

## 第二节 矩阵相似与矩阵的对角化

一 相似矩阵

二 矩阵可对角化的条件

三 实对称矩阵的对角化

# 作业

## ❖ 习题6.2

2, 3, 4, 5, 6, 9,  
11, 14(2), 16

# 一、相似矩阵

**定义6.2.1 (相似矩阵)** 对于 $A_{n \times n}, B_{n \times n}$ ,若存在可逆矩阵 $P_{n \times n}$ ,使得 $P^{-1}AP = B$ ,则称 $A$ 与 $B$ 相似,或 $A$ 相似于 $B$ ,记为 $A \sim B$ ,并称由 $A \rightarrow P^{-1}AP = B$ 的变换为相似变换,

• 如果 $A$ 与一个对角矩阵相似,则称 $A$ 可相似对角化,简称为 $A$ 可对角化.

相似矩阵的简单性质:

(1)反身性:  $A \sim A$

(2)对称性: 若 $A \sim B$ ,则 $B \sim A$ ;

(3)传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$ ,则 $A \sim C$ .

注: 单位矩阵相似的只能是单位矩阵

**定理6.2.1** 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 与 $B$ 相似,则

(1)  $\det(A) = \det(B)$ ;

(2)  $r(A) = r(B)$ . 特别当 $A$ 可逆, 则  $A^{-1} \sim B^{-1}$

(3)  $A$ 与 $B$ 有相同的特征值 (有相同的特征多项式)

**证**  $A$ 与 $B$ 相似, 即有可逆矩阵 $P$ , 使 $P^{-1}AP=B$ , 于是有

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} P^{-1} & \lambda I - A & P \end{vmatrix} \\ &= |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A| \end{aligned}$$

- 定理的逆命题不真, 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 与 } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有相同的行列式, 相同的秩及相同的特征值,  
但是它们不相似. 因为与单位矩阵相似的只能是  
单位矩阵.



• 对角阵  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

的全部特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

• 若  $A$  与对角阵  $D$  相似, 则  $A$  的全部特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

## 本节的两个主要问题:

(1) 方阵可对角化的条件;

(2) 如果方阵 $A$ 会对角化,即存在可逆矩阵 $P$ 及对角矩阵 $D$ ,使得 $P^{-1}AP = D$ ,那么,如何求矩阵 $P$ 和 $D$ 呢?

## 二、矩阵可对角化的条件

### 定理6.2.2 (矩阵可对角化的充要条件)

$n$ 阶方阵 $A$ 可对角化  $\Leftrightarrow A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**证** " $\Rightarrow$ ", 设 $A$ 可对角化, 即存在可逆矩阵 $P$ 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{记为 } D \quad (\#)$$

设 $P$ 按列分块为 $P = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$

由 $P$ 可逆知向量组 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关,

由 $(\#)$ 式, 有 $AP = PD$



即

$$A[p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n] = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{或 } [Ap_1 \ Ap_2 \ \cdots \ Ap_n] = [\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ \cdots \ \lambda_n p_n]$$

$$\text{即 } A p_i = \lambda p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因为  $p_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$  为  $A$  的特征值. 且  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  依次为对应的特征向量. 必要性得证

将以上的证明倒推上去, 就是充分性的证明



**推论6.2.1** (矩阵可对角化的充分条件) 如果  $n$  阶矩阵  $A$  有  $n$  个不同的特征值, 则矩阵  $A$  可相似对角化.

**推论6.2.2**  $n$  阶矩阵  $A$  可相似对角化  $\Leftrightarrow A$  的任  $t_i$

重特征值  $\lambda_i$  对应  $t_i$  个线性无关的特征向量.

证 设  $A_{n \times n}$  的互不相同的全部特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$   
 其代数重数分别为  $n_1, n_2, \dots, n_m$  其中  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$   
 其几何重数分别为  $k_1, k_2, \dots, k_m$

设对应于特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  的线性无关特征向量分别为

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}; \dots; x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mk_m}$$

$A$  的线性无关的特征向量有且只有  $k_1 + k_2 + \dots + k_m$

$$\rightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \quad k_i \leq n_i \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m = n \quad k_i = n_i$$

$$\leftarrow n_1 + n_2 + \dots + n_m = n \rightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$



**注意** (1)  $P$ 中的列向量 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的排列顺序要与 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的顺序一致.

