第三章习题课

例1 以$A(5,1,-1), B(0,-4,3), C(1,-3,7)$为顶点的三角形的面积 = ______.

解 $\overrightarrow{AB}=(-5,-5,4), \overrightarrow{BC}=(1,1,4)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}==(-5,-5,4)\times(1,1,4)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -5 & 4\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=(-24\ 24\ 0).$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+24^2+0^2}=12\sqrt{2}.$$

例2

若直线 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$与直线 $x+1=y-1=z$相交,则$\lambda=$____.

解 取二直线上的点 $P_1(1,-1,1), P_2(-1,1,0), \overrightarrow{P_1P_2}=(-2,2,-1).$

二直线的方向向量为: $\vec{a_1}=(1,2,\lambda), \vec{a_2}=(1,1,1),$

由直线共面的条件知: $\vec{a_1}\times\vec{a_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0,$即:

$$\vec{a_1}\times\vec{a_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=0\text{ ,解得}\lambda=\frac{5}{4}.$$

例3 点(2,1,0)到平面$3x+4y+5z=0$的距离=____.

解

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|3\times 2+4\times 1+5\times 0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}$$

$$=\frac{10}{5\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}$$

例4 求点(1,2,3)到直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$的距离.

解 直线的方向向量$\vec{a}$为:

$$\vec{a}=(1,1,-1)\times(2,0,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,-2)$$

记$P_1=(1,2,3)$在直线上取一点$P_0(0,4,3)$,则$\overrightarrow{P_0P_1}=(1,-2,0)$

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}=\frac{\left\|(1,-2,0)\times(1,-3,-2)\right\|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{\left\|(4,2,-1)\right\|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

例5 设有点$P_0(2,-3,-1)$,直线$L_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z.$

(1) 求P_0到L_1的垂足点P_1;

(2) 求过P_0且与L_1垂直相交的直线的对称式方程;

(3) 求P_0关于L_1的对称点P_2.

解 (1) 设点$P_1(x_1,y_1,z_1)$, 因点P_1在直线L_1上,则可令:$\dfrac{x_1-1}{-2}=\dfrac{y_1+1}{-1}=z_1=t$

则点P_1坐标为$(1-2t,-1-t,t)$, 而P_1P_0与$(-2,-1,1)$垂直,故:

$$(1+2t,t-2,-1-t)\cdot(-2,-1,1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{6},\ P_1\text{点坐标为}(\frac{4}{3},-\frac{5}{6},-\frac{1}{6}).$$

例6 设有点$P_0(2,-3,-1)$，直线$L_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z.$

(2) 求过P_0且与L_1垂直相交的直线的对称式方程；

(3) 求P_0关于L_1的对称点P_2.

解 (2) 过$P_0(2,-3,-1)$且与L_1垂直相交的直线，与直线L_1相交于点P_1

由本题(1)知，$P_1(\dfrac{4}{3},-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{6})$.

该直线方向向量为：$\overrightarrow{P_1P_0}=(\dfrac{2}{3},-\dfrac{13}{6},-\dfrac{5}{6})$

所求直线的对称式方程为：$\dfrac{x-2}{\frac{2}{3}}=\dfrac{y+3}{-\frac{13}{6}}=\dfrac{z+1}{-\frac{5}{6}}$，即：$\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+3}{13}=\dfrac{z+1}{5}.$

例7 已知向量$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，且$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}-2\vec{b}$垂直，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

解 两个向量垂直的充要条件是：两个向量的内积等于零.

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7\|\vec{a}\|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\|\vec{b}\|^2=0.$$

$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7\|\vec{a}\|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\|\vec{b}\|^2=0.$二式相减得：$\|\vec{b}\|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}.$

再代入第一式得 $\|\vec{a}\|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}.\ \therefore\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|.$

$$\therefore\|\vec{a}\|^2=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{a}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|=2\vec{a}\cdot\vec{b}=2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2},\ \therefore(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}.$$

例8 直线 L过点$P_0(1,0,-2)$,与平面$\pi:3x-y+2z+1=0$平行,

与直线$L_1:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$相交.求 L 的对称式方程.

设L的方向向量为$s=(l,m,n)$

$$\overrightarrow{P_0P}//\vec{s}$$

$$\frac{l}{3}=\frac{m}{-1}=\frac{n}{2}$$

$P=(x_1,y_1,z_1)$为L和L_1的交点

$$\frac{l}{x_1-1}=\frac{m}{y_1}=\frac{n}{z_1+2}$$

$$\frac{x_1-1}{4}=\frac{y_1-3}{-2}=z_1$$