# 第二节　实二次型

一　$n$元二次型及其矩阵表示

二　化二次型为标准型

三　正定二次型及正定矩阵

**习题7.2 (A)**

**6(2)(4), 8, 10(2), 11, 12, 16(1), 18**

**3种柱面（椭圆柱面，双曲柱面，抛物柱面）**

**1种锥面（椭圆锥面）**

**5种二次曲面（椭球面、椭圆抛物面、双曲抛物面、双叶双曲面、单叶双曲面）**

抛物柱面

$$y^2 = 2x$$

椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**椭圆锥面**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

（1）椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

（2）椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ (p > 0,\ q > 0)$$

（3）双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ (p > 0,\ q > 0)$$

（4）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

（5）双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

**对于一般的3元2次方程，如何去研究其图形?**

⬇

**二次型理论**

# 一、n元二次型及其矩阵表示

## 1、定义

含有n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
+ a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\
+ \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned} \quad ①
$$

称为**二次型**.

或记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$

**注**

①当常数项为实数时，称为实二次型;

②当常数项为复数时，称为复二次型.

**定义** 只含有平方项的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为二次型的**标准形**.

**定义** 特别地，称

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2\cdots-x_{p+q}^2\,(p+q\le n)$$

为二次型的**规范形**.

## 2、二次型的表示

**(1) 二次型的和式表示**

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_1x_n\\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\ =&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$ ②

**（2）二次型的矩阵表示**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$=x_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)$$
$$+x_2\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+x_n\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\right)$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \quad ③$$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则二次型 $f=X^TAX$. 其中矩阵 $A$ 为对称矩阵.

## (3) 二次型的矩阵及秩

$$\left.\begin{array}{l} \text{任一二次型 } f \xrightarrow{\exists!} \text{对称矩阵 } A \\ \text{任一对称矩阵 } A \xrightarrow{\exists!} \text{二次型 } f \end{array}\right\}\text{一一对应}$$

$f$ 称为对称矩阵 $A$ 的二次型；$A$ 称为二次型 $f$ 的矩阵；

对称矩阵 $A$ 的秩称为二次型 $f$ 的秩.

**练习** 写出下列二次型的对称矩阵.

**例 1** 1）实数域R上的2元二次型 $f=ax^2+2bxy+cy^2$

2）实数域上R的3元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2+3x_2x_3+7x_3^2$$

3）复数域C上的4元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=ix_1x_2+\sqrt{3}x_1x_4+5x_2^2+(3+i)x_2x_3$$

**定义** 设 $A,B$ 为n阶方阵，若存在n阶可逆阵 $P$，使得 $P^TAP=B$，则称 **$A$ 合同于 $B$**，记为 $A\simeq B$.

**性质** ①反身性

②对称性

③传递性

等价

④合同矩阵具有相同的秩.

⑤与对称矩阵合同的矩阵也是对称矩阵.

## 二、化二次型为标准形

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形.

设
$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad ④$$

记 $C = (c_{ij})$，若|C| ≠0，则④为可逆线性变换（也称为满秩线性变换或非退化线性变换）.

记作 $x = Cy$

将其代入 $f = x^T A x$ 有

$$f = x^T A x = (Cy)^T A (Cy) = y^T (C^T A C) y.$$

**注** 二次型经过非退化线性变换仍为二次型.

**定理1** 任给可逆矩阵$C$，令$B = C^T AC$，如果$A$为对称矩阵，则$B$也为对称矩阵，且$R(B) = R(A)$.

**证明** $A$为对称矩阵，即有$A = A^T$，于是

$$B^T = \left(C^T AC\right)^T = C^T A^T C = C^T AC = B,$$

即$B$为对称矩阵.

$$\because B = C^T AC,$$

$$\therefore R(B) \le R(AC) \le R(A),$$

又 $\because A = \left(C^T\right)^{-1} BC^{-1}, \therefore R(A) \le R\left(BC^{-1}\right) \le R(B).$

$$\therefore R(A) = R(B).$$

**说明**

1. 二次型经可逆变换$x = Cy$后，其秩不变，但 $f$ 的矩阵由$A$变为$B = C^T AC$;

2. 要使二次型$f$经可逆变换 $x = Cy$变成标准形，就是要使

$$y^T C^T ACy = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使$C^T AC$成为对角矩阵.

