



西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 离散数学 Discrete Mathematics

西安交通大学 计算机学院

## § 6. Euler图

- Euler图的定义
- Euler图的理论
- 中国邮路问题

## § 6 Euler图

定义1. Euler路 Euler 圈 Euler图

设  $G = (V, E)$  是连通的、无孤立点的图。

- (1) Euler路是一条简单路 $P$ ，路 $P$ 穿过图 $G$ 中每条边一次且仅一次；
- (2) Euler圈是一条简单圈 $C$ ，圈 $C$ 穿过图 $G$ 中每条边一次且仅一次；
- (3) 含有Euler 圈的图 $G$ 称为Euler图（简称为E-图）。

## 定理1. (Euler定理)

设  $G = (V, E)$  是无孤立点的无向图。那么，

$G$ 是Euler图  $\Leftrightarrow G$ 是连通的且 $G$ 中无奇结点。

注：  $G$ 中**无奇**结点即是 $G$ 中每个结点都是**偶**结点。

[证].先证必要性 $\Rightarrow$ ): (采用蹦圈法)

设C是G的一条Euler圈。则

(1)图G是连通的:

由于图G中无孤立点, 所以图G中的每个结点都有一些边与之关联, 而Euler圈C包含了图G中的每一条边, 于是圈C在通过各边的同时必通过图G中每个结点。因而图G中每个结点都在Euler圈C上。因此, 图G中任何两结点, 沿着Euler圈C可相互到达, 故图G是连通的。

## (2)图G中无奇结点:

当圈C穿过某结点时,必从一边进,从另一边出,因此给该结点度数的贡献是2;尽管圈C可能会多次穿过某些结点,但由上述原因和Euler圈C仅穿过每条边一次(C是Euler圈)及每个结点都在圈C上可知:圈C穿过某结点 $k$ 次,就给该结点的度数贡献 $2k$ ;因此,图G中每个结点的度数必全为偶数,即图G中无奇结点。

再证充分性 $\Leftarrow$ ): (C.L.Liu算法)

No1.从任一结点出发, 走成一个简单圈C;

由于图G中每个结点都是偶结点(无奇结点), 且图G连通, 故图G中至少存在一个简单圈C.....

**N<sub>0</sub>2.**若此简单圈C已是Euler圈，则此图G就是Euler图，算法结束(出口)。

**N<sub>0</sub>3.**(插圈)否则，图G中必还有若干条边不属于圈C。

由图G的连通性可知：

必有圈C外的边 $e_j$ 与圈C

上的结点 $v_i$ 相关联( $v_i$ 称

为接触点)。

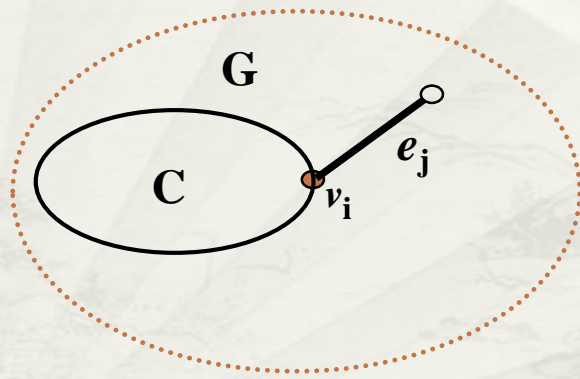
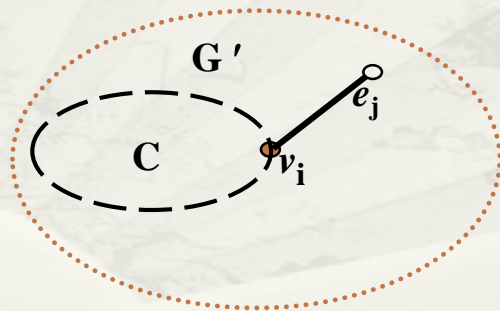
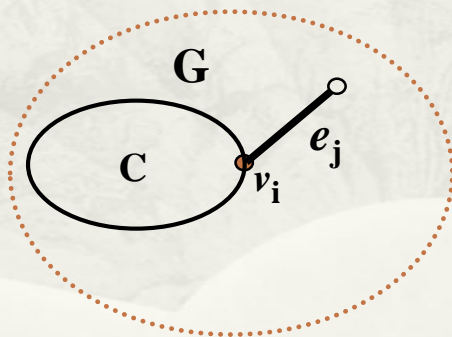


图1



在图 $G$ 中除去圈 $C$ (只删边)后的子图 $G'$ 中, 每个结点仍是偶结点, (圈 $C$ 上的结点, 都是一边进, 另一边出。因此圈 $C$ 每穿过某结点一次, 该结点的度数就被消耗掉2。故在删除圈 $C$ 的边时, 这些结点的度数都减少一个偶数)。



由于图 $G'$ 中每个结点都仍是偶结点，于是从结点 $v_i$ 出发，经过边 $e_j$ 及子图 $G'$ 中的其它边，必可走出一个简单圈 $C'$ ，回到出发点 $v_i$ 。故圈 $C$ 与圈 $C'$ 必由结点 $v_i$ 相连(如图所示)。将圈 $C'$ 插入圈 $C$ 中，形成一条新的更长的简单圈 $C:=C\cup C'$ ， goto No2。



由于图G中的边数是有限的，故算法必定在有限步结束。最后一定能得到一个包括图G中所有边在其上的简单圈C，此圈C即是Euler圈。所以图G即为Euler图。

- 注：
- C.L.Liu美籍华人。著有《离散数学基础》(刘振宏译)；
  - 条件：全是偶结点保证可走出简单圈；
  - 条件：连通性保证边(从而结点)可走完。

例1. 图G如图2所示。图G是否为一Euler图？若是，试求出其Euler圈。

[解]. 根据Euler定理可知，图G为Euler图。

按照C.L.Liu算法，可得图G中的Euler圈：

在图中任意找一简单圈 $C=(1,2,3,1)$ 。

边 $(3,4)$ 不在圈中且与圈中的结点3相关联。

由3出发经过边 $(3,4)$ 可得一简单圈 $C'=(3,4,5,3)$ ，

将 $C'$ 插入 $C$ 得到一个更长的简单圈  $C=(1,2,3,4,5,3,1)$ 。

此时边 $(2,5)$ 不在圈中且与圈中的结点2关联。

由2出发经过边 $(2,5)$ 又可得到一简单圈 $C''=(2,5,6,4,2)$ ，

将 $C''$ 插入 $C$ 又得到一条新的更长的简单圈 $C=(1,2,5,6,4,2,3,4,5,3,1)$ 。

图G中所有的边都已在圈 $C$ 中，故知此圈 $C$ 为图G的一个Euler圈。

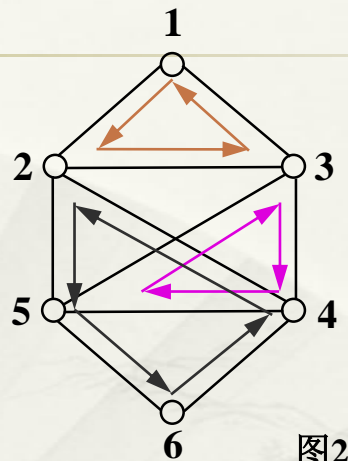
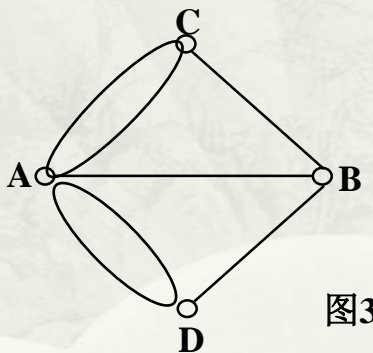


图2

## 例2. 哥尼斯堡七桥问题无解。

[解].在七桥图中(图3), 由于每个结点均为奇结点, 故由Euler定理的充要条件知, 该图中不存在经过每条边一次且仅一次的Euler圈。即七桥图不是Euler图。该问题无解。



推论.(Euler定理二) 设  $G=(V,E)$  是无孤立点的无向图。那么,  $G$  中有Euler路 $\Leftrightarrow G$ 是连通的且 $G$ 中恰有两个奇结点。

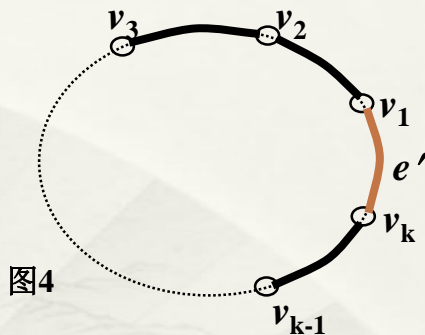
[证]. (采用增边删边法及抻路法)

