 2$为$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$的一个特征值

且$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$为对应的一个特征向量.

特别注意:

- 特征向量是非零向量.
- 属于同一特征值λ_0的特征向量不唯一
- 若ξ_1,ξ_2都是A的属于λ_0的特征向量,

则对任意常数k_1,k_2,若$k_1\xi_1+k_2\xi_2\neq 0$,

则$k_1\xi_1+k_2\xi_2$都是A的属于λ_0的特征向量.

事实上, $A\xi_1=\lambda_0\xi_1, A\xi_2=\lambda_0\xi_2$

$$\Rightarrow A(\underline{k_1\xi_1+k_2\xi_2})=k_1(A\xi_1)+k_2(A\xi_2)$$

$$=k_1(\lambda_0\xi_1)+k_2(\lambda_0\xi_2)=\lambda_0(\underline{k_1\xi_1+k_2\xi_2})$$

$$A\xi = \lambda\xi \Leftrightarrow (\lambda I - A)\xi = 0$$

λ是A的特征值 ⟺ $(\lambda I - A)x = 0$ 有非零解

⟺ $|\lambda I - A| = 0$ 特征方程

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

A的特征多项式

二、求特征值与特征向量的一般步骤

(1)求出$|\lambda I - A| = 0$在复数范围内的全部根

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (重根按重数计算)

这就是A的全部特征值.

(2)对于A的特征值λ_i,求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i I - A)x = 0$$

的一个基础解系$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ik_i}$,则属于$\lambda_i$的全部特征向量为$x = c_1\xi_{i1} + c_2\xi_{i2} + \cdots + c_{k_i}\xi_{ik_i}$,

($c_1, \cdots, c_{k_i}$为不全为零的任意常数)

例1 求$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

解 令$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)=0$

得A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3.$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$,求方程组$(0I-A)x=0$的基础解系:

$$0I-A\to A\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的全部特征向量为

$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$　　(k_1,k_2为不全为零的任意常数)

对于$\lambda_3=3$,求方程组$(3I-A)x=0$的基础解系:

$$3I-A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 属于特征值$\lambda_3=3$的全部特征向量为

$x=k_3\xi_3$　　$(k_3\neq 0)$

例2 求$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

解 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda_1=i,\lambda_2=-i$为$A$的全部特征值.

对于$\lambda_1=i$,解方程组$(iI-A)x=0$,由

$$iI-A=\begin{bmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$属于$\lambda_1=i$的全部特征向量为$x=k_1\xi_1 \quad (k_1\neq 0)$

对于$\lambda_2=-i$,解方程组$(-iI-A)x=0$,由

$$-iI-A\rightarrow iI+A\rightarrow\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \xi_2=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 属于$\lambda_2=-i$的全部特征向量为

$$x=k_2\xi_2 \quad (k_2\neq 0)$$

三、特征值和特征向量的性质

性质6.1.1 设n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

则 (1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$;

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

证明① 当$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值时，$A$的特征多项式可分解为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

令 $\lambda=0$，得 $|-A|=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

即 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.$

证明② 因为行列式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

它的展开式中，主对角线上元素的乘积

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

是其中的一项，由行列式的定义，展开式中的其它项至多含n - 2个主对角线上的元素，因此，特征多项式中含 λ^n 与 λ^{n-1} 的项只能在主对角线上元素的乘积项中.

故有 $|\lambda I - A| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots +$

比较①，有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

定义 方阵 A 的主对角线上的元素之和称为方阵 A 的**迹**.

记为 $tr(A)=\sum a_{ii}=\sum \lambda_i$.

推论 1 n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的 n 个特征值全不为零.

性质6.1.2 设 λ 为方阵A的一个特征值,则:

(1)对任何正整数 m, λ^m 为方阵 A^m 的一个特征值

(2)对任何多项式 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$, $f(\lambda)$ 为矩阵 $f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I$ 的一个特征值

例3 三阶方阵 A 的三个特征值为 1、2、0,则

$|2I+3A^2|=$ (   )

性质6.1.3 若数λ为可逆阵的 A 的特征值，

则 λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值. $|A|\lambda^{-1}$ 为 A^* 的特征值.

性质6.1.4 （1）互异特征值对应的特征向量线性无关。

（2）互异特征值对应的各自线性无关的特征向量并在一块，所得的向量组仍然线性无关。

代数重数

几何重数

性质6.1.5 若 n 阶矩阵 A 的任一 t_i 重特征值 λ_i 对应的线性无关的特征向量的个数不超过 t_i .

即矩阵A的任何特征值的几何重数不大于代数重数

例 4 设λ_1，λ_2是矩阵A的两个不同特征值，x_i为属于λ_i的特征向量$(i=1,2)$.证明x_1+x_2不是A的特征向量.

例 5 设A为三阶矩阵，$I-A, I+A, 3I-A$都不可逆，试求A的行列式.

例 6 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}，向量 x=\begin{bmatrix}1\\ k\\ 1\end{bmatrix}是A的伴随矩阵A^*$$

的一个特征向量，求常数k的值及与x对应的特征值λ.

课堂练习

若$\lambda = 2$为可逆阵A的特征值，则 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 的一个特征值为（　　）

证n阶方阵A满足$A^2 = A$，则A的特征值为0或1．