



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

离散数学 Discrete Mathematics

西安交通大学 计算机学院

§ 8 .二分图

- 二分图的定义
- 二分图的理论
- 二分图的判定方法一标号法(着色法)
- H-图(H-圈)及H-路的必要性判定方法
一标号法(着色法)
- 最大匹配
- Hall定理
- 匈牙利方法

§ 8.二分图(二部图 偶图)

偶图来源于相异代表系问题。

设有 m 个人，分属 n 个组织，每个组织都有若干个人(不空)。现要在这 m 个人中选出各个组织的代表。

选举及代表们的限制性条件是：

- (1)每个组织只能有一个代表；
- (2)每个组织的代表必须是该组织的成员；
- (3)每个人最多只能担任一个组织的代表(不能兼任)。

问题：在什么条件下该问题有解，并给出求解的算法。

这个问题就是组合学上有名的相异代表系(SDR— system of distinct representatives)问题。

解决问题一般性步骤：

- (1)选择合适的数学语言以建立该问题的数学模型；
- (2)利用此数学模型以寻求该问题解的存在性条件；
- (3)给出该问题的求解算法以求解。

相异代表系问题抽象成图论语言就是一个无向图 $G=(V,E)$,

其中: $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$, $E\subseteq V_1\times V_2$ 。

这里: 结点集 V_1 中的结点代表人(成员);

结点集 V_2 中的结点代表组织;

边集 E 中的边代表成员与组织间的属于关系;

若某个人是某个组织的成员, 则就在代表该人和那个组织的两个结点间连一条边, 否则无边相连。

例1. 相异代表系(SDR)问题及其数学模型的一个实例。

设有相异代表系问题如下：有9个人，分属7个组织。

人员集合 $M=\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9\}$ ；

组织集合 $S=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$ ；

其中： $S_1=\{m_1, m_2, m_3\}$, $S_2=\{m_1, m_2, m_3\}$,

$S_3=\{m_2, m_3, m_4, m_5\}$, $S_4=\{m_4, m_5, m_7\}$,

$S_5=\{m_6, m_8, m_9\}$, $S_6=\{m_5, m_8\}$,

$S_7=\{m_6, m_9\}$ 。

$SDR=(m_2,m_3,m_4,m_5,m_6,m_8,m_9)$ 是解之一。其数学模型是一个无向图 $G=(V,E)$ 。

其中： $V=V_1\cup V_2$, $V_1=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9\}$,

$V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$, 显然有 $V_1\cap V_2=\emptyset$,

$E\subseteq V_1\times V_2$ 。其图示如图1所示。

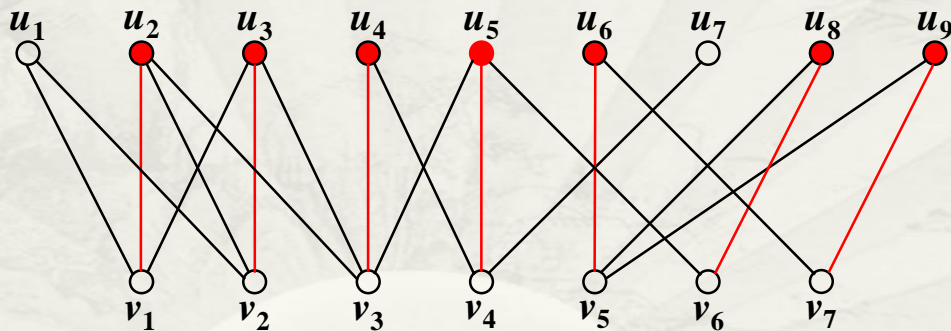


图1

定义1.偶图(bipartite graph 或 paar graph)

设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。若存在着结点集 V 的一个划分 $\{V_1,V_2\}(V=V_1\cup V_2, V_1\cap V_2 = \emptyset)$, 使得边集 $E\subseteq V_1\times V_2$, 则称 G 是偶图(或二分图、二部图)。