由于对任意的实对称矩阵$A$,总有正交矩阵$P$,使$P^{-1}AP=\Lambda$,即$P^TAP=\Lambda$.把此结论应用于二次型,有

**定理2** 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\left(a_{ij}=a_{ji}\right)$,总有正交变换$x=Py$,使$f$化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A=\left(a_{ij}\right)$的特征值.

## 用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式 $f = x^T Ax$，求出 $A$;

2. 求出 $A$ 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$;

4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 正交化，单位化，得 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，记 $C = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$;

5. 作正交变换 $x = Cy$，则得 $f$ 的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

**例2** 求一个正交变换$x = Py$，把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

化为标准形.

**解** 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda+3)(\lambda-1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$$

当$\lambda_1=-3$时,解方程$(-3I-A)x=0$,

得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$,单位化即得$p_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$时,解方程$(I-A)x=0$

可得正交的基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

单位化即得 $p_2=[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ 0]^T,\ p_3=[0\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}]^T,$

$$p_4=[\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}]^T$$

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

且有 $f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$

# 用配方法化二次型成标准形

例3 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+4x_1x_3$$

为标准型.

解 $$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2-x_2^2+x_3^2+4x_1x_3 \\ &= x_1^2+4x_1x_3+4x_3^2-x_2^2-3x_3^2 \\ &= (x_1+2x_3)^2-x_2^2-3x_3^2 \end{aligned}$$

于是作可逆变换：

$$\begin{cases} y_1 = x_1+2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f = y_1^2-y_2^2-3y_3^2.}$$

例 4　化二次型　$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

成标准形，并求所用的变换矩阵.

解　在$f$ 中不含平方项.由于含有$x_1x_2$乘积项, 故令

$$x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3,$$ 或$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y$

代入可得　$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$

再配方，得　$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$ 即$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 - 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$ 或$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z$

即有$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(|C|=-2\neq 0).$$

## 三、惯性定理

**定理 7.2.3** 设二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的秩为 $r$，则不论用怎样的可逆线性变换把 $f$ 化成标准形，标准形中系数为正的项的个数 $p$（从而系数为负的项的个数 $r-p$）由 $f$ 本身唯一确定，并不依赖于所用的线性变换.

$$f=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$

$p$-------正惯性指数；

$r-p$------负惯性指数

如果二次型 $f(x)=x^TAx$ 经可逆线性变换x =Cy 化成了二次型 $g(y)=y^TBy$，则称 $f(x)$ 和g($y$)是**等价的二次型**

设二次型$f$经满秩线性变换化成了标准形:

$$f = d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2,$$

$$(d_i > 0, i = 1,2,\cdots,r)$$

再作满秩线性变换:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \cdots, \quad y_r = \frac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \quad y_{r+1} = z_{r+1}, \cdots, \quad y_n = z_n$$

就可将$f$化成: $f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$

称上式为$f$的规范形.

**有上述定理知: 二次型的规范形是唯一的**

**等价的二次型有相同的规范型**

## 四、正定二次型

### 定义7.2.3（正定二次型与正定矩阵）

设$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$是一个$n$元二次型（$A$为$n$阶实对称矩阵），如果$\forall x=(x_1,\cdots x_n)^T\in R^n$，且$x\neq 0$（即$x_1,\cdots,x_n$不全为零），恒有$f(x)=x^TAx>0$，则称二次型$f$为正定二次型，并称实对称矩阵$A$为正定矩阵.

