第三次习题课

2022/05/10

狭义相对论基础

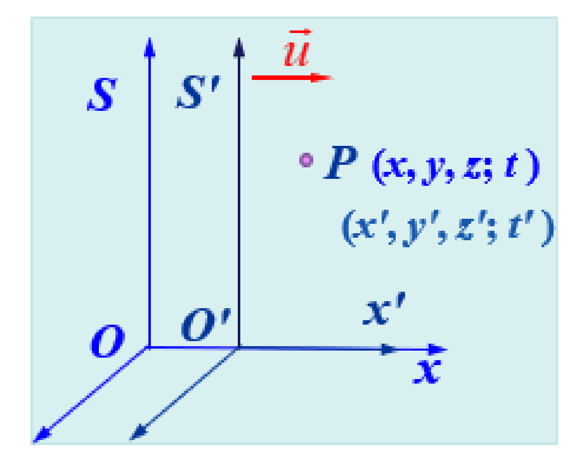
1. 两个基本假设

光速不变原理：在所有的惯性系中，光在真空中的传播速度具有相同的值 c。

相对性原理：一切物理规律在所有惯性系中具有相同的形式（所有惯性系都出于完全平等的地位）。

2. 狭义相对论的时空观

“同时性”的相对性



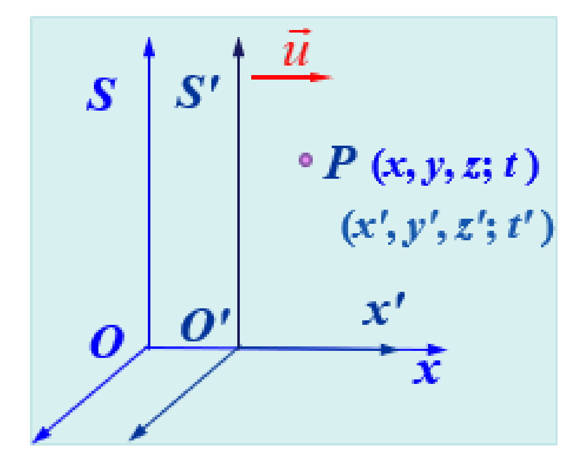
时间延缓 $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau_0$

长度收缩 $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$

3. 洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t' = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



空间测量与时间测量相互影响和相互制约

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Delta y' = \Delta y \qquad \Delta z' = \Delta z \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\mathrm{v}'_x = \frac{\mathrm{v}_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\mathrm{v}_x} \qquad \mathrm{v}'_y = \frac{\mathrm{v}_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\mathrm{v}_x} \qquad \mathrm{v}'_z = \frac{\mathrm{v}_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\mathrm{v}_x}$$

4. 质速关系 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

5. 相对论动量 $\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

6. 相对论质点动力学基本方程 $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v}\right)$

7. 质能关系 $E=mc^2$

静止能量 $E_0=m_0c^2$ 相对论动能 $E_K=mc^2-m_0c^2$

8. 相对论的能量和动量关系 $E^2=p^2c^2+E_0^2$

光子 $E=pc\longrightarrow E=h\nu,p=\frac{h}{\lambda},m=\frac{E}{c^2}$

静电场

1. 点电荷 VS 电荷体系

一个带电的几何点 —— 理想模型

2. 库仑定律 $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}^0$ 真空中静止的点电荷

3. 电场的概念 电荷 电场 电荷

4. 描述电场的物理量之一：**电场强度** $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$

5. 电场强度叠加原理

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \longrightarrow \vec{E} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{e}_{r_i} \ \text{or}\ \vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

6. 静电场的基本性质

高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 有源场

环路定理 $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = 0$ 无旋场

7. 电势能

$$W_a = A_{a"0"} = \int_a^{"0"} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

8. 描述电场的物理量之二：电势

$$u_a = \frac{W_a}{q_0} = \frac{A_{a"0"}}{q_0} = \int_a^{"0"} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

9. 电势叠加原理

$$u = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \text{ or } u = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

10. 两物理量间的微分关系

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} \qquad \vec{E} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla u$$

◆ 计算电场强度的方法

(1) 电场叠加原理 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{r}_i^{\,0}$

(2) 高斯定理 $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i内}$

(3) 电势梯度 $\vec{E}=-\nabla u$

◆ 计算电势的方法

(1) 电势与电场强度的积分关系 $u_a=\frac{W_a}{q_0}=\int_a^{(0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

(2) 电势叠加原理 $u=\sum_i u_i=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i}$

