三、二次型

1 二次型及矩阵表示

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

记$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,则$A$为实对称阵，令$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则上述二次型也可记为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x^T Ax$$

2 化二次型为标准型

1) A与B合同， $C^T AC = B$

2) 惯性定理

3) 由于A为实对称阵，所以必存在正交阵Q，

使得$Q^T AQ = Q^{-1} AQ$为对角阵.

令$x = QY$,则实二次型化为

$$f(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

称为二次型的标准型 → 规范型

3 二次型与实对称矩阵的正定性

1）正定二次型

2）正定性的判定

n元二次型$f = x^T Ax$正定(对应实对称阵 A

是正定矩阵)的充要条件：

(1)对任意的非零列向量 $x, f = x^T Ax > 0$;

(2) f的正惯性指数为 n;

(3)A的特征值全为正数；

(4)存在可逆阵C,使得$A = C^T C$;

(5)A与单位阵合同；

(6)A的各阶顺序主子式都大于零.

3) 正定矩阵的性质

若A为正定矩阵，则有以下结论：

(1) A的主对角元$a_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n,$

且$|A|>0$，于是A可逆；

(2) $kA(k>0), A^T, A^{-1}, A^*, A^m$(m为正整数)

都是正定阵；

(3) 若A，B为同阶正定阵，则$aA+bB$

为正定阵($a\geq 0, b\geq 0, a, b$不同时为零).

例16 设$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2$
$+2(1+a)x_1x_2$的秩为2，

（1）求a;（2）求正交变换，化二次型为标准型；

（3）指出$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示的曲面名称；

（4）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

例16. ① $A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $r(A)=2$. $|A|=0 \Rightarrow a=0$.

② $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=2$.

例16 设$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2$
$+2(1+a)x_1x_2$的秩为2，

（1）求a；（2）求正交变换，化二次型为标准型；

（3）指出$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示的曲面名称；

（4）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

③. $2y_2^2+2y_3^2=1$. 圆柱面. 所以原曲面是一个圆柱面.

$f=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$ $\quad \begin{cases} x_1+x_2=0. \\ x_3=0. \end{cases}$

通解为 $k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $(k\in R)$.

例17 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$相似于对角阵，

（1）求a;

（2）$f = x^T Ax$是否是一个二次型？如果是求一个正交变换，将$f = x^T Ax$化为标准型；如果不是，请说明理由.

① $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & a & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4-16) = -(\lambda-6)^2(\lambda+2) = 0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=6.\ \lambda_3=-2.$

$\lambda=6$: $r(A-6I)=1$. $A-6I=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore a=0.$

例17 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$相似于对角阵，

（1）求a;

（2）$f=x^TAx$是否是一个二次型？如果是求一个正交变换，将$f=x^TAx$化为标准型；如果不是，请说明理由.

② f是一个二次型，此时f对应的矩阵B

$B=\frac{A+A^T}{2}$. [$f=x^TAx=(x^TAx)^T=\frac{1}{2}(x^TAx+x^TA^Tx)=x^T\frac{A+A^T}{2}x$]

$B=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0&5&0\\5&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}}+2I$.

C.

例17 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$相似于对角阵，

（1）求a;

（2）$f = x^T Ax$是否是一个二次型？如果是求一个正交变换，将$f = x^T Ax$化为标准型；如果不是，请说明理由.

C的特征值分别为4, 5, −5

∴ B的特征值分别为: 6, 7, −3.

$$f = 6y_1^2 + 7y_2^2 - 3y_3^2$$

例18 设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,

哪些矩阵相似？哪些合同？为什么？

$|A-\lambda I|=0$. $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=1$.

又A是实对称阵，所以A, B相似，且A, B合同.

B, D不相似，因为特征值互不相等.

若令 $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，则 $C^TBC=D$.