$G$ 中有Euler路 $P=(v_1, v_2, \dots, v_k)$

$\Leftrightarrow G'=G \cup \{(v_1, v_k)\}$ 中有Euler圈 $C=(v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$

$\Leftrightarrow G'$ 是连通的且 $G'$ 中全是偶结点 (Euler定理)

$\Leftrightarrow G$ 是连通的且 $G$ 中恰有两个奇结点 $v_1, v_k$  (删掉  $e'=(v_1, v_k)$ )。



## 定义2.割边(cut edge)

设 $G=(V,E)$ 是无向图， $e \in E$ 。若 $W(G \setminus e) > W(G)$ ，则称边 $e$ 为图 $G$ 的割边。

这里 $W(G)$ 表示图 $G$ 中的连通支数。

例3. 图 $G$ 如图5所示。

$G$ 中的边 $e$ 是割边。因为 $W(G \setminus e) = 2 > 1 = W(G)$ 。

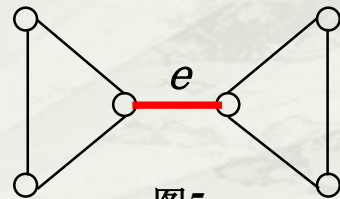


图5

## Fleury算法：寻找在两个奇结点间的一条Euler路的算法

(1) 从一个奇结点出发，每走一边标记一边；下次不走标记过的边；

(2) 在走边的过程中，除非没有其它选择时才走割边。



例4.如图6所示的图G中有一条Euler路。

[解].图G是连通的，恰有两个奇结点4和9，按Euler定理二可知其存在着Euler路。

利用Fleury算法，可求得其一条Euler路为

$P=(4,5,6,4,3,2,1,3,10,12,11,10,9,8,7,9)$ 。

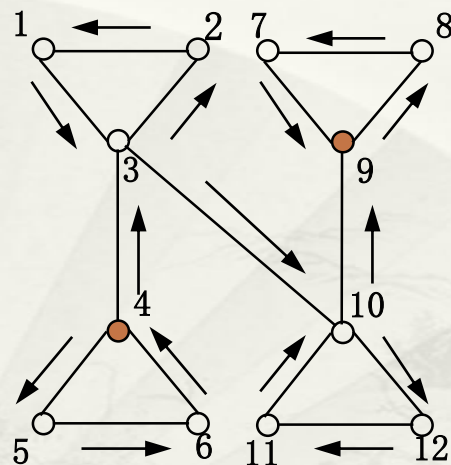


图6

定理2. 设 $G=(V,E)$ 是无孤立点的有向图。那么,

$G$ 是Euler图  $\Leftrightarrow G$ 是连通的且 $G$ 中每个结点的出度都等于进度。

[证].仿定理1的证明可证。只不过这里的Euler圈应是有向圈。

定理3 设  $G=(V,E)$  是无孤立点的有向图。那么,

$G$ 中有Euler路 $\Leftrightarrow G$ 是连通的且 $G$ 中除两个结点外, 其余每个结点的出度都等于进度。而这两个结点: 一个结点的进度比出度大1(终点), 另一个结点的出度比进度大1(起点)。

[证].仿定理1推论的证明可证。只不过这里的Euler路应是有向路。

## 应用一：高效率计算机磁鼓的设计。

计算机旋转磁鼓的表面被等分成 $2^n$ 个部分，与 $n$ 个电刷相接触。绝缘体(空白部分)不通电表示信号0；导体(阴影部分)通电表示信号1。从而 $n$ 个电刷上就产生一 $n$ 位二进制信号。

问题：如何合理的安排磁鼓表面上的空白与阴影部分，使得磁鼓转动 $n$ 个位置，就可读出 $2^n$ 个不同的二进制数。

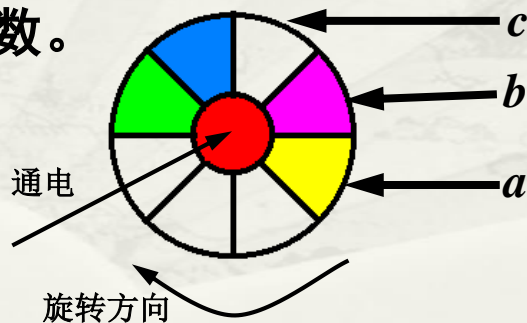


图7

图7表示有三个电刷a,b,c的磁鼓，磁鼓表面被分成了八个部分。它旋转一周只能读出六个不同的二进制数：

110,101,011,100,000,001。

因此安排不合理。

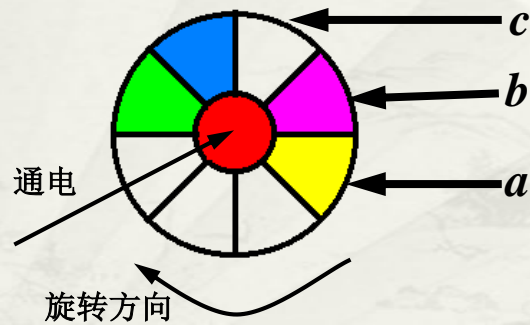


图7

考虑四个两位二进制数：00,01,10,11，将其作为图G的结点。

对于图G的任二结点 $p_1p_2$ 和 $q_1q_2$ ，若 $p_2=q_1$ ，则在它们之间连一条有向边 $(p_1p_2, q_1q_2)$ ，并用三位二进制数 $p_1p_2q_2$ 标记该边。

图8所示的图G是一有向图，它是(弱)连通的，并且每个结点的进度=出度=2，满足定理2中的条件，因此存在着Euler圈。

其Euler圈为：(000,001,011,111,110,101,010,100,000)。

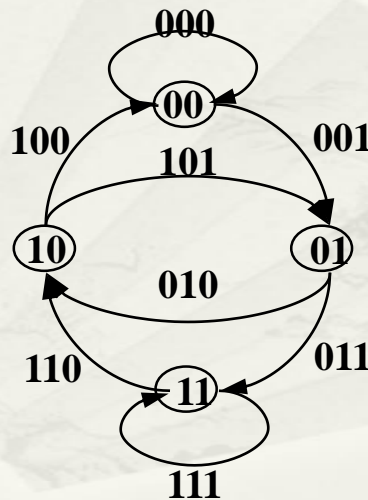


图8

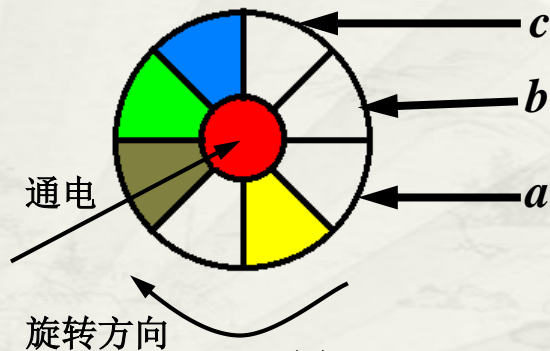
可以重复此八个三位二进制数，上述Euler圈可用一个八位二进制序列：  
00011101 来表示。

注：此序列称为De Bruijn序列。这一应用是由Good(1946)提出的。

按此序列来设计磁鼓绝缘体及导体的位置最为合理(如图9所示)，可以读出全部(八个)三位二进制数：

000,001,011,111,

110,101,010,100 。



## 应用二：一笔画问题

对于一个给定的图，究竟需要多少笔才能画成？这里只讨论连通图的一笔画问题。因为假若一个图是不连通的，则此图的笔画问题就可以归结成对各连通支笔画的讨论。

连通图的笔画是由图中奇结点的个数决定的。

本章 § 2 定理2已经证明过：图中奇结点的个数是偶数。所以奇结点是成对出现的，即为 $2k$ 个。

(1)当 $k=0,1$ 时，此连通图是一笔画的；

(2)当 $k>1$ 时，此连通图是 $k$ 笔画的(更进一步地，存在着 $k$  条边不重的路)。

## 应用三：中国邮路问题

一个邮递员，每次送信，领取邮件，由邮局出发，要走遍他所负责的投递范围内的每一条街道，完成投递任务后，再返回邮局。

问题是：他应该沿着怎样的路线走，使所走的总路程最短？

这个问题抽象成图论语言就是：在给定的一个连通的带权图  $G=(V,E,w)$  (每条边上一个非负的权  $w(e)$ ) 中，要求解一个圈  $C$ ，过每条边至少一次，并使圈  $C$  上的总权和  $w(C)$  达到最小。

设图  $G$  的奇结点个数是  $2k$  (参见应用二)。



我国山东师院的管梅谷教授于1962年首次研究并解决了上述问题。因此国际上将其称为中国邮路问题。

(1)当 $k=0$ 时(即无奇结点), 这时 $G$ 是Euler图, 有Euler圈, 设其为 $C$ 。显然, 若按Euler圈 $C$ 走, 每条边走且仅走一次, 总权和 $w(C)$ 显然是最小的;

