实验十　非线性函数极值求解

实验目的

1.用matlab求解无约束条件函数的极值

2.用matlab求解有约束条件函数的极值

3.用matlab求解二次规划问题

目标函数和约束条件中至少有一个是非线性函数的规划问题，称为非线性规划。

事实上，客观事件中的问题许多都是非线性的，在做了科学的假设和简化后，被近似认为是线性的。但也有一些是不能进行线性化处理的。

1. 用matlab求解无约束条件函数的极值

在生活和工作中，只要解决问题的方法不是唯一的，就存在最优化问题。最优化方法就是专门研究从多个方案中科学合理的提取出最佳方案的科学。

从数学角度讲，最优化问题就是求一个函数的最大或最小值问题，而最大值可以转化为求最小值，所以最优化问题的一般形式为

$$\min\ f(x)$$

$$s.t.\, x \in \Omega$$

其中$x \in R^n$是决策变量，$f(x)$为目标函数，$\Omega \subset R^n$为约束集或可行域。当$\Omega = R^n$时，称为无约束变量，否则称为有约束变量

(1) 一元函数极值

x=fminbnd(fun,x1,x2)

%求解目标函数fun在区间(x1,x2)上的极小值点x.

[x,fval]=fminbnd(fun,x1,x2) %同时返回极小值fval

命令fminbnd的算法基于黄金分割法和二次插值法,

要求: 函数fun必须是连续函数.

注意: 目标函数 fun可以用字符串定义，可以用 inline函数定义，也可以用M文件定义. 但是，用M文件定义的目标函数在求极值时必须在函数名前面加函数句柄操作符@，即

[x,fmin]＝fminbnd(@fun,x1,x2)

例1 求函数$y=\sin^2 x e^{-0.2x}-0.9|x|$在$-10<x<-7$内的极大值与极小值.

解 程序如下:

```
y='sin(x)^2*exp(-0.2*x)-0.9*abs(x)';
%y=inline('sin(x)^2*exp(-0.2*x)-0.9*abs(x)');
y1='-1*(sin(x)^2*exp(-0.2*x)-0.9*abs(x))';
[xmin,ymin]=fminbnd(y,-10,-7) %xmin:最小值点；ymin最小值
[xmax,y1min]=fminbnd(y1,-10,-7)
ymax=-y1min
ezplot(y,[-10,-1])
```

（2）多元函数极值

x=fminsearch(fun,x0)

x=fminunc(fun,x0)

% 给定初值x0，求得fun函数的局部极小值点。

加fval返回极小值。

fminsearch采用单纯形法求极小值点和极小值，

fminunc采用牛顿法求局部极小值点和极小值.

例2 求函数$y = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$的极小值.

解 创建目标函数的M文件:

```
function f=funmin1(x)
 f=3*x(1)*x(1)+2*x(1)*x(2)+x(2)*x(2);
```

调用fminunc函数，求以[1,1]为初值的极小值点与极小值.

```
x0=[1,1];
[x,fval]=fminunc(@funmin1,x0)

x0=[1,1];
[x,fval]=fminsearch(@funmin1,x0)
```

2. 用matlab求解有约束条件函数的极值

x=fmincon(‘fun’,x0,A,b,aeq,beq,vlb,vub, ‘nonlcon’)

求解一般多元约束极值标准形为：

$$\min f(x), s.t. \begin{cases} Ax \le b \\ aeq \cdot x = beq \\ g(x) \le 0 \\ ceq(x) = 0 \\ vlb \le x \le vub \end{cases}$$

‘nonlcon’是m文件 nonlcon.m，表示约束条件中的非线性约束 g(x) < = 0或 ceq(x)=0.