11. 静电场中的导体：静电感应 → 静电平衡(内部处处不带电)

$$\vec{E}_{内} = 0 \qquad u_{导体} = C$$

$$\vec{E}_{表} = \sigma\vec{n}/\varepsilon_0$$

接地 即：$u = 0$

12. 静电场中的电介质：极化(位移极化、取向极化)—束缚电荷

13. 电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$

14. 电容 $C = \dfrac{Q}{u}$ or $C = \dfrac{Q}{\Delta u}$

15. 电容器储能 $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}QU$

16. 电场能量 $\mathrm{w} = \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad W = \int_V w\mathrm{d}V = \int_V \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V$

1、在6000m的高空大气层中产生一个π介子，以速度v=0.998c飞向地球，假定该π介子在其自身静止系中的寿命为2×10^{-6}s。试分别从下面两个角度(即地球上的观察者和π介子静止系中的观察者)来判断该π介子能否到达地球。

(已知$\sqrt{1-0.998^2}=0.0632$，真空光速$c=3\times10^8\,m/s$)

- 在不同惯性系中测量给定两事件之间的时间间隔，测得的结果以**原时最短**
- **运动时钟变慢**

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

长度收缩和时间延缓效应

解：地球参考系-S， π介子静止系- S'

事件1 - π介子产生，事件2 - π介子湮灭

已知 $\begin{cases} \Delta x = 6000\text{m} \\ \Delta t' = 2\times10^{-6}\text{s} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2} = 379.2\text{m} \\ \Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3.16\times10^{-5}s \end{cases}$

1. S 系观察者 - 介子运动

湮灭前移动距离 $l = v\Delta t = 9.47\times10^3\text{m}$ $> \Delta x$ 能到达

2. S' 系观察者 - 地球运动

介子湮灭前移动距离 $l' = v\Delta t' = 598.8\text{m}$ $> \Delta x'$ 能到达

2. 宇宙飞船以$0.8c$的速度飞离地球。若地球接收到它发出的信号间隔为$10s$。试计算宇航员以自己的钟计时，发出的信号间隔是多少？

解：设宇宙飞船固定在S'系的原点O'，地球接收器静止在S系的原点O。

S'系相对于S系以速度$u = 0.8c$沿x轴正向运动，x、x'轴重合，$t = t' = 0$时O、O'重合，并由O'发出第一个信号。

在S'系中，从计时开始到测得第二次信号的时间间隔为“固有时”τ_0。

由“时间延缓”，在S系中两只钟测得时间间隔为：

$$\Delta t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

然而，在地球S系中观察这两信号，要考虑飞船的距离差：$\Delta x = v\Delta t$

所以有

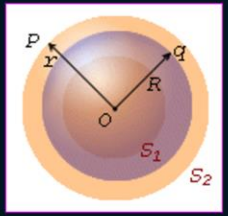
$$10 = \frac{\Delta x}{c} + \Delta t = \frac{v\Delta t}{c} + \Delta t = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\Delta t = 1.8 \cdot \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 3\Delta t'$$

故S′系中宇航员测得发出这两信号的时间间隔为

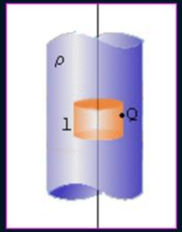
$$\Delta t' = \frac{10}{3}$$

3. 氢原子是一个中心带正电q_e的原子核（可视为电荷），外边是带负电的电子云。在正常状态时，电子云的电荷分布密度是球对称的：$\rho=-\frac{q_e}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$，式中$a_0$是一常量（玻尔半径）。试求原子电场强度大小的分布。

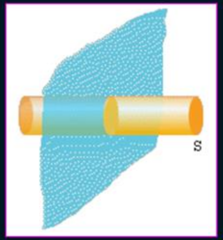
高斯定理的一个重要应用，是用来计算带电体周围电场的电场强度。实际上，只有在电荷分布具有一定的对称性时，才能比较方便应用高斯定理求出场强。求解的关键是选取适当的高斯面。常见的具有对称性分布的源电荷有：



球对称分布：包括均匀带电的球面、球体和多层同心球壳等



轴对称分布：包括无限长均匀带电的直线、圆柱面、圆柱体等；



无限大平面电荷：包括无限大的均匀带电平面、平板等。

用高斯定理求电场强度的步骤：

- 分析电荷对称性，并根据电荷对称性确定电场强度的方向；

(2) 根据对称性选取高斯面；

- 高斯面必须是闭合曲面
- 高斯面必须通过所求的点
- 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