(2)当 $k \geq 1$ 时(即有奇结点), 解决问题的思路是给图 $G$ 增加一些重复边, 使其变成无奇结点的多重图 $G'$ 。由于图 $G$ 是连通的, 故图 $G'$ 也是连通的。因而根据Euler定理可知, 图 $G'$ 必有Euler圈, 设其为 $C$ 。

设这些需重复的边的集合是 $E_1(E_1 \subseteq E)$ ，所增加的那些平行边的集合是 $E_1' = \{e' \mid e' // e \wedge e \in E_1\}$ ，所获得新的带权多重图 $G' = (V, E', w)$ ，其中 $E' = E \cup E_1'$ ，并且 $\forall e' \in E_1'$ ， $w(e') = w(e)$ (这里 $e' // e$ ， $e \in E_1$ )(参见图10)。

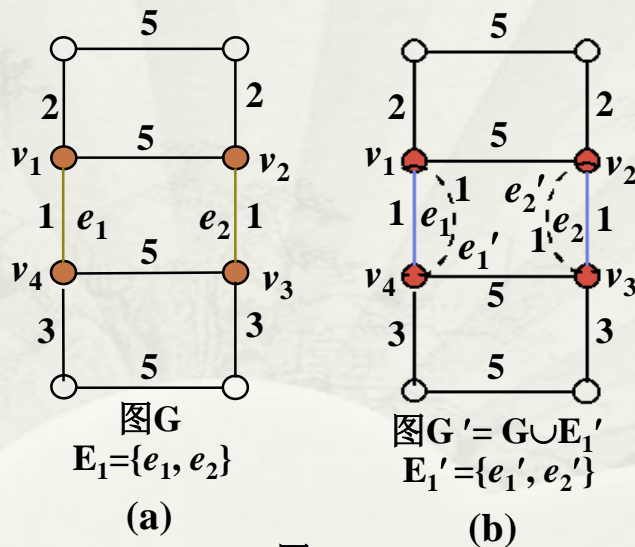


图10

现在由于圈C穿过图G'中的每条边一次且仅一次，因而C必定穿过图G中的每条边一次。而图G中各边的总权和 $w(E)$ 是固定不变的，所以要使

Euler圈C取得最小权值 $w(C)$

$\Leftrightarrow$ 平行边集 $E_1'$ 取得最小权值 $w(E_1')$

$\Leftrightarrow$ 边集 $E_1$ 取得最小权值 $w(E_1)$

因而，中国邮路问题就转化为：在一给定的带权图 $G=(V,E,w)$ 中，寻求这样一个边集 $E_1 \subseteq E$ ，其对应的平行边集为 $E_1'$ ，使带权多重图 $G'=G \cup E_1'$ 无奇结点，并使

$w(E_1) = \sum_{e \in E_1} w(e)$  达到最小。

称这样的边集 $E_1$ 是最优的。

## 定理4.(管氏定理(1962))

$E_1$ 是最优的

$\Leftrightarrow$ 在图G的每个初级圈 $C_i$ 上, 都有 $E_1$ 的边(要重复的边)的长度之和不  
超过圈长的一半

$\Leftrightarrow$ 在图G的每个初级圈 $C_i$ 上 
$$\sum_{e \in E_1 \cap C_i} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{e \in C_i} w(e)$$

[证].定理的证明主要基于以下两点:

(1)当某条边重复 $k(k \geq 2)$ 次后得到的图为Euler图时, 则此边重复 $k-2$ 次得到的图也一定为Euler图。

(2)在图G的一个初级圈上, 如果将原来的重复边都删去, 而在原来没有重复边的边上都加上一条重复边, 那么图中各结点的度数改变0或2, 所以, 这种做法不会改变图G是Euler图的性质。由此可知: 当Euler圈中重复边的长度之和超过此圈总长的一半时, 如作上述改变, 则重复边长度之和减少, 而Euler圈的性质不变。

例5. 在图11所示的图G中寻求最优边集 $E_1$ 。

[解].在右图G中，恰有四个奇结点，可以验证：边集

$E_1 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$ 是最优的。

图G中共有七个初级圈：

$$C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_1),$$

$$w(C_1) = 2 + 3 + 8 = 13,$$

$$w(E_1 \cap C_1) = w(v_1, v_2) = 2 < 6.5 = 1/2 \times 13 = 1/2 \times w(C_1);$$

$$C_2 = (v_1, v_2, v_4, v_1),$$

$$w(C_2) = 2 + 10 + 7 = 19,$$

$$w(E_1 \cap C_2) = w(v_1, v_2) = 2 < 9.5 = 1/2 \times 19 = 1/2 \times w(C_2);$$

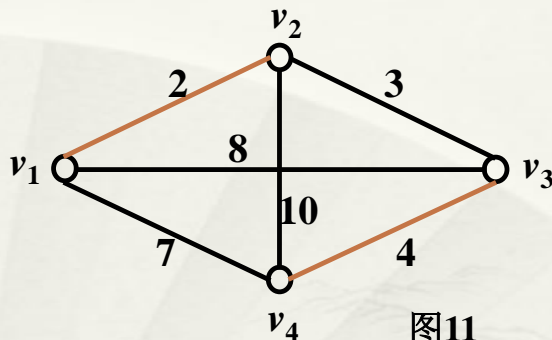


图11

$$C_3=(v_1, v_3, v_4, v_1), \quad w(C_3)=8+4+7=19,$$

$$w(E_1 \cap C_3)=w(v_3, v_4)=4 < 9.5 = 1/2 \times 19 = 1/2 \times w(C_3);$$

$$C_4=(v_2, v_3, v_4, v_2), \quad w(C_4)=3+4+10=17,$$

$$w(E_1 \cap C_4)=w(v_3, v_4)=4 < 8.5 = 1/2 \times 17 = 1/2 \times w(C_4);$$

$$C_5=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1), \quad w(C_5)=2+3+4+7=16,$$

$$w(E_1 \cap C_5)=w(v_1, v_2)+w(v_3, v_4)=2+4=6 < 8 = 1/2 \times 16 = 1/2 \times w(C_5);$$

$$C_6=(v_1, v_2, v_4, v_3, v_1), \quad w(C_6)=2+10+4+8=24,$$

$$w(E_1 \cap C_6)=w(v_1, v_2)+w(v_3, v_4)=2+4=6 < 12 = 1/2 \times 24 = 1/2 \times w(C_6);$$

$$C_7=(v_1, v_3, v_2, v_4, v_1), \quad w(C_7)=8+3+10+7=28,$$

$$w(E_1 \cap C_7)=w(\emptyset)=0 < 14 = 1/2 \times 28 = 1/2 \times w(C_7);$$

但是，边集 $E_2 = \{(v_1, v_4), (v_2, v_3)\}$ 不是最优的。因为

$$w(E_2 \cap C_5) = 7 + 3 = 10 > 8 = 1/2 \times 16 = 1/2 \times w(C_5);$$

边集 $E_3 = \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$ 不是最优的。因为

$$w(E_3 \cap C_6) = 8 + 10 = 18 > 12 = 1/2 \times 24 = 1/2 \times w(C_6);$$

$$w(E_3 \cap C_7) = 8 + 10 = 18 > 14 = 1/2 \times 28 = 1/2 \times w(C_7)。$$

注：在实际中应用管氏定理是很麻烦的。因为管氏定理要检查许多的初级圈，而且没有办法去系统的、逐个的检查，容易遗漏，因此一般不太实用。



(a)如果 $k=1$ ,即带权图 $G$ 中只有两个奇结点, (例如图12(a)), 则可先求出这两个奇结点间的最短路径, 然后将最短路径中的每条边重复一次(如图12(b)所示), 得到一个新的带权图 $G'$ , 它是一个Euler图(连通, 无奇结点),  $G'$ 中的Euler圈必定是取得最小值的圈。最短路径中的边必定构成最优边集 $E_1$ 。这里:

$$E_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\};$$

$$w(E_1) = w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) = 2 + 3 = 5。$$

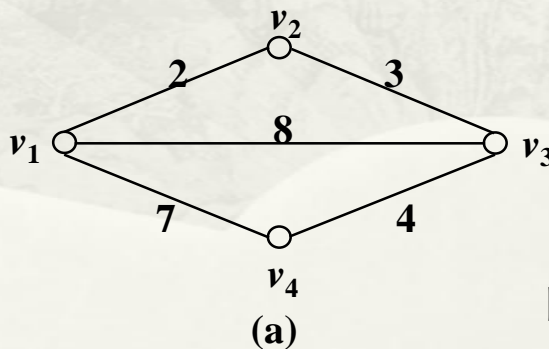
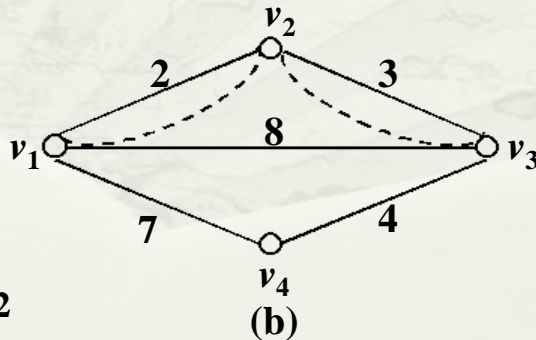


