第四节 线性方程组解的结构

一 齐次线性方程组

二 非齐次线性方程组

作业

- 习题4.4（A）
- 3，5，9，10（2），11，13，15

一、齐次线性方程组解的性质

1、解向量

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow Ax = 0. \quad (1)$$

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 使得方程 $Ax = 0$ 成立，

则 $x = \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$ 称为方程组（1）的解向量，

它也就是向量方程 $Ax = 0$ 的解.

2、齐次线性方程组解的性质

(1) 若 $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi_1+\xi_2$

也是 $Ax=0$ 的解.

(2) 若 $x_1=\xi_1$ 为 $Ax=0$ 的解，k 为实数，则 $x=k\xi_1$

也是 $Ax=0$ 的解.

易知，方程组的**全体解向量**构成一个向量空间，

称此向量空间为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的**解空间**.

二、基础解系及其求法

1、基础解系的定义

如果齐次方程组 $Ax=0$ 的一组解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 满足：

① $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关；

② 方程组 $Ax=0$ 的任一解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为齐次线性方程组的一个**基础解系**.

易证（课后习题）
与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则方程组 $Ax=0$ 的**通解**可表示为：

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s,$$ ……………结构解

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意实数.

如果 $r(A_{m\times n})=n$, 则 $Ax=0$ 只有零解,

$\Rightarrow Ax=0$ 不存在基础解系

定理4.4.1 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r<n$, 则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 必存在基础解系, 且基础解系含 $n-r$ 个向量.

2、线性方程组基础解系的求法

设齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 r，并不妨设 A 的左上角 r 阶子式 $D_r \neq 0$，因此，A 的前 r 个行向量线性无关．又任意 r + 1 个行向量线性相关，所以齐次线性方程组的n- r 个方程多余.

即（1）中的前 r 个方程与（1）同解.

所以对系数矩阵 A 进行初等行变换，将其化为最简形

即 $$A \sim \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

所以 $$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_{11}x_{r+1} + b_{12}x_{r+2} + \cdots + b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = b_{r1}x_{r+1} + b_{r2}x_{r+2} + \cdots + b_{r,n-r}x_n \end{cases} \quad (2)$$

于是，（1）的全部解就可以写成

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_{r+1} + b_{12}x_{r+2} + \cdots + b_{1,n-r}x_n \\ x_2 = b_{21}x_{r+1} + b_{22}x_{r+2} + \cdots + b_{2,n-r}x_n \\ \quad\vdots \\ x_r = b_{r1}x_{r+1} + b_{r2}x_{r+2} + \cdots + b_{r,n-r}x_n \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ x_{r+2} = x_{r+2} \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n \end{cases} \qquad (3)$$

其中$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$是任意实数.

根据向量的运算法则，（3）可以整理成为：

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\\x_{r+1}\\x_{r+2}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_{r+1}\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_{r+2}\begin{pmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}b_{1,n-r}\\b_{2,n-r}\\\vdots\\b_{r,n-r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \quad (4)$$

或 $$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r} \quad (5)$$

下面证明，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组（1）的一个基础解系．从而(5)就为方程组 $Ax=0$ 的通解.

1、证明$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.

由于n - r 个n - r 维列向量$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 线性无关，

所以n - r 个n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 亦线性无关.

2、由（5）知，方程组任一解都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表示.

所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是线性方程组的一组基础解系.

注 任n - r 个线性无关的解向量构成基础解系.

例 1　求下列齐次线性方程组的基础解系与通解.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解　方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + 2r_2]{r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 4x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 + 3x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

从而基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$.

例 2　求下列齐次线性方程组的基础解系与通解.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

解　把系数矩阵 A 用初等行变换变成为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{4} & 0 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_5 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 2x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$
基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

所以线性方程组的通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 \left(k_1, k_2 \in R\right).$$

二、非齐次线性方程组

1、非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

若记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则上述方程组（1）可写成向量方程 $Ax = b.$

又可记 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$ （2）

与非齐次方程组 $Ax=b$ 对应的齐次方程组 $Ax=0$ 称为该非齐次方程组的导出组.

2、非齐次线性方程组解的性质

(1) 若 $x_1=\eta_1, x_2=\eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是其导出组 $Ax=0$ 的解.