例3 求原点到曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 的最长和最短距离。

解 首先定义非线性约束函数

```
function [g,ceq]=nonlcon(x)
g=[];
ceq=x(1)^2+x(2)^2-x(3);
```

$$\begin{cases} Ax \le b \\ aeq \cdot x = beq \\ g(x) \le 0 \\ ceq(x) = 0 \\ vlb \le x \le vub \end{cases}$$

其次编写程序如下：

```
x0=[0;0;0];
A=[];b=[];
aeq=[1 1 1];beq=[1];
vlb=[];vub=[];
f=inline('sqrt(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2)');
[x,d]=fmincon(f,x0,A,b,aeq,beq,vlb,vub,@nonlcon)
```

---

x=fmincon(@fun,x0,A,b,aeq,beq,vlb,vub,@nonlcon)

例4 求解极值 $\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 (x_2 + 2) x_3$

$$s.t.\begin{cases} 350 - 163 x_1^{-3.86} x_3^{0.86} \le 0, \\ 10 - 4 \times 10^{-3} x_1^{-4} x_2 x_3^3 \le 0, \\ x_1 (x_2 + 1.5) + 4.4 \times 10^{-3} x_1^{-4} - 3.7 x_3 \le 0, \\ 375 - 3.56 \times 10^5 x_2^{-1} x_3^{-2} \le 0, \\ 4 - \dfrac{x_3}{x_1} \le 0, \\ 1 \le x_1 \le 4, \\ 4.5 \le x_2 \le 50, \\ 10 \le x_3 \le 30. \end{cases}$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
350-163x_1^{-3.86}x_3^{0.86}\le 0,\\
10-4\times10^{-3}x_1^{-4}x_2x_3^{3}\le 0,\\
x_1(x_2+1.5)+4.4\times10^{-3}x_1^{-4}-3.7x_3\le 0,\\
375-3.56\times10^{5}x_2^{-1}x_3^{-2}\le 0,\\
4-\dfrac{x_3}{x_1}\le 0,\\
1\le x_1\le 4,\\
4.5\le x_2\le 50,\\
10\le x_3\le 30.
\end{cases}
$$

```
function [g,ceq]=fun2(x)
  g(1)=350-163*x(1)^(-2.86)*x(3)^0.86;
  g(2)=10-0.004*(x(1)^(-4))*x(2)*(x(3)^3);
 g(3)=x(1)*(x(2)+1.5)+0.0044*(x(1)^(-4))*x(2)*(x(3)^3)-3.7*x(3);
g(4)=375-356000*x(1)*(x(2)^(-1))*x(3)^(-2);
g(5)=4-x(3)/x(1);
ceq=[];
```

```
x0=[2 25 20]';vlb=[1 4.5 10]'; vub=[4 50 30]';
f1=inline('(x(1)^2)*(x(2)+2)*x(3)'); %目标函数可采用多种定义形式
[x,fval]=fmincon(f1,x0,[],[],[],[],vlb,vub,@fun2)
```

```
x =

    1.0000
    4.5000
   10.0000


fval =

    65
```

3. 用matlab求解二次规划问题

二次规划是非线性规划中的一类特殊数学规划问题，在很多方面都有应用，如投资组合、约束最小二乘问题的求解。在过去的几十年里，二次规划已经成为运筹学、经济数学、管理科学、系统分析和组合优化科学的基本方法。

3. 用matlab求解二次规划问题

$$\min z = \frac{1}{2} x^T H x + c^T x,$$

$$s.t. \begin{cases} Ax \le b \\ aeq \cdot x = beq \\ vlb \le x \le vub \end{cases}$$

x=quadprog(H,c,A,b,aeq,beq,vlb,vub)

例5 $\min f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-x_1x_2-4x_1-3x_2$

$$s..t.\quad \begin{cases} x_1+x_2\le 4, \\ -x_1+3x_2\le 3, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$$

解 $\min\ f=\frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+(-4,-3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$

$$s.t.\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

编写如下程序：

```
H=[4,-1;-1,2];
c=[-4;-3];
A=[1,1;-1,3];b=[4;3];
aeq=[];beq=[];
vlb=[0;0];vub=[];
[x,z]=quadprog(H,c,A,b,aeq,beq,vlb,vub)
```

```
x =

    1.5000
    1.5000

z =

   -6
```

本次上机作业

P191	**1.**
P194	**1**