图12  
33



(b)如果 $k \geq 2$ ,即带权图 $G$ 中有 $2k$ 个奇结点, 匈牙利的J.Edmonds和Johnson提出了如下算法。

J.Edmonds和Johnson算法(匈牙利算法(1973)):

No1.找出所有奇结点 $O=\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i2k}\}$ ;

No2.求出任一奇结点 $v_{it}$ 到另任一奇结点 $v_{is}$ 的最短路 $P_{itis}$ 及其权 $w(P_{itis})$ ; (采用Dijkstra算法)

No3.以 $O$ 为结点集作完全图 $K_{2k}$ , 并令其边 $(v_{it}, v_{is})$ 上的权 $w(v_{it}, v_{is})=w(P_{itis})$ ;

No4.在带权图 $K_{2k}$ 中求出总权和最小的最大对集 $M^*$ (图中不相邻边的集合的最大者, 参见 § 9偶图); (采用J.Edmonds算法(1965))

No5.与 $M^*$ 中的每一杆 $(v_{it}, v_{is})$ 对应, 图 $G$ 中都有一条从奇结点 $v_{it}$ 到奇结点 $v_{is}$ 的最短路 $P_{itis}$ ,

令  $E_1=\{e \mid e \in P_{itis} \wedge (v_{it}, v_{is}) \in M^*\}$

于是,  $E_1$ 即是最优的。

## § 7. Hamilton 图

---

- Hamilton图的定义
- Hamilton图的理论
- 货郎担问题

## § 7. Hamilton 图

### Hamilton 图的引出及其定义

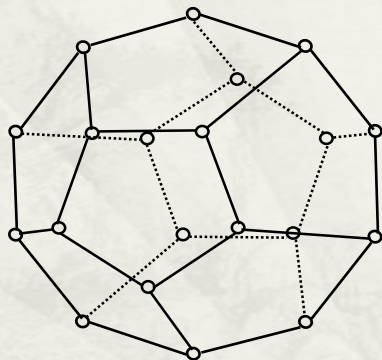
Hamilton 图是由威廉·哈密顿 (Sir Willian Hamilton) 爵士于1856年在解决关于正十二面体的一个数学游戏时首次提出的。

1856年Hamilton爵士发明了一种数学游戏：一个人在(实心的)正十二面体的任意五个相继的顶点(正十二面体是由12个相同的正五边形组成，有二十个顶点，三十条棱)上插上五个大头针，形成一条路，要求另一个人扩展这条路，以形成一条过每个顶点一次且仅一次的圈。有趣的是Hamilton爵士后来将他的发明及解决方案卖给了一个玩具商，所获是25个金币。

Hamilton爵士在1859年给他的朋友Graves的信中，将他的正十二面体数学游戏重新叙述为：

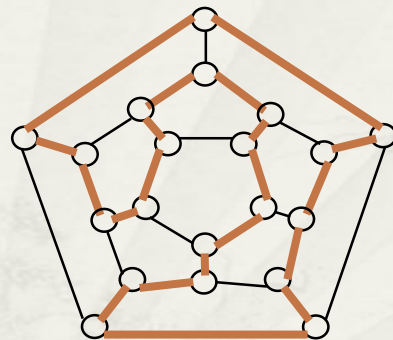
能否在全球选定的二十个都会城市（据说有中国三个城市：北京、上海、西安）中，从任一城市出发，作全球航行，经过这二十个城市一次且仅一次（不能去其它城市），然后回到出发点？这就是著名的环球航行问题或周游世界问题。

**Hamilton**给出了这个问题的肯定的答案(参见图1及图2)。



正十二面体

图1



正十二面体的平面展开  
图及其Hamilton圈

图2

注：威廉·哈密顿 (Sir Willian Hamilton(1805-1865))爵士是 (英国) 爱尔兰最伟大的学者之一。他是都柏林大学的天文学教授，在那里他出版了许多关于物理和数学的论文。在数学方面，他提出了著名的四元组理论和对复数系统的归纳。四元组理论奠定了抽象代数的发展基础。还据此提出了矢量概念。在理论物理学里，有著名的哈密顿动力学系统。

## 定义1. Hamilton路 圈 图

设 $G=(V,E)$ 是简单图。则

- (1) H-路是一条初级路，它穿过图中每个结点一次且仅一次；
- (2) H-圈是一条初级圈，它穿过图中每个结点一次且仅一次；
- (3) H-图是含有H-圈的图。



## 定理1. (必要性定理)

设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。则  $G$ 是H图 $\Rightarrow (\forall S \subseteq V)(S \neq \emptyset \Rightarrow w(G \setminus S) \leq |S|)$ 。

其中： $w(G')$ 表示图 $G'$ 的连通支数(分图个数)。

[证].由于 $G$ 是H图，故 $G$ 中含有H-圈，设其为 $C$ 。

(1)先证 $w(C \setminus S) \leq |S|$ ：对于结点集 $V$ 的任一个非空子集 $S$ ，在H-圈 $C$ 中删去 $S$ 中的 $|S|$ 个结点，由归纳法易于证明(见注)： $C \setminus S$ 的分图个数不会超过所删去的结点个数 $|S|$ ，即 $w(C \setminus S) \leq |S|$ 。

.....

(2)次证 $w(G \setminus S) \leq w(C \setminus S)$ : 由于 $C \setminus S$ 是 $G \setminus S$ 的一个生成子图, 故此 $G \setminus S$ 的边要比 $C \setminus S$ 的边多, 因而 $G \setminus S$ 的连通性要比 $C \setminus S$ 的连通性强, 所以 $G \setminus S$ 的分图个数不会超过 $C \setminus S$ 的分图个数, 即

$$w(G \setminus S) \leq w(C \setminus S)。$$

最后, 根据(1)和(2), 得到:  $w(G \setminus S) \leq |S|。$

注：•  $[w(C \setminus S) \leq |S|]$  的数学归纳法证明].

(1) [基始] 当  $|S|=1$  时，在圈  $C$  中删去一个结点，所得子图  $C \setminus S$  是一条连通的路，故有  $w(C \setminus S) = 1 \leq 1 = |S|$ ；

(2) [归纳假设] 当  $|S|=k$  时，假设有  $w(C \setminus S) \leq |S|=k$ ；

(3) [归纳] 当  $|S|=k+1$  时，设  $v$  是  $S$  中的任一结点，令  $S' := S \setminus \{v\}$ ，则有  $|S'|=k$ 。于是根据归纳假设有  $w(C \setminus S') \leq |S'|$ ；而  $S = S' \cup \{v\}$ ，在圈  $C$  上删去  $S$  的  $k+1$  个结点，可分为两步：先在圈  $C$  上删去  $S'$  的  $k$  个结点，将圈  $C$  分成  $w(C \setminus S')$  段；然后在这些段的某一段上删去结点  $v$ ；

①若结点  $v$  在**该段的头上**，则**删去**结点  $v$ ，**不会增加**分图的个数，即有

$$w(C - S) = w(C - S');$$

②若结点  $v$  不在**该段的头上** (在中间)，则**删去**结点  $v$ ，**该段一分为二**，分图的个数**会增加一**，即有

$$w(C - S) = w(C - S') + 1;$$

于是，**综合①和②的结果**，**总有**

$$w(C - S) \leq w(C - S') + 1 \leq |S'| + 1 = |S|。$$

例1.图5(a)所示的图G不是H-图。

在图中有9个结点。将中间层上的三个结点删去(即 $S=\{v_4, v_5, v_6\}$ ,  $|S|=3$ ), 此时图5(a)变为图5(b), 而图5(b)的分图个数为4, 即  $w(G \setminus S)=4 > 3 = |S|$ , 不满足定理1的必要性条件, 故由定理1知它不是H-图。