**例如** $f(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_2^2$正定

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2$

$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2$

**定理7.2.4 二次型经可逆线性变换，其正定性不变**

**证** 设$f(x)=x^TAx \xlongequal{x=Cy,C\text{可逆}} y^T(C^TAC)y$

若$f(x)=x^TAx$正定,即$\forall x\in R^n, x\neq 0$,恒有$x^TAx>0$,

于是$\forall y\in R^n, y\neq 0$,有$Cy\neq 0$(否则$Cy=0$,则$C^{-1}Cy=0$,

即$y=0$,这与$y\neq 0$矛盾), 因此$\forall y\in R^n, y\neq 0$,有

$$y^T(C^TAC)y=(Cy)^TA(Cy)>0$$

所以,二次型$y^T(C^TAC)y$正定.

同理可证,当$y^T(C^TAC)y$正定时,有$x^TAx$正定.

定理7.2.4表明$A$与$C^TAC$有相同的正定性.即合同的矩阵有相同的正定性

**定理7.2.5** 设$n$阶实对称矩阵$A$的全部特征值为

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，如果$\vec{x}$是$R^n$中满足$\|\vec{x}\|=1$

的任何向量，则（1）$\lambda_1 \geq \vec{x}^T A\vec{x} \geq \lambda_n$;

$$（2）\vec{x}_1{}^T A\vec{x}_1 = \lambda_1,\ \vec{x}_n{}^T A\vec{x}_n = \lambda_n$$

其中$\vec{x}_i$是对应于$\lambda_i$的单位特征向量。

**证（1）** 存在正交变换$\vec{x}=P\vec{y}$,

其中$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T,\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，化$f$成标准形：

$$\lambda_1\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 \geq \lambda_n\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

由于 $\vec{x}^T\vec{x}=(P\vec{y})^T(P\vec{y})=\vec{y}^T(P^TP)\vec{y}=\vec{y}^T I\vec{y}=\vec{y}^T\vec{y}$,

故当 $\vec{x}^T\vec{x}=\|\vec{x}\|^2=1$时,有$\vec{y}^T\vec{y}=1$,故 $\lambda_1 \geq f \geq \lambda_n$

**证（2）** $\vec{x}_1{}^T A\vec{x}_1 = \vec{x}_1{}^T\lambda_1\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1{}^T\vec{x}_1 = \lambda_1\|\vec{x}_1\| = \lambda_1$

**定理7.2.5** 设$n$阶实对称矩阵$A$的全部特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，如果$\vec{x}$是$R^n$中满足$\|\vec{x}\| = 1$的任何向量，则（1）$\lambda_1 \geq \vec{x}^T A\vec{x} \geq \lambda_n$；

（2）$\vec{x}_1{}^T A\vec{x}_1 = \lambda_1$，$\vec{x}_n{}^T A\vec{x}_n = \lambda_n$

其中$\vec{x}_i$是对应于$\lambda_i$的单位特征向量。

**定理表明**

**二次型$f(x) = x^T Ax$在$\|x\| = 1$条件下的最大（小）值就是矩阵$A$的最大（小）特征值；**

最大（小）值在对应于最大（小）特征值的单位特征向量处取到.

**例5** 求二次型$f(x_1,x_2)=5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2$在$x_1^2+x_2^2=1$条件下的最大值及最大点.

**解** $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}$,

由$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 2\\ 2 & \lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow A$的最大特征值为$\lambda_1=9.$

由$9I-A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$

$e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$为属于$\lambda_1=9$的单位特征向量.

故所求$f$的最大值等于9,且在$x_1=\frac{1}{\sqrt{5}},x_2=-\frac{2}{\sqrt{5}}$处取得.