偶图一般记为 $G=(V_1,V_2,E)$ (或 $G=(V_1,E,V_2)$)。

同时称 V_1, V_2 是 V 的互补结点子集。

当 $E=V_1\times V_2$ 时, 称 G 是完全二分图。这时, 若 $|V_1|=m, |V_2|=n$, 则记完全二分图为 $K_{m,n}$ 。

例2.完全二分图 $K_{3,3}$ ，见图2所示的图 $G=(V_1, V_2, E)$

其中： $V_1=\{v_1, v_2, v_3\}$ ， $V_2=\{v_4, v_5, v_6\}$ ，

$$E=V_1 \times V_2,$$

是一个完全二分图，记为 $K_{3,3}$ 。

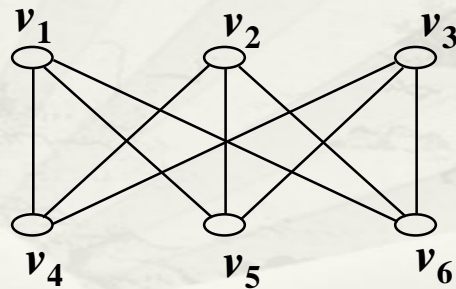
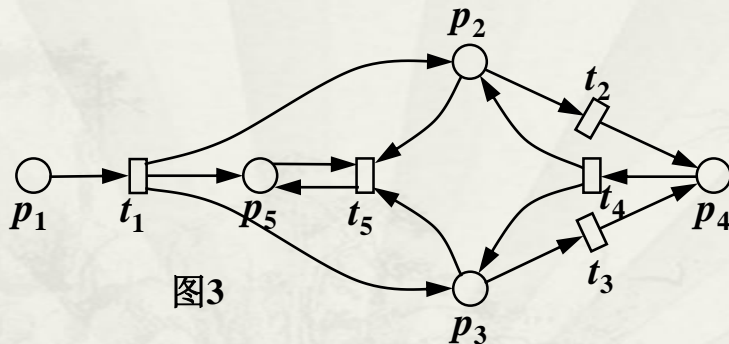


图2

例3. 著名的Petri-网是一种有向多重二分图。

其一类结点称为库所(places), 一类结点称为变迁(transitions); 仅在库所和变迁间可能存在着多重有向边。

这类Petri-网通常称为P/T-系统。其一个例图如下图3。



注：●1962年联邦德国(西德)Carl Adam Petri在他的著名博士论文《自动机通信》中首次使用**网状结构模拟通信系统**。这种系统模型后来即以Petri-网为名而流传和发展。

定理1. 设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。那么

G 是偶图 $\Leftrightarrow G$ 中每个圈都是偶圈(长度为偶数的圈)

$\Leftrightarrow G$ 中不含奇圈(长度为奇数的圈)。

[证].先证 \Rightarrow :

由于 G 是偶图, 故有划分

$$V=V_1\cup V_2, \quad V_1\cap V_2=\emptyset, \quad E\subseteq V_1\times V_2.$$

即 $G=(V_1, V_2, E)$ 。

设 C 是偶图 G 中的任意一条长度为 l 的圈

$C=(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{l-1}, v_l, v_1)$, 现在证 l 为偶数。

.....

.....

不妨设 $v_1 \in V_1$ ，观察圈C中的各结点，由偶图的定义，显然有：

$$v_1 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_2 \Rightarrow v_3 \in V_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_{l-1} \in V_1 \Rightarrow v_l \in V_2 \Rightarrow v_1 \in V_1$$

(由于 $v_1 \in V_1 \Rightarrow v_l \in V_2 \Rightarrow v_{l-1} \in V_1 \Rightarrow \dots$)

从而： $v_1, v_3, v_5, \dots, v_{l-1} \in V_1$

$v_2, v_4, v_6, \dots, v_l \in V_2$

这样， $l-1$ 必为奇数，而 l 必为偶数。

再证 \Leftarrow :

要证明 G 是偶图, 不妨假定 G 是连通的(若 G 不连通, 则对 G 的每一个连通分图利用下面的方法证明它们都是偶图, 从而 G 是偶图)。

任取一个结点 $w_0 \in V$, 固定 w_0 , 定义 V 的两个子集 V_1 及 V_2 如下:

$$V_1 := \{v \mid v \text{ 到 } w_0 \text{ 的最短路长为偶数}\}$$

$$V_2 := V \setminus V_1$$

.....