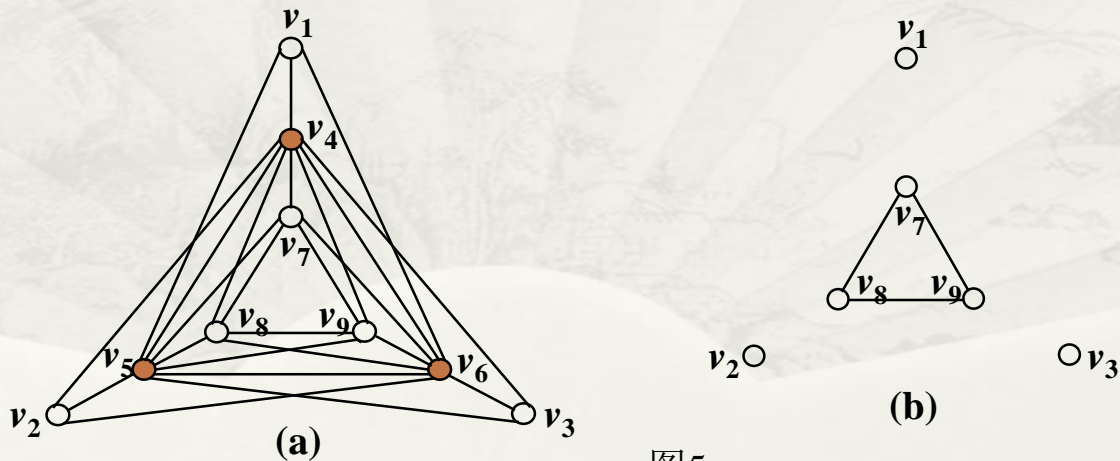


图5

例2.图6(a)所示的Petersen图P满足定理1的必要性条件，但却不是H-图。

Chvatal在1973 年用穷举法证明了P-图不是H-图。

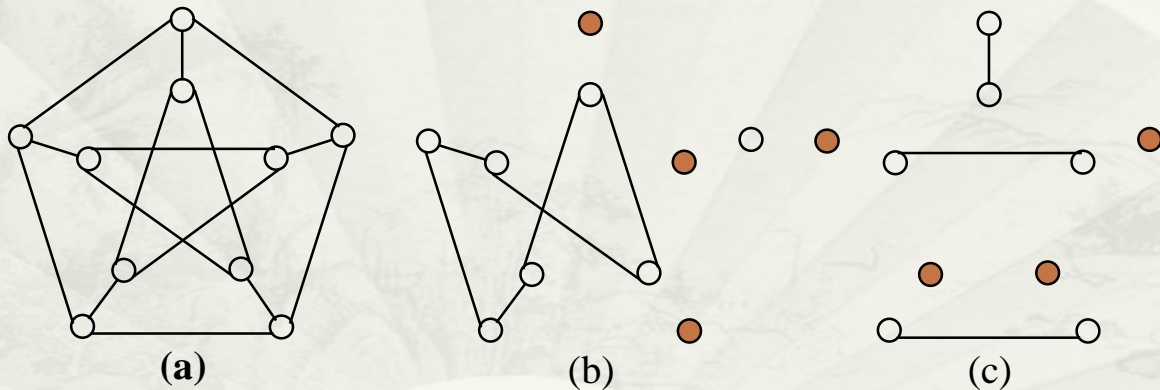


图6 P-图及其子图

## 定理2.(D·König定理(充分性定理))

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图, 且 $|V|=n$ 。则

对任意一对结点 $u, v \in V$ , 均有  $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$  (\*)

$\Rightarrow G$ 中必有一条H-路。

[证].先证:  $G$ 是连通的(采用反证法);

否则, 则在图 $G$ 中至少有两个分图 $G_1$ 、 $G_2$ (此间无边相连),  
设 $G_1$ 有 $n_1$ 个结点,  $G_2$ 有 $n_2$ 个结点。

任取结点 $u_0 \in G_1$ ,  $v_0 \in G_2$ 。

注意到:  $n_1 + n_2 \leq n$ ,  $\deg(u_0) \leq n_1 - 1$ ,  $\deg(v_0) \leq n_2 - 1$ ,

从而

$$\deg(u_0) + \deg(v_0) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2 < n - 1$$

这就与条件(\*)矛盾了。故图 $G$ 是连通的。



次证：图G中必有一条H-路；

*König*算法：（用此算法必可求得图G中的一条H-路）

No1.从G中任一结点 $v$ 出发，走出一条初级路，并将此路的两端尽量延伸到尽头。不妨设此路为

$$P=(v_1, v_2, \dots, v_p), \quad |P|=p-1。$$

注：所谓将路的两端已延伸到尽头是指：

$$\neg (\exists v_0 \in V) ((v_0, v_1) \in E \wedge (v_0, v_1) \notin P) \wedge \\ \neg (\exists v_{p+1} \in V) ((v_p, v_{p+1}) \in E \wedge (v_p, v_{p+1}) \notin P)。$$

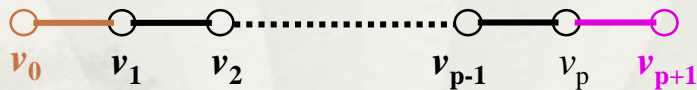


图7.没有延伸到尽头的路P

即路P的两个端点和不在路P上的任何结点都不相邻。若有相邻，那么就立即向两端延伸路P，使它包含这些结点。也就是说：这里得到的初级路P，它的两端只与路中的某些结点相邻，而不与路P之外的任何结点相邻。

No2.若 $p=n$ ，则此路 $P$ 已是 $H$ -路。exit ；

否则 $p < n$  (故 $p \leq n-1$ )，兹证明初级路 $P$ 必可被改造成一初级圈 $C$ ，  
且有  $|C| = |P| + 1 = p$ 。

No3.若端点 $v_1$ 与端点 $v_p$ 相邻，将边 $(v_1, v_p)$ 并入路 $P$ ，则立即得到一初级圈 $C = (v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ ，并且 $|C| = |P| + 1$ 。 go to No5 。

**N<sub>0</sub>4.** 若端点 $v_1$ 与端点 $v_p$ 不相邻, 设与端点 $v_1$ 相邻的结点有 $k$ 个( $\deg(v_1)=k$ ),

不妨设其为 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ , 这些结点全都在路 $P$ 上(否则, 路没有走到尽头)。

端点 $v_p$ 必至少与 $k$ 个结点 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ 中的某一个相邻(指结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$

在路 $P$ 上的前一个结点)。

.....

.....

否则,  $\deg(v_p) \leq p-1-k$  (与端点  $v_p$  相邻的结点全都在路  $P$  上, 否则路没有走到尽头)。

路  $P$  上共有  $p$  个结点, 与结点  $v_p$  相邻的结点, 应该去掉结点  $v_p$  自己以及已设不与

它相邻的  $k$  个结点  $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ , 不会超过  $p-1-k$  个结点)。于是,

$$\deg(v_1) + \deg(v_p) \leq k + (p-1-k) = p-1 < n-1 \quad (\text{因 } p < n),$$

这与条件(\*)矛盾。

从而不妨设结点 $v_p$ 与结点 $v_{ij-1}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) 相邻, 就立即得到一个通过结点 $v_1, v_2, \dots, v_p$  的初级圈:

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_{ij-1}, v_p, v_{p-1}, \dots, v_{ij}, v_1), \text{ 且 } |C| = |P| - 1 + 2 = |P| + 1$$

(如图8所示)。

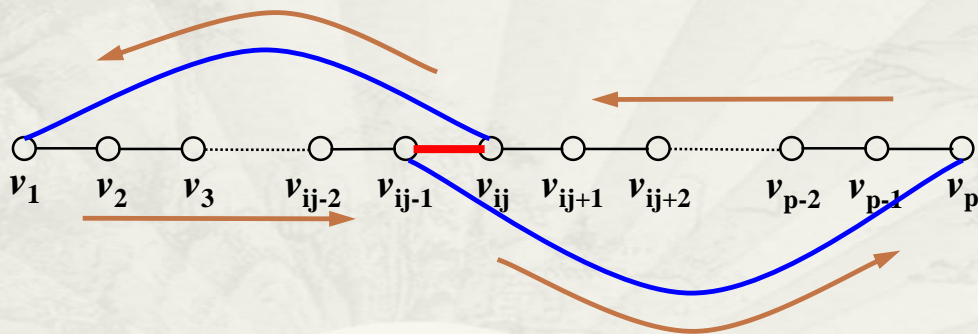
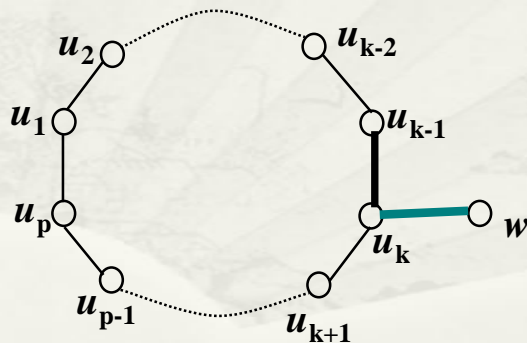