**定理7.2.6 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的所有特征值都大于零**

**证** 设$A$为正定矩阵,$\lambda$为$A$的任一特征值,$x$为对应于$\lambda$的特征向量，则$x \neq 0$,且$Ax = \lambda x$

$$0 < x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda > 0$$

反之，如果$A$的所有特征值都大于零,

则$A$的最小特征值$\lambda_n > 0$,

由定理7.2.5，对任意非零向量$x \in R^n$,都有

$$\frac{x^T Ax}{\|x\|^2} = \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \lambda_n > 0$$

$\Rightarrow$ $x^T Ax > 0$ 即$A$为正定矩阵。

**例6** 设$A$为$n$阶正定矩阵,证明:行列式$D=\left|A+I\right|>1$

**证** $A$正定,存在正交矩阵$P$,使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\text{且}\lambda_i>0, i=1,\cdots,n$$

$$\Rightarrow P^{-1}(A+I)P=P^TAP+I=\begin{bmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1\end{bmatrix}$$

两端取行列式,得

$$\left|A+I\right|=(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

**推论7.2.1** n元二次型 $f$ 为正定二次型的充要条件是 $f$ 的正惯性指数为n.

**定理7.2.7** 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是存在可逆矩阵$M$，使得 $A = M^T M$

**证** 设$A$正定，则$A$的特征值都大于0，且存在正交阵$P$，

$$A = P\,\text{diag}(\lambda_1,\cdots\lambda_n)P^T$$

令 $M = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P^T$ 则 $A = M^T M$

反之，如果存在可逆矩阵$M$，使得$A = M^T M$

则$A^T = A$，且$\forall x \in R^n, x \neq 0$，有$Mx \neq 0$，从而

$x^T A x = x^T M^T M x = (Mx)^T Mx = \|Mx\| > 0$. 即$A$正定.

**推论7.2.2** 如果A为正定矩阵，则det(A)>0.

**定理7.2.8** 实对称矩阵为正定矩阵的充要条件是

$A=(a_{ij})_{m\times n}$的各阶顺序主子式都大于零,即

$$\Delta_1=a_{11}>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots\ ,\quad \Delta_n=|A|>0$$

**例7** 试确定实数$t$的取值范围，使得二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

为正定二次型.

**解** $A=\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 由 $\Delta_1>0,\quad \Delta_2>0,\quad \Delta_3>0$

$\Rightarrow$ $\boxed{-\frac{4}{5}<t<0}$

# 其它类型的二次型

**定义7.2.4** 一个$n$阶实对称矩阵$A$和二次型$x^T Ax$称为

**半正定的，** 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0$, 都有$x^T Ax \geq 0$,

且存在$x_0 \neq 0$, 使得$x_0^T Ax_0 = 0$;

**负定的，** 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0$, 都有$x^T Ax < 0$;

**半负定的，** 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0$, 都有$x^T Ax \leq 0$,

且存在$x_0 \neq 0$, 使得$x_0^T Ax_0 = 0$;

**不定的，** 如果$x^T Ax$既能取到正值，又能取到负值.

**A是负定的** $\Longleftrightarrow$ **- A是正定的**

对称矩阵 $A$ 为负定的充分必要条件是：

（1） A的所有特征值为负。

（2）奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正。

例 8　判别二次型$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$的正定性.

**解**

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix},$$

$$\Delta_1=a_{11}=-5<0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,$$

$\Delta_3=|A|=-80<0,$ 知$f$ 为负定.

# 课堂练习

1、设$A$正定,证明: $A^{-1}, A^{m}$都是正定矩阵($m$为正整数)

1. 定义法：$x \neq 0$, 恒有$f(x)=x^{T}Ax>0$

**2. 定理7.2.6 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的所有特征值都大于零**

**3. 推论7.2.1 n元二次型 $f$ 为正定二次型的充要条件是 $f$ 的正惯性指数为n.**

**4. 定理7.2.7**实对称矩阵$A$为正定矩阵的充要条件是存在可逆矩阵$M$, 使得$A=M^{T}M$

**5. 定理7.2.8**

实对称矩阵 $A$为正定矩阵的充要条件是各阶顺序主子式都大于零:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad \Delta_n = |A| > 0$$

# 练习题解答

1、A正定 $\Rightarrow A$的所有特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$都大于0

$\Rightarrow A^{-1}$的所有特征值$\dfrac{1}{\lambda_1},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$都大于0

$\Rightarrow A^m$的所有特征值$\lambda_1^m,\cdots,\lambda_n^m$都大于0

得证

# 课堂练习

2、化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

成标准形，并求所用的变换矩阵.