(3) 求出高斯面内包围的电荷量的代数和；

(4) 根据高斯定理求电场强度。

分析：球对称分布→可使用高斯定理进行求解

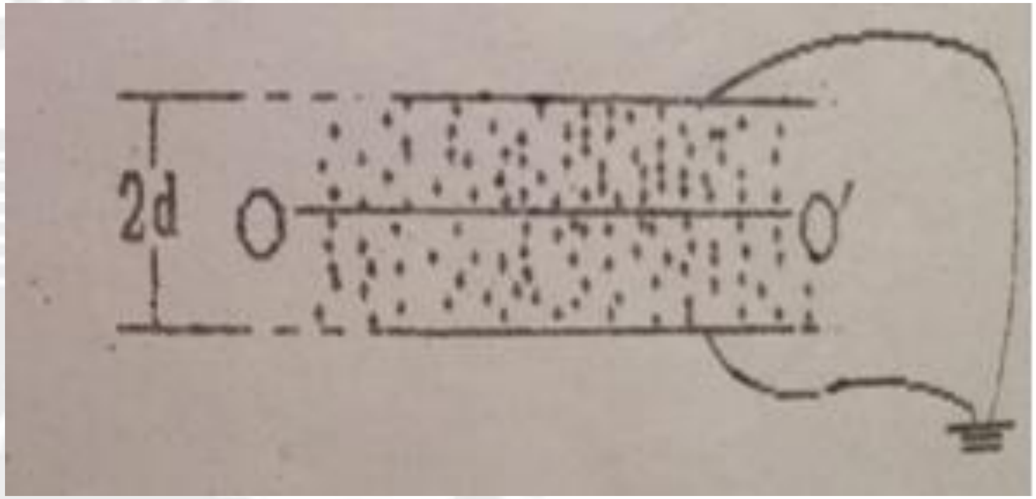
考虑一半径为 r 的同心球对称高斯面，有 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{内}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$Q_{内} = \int \rho dV + q_e = \int_0^r -\frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 4\pi r^2 dr + q_e$$

$$= \frac{q_e}{a_0^3}[(2a_0 r^2 + 2a_0^2 r + a_0^3)e^{-\frac{2r}{a_0}}]$$

$$\Rightarrow E = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2 a_0^2}[(2r^2 + 2a_0 r + a_0^2)e^{-\frac{2r}{a_0}}]$$

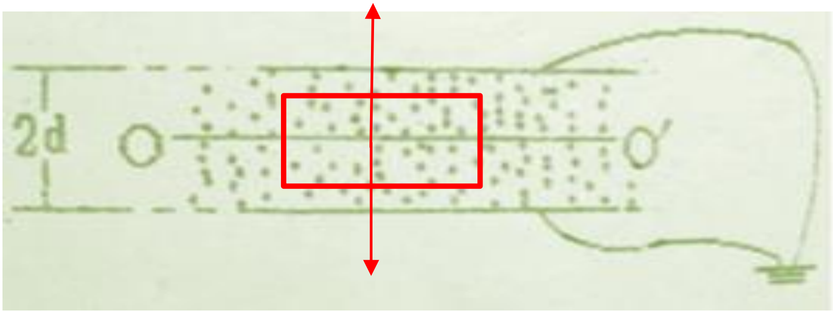
4. 两块“无限大”平行导体板，相距为$2d$，都与地连接，在板间均匀充满着正离子气体（与导体板绝缘）离子数密度为n，每个离子的带电量是q。如果忽略气体中的极化现象，可以认为电场分布相对中心平面OO'是对称的。试求两板间的场强分布和电势分布。



电势 $u_a = \int_a^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

移动单位正电荷自该点→“势能零点”过程中电场力作的功。

解：选x轴垂直导体板，原点在中心平面上，由电场分布相对平面OO'是对称的，则取底面积为ΔS的高斯面，其轴线与x轴平行，上下底面与导体板平行且与中心面对称



$$\oint EdS = \mathrm{E} \cdot 2\Delta\mathrm{S} = \frac{Q_{内}}{\varepsilon_0} = \frac{\mathrm{nq} \cdot \Delta\mathrm{S} \cdot 2\mathrm{x}}{\varepsilon_0}$$

得 $\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{nqx}}{\varepsilon_0}$

当$0 < x < d$时 $U = \displaystyle\int_x^d Edx = \int_x^d \frac{nqxdx}{\varepsilon_0} = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2 - x^2)$

当$-\mathrm{d} < x < 0$时 $U = \displaystyle\int_x^{-d} Edx = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2 - x^2)$