图8.初级路P改为初级圈C

No5. 最后，兹证明初级圈C必可被改造成一初级路P (新)，且有  $|P|(\text{新}) = |C| = |P|(\text{旧}) + 1$ 。

由于初级圈  $C = (u_1, u_2, \dots, u_p, u_1)$  (重新命名) 上只有  $p$  个结点且  $p < n$ ，故在圈C外应该还有图G的结点。这些结点中必至少有一个(不妨设是  $w$ ) 与C上的某个结点(不妨设是  $u_k$  ( $1 \leq k \leq p$ )) 相邻(否则，图G不连通)，



延伸 $u_k$ 到 $w$ ，拆去 $u_k$ 的一个邻边 $(u_k, u_{k-1})$ ，就得到了一条更长的初级路：

$$P = (u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_1, u_2, u_p, u_{p-1}, \dots, u_k, w)$$

且  $|P|(\text{新}) = |C| - 1 + 1 = |C| = |P|(\text{老}) + 1$  (如图9所示)。

将 $P$ 的两端延伸到尽头，go to No2。

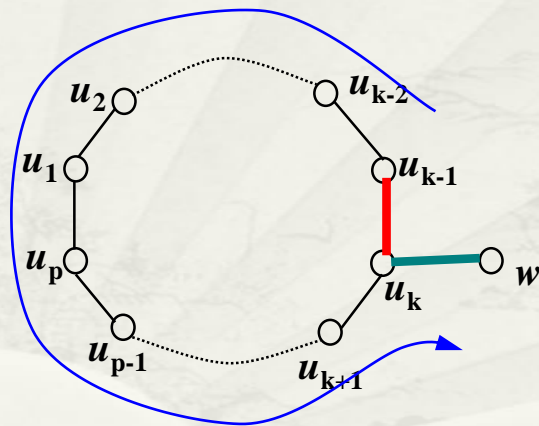


图9.初级圈 C 改为初级路P(新)



注：•König算法一定会在有限步停止。因为算法每进入循环一次，初级路P上结点的个数都会至少增一，而任何图G中结点的个数都是有限的；

•König算法的操作实际上是三步：

(1)任走出一条初级路P，并延伸到尽头；

(2) “改” 初级路P为初级圈C；

(3)改初级圈C为初级路P (新)，并延伸到尽头；路长至少增1。

### 定理3.(D·KÖnig定理(充分性定理))

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图, 且 $|V|=n$ 。则

对任意一对结点 $u, v \in V$ , 均有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  (\*\*)  $\Rightarrow G$ 必是H-图。

[证].图G若满足条件(\*\*), 则显然满足条件(\*), 故定理2成立。因此图G中必存在着一条H-路P, 不妨设:

$$P=(v_1, v_2, \dots, v_n)。$$

现在 来证图G中必含有H-圈:

(1)若端点 $v_1$ 与端点 $v_n$ 相邻, 将边 $(v_1, v_n)$ 并入路P, 则立即得到一H-圈:

$$C=(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1);$$

(2)若端点 $v_1$ 与端点 $v_n$ 不相邻，设与端点 $v_1$ 相邻的结点有 $k$ 个 ( $\deg(v_1)=k$ )，不妨设其是 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ ，这些结点全都在路 $P$ 上(因为路 $P$ 是 $H$ -路，包含了图 $G$ 中的所有结点)。这时，端点 $v_n$ 必至少与 $k$ 个结点 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ 中的某一个相邻(是指结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ 在路 $P$ 上的前一个结点)。

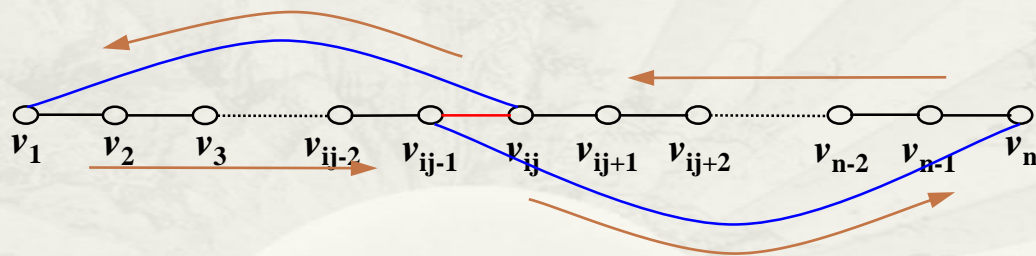


图11

否则，由 $\deg(v_1)=k$ ，则 $\deg(v_n)\leq n-1-k$  (与端点 $v_n$ 相邻的结点全都在路 $P$ 上(因为路 $P$ 是 $H$ -路)。路 $P$ 上共有 $n$ 个结点，与结点 $v_n$ 相邻的结点，应该去掉结点 $v_n$ 自己以及已设不与它相邻的 $k$ 个结点 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ ，不会超过 $n-1-k$ 个结点)。于是，

$$\deg(v_1)+\deg(v_n)\leq k+(n-1-k)=n-1<n$$

这与条件(\*\*)矛盾。

不妨设结点 $v_n$ 与结点 $v_{ij-1}$  ( $1\leq j\leq k$ )相邻，就立即得到一 $H$ -圈： $C=(v_1, v_2, \dots, v_{ij-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{ij}, v_1)$  (如图11所示)。根据(1)和(2)可知：图 $G$ 中必含有一 $H$ -圈，故图 $G$ 必是 $H$ -图。

注：•König在定理3证明中的证明思想，据传来源于英国亚瑟王的谋士摩尔林，在解决著名的“圆桌会议”座位排名方案时所用的方法：相传亚瑟王有 $2n$ 名骑士，每名骑士都有 $n-1$ 名骑士是他的仇人。而大谋士摩尔林每当在亚瑟王召开“圆桌会议”时，却都能够预先排定那张享有盛名的圆桌的座位名次，以便使每名骑士都不与他的仇人相邻。

- 定理2实际上是用了抻路法和蹦圈法；

定理3实际上是用了蹦圈法。

## 推论1.(G·A·Dirac定理(1952) (充分性定理))

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图, 且 $|V|=n$ 。则

对任意结点 $v \in V$ , 均有 $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$  (\*\*\*)

$\Rightarrow G$ 必是H-图。

[证].图 $G$ 满足条件(\*\*\*) $\Rightarrow$ 图 $G$ 满足条件(\*\*)

$\Rightarrow$ 图 $G$ 必是H-图 (根据定理2)。

#### 定理4.(充分性定理)

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图, 且 $|V|=n$ ,  $|E|=m$ 。则

$$m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 \quad (4^*)$$

$\Rightarrow G$ 必是H-图。



## 定义2.图的闭包(closure)

一个简单无向图 $G=(V,E)(|V|=n)$ 的闭包是一个图 $G^c=(V,E^c)$ 。其中：边集 $E^c$ 的定义如下

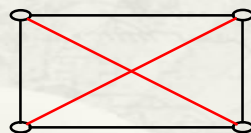
$$E^c := E ;$$

$$E^c := E^c \cup \{(u,v) \mid (u,v) \notin E^c \wedge \deg_{G^c}(u) + \deg_{G^c}(v) \geq n\} .$$

例3.图12给出了几个图的闭包及其产生过程。



(a)图 $G_1$



(a)图 $G_1^c = K_4$

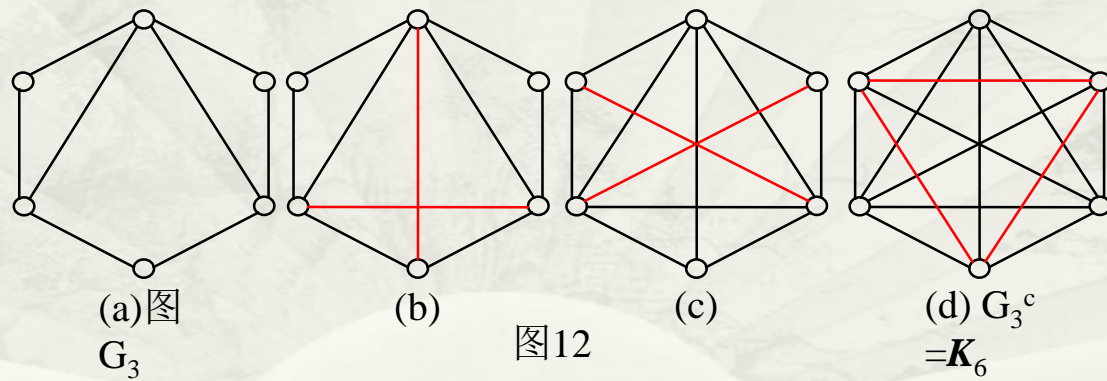
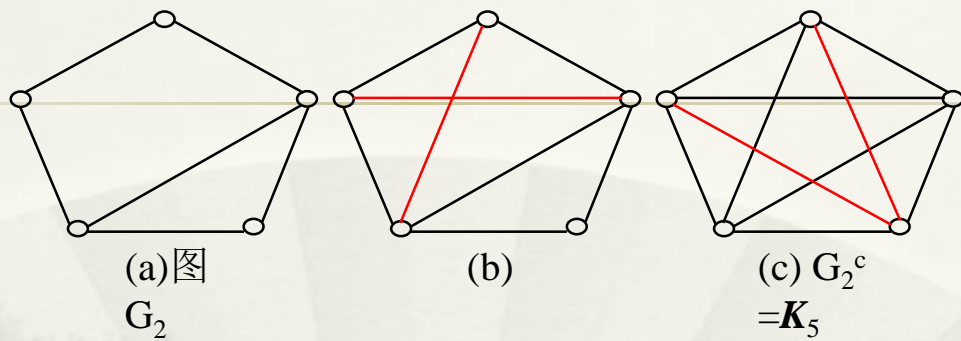