1. 通过正交变换；
2. 通过配方法。

# 练习题解答

2、解 由于$f$ 中含变量$x_1$的平方项,故把含$x_1$的项归并起来,配方可得

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2,$$

$$= (\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{y_1})^2 + (\underbrace{x_2 + 2x_3}_{y_2})^2 = y_1^2 + y_2^2$$

所做的线性变换为

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

或 $$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y, \quad (|C| = 1 \neq 0).$$

就把 $f$ 化成标准形 $f = y_1^2 + y_2^2.$

# 7.2.5 二次曲面的标准方程

二次曲面的一般方程为：

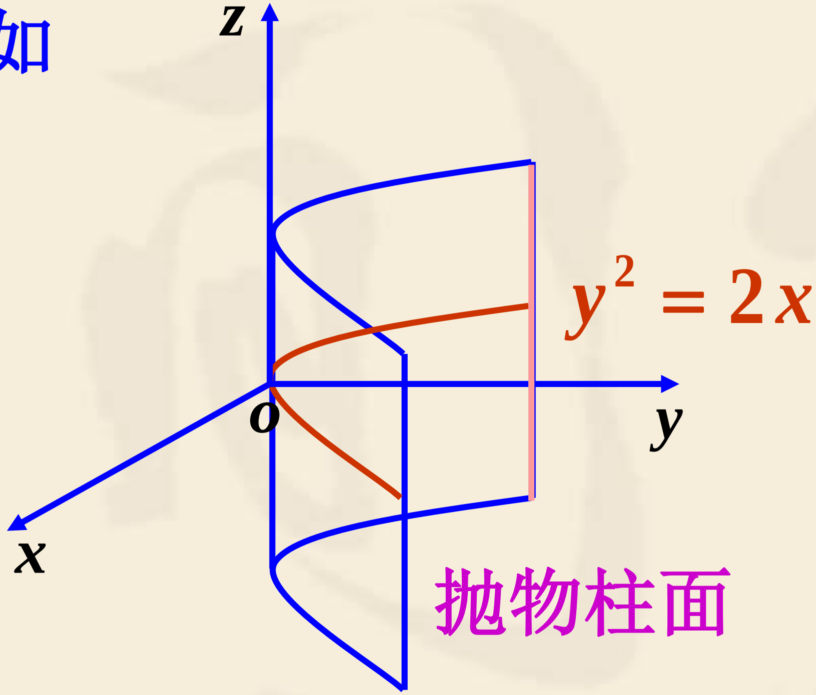
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

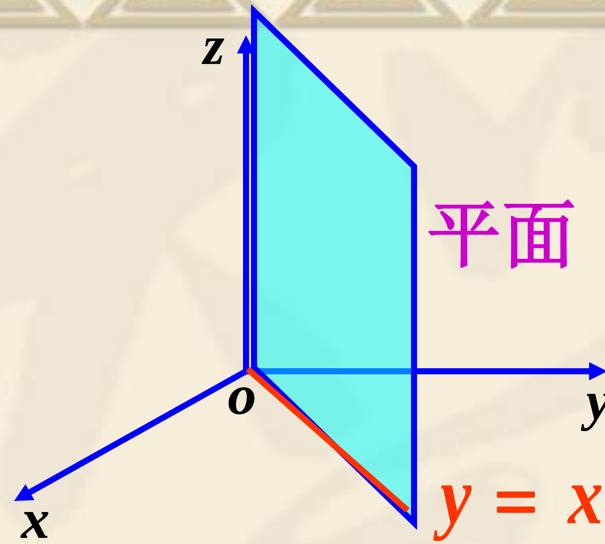
令： $A = (a_{ij})_{3\times 3},\ x = (x, y, z)^T,\ B = (b_1, b_2, b_3)^T$