.....

对于任何结点 $v \in V$,

$v \in V_1 \Leftrightarrow v$ 到 w_0 的最短路长为偶数 (*)

$v \in V_2 \Leftrightarrow v$ 到 w_0 的最短路长为奇数 (**)

并且 V_1 与 V_2 构成了 V 的一个划分,

即 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。

则 G 是偶图, 即 $G = (V_1, V_2, E)$, $E \subseteq V_1 \times V_2$, G 的同一子集的结点间均无边相连:

.....

.....

G的同一子集的结点间均无边相连:

$$(\forall u \in V_1)(\forall v \in V_1) \neg (\exists e \in E)(e=(u,v))$$

$$\wedge (\forall u \in V_2)(\forall v \in V_2) \neg (\exists e \in E)(e=(u,v)) \text{。}$$

否则必有: $(\exists u \in V_1)(\exists v \in V_1)(\exists e \in E)(e=(u,v))$

$$\vee (\exists u \in V_2)(\exists v \in V_2)(\exists e \in E)(e=(u,v)) \text{。}$$

.....

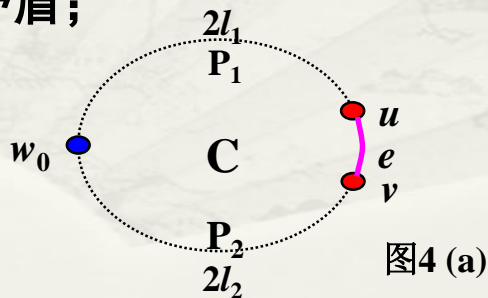
.....

分情况证明如下：

(1)若有 $u \in V_1$, $v \in V_1$, $e \in E$, 使得 $e=(u,v)$, 根据(*)可知：有长为偶数的最短路 P_1 从 w_0 到 u , 有长为偶数的最短路 P_2 从 w_0 到 v 。而路 P_1 与路 P_2 加上边 e , 就构成了一条圈 C (如图4(a)所示)。不妨设： $|P_1|=2l_1$, $|P_2|=2l_2$ ；于是圈 C 的长度为

$$|C|=|P_1|+|P_2|+1=2l_1+2l_2+1=2(l_1+l_2)+1$$

是奇数，这就与已知条件： G 中不含奇圈，矛盾；



.....

(2)若有 $u \in V_2$, $v \in V_2$, $e \in E$, 使得 $e=(u,v)$, 根据(**)可知: 有长为奇数的最短路 P_1 从 w_0 到 u , 有长为奇数的最短路 P_2 从 w_0 到 v 。而路 P_1 与路 P_2 加上边 e , 就构成了一条圈 C (如图4(b)所示)。不妨设: $|P_1|=2l_1+1$, $|P_2|=2l_2+1$; 于是圈 C 的长度为

$$|C|=|P_1|+|P_2|+1=(2l_1+1)+(2l_2+1)+1=2(l_1+l_2+1)+1$$

是奇数, 这就与已知条件: G 中不含奇圈, 矛盾。

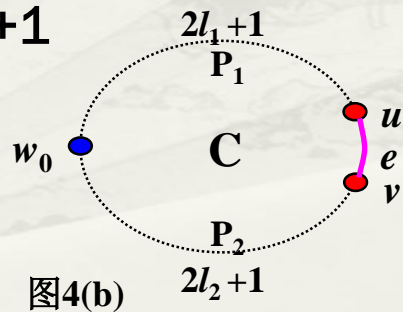


图4(b)