图12

## 定理5.(Bondy及Chvatal定理(1969))

简单无向图 $G$ 是H-图 $\Leftrightarrow$ 图 $G$ 的闭包 $G^c$ 是H-图。

**提示：**只需证明如下的一步性引理即可得证充分性：

**引理1.**对于简单无向图 $G$ ，且 $|V|=n$ 。则

图 $G'$ 是H-图 $\Rightarrow$ 图 $G$ 是H-图。

其中： $G'=(V,E')$ ， $E'=E \cup \{(u_0,v_0)\}$

(这里： $(u_0,v_0) \notin E \wedge \deg_G(u_0) + \deg_G(v_0) \geq n$ )

(证明方法参见定理3的证明)。

注：定理5好似已经得到判定H-图的充要条件，其实不然。因为它只不过是将判定一个图 $G$ 是H-图转化为判定它的闭包图 $G^c$ 是H-图；而判定闭包图 $G^c$ 是H-图的充要条件仍未得到。

### 定义3.竞赛图(race-graph)

无向完全图的定向图称为竞赛图。

注：竞赛图中任何两个结点间都有且仅有一条有向边。即

$$(\forall u \in V)(\forall v \in V)((u, v) \in E \wedge (v, u) \notin E) \vee ((u, v) \notin E \wedge (v, u) \in E)。$$

例4.图14给出了三个4个结点的竞赛图。

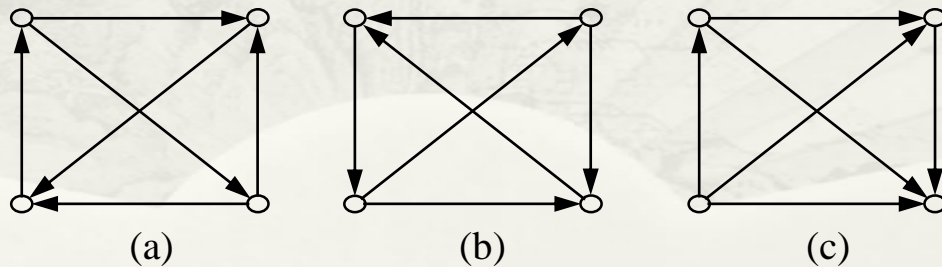


图14

## 定理6.(Redei(1934))

设 $G=(V,E)$ 是竞赛图, 且 $|V|=n$ 。则

竞赛图 $G$ 中必存在着一条有向 $H$ -路。

[证].(采用翻边法)

算法: 从竞赛图 $G$ 中求得一条 $H$ -路

No1.从 $G$ 中任意一点出发, 走出一条有向初级路 $P$ , 并将其两端延伸到尽头。

设此有向初级路

$P=(v_1, v_2, \dots, v_p)$ , 其路长 $|P|=p-1$ ;

**No2.** 若 $p=n$ ，则初级路 $P$ 就是竞赛图 $G$ 中的一条有向 $H$ -路。exit;

**No3.** 若 $p \neq n$ ，则竞赛图 $G$ 中必存在着初级路 $P$ 外的一个结点 $w$ ，使得下式成立：

$(\exists k)(1 \leq k \leq p-1)((v_k, w) \in E \wedge (w, v_{k+1}) \in E)$  (如图15所示)。

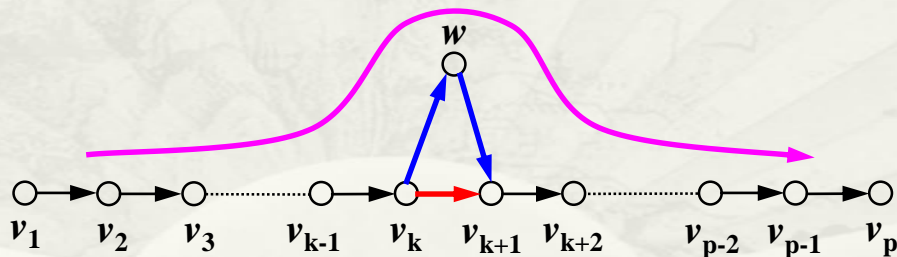


图15

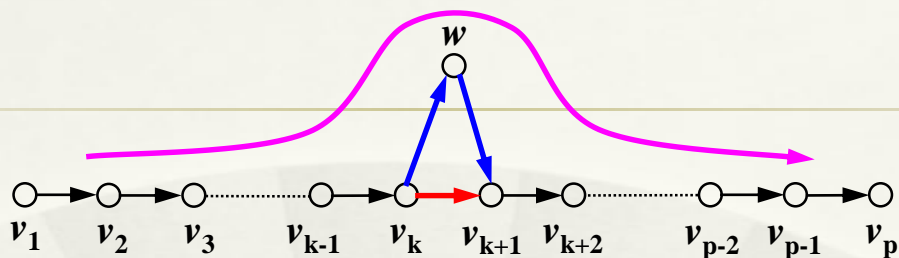


图15

将结点 $w$ 插入初级路 $P$ 中，就得到一条新的更长的初级路：

$$P' = (v_1, v_2, \dots, v_k, w, v_{k+1}, \dots, v_p),$$

$|P'| = |P| - 1 + 2 = |P| + 1$ ，并将其两端延伸到尽头，仍将其记为 $P$ 。go to No2。

否则，若不存在这样的结点  $w$ ，即

$$\neg(\exists k) (1 \leq k \leq p-1) ((v_k, w) \in E \wedge (w, v_{k+1}) \in E)$$

$$\Leftrightarrow (\forall k) (1 \leq k \leq p-1) \neg((v_k, w) \in E \wedge (w, v_{k+1}) \in E) \quad (\text{量词对偶})$$

$$\Leftrightarrow (\forall k) (1 \leq k \leq p-1) (\neg(v_k, w) \in E \vee \neg(w, v_{k+1}) \in E) \quad (\text{de Morgan律})$$

$$\Leftrightarrow (\forall k) (1 \leq k \leq p-1) ((v_k, w) \in E \Rightarrow (w, v_{k+1}) \notin E) \quad (1*) \quad (\text{联结词归约律})$$

$$\Leftrightarrow (\forall k) (1 \leq k \leq p-1) ((w, v_{k+1}) \in E \Rightarrow (v_k, w) \notin E) \quad (2*) \quad (\text{联结词归约律})$$

于是，可得如下两个矛盾：



(1)若 $(w, v_1) \in E$ , 则这与结点 $v_1$ 是路P的尽头矛盾!

否则 $(w, v_1) \notin E \Rightarrow (v_1, w) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (w, v_2) \notin E$  (根据(1\*) 式)

$\Rightarrow (v_2, w) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (w, v_3) \notin E$  (根据(1\*) 式)

$\Rightarrow (v_3, w) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow \dots \dots \dots \dots$

$\Rightarrow (w, v_p) \notin E$  (根据(1\*) 式)

$\Rightarrow (v_p, w) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

这又与结点 $v_p$ 是路P的尽头矛盾!

(2)若 $(v_p, w) \in E$ , 则这与结点 $v_p$ 是路P的尽头矛盾!

否则 $(w, v_p) \notin E \Rightarrow (w, v_p) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (v_{p-1}, w) \notin E$  (根据(2\*) 式)

$\Rightarrow (w, v_{p-1}) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (v_{p-2}, w) \notin E$  (根据(2\*) 式)

$\Rightarrow (w, v_{p-2}) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots$

$\Rightarrow (v_1, w) \notin E$  (根据(2\*) 式)

$\Rightarrow (w, v_1) \in E$  (根据竞赛图定义的注)

这又与结点 $v_1$ 是路P的尽头矛盾!

