第四章 n 维向量与线性方程组

第四章 n 维向量与线性方程组

第一节　消元法

- 作业
- 习题4.1 1(1)(4)，2

一、n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \quad Ax = b$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = [A \mid b]$$

增广矩阵

解， 解向量， 解集合， 一般解（通解）.

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 如何判断线性方程组有没有解？
- 在方程组有解时，它有多少解？如何求出它的全部解？
- 如果方程组的解不唯一，那么这些解之间的关系，即解的结构如何？

二、 消元法

- 一般消元法的基本思想----- 同解变形

1) 交换某两个方程的位置

$$\Leftrightarrow \overline{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}$$

2）用非零数k乘第i个方程

$$\Leftrightarrow \overline{A} \xrightarrow{kr_i}$$

1) 把第i个方程的k倍加至第j个方程

$$\Leftrightarrow \overline{A} \xrightarrow{kr_i + r_j}$$

例1 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -8 \end{array}\right]$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -7x_3 = -7 \\ 3x_2 - 12x_3 = -27 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases} \qquad \xrightarrow[\substack{-3r_1+r_3 \\ -r_1+r_3}]{-2r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & -12 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases} \qquad \xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{-\frac{1}{7}r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases} \qquad \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{-2r_2 + r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{-r_3 + r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & x_3 = 1 \\ \Rightarrow\ & x_2 = -5 \\ & x_1 = 12 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

消元法的一般步骤 $\Longleftrightarrow$ 用初等行变换将 $\overline{A}$ 化为行最简形

结论1 当 $r(A) = r(\overline{A}) =$ 未知量个数时,方程组有唯一解

例2　求解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

解

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

通解　　**解的参数形式**　　**解的向量形式**

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_4 \\ x_2 = -4 + x_4 \\ x_3 = -5 + 2x_4 \end{cases}$$

$(x_4$任意$)$,

或

$$\begin{cases} x_1 = -2 + c \\ x_2 = -4 + c \\ x_3 = -5 + 2c \\ x_4 = c \end{cases}$$

其中c为任意常数

或

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中c为任意常数

▪结论2

当$r(\overline{A})=r(A)<$未知量个数时,方程组有解且有无穷多解

例 3　求解方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ \quad x_2+2x_3=1 \\ x_1+3x_2+5x_3=3 \end{cases}$

解
$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见方程组无解

▪结论3　当$r(A)\neq r(\overline{A})$时,方程组无解

三、 线性方程组的解

定理4.1.1（线性方程组有解判定定理）

$A_{m\times n}$,n元线性方程组$Ax=b$有解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$

当有解时,解的情形分为两种:

(1)有唯一解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$;

(2)有无穷多解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$.

例 4 若 $\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & (a-1)^2 \end{bmatrix}$

试判定方程组解的情况,并在有解时,求其全部解

解 (1)$n=3$,当$a \neq 1$且$a \neq -3$时,$r(\overline{A}) = r(A) = 3$,故此时方程组有唯一解,逆向求解,即将阶梯形矩阵进一步化为简化行阶梯形:

$$\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-1}{a+3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4-\dfrac{3(a-1)}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & -1-\dfrac{a(a-1)}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-1}{a+3} \end{bmatrix}$$

得唯一解为

$$x_1=\frac{a+15}{a+3},x_2=\frac{-3-a^2}{a+3},x_3=\frac{a-1}{a+3}$$

(2)当$a=1$时,$r(A)=r(\overline{A})=2<3$,方程组有无穷多解,

$$此时\quad \overline{A}\to\begin{bmatrix}1&0&3&4\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=4-3x_3\\x_2=-1+x_3\end{cases}\quad(x_3\text{任意}),\text{或}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3c\\-1+c\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$$

(3)当$a=-3$时,$r(A)=2,r(\overline{A})=3$,方程组无解.

例 5

若 $\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，试求方程组的通解

解 $\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -14 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -18 + x_2 + 14x_4 \\ x_3 = 2 - 4x_4 \\ x_5 = 5 \end{cases} \quad (x_2, x_4\text{为任意常数})$$

通解 $\begin{cases} x_1 = -18 + x_2 + 14x_4 \\ x_3 = 2 - 4x_4 \\ x_5 = 5 \end{cases}$ $(x_2, x_4$为任意常数$)$

也可以表示为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 + c_1 + 14c_2 \\ c_1 \\ 2 - 4c_2 \\ c_2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A_{m\times n}$, n元齐次线性方程组$Ax=0$,总有$r(A)=r(\overline{A})$,
即方程组必有解,因此,

$$Ax=0\text{有唯一解}\Leftrightarrow Ax=0\text{只有零解}\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$$

$$Ax=0\text{有无穷多解}\Leftrightarrow Ax=0\text{有非零解}\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$$

定理4.1.2 $A_{m\times n}$, $Ax=0$的解的情况只有以下两种:

$$Ax=0\text{只有零解}\Leftrightarrow r(A)=n$$

$$Ax=0\text{有非零解}\Leftrightarrow r(A)<n$$

推论4.1.1 $A_{n\times n}$,则有:$Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

$Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow \det(A)=0$

推论4.1.2 $A_{m\times n}$, $m<n$,则$Ax=0$必有非零解

证:因$r(A)\le m<n\Rightarrow Ax=0$必有非零解

例 6　求解方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

解　$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$

(1)当 $\det(A) = (\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0$，即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，存在唯一解 $x = 0$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

(2)当$\lambda=1$时, $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_1=-x_2-x_3$(其中x_2,x_3任意)

(3)当$\lambda=-2$时, $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$ (x_3任意)

四、数域

- 数域—数集F,含有0和1,对数的加、减、乘和除（除数不为零）运算封闭.

Q—有理数域,R —实数域,C —复数域

数域F

五、小结

⑴ $A_{m\times n}x=0$只有零解$\Leftrightarrow r(A)=n$

$A_{m\times n}x=0$有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n$

⑵ $A_{n\times n}$, $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow det(A)\neq 0$

⑶ $Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow det(A)=0$

⑷ $A_{m\times n}, m<n$,则$Ax=0$必有非零解

⑸ $A_{m\times n}$,n元线性方程组$Ax=b$有解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$

当有解时,解的情形分为两种:

1^0 有唯一解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$;

2^0 有无穷多解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$.

练习 求解方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

解 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - \frac{1}{2}x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + 2x_5 \end{cases} (x_2, x_4, x_5\text{任意})$$