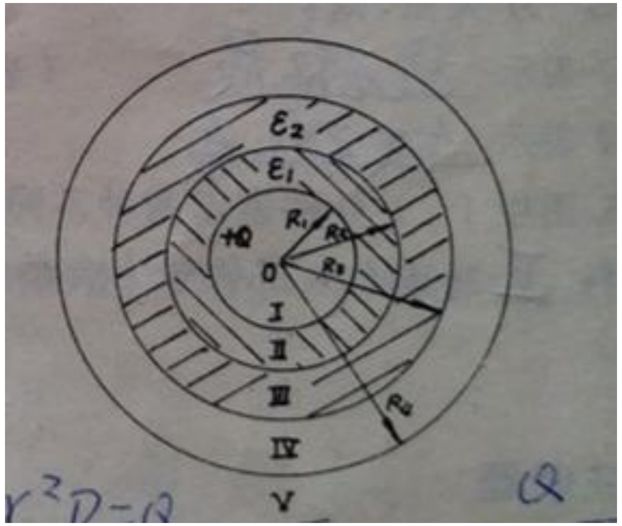
所以x处的电势为 $\dfrac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2 - x^2)$

5. 球形电容器由半径为R_1的导体球与它同心的均匀球壳构成，其间有两层同心的均匀介质球壳介电常数分别是ε_1和ε_2，两层介质的分界面半径是R_2，导体球壳的内半径为R_3，球壳外半径为R_4，球壳外是真空。设内球带电荷Q，球壳不带电，求：

（1）各区域的电场强度

（2）两导体球间的电势差

（3）球形电容器的电容

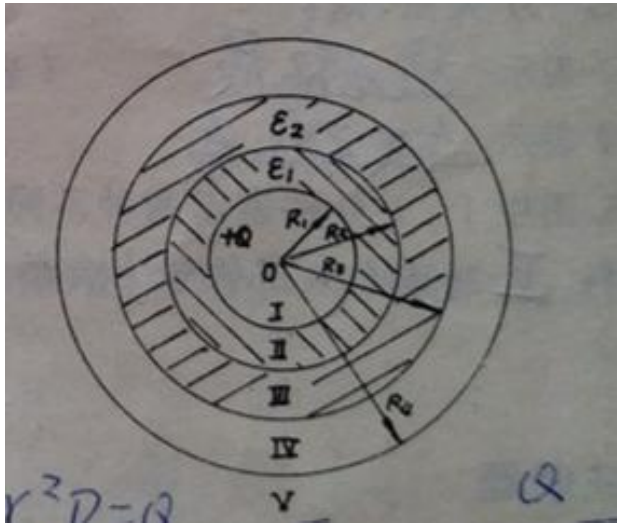


分析：

（1）做同心高斯球面，高斯定理求出各区域场强（关键是计算高斯面内电量的代数和，注意考虑导体静静平衡：导体内部场强为零，净电荷在导体表面）

（2）知道场强，积分得电势

（3）电容公式



$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 E_1 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

解

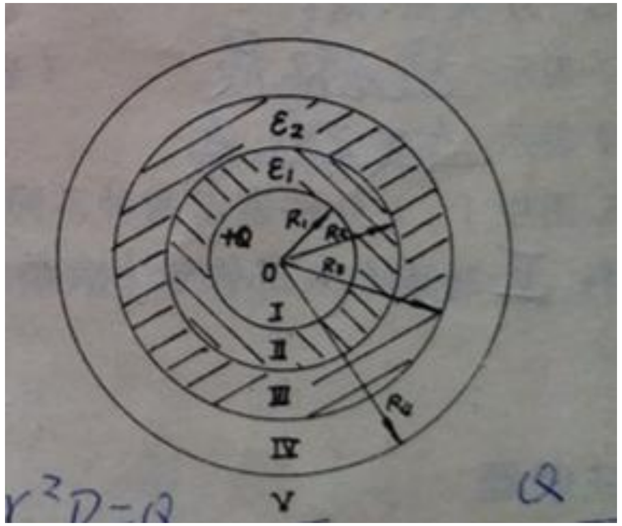
（1） $r < R_1, \qquad E_1 = 0 \qquad (\sum q = 0)$

$$R_1 < r < R_2, 4\pi r^2 D_2 = Q, D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_2$$

$$\Rightarrow E_2 = Q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r^2)$$

$$R_2 < r < R_3, E_3 = Q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2)$$

$$R_3 < r < R_4, E_4 = 0 \qquad r > R_4, E_5 = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$



（2）

$$U = \int_{R_1}^{R_3} E dr = \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr = (1/(\varepsilon_1 R_1) - 1/(\varepsilon_1 R_2) + 1/(\varepsilon_2 R_2) - 1/(\varepsilon_2 R_3))$$