∴ B, D合同

利用相似，合同的传递性，知

A, D不相似，但A, D合同

例18 设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,

哪些矩阵相似？哪些合同？为什么？

结论： (1) 两个实对称阵若相似则必合同

(2) 两个可对角化的同阶方阵相似

$\Longleftrightarrow$ 它们有相同的特征值

(3) 两个同阶实对称阵合同

$\Longleftrightarrow$ 它们的正负惯性指数相同

$\Longleftrightarrow$ 它们的正负特征值个数相同

例19 n元二次型$f = x^T Ax$正定的充要条件是(　　)

A　存在正交矩阵P,使$P^T AP = I$

B　负惯性指数为零

C　A与单位阵合同

D　存在n阶矩阵C，使得$A = C^T C$

n元二次型$f = x^T Ax$正定(对应实对称阵 A 是正定矩阵)的充要条件:

(1)对任意的非零列向量 x, $f = x^T Ax > 0$;

(2) f的正惯性指数为 n;

(3)A的特征值全为正数;

(4)存在可逆阵C,使得$A = C^T C$;

(5)A与单位阵合同;

(6)存在正定矩阵B,使得$A = B^2$;

(7)A的各阶顺序主子式都大于零.

A是充分条件；B是必要条件；D中C可逆才行。

例20 设A、B分别为m、n阶正定矩阵，证明

$$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$也是正定矩阵.

1. 定义法

2. 特征值全部大于零

3. 与单位矩阵合同

4. 各阶顺序主子式大于零

例21 设A是n阶正定矩阵，B是n阶反对称矩阵，证明矩阵$A-B^2$是正定阵.

1. $A-B^2$ 是实对称矩阵;
2. **定义法**

若 $\forall x\in R^n$, $x\neq 0$.

$$x^T(A-B^2)x = x^TAx - x^TB^2x$$

$$= x^TAx + x^TB^TBx$$

$$= \underbrace{x^TAx}_{>0} + \underbrace{(Bx)^T(Bx)}_{\geq 0} > 0.$$

例22 已知二次型$f = x^T Ax$在正交变换$x = Qy$下的标准型为$y_1^2 + y_2^2$， 且Q的第三列为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,$$

（1） 求A；

（2） 证明$A + I$是正定阵.

A特征值为 1, 1, 0. 且属于0的特征向量为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$$

设属于A的特征向量为x，则 $\alpha^T x = 0$. $x_1 + x_3 = 0$.

取 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e_1 = \alpha_1$. $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

例22 已知二次型$f = x^T A x$在正交变换$x = Qy$下的标准型为$y_1^2 + y_2^2$，且Q的第三列为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,$$

（1）求A；

（2）证明$A + I$是正定阵.

解1 $Q=(e_1,e_2,e_3)$. 且 $Q^TAQ=D$.

$D=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$.

$$A=QDQ^T=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{pmatrix}$$

$$=e_1e_1^T+e_2e_2^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例23 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩等于多少？

例23. 一个易犯的错误为 $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2-x_3$, $y_3=x_3+x_1$.

则 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ $\therefore$ 秩为3.

以上是错误做法！原因是 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 不是可逆变换！

正确解法. $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

展开. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $\therefore$ 秩为2.

例24. $f\geqslant 0$

f 正定 $\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+a_1x_2=0 \\ x_2+a_2x_3=0 \\ x_3+a_3x_1=0 \end{cases}$ 只有零解 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$

$\Leftrightarrow a_1a_2a_3\neq -1$.

例25. ① 设 λ 为 A 特征值. 则 λ 满足 $\lambda^4-\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+2=0$.

即 $(\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda+2)=0$

又 $\because\lambda$ 为实数. $\therefore\lambda=1$ 为 A 的所有特征值. 故 A 正定.

② $\exists$ 正交阵 Q. s.t. $Q^TAQ=I$.

$\therefore A=QIQ^T=I$.

例24 实数a_1,a_2,a_3满足什么条件时，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_1)^2$$

为正定二次型？

例24. $f \geqslant 0$

f 正定 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_1+a_1x_2=0 \\ x_2+a_2x_3=0 \\ x_3+a_3x_1=0 \end{cases}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow a_1a_2a_3 \neq -1.$

例25 设实对称矩阵A满足$A^4 - A^3 + A^2 - 3A + 2I = 0$,

(1) A是否为正定矩阵？为什 么？

(2) 求矩阵A.