(2) 因  $p_i$  是  $(A - \lambda I)x = 0$  的基础解系中的解向量, 故  $p_i$  的取法不是唯一的, 因此  $P$  也是不唯一的.

(3) 又  $|A - \lambda I| = 0$  的根只有  $n$  个 (重根按重数计算) 所以如果不计  $\lambda_i$  的排列顺序, 则  $\Lambda$  是唯一的.

例1 方阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  是否相似于对角矩阵?若是,

求可逆矩阵  $P$  及对角矩阵  $D$ , 使得  $P^{-1}AP = D$ .

解 由  $A$  的特征方程

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -5 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -5 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$$

$A$  有3个互不相同的特征值  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ .

故  $A$  必可对角化.

对 $\lambda_1 = 0$ ,解方程组 $(0I - A)x = 0$ ,得基础解系 $\xi_1 = [1, -1, 0]^T$

对 $\lambda_2 = 2$ ,解方程组 $(2I - A)x = 0$ ,得基础解系 $\xi_2 = [0, 0, 1]^T$

对 $\lambda_3 = 6$ ,解方程组 $(6I - A)x = 0$ ,得 $\xi_3 = [1, 5, 0]^T$ ,

则 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 就是 $A$ 的3个线性无关的特征向量.

$$\text{令矩阵 } P = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{则有 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$$



例2 常数 $a, b$ 满足什么条件时,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

可对角化? 在可对角化时, 求可逆矩阵 $P$ ,  
使得 $P^{-1}AP$ 成为对角矩阵, 并求 $A^n$

解 由 $A$ 的特征方程

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

得 $A$ 得全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$

## A可对角化

$\Leftrightarrow A$ 的属于 $\lambda = 1$ 的线性无关的特征向量有2个

$\Leftrightarrow$  方程组 $(I - A)x = 0$ 的基础解系含有2个向量

$\Leftrightarrow$  方程组 $(I - A)x = 0$ 的基础解系含有2个向量

$\Leftrightarrow 3 - r(I - A) = 2 \Leftrightarrow r(I - A) = 1$

$$\text{而 } I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{的秩为1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{vmatrix} = a + b = 0$$

故A可对角化  $\Leftrightarrow a + b = 0$

当 $a + b = 0$ 时,下面来求化 $A$ 为对角矩阵

的相似变换的矩阵 $P$ .此时 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,解方程组 $(I - A)x = 0$ ,由

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于特征值 $\lambda_3 = -1$ ,解方程组 $(-I - A)x = 0$

$$-I - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -a & -2 & a \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{故令 } P = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{则有: } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \underline{\text{记为 } D}$$

下面求 $A^n$  :由上式可得 $A = PDP^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$

$$= PD(P^{-1}P)D\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}$$

$$= PDD\cdots DP^{-1}$$

$$\text{因 } D^n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (-1)^n \end{bmatrix}$$

故当 $n = 2k$ 时, $D^n = I \Rightarrow A^n = PIP^{-1} = I$

$n = 2k + 1$ 时, $A^n = A^{2k+1} = A^{2k}A = IA = A$



例3 判断  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$  是否相似于对角矩阵?

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & 5 \\ -6 & \lambda - 4 & 9 \\ -5 & -3 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$$

$$\text{对于 } \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad 0I - A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{秩}(0I - A) = 2$$

故属于  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  的线性无关的特征向量只有一个, 故  $A$  不能对角化.