（3）

$$C = Q/U = 4\pi\,\varepsilon_0/(1/(\varepsilon_1 R_1) - 1/(\varepsilon_1 R_2) + 1/(\varepsilon_2 R_2) - 1/(\varepsilon_2 R_3))$$

6. 两共轴的导体圆筒，内筒的半径是R_1，外筒的半径是R_2 （ $R_2 < 2R_1$ ），其间充的两层均匀介质，分界面的半径是R，内层电介质的相对介电常数为ε_{γ_1} ，外层电介质的相对介电常数为ε_{γ_2}（ $\varepsilon_{\gamma_2} = \varepsilon_{\gamma_1}/2$），两层介质的击穿电场强度都是$E_b$。试问当电压升高时，内外层介质哪一层先击穿，并计算此时所加的最大电压。

分析：

由于是共轴的导体圆筒，所以电场强度在介质中的分布只与到轴的距离有关，因此我们可以利用高斯定理得到电场强度的表达式。考虑哪一层先击穿只需比较二者场强最大值。

解：设内筒单位长度的带电量为λ，圆筒长度为d

由高斯定理，距离轴为r处的电场强度为：

$$E*2\pi rd=\frac{\lambda d}{\varepsilon} \rightarrow E=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon}$$

对内层介质（$R_1<r_1<R$）

$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi r_1\varepsilon_0\varepsilon_1}\le\frac{\lambda}{2\pi R_1\varepsilon_0\varepsilon_1}$$

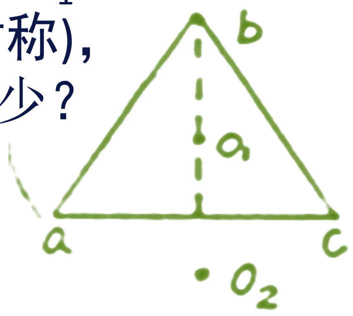
对外层介质（$R<r_2<R_2$）

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi r_2\varepsilon_0\varepsilon_2}\le\frac{\lambda}{\pi R\varepsilon_0\varepsilon_1}$$

$$\frac{E_{1\max}}{E_{2\max}}=\frac{R}{2R_1}<\frac{R_2}{2R_1}<1$$

外层最大场强更大，因此外层先击穿

7、把均匀带电的绝缘细杆分为三段，拼成如图所示的正三边形，O_1为其重心，测得O_1、O_2两点的电势分别为u_1和u_2(O_1、O_2两点与ac对称)，现把ac棒移至无限远处，这时O_1和O_2两点的电势u_1'和u_2'分别为多少？



解　由电势叠加原理

$$u_{O_1} = u_{ab} + u_{bc} + u_{ca} = u_1$$

O_1为重心，根据对称性　$u_{ab} = u_{bc} = u_{ca} = \frac{1}{3}u_1$

O_1、O_2与ac对称　$u_{ca} = u'_{ca} = \frac{1}{3}u_1$

当ac棒移至无穷远时，其在O_1、O_2处产生电势为零

$$\boxed{u_1' = u_{ab} + u_{bc} = u_1 - u_{ca} = \frac{2}{3}u_1}$$

$$\boxed{u_2' = u'_{ab} + u'_{bc} = u_2 - u'_{ca} = u_2 - \frac{1}{3}u_1}$$

9. 实验表明，在靠近地面处的电场强度是$1.0\times10^2N/C$, 方向指向地球中心，在离地面1.5×10^3m高处，电场强度约为$20N/C$，方向指向地球中心，则地球所带的总电荷量Q为多少？离地面1.5×10^3m下的大气层中电荷的平均密度ρ是多少？（地球可近似为球体，半径$R=6371km$）

解： 根据高斯定理，取地球表面为闭合曲面

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=-4\pi R^2E=\frac{Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow Q=-4\pi R^2E\varepsilon_0\Rightarrow Q=-4.52\times10^5C$$

取距地面1500m的球面为高斯面 $r=R+h$ $r=6372.5\times10^3m$

$$Q_1=-4\pi r^2E'\varepsilon_0$$

$$\rho=\frac{Q_1-Q}{\frac{4}{3}\pi(r^3-R^3)}=\frac{3\varepsilon_0(ER^2-E'r^2)}{(r^3-R^3)}=4.72\times10^{-13}C/m^3$$

补充测试题:

半径为 R 的无限长均匀带电直圆柱体，体密度为 ρ，求 圆柱体内外任一点的电场强度。

在圆柱体内，由高斯定理可得 $$E_1 \cdot 2\pi r d = \frac{\rho d \pi r^2}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

在圆柱体外，由高斯定理可得 $$E_2 \cdot 2\pi r d = \frac{\rho d \pi R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$