注：●此算法一定会在有限步停止。因为算法每进入循环一次，初级路 $P$ 上结点的个数都会至少增一，而任何图 $G$ 中结点的个数都是有限的；

●竞赛图概念源于体育比赛。竞赛图用来表示单循环赛的战绩；其有向 $H$ -路用于决定比赛的名次排序(排序不是唯一的)；但是若加强到有向 $H$ -圈，则不能决定比赛名次，需要重赛。

●有向 $H$ -图一定是强连通的；但强连通图未必是有向 $H$ -图；

## 货郎担问题(The Travelling Salesman Problem)

货郎担问题又称为旅行商问题。一个货郎需穿过已知的若干村镇一次且仅一次，然后回到出发点，问应如何选择行动路线，使其总的行程最短？

抽象成图论语言：就是在带权图 $G=(V,E,w)$ 中寻求最优H-圈问题。 结点代表村镇；边代表两村镇间的(直达)路程；边上的权代表两村镇间路程的长度。

带权图 $G=(V,E,w)$ 的货郎担问题有解 $C_0$ 和 $w(C_0)$ ，当且仅当

1°  $C_0$ 是图 $G$ 的一条H-圈(因此图 $G$ 必须是H-图)；

2° H-圈 $C_0$ 的圈长 $w(C_0)=\sum_{(u,v)\in C_0} w(u,v)$  达到最小(最优)。

其中： $C_0$  称为最优H-圈，或称 $C_0$ 是最优的；圈长 $w(C_0)$ 称为最优解。

## 求解货郎担问题的近似算法：

### (一)近邻法

No1.在G中任选一个结点 $v_{i1}$ ，从 $v_{i1}$ 出发，寻找距 $v_{i1}$ 最近的一个结点 $v_{i2}$ ，得到一条初级路 $C:=(v_{i1}, v_{i2})$ ， $j:=2$ ；

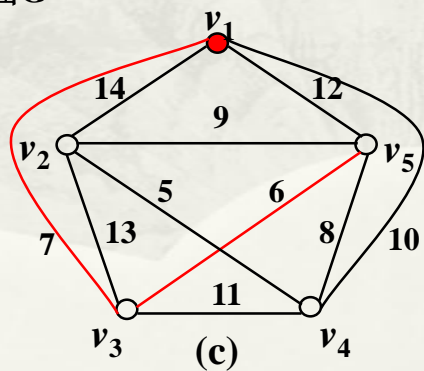
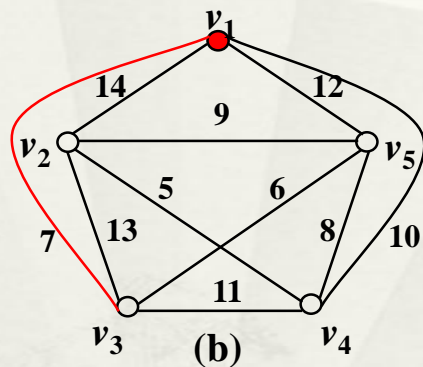
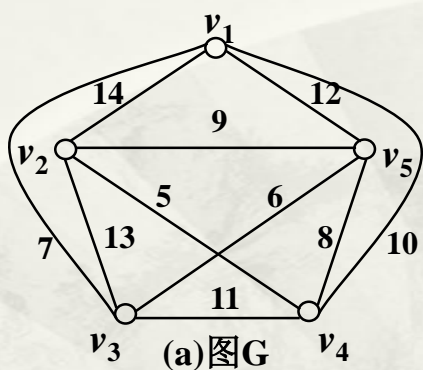
No2.从 $v_{ij}$ 出发，在 $V \setminus \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ij}\}$ 中，寻找一个距 $v_{ij}$ 最近的结点 $v_{ij+1}$ ，并将C延至 $v_{ij+1}$ ，  
即 $C:=C \cup \{(v_{ij}, v_{ij+1})\}$ ， $j:=j+1$ ；

No3.若 $j=n$ ，则将C从 $v_{in}$ 延至 $v_{i1}$ ，得到一条H-圈

$C:=(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}, v_{i1})$ ，

算法终止，exit；否则 $j < n$ ，go to No2。

例5. 在图16(a)所示的图G中寻求(近似)最优H-圈C。图G实际上是五个结点的完全图 $K_5$ ，故必有H-圈。



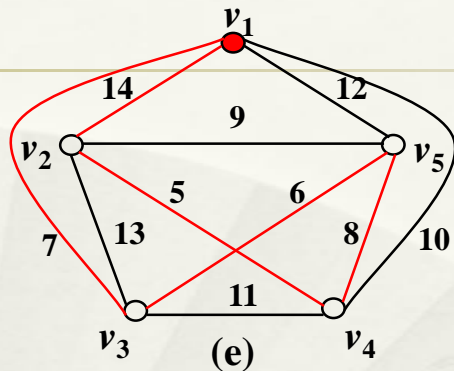
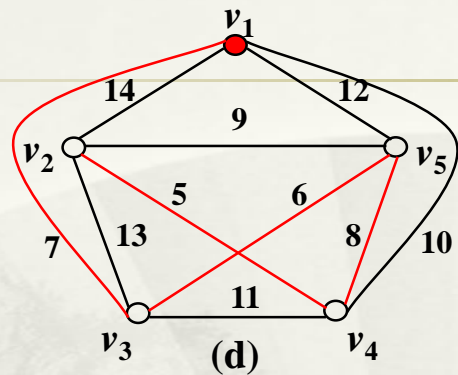


图16

## (二)交换法(Lin(1965);Held, Karp(1970,1971))

交换法就是两两交换的启发式算法：

No1.在图G中任找一条H-圈(可用近邻法)

$$C:=(v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n, v_1) \quad ;$$

No2. 若  $\exists v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1} \in V, 1 \leq i < i+1 < j < j+1 \leq n$  , 使得

$$w(v_i, v_j) + w(v_{i+1}, v_{j+1}) < w(v_i, v_{i+1}) + w(v_j, v_{j+1}) ,$$

则令  $C := (v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n, v_1)$  (参见图17);

No3. 若没有上述情况, exit ; 否则, 还有上述情况, go to No2 .

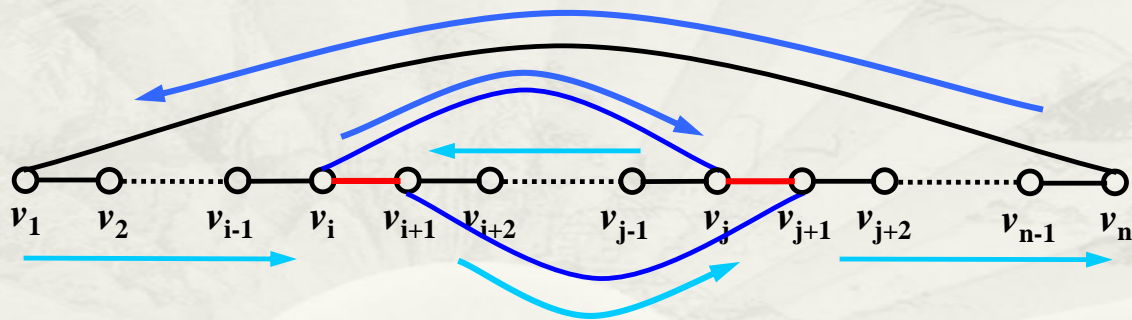


图17



例6. 在图16(a)所示的图G中寻求(近似)最优H-圈C。

在例5中已用近邻法求出了一H-圈 $C=(v_1, v_3, v_5, v_4, v_2, v_1)$ ， 现在对此H-圈使用交换法。

因为  $w(v_1, v_4) + w(v_2, v_5) = 10 + 9 = 19 < 22 = 14 + 8 = w(v_1, v_2) + w(v_4, v_5)$

于是(近似)最优H-圈 $C=(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3, v_1)$ ，

圈长 $w(C) = 10 + 5 + 9 + 6 + 7 = 37$ 。见图18。

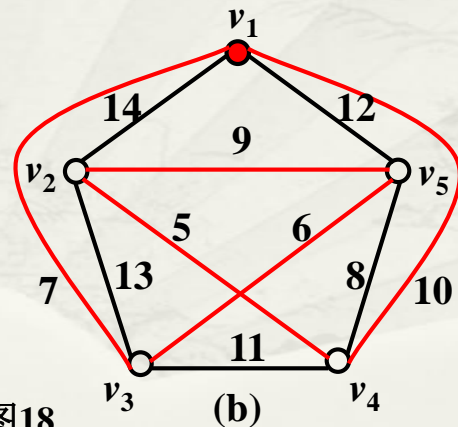
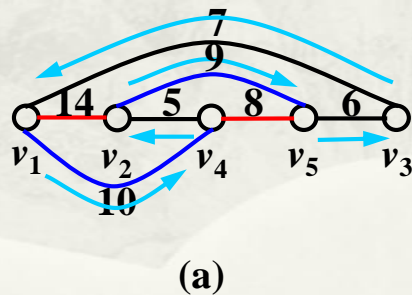


图18