$$x^T Ax + 2Bx + c = 0$$

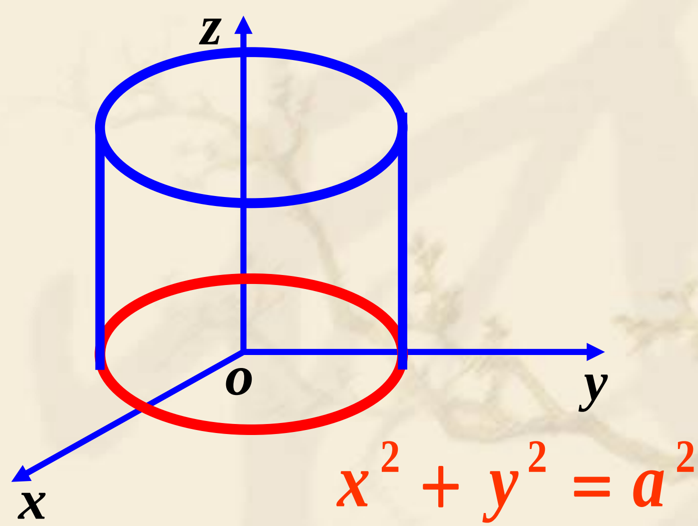
对于一般的曲面方程不容易判断其图形。

例如




圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$



$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$ ---------椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

旋转双曲面

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

旋转椭球面

$$x^2+y^2=2pz$$ 旋转抛物面

1 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad (p>0,\ q>0)$$

## （3） 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ （p>0,\ q>0）$$

## （4）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

## （5）双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

**特点：**

1. 没有交叉乘积项；
2. 如果有某一个变量的平方项，就没有它的1次项；
3. 如果有1次项，就没有常数项；
4. 至多有1个1次项。

**这样的二次曲面方程叫做二次曲面的标准方程**

# 7.2.5 二次曲面的标准方程

**二次曲面的一般方程为：**

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

**令：** $A = (a_{ij})_{3\times3}, x = (x, y, z)^T, B = (b_1, b_2, b_3)^T$

$$x^T Ax + 2Bx + c = 0$$

**可以通过正交变换**

$$x = Py$$

**将二次型化为：**

$$y^T Dy + 2B'y + c = 0$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2b_1 y_1 + 2b_2 y_2 + 2b_3 y_3 + c = 0$$

**用正交变换可以消去2次方程中的交叉乘积项**

## 7.2.5 二次曲面的标准方程

例7.2.9 将二次曲面方程

$$2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3+4x_1+4x_2=2$$

化成标准方程，并指出曲面的名称。

解： 曲面方程可写为

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=2$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=(2,2,0)^T$$

## 7.2.5 二次曲面的标准方程

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

**特征值为：-2,4,1**

**进一步得到正交矩阵** $P=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=2$$

$$-2\boldsymbol{y}_1^2+4\boldsymbol{y}_2^2+\boldsymbol{y}_3^2+4\boldsymbol{y}_1+4\boldsymbol{y}_3=2$$

# 7.2.5 二次曲面的标准方程

$$-2y_1^2+4y_2^2+y_3^2+4y_1+4y_3=2$$

**配方，得：**

$$-2(y_1-1)^2+4y_2^2+(y_3+2)^2=4$$

$$-\frac{x'^2}{2}+y'^2+\frac{z'^2}{4}=1$$

**曲面为：单叶双曲面**

**（4）单叶双曲面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$