### 三、实对称矩阵的对角化

**对称矩阵：** 满足  $A^T = A$  或  $a_{ij} = a_{ji} (\forall i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j)$ ,

**共扼矩阵：** 称  $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$  为  $A = (a_{ij})$  的共扼矩阵

**共扼运算满足：**  $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$

$$\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$$

$$\overline{kA} = \overline{k} \overline{A}$$

方阵  $A$  为实矩阵  $\Leftrightarrow \overline{A} = A$

方阵  $A$  为实对称矩阵  $\Leftrightarrow (\overline{A})^T = A$

## 性质6.2.1 实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明** 设 $\lambda$ 为实对称矩阵 $A$ 的一个特征值且

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为对应的特征向量,

则有  $Ax = \lambda x$

两端取共轭再取转置,得

$$\begin{aligned}\overline{x}^T A^T &= \overline{\lambda} \overline{x}^T \Rightarrow \overline{x}^T A = \overline{\lambda} \overline{x}^T \Rightarrow \overline{x}^T Ax = \overline{\lambda} \overline{x}^T x \\ \Rightarrow \overline{x}^T \lambda x &= \overline{\lambda} \overline{x}^T x \Rightarrow \lambda \overline{x}^T x = \overline{\lambda} \overline{x}^T x \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda}) \overline{x}^T x = 0\end{aligned}$$

$$\text{因 } \overline{x}^T x = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$$

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ , 即 $\lambda$ 为实数.

- 若 $\lambda_i$ 为实对称矩阵 $A$ 的特征值,则 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 为实系数方程组,可以取为实向量,因此 $A$ 的特征向量可取为实向量,以下都这样假定.

**性质6.2.2** 设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是实对称矩阵的两个不同特征值.

$$x_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ 分别为对应的特征向量.}$$

$$\text{则 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 正交, 即 } x_1^T x_2 = x_2^T x_1 = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$$

**性质6.2.3** 设 $\lambda$ 是实对称矩阵的特征值,则 $\lambda$ 的几何重数与其代数重数必相等.

... 对于任一 $n$ 阶实对称矩阵 $A$ ,必存在 $n$ 阶正交矩阵 $P$ ,使得

$$P^{-1}AP = P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

(1)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 $A$ 的全部特征值.

(2)  $P$ 的列向量组为 $A$ 的 $n$ 个标准正交的特征向量.



## 利用正交矩阵将对称矩阵对角化的方法

根据上述结论，利用正交矩阵将对称矩阵化为对角矩阵，其具体步骤为：

1. 求 $A$ 的特征值；
2. 由 $(A - \lambda_i I)x = 0$ , 求出 $A$ 的特征向量；
3. 将特征向量正交化；
4. 将特征向量单位化.

**例1** 对于  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , 求一个正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  成为对角矩阵.

**解**  $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1.$

分别求得  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$  对应的特征向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \xi_1 \text{ 与 } \xi_2 \text{ 已经正交, 再单位化:}$$

$$e_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{令 } P = [e_1 \quad e_2], \\ \text{则 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & \\ & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

**例2** 已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 3 \end{bmatrix}$  与  $D = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & b & \\ & & -1 \end{bmatrix}$  相似,

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求正交矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = D$ .

**解** (1)  $A$  的特征值为  $5, b, -1$ , 由特征值的性质1, 得

$$\begin{cases} 5 + b + (-1) = 0 + 0 + 3 \\ 5 \times b \times (-1) = |A| = 4a - 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

(2) 对于  $\lambda_1 = 5$ , 由  $5I - A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

对于  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , 由  $-I - A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \xi_2, \xi_3$  已经正交

令  $P = \begin{bmatrix} \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} & \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} & \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} \end{bmatrix}$ , 则有  $P^{-1}AP = P^TAP = D$

**注1** 属于 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的相互正交的特征向量

不唯一,例如,还可以取为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

**注2** 如果取 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则 $\alpha_1, \alpha_2$ 不正交,这时,可以通过施密特正交化方法求得属于 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的相互正交的特征向量.



# 本章基本要求

- (1)理解特征值与特征向量的定义,了解其性质,会计算特征值与特征向量.
- (2)了解相似矩阵的概念及性质.
- (3)理解方阵可对角化的条件,掌握用相似变换化方阵为对角矩阵的方法.
- (4)了解实对称矩阵的性质,掌握实对称矩阵正交相似对角化的方法.