(2) 若 $x=\xi$ 为 $Ax=0$ 的解，$x=\eta$ 为 $Ax=b$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 也是 $Ax=b$ 的解.

(3) 若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 都为 $Ax=b$ 的解，则 $\dfrac{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_s}{s}$ 也是 $Ax=b$ 的解.

3、非齐次线性方程组的通解

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*.$$ 结构解

其中 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为其导出组的通解，η^* 为非齐次线性方程组的任意一个特解.

4、非齐次线性方程组有解的几个等价命题

线性方程组 Ax 有解，则以下命题等价：

$\Leftrightarrow$ 向量 b 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价.

$\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})$

定理 设n元非齐次线性方程组的系数矩阵为 A，增广矩阵为 $\bar{A}$，则

1）线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})=n$

2）线性方程组 $Ax=b$ 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})<n$

3）线性方程组 $Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(\bar{A})$

推论 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$

当 $R(A)=R(B)=n$ 时，向量 b 可由向量组 A 线性表示，且表达式唯一； 当 $R(A)=R(B)<n$ 时，向量 b 可由向量组 A 线性表示，但表达式不唯一；当 $R(A)\neq R(B)$ 时，向量 b 不可由向量组 A 线性表示.

例 1 求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

解 方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because R(A) \neq R(\bar{A})$, 所以线性方程组无解.

例 2 求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

解 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因 $R(A) = R(\overline{A}) = 3 < 4$, 所以线性方程组有无穷多解.

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad \text{即} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

例 3 向量组 $\alpha_1 = (1,4,0,2)^T, \alpha_2 = (2,7,1,3)^T,$

$\alpha_3 = (0,1,-1,a)^T, \beta = (3,10,b,4)^T,$

① a,b何值，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

② a,b 为何值时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?并写出表达式

解

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

(1)当 $b\neq 2$ 时， $r(\bar{A})>r(A)$,方程组无解，

β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(2)当$b=2,a\neq 1$时，$r(\bar{A})=r(A)=3,$ 方程组有唯一解

$x=(-1,2,0)^T \Rightarrow \beta=-\alpha_1+2\alpha_2$

(3)当$b=2,a=1$时，$r(\bar{A})=r(A)=2,$

$\Rightarrow \beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3$ k为任意常数

四、小结

齐次方程组 $Ax=0$的**通解**可表示为：

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

非齐次线性方程组 $Ax=b$的通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*.$$

n元齐次线性方程组

有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$

只有零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$

n元非齐次线性方程组

有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) = n$

有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) < n$

有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A) \neq R(\bar{A})$

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

第四章基本要求:

(1)理解向量组线性相关与线性无关的概念,会用有关性质及判别法判别向量组的线性相关性.

(2)了解向量组的极大无关组与向量组的秩的概念,会求向量组的极大无关组与向量组的秩.

(3)掌握齐次线性方程组是否有零解及非齐次线性方程组是否有解的判别方法.

(4)理解齐次线性方程组基础解系的概念,掌握求齐次方程组的基础解系及其结构式通解的方法.

(5)理解非齐次线性方程组通解的结构,掌握求其结构式通解的方法.

练习

1　齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，

则λ满足（ $\lambda \neq 1$ ）.

例4　设n阶矩阵A的各行元素之和为0，且秩为n－1，则线性方程组$Ax=0$的通解为$\underline{k(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)^T}$.

分析：$R(A)=n-1$, 则$Ax=0$ 的基础解系只有一个向量.

设$Ax=0$ 的第 i 个方程为 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0$,

又矩阵A的各行元素之和为0，即$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0$,

$\therefore\ x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 为它的一个解向量.

$\therefore\ Ax=0$ 的通解为$k(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)^T$.

例5　设三阶矩阵$B\neq 0$，且B的每一列均为方程

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$ 的解，

（1）求λ.

（2）证明$|B|=0$.

解　（1）因为 $B\neq 0$，且 B的每一列均为方程的解，所以方程组有非零的解，即方程组的系数行列式等于零.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & \lambda-1\\ 0 & -5 & 5\end{vmatrix}=0 \qquad \therefore \lambda=1.$$

（2）当$\lambda=1$时，方程组的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ 所以 $R(A)=2$

则线性方程组基础解系所含向量的个数为3 - 2 = 1个，

$$\therefore R(B)\leq 1\Rightarrow |B|=0.$$