第二节 逆矩阵

一 背景

二 逆矩阵的概念与性质

三 应用

四 小结

一、背景

1、数　在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

则$a^{-1} = \frac{1}{a}$称为a的倒数，（或称为a的逆）；

2、矩阵　在矩阵的运算中，单位阵E相当于数的乘法运算中的1，那么，对于矩阵A，如果存在一个矩阵A^{-1}，

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A称为可逆矩阵，A^{-1}称为A的逆阵.

二、逆矩阵的概念和性质

1、定义

对于 n 阶矩阵 A，如果有一个 n 阶矩阵 B，使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵 A 是**可逆**的，并把矩阵 B 称为 A 的**逆矩阵**.

A 的逆矩阵记作 A^{-1}.

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,$

$\therefore B$ 是 A 的逆矩阵.

说明 若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是**唯一**的.

证明 若设 B 和 C 是 A 可逆矩阵，则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

于是 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$

所以 A 的逆矩阵是唯一的,即 $B = C = A^{-1}$.

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,求 A 的逆.

解 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\ni AB = BA = E$

则 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

定理1 若矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

证明 若矩阵 A 可逆，则即有 A^{-1}，使得 $AA^{-1} = E$.

两边求行列式，有 $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$，$\therefore |A| \neq 0$.

定理2 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$ 其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵.

证明 因为矩阵与其伴随矩阵有 $AA^* = A^*A = |A|E$

又因为 $|A| \neq 0$，故有 $A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E$

所以，按逆矩阵的定义，即有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

推论 若 $AB = E$ 或 $BA = E$，则 $B = A^{-1}$

证明 只证 $AB = E$ 时，

易知 $|A| \cdot |B| = |E| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \exists$

于是 $B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}.$

2、奇异矩阵与非奇异矩阵

当 $|A| = 0$ 时，称 A 为奇异矩阵；

当 $|A| \neq 0$ 时，称 A 为非奇异矩阵.

3、运算规律

(设 A, B 均是 n 阶可逆方阵)

1）若 $A^{-1} \exists \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1} \exists$，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$

2）若$A^{-1}\exists,\lambda\neq 0 \Rightarrow (\lambda A)^{-1}\exists$,且$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3）若$A^{-1}\exists,B^{-1}\exists$，且$A,B$同阶，$\Rightarrow (AB)^{-1}\exists$,

且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

由推论，即有$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

推广 $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

4）若$A^{-1}\exists\Rightarrow (A^T)^{-1}\exists$,且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

证明 $\because\ A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$

$\therefore\ (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

5）若$A^{-1}\exists \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$

证明 $\because AA^{-1} = E \quad \therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1, \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}.$

6）若 $A^{-1}\exists, \Rightarrow \left(A^*\right)^{-1}\exists$, 且$\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* = \dfrac{A}{|A|}.$

证明 因为 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* \Rightarrow A^* = |A|A^{-1}$

所以 $\left(A^*\right)^{-1} = \left(|A|A^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow \left(A^*\right)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

而 $\left(A^{-1}\right)^* = \left|A^{-1}\right|\left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

$\therefore \left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* = \dfrac{A}{|A|}.$

7）其它的一些公式

$$AA^* = A^*A = |A|E \qquad A^* = |A|A^{-1}$$

$$|A^*| = |A|^{n-1} \qquad A = |A|\left(A^*\right)^{-1}.$$

$$\left(A^*\right)^* = |A|^{n-2}A \qquad (kA)^* = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

四、应用

例2 求下列矩阵的逆，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & ⋰ & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}, \left(\prod a_i \neq 0\right)$$

解1) $\because |A|=\prod a_i \neq 0 \quad \therefore A^{-1} \ \exists$

依对角矩阵的性质知：
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

解2) $\because |B| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_i \neq 0 \qquad \therefore B^{-1} \ \exists$

依矩阵的逆的定义，必有 $BB^{-1} = B^{-1}B = E$

即 $$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & a_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & a_2^{-1} & & \\ a_1^{-1} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

易知： $$B^{-1} = \begin{pmatrix} & & & a_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & a_2^{-1} & & \\ a_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

例 3 计算 $(4E+A)^T(4E-A)^{-1}(16E-A^2)$ 的行列式.

其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

解 $\left|(4E+A)^T(4E-A)^{-1}(16E-A^2)\right|$

$$=\left|(4E+A)^T(4E-A)^{-1}(4E-A)(4E+A)\right|$$

$$=\left|(4E+A)^T E(4E+A)\right|=\left|(4E+A)^T\right|\left|(4E+A)\right|$$

$$=\left|4E+A\right|^2=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}^2=60^2=3600$$

例 4 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&1&4\end{pmatrix}$，且满足 $AX=A+2X$，求 X.

解 $\because AX=A+2X$，有 $(A-2E)X=A$

$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$

$XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}$

而 $A-2E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$ $\quad\because |A-2E|=-2\neq 0$

$\therefore (A-2E)^{-1}$ $\exists$

$$X=(A-2E)^{-1}A,\quad (A-2E)^{-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&2&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&2&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&-1&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

例5 设 $A_{3\times3}$，其中A^* 为矩阵A的伴随矩阵. $|A|=\dfrac{1}{2}$

求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$　$A^*=|A|A^{-1}$

解 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$

$$=\left|3^{-1}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left|A^{-1}\right|=-\frac{16}{27}$$

例6 解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$

解 $X=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6&6\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$$

例7 设方阵 A 满足方程$A^2 - A - 2E = 0$，证明 $A, A+2E$ 可逆，并求它们的逆矩阵.

证明 由 $A^2 - A - 2E = 0$，得 $A(A-E) = 2E$

$$\Rightarrow A\frac{A-E}{2} = E \quad \Rightarrow |A|\left|\frac{A-E}{2}\right| = 1 \quad \Rightarrow |A| \neq 0,$$

A^{-1}

所以 A 可逆. $\quad \therefore\ A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A-E).$

由 $A^2 - A - 2E = 0 \Rightarrow (A+2E)(A-3E) + 4E = 0$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right] = E$$

$(A+2E)^{-1}$

$$\Rightarrow |A+2E|\left|-\frac{1}{4}(A-3E)\right| = 1 \quad \Rightarrow |A+2E| \neq 0,$$

所以$A+2E$可逆. $\quad \therefore (A+2E)^{-1} = \dfrac{3E-A}{4}.$

例8：设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$求$\left(A^*\right)^{-1}, A^{-1}$

例9：设$A, B, A+B$都为n阶可逆矩阵。证明：$A^{-1}+B^{-1}$也可逆，并求其逆

证明:

$$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)\left[A(A+B)^{-1}B\right]$$
$$=A^{-1}A(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$$
$$=(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$$
$$=\left(E+B^{-1}A\right)\left[(A+B)^{-1}B\right]$$
$$=B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B$$
$$=E$$

五、小结

逆矩阵的概念及运算性质.

逆矩阵 A存在 $\Leftrightarrow \left|A\right| \neq 0.$

逆矩阵的计算方法

定义法

利用公式 $A^{-1}=\dfrac{A^{*}}{\left|A\right|}$

初等变换法（后面介绍）