例4.图5所示的完全图 K_5 不是偶图。

由定理1的充要条件知此图不是偶图，
因为存在长度为5的奇圈。

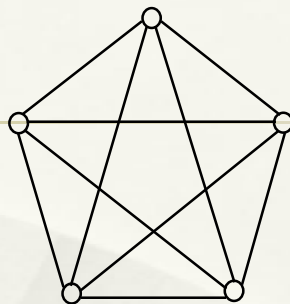


图5. K_5

例5.图6所示的立方体平面展开图
G是偶图。

由定理1的充要条件知此图是偶图，
因为图G的每个圈都是偶圈。

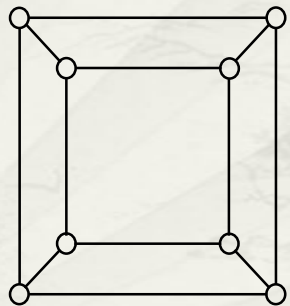


图6

推论1. 设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。那么 G 是偶图

$\Leftrightarrow G$ 的顶点可用两种颜色来着色(即 G 的顶点色数是2)

$\Leftrightarrow G$ 的顶点可用A、B两个字母来标号。

注：●所谓一个图的着色，分以下三种情况：

(1)将图的顶点染以颜色，使相邻顶点的颜色不同；

(2)将图的边染以颜色，使相邻边的颜色不同；

(3)将平面图的面染以颜色，使相邻面的颜色不同；

●所谓图的色数，是在第(1)种着色情况下，所用的最少颜色；而在第(2)种着色情况下，所用的最少颜色，称为图的着色指数。

偶图的判定方法：

No1.在图G中任取一结点 w_0 ，给以标号A；

No2.检查图G中是否还有未标号的结点？若没有，则go to No4；若有，将图G中凡是与A标号结点相邻的未标号结点都标以B标号；

检查图G中是否有两个B标号结点相邻？若有，则图G不是偶图。
exit；若没有， go to No3；

N₀3.检查图G中是否还有未标号的结点？若没有，则go to **N₀4**；
若有，将图G中凡是与B标号结点相邻的未标号结点都标以A标号；

检查图G中是否有两个A标号结点相邻？若有，则图G不是偶图。**exit**；若没有， go to **N₀2**；

N₀4.若 $|V|=1$ ，则图G不是偶图；若 $|V|\geq 2$ ，则图G是偶图，并且：

$$V_1 := \{v \mid v \text{ 具有A标号}\}$$

$$V_2 := \{v \mid v \text{ 具有B标号}\}$$

从而 $V = V_1 \cup V_2$ ， $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ， $E \subseteq V_1 \times V_2$ 。 $G = (V_1, V_2, E)$ 。**exit**。

例6.图7所示的图G是偶图。

任取 v_1 为首先标号结点 w_0 ，利用标号法判定图G是偶图；并给出各结点的标号如图所示：

令 $V_1 := \{v \mid v \text{ 具有A标号}\} = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$

$V_2 := \{v \mid v \text{ 具有B标号}\} = \{v_2, v_4, v_6\}$

$E \subseteq V_1 \times V_2$

于是 $G=(V_1, V_2, E)$ 。

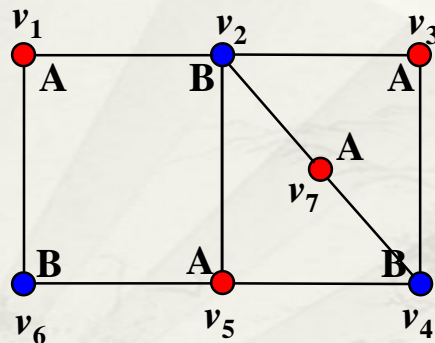


图7

推论2. 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。那么

(1) 偶图 G 含有 H -圈 (G 是 H -图)

$$\Rightarrow |V_1| = |V_2|$$

\Rightarrow 红、蓝着色结点的数目相同

\Rightarrow A、B 标号结点的数目相同；

(2) 偶图 G 有 H -路 $\Rightarrow ||V_1| - |V_2|| \leq 1$

\Rightarrow 红、蓝着色结点的数目至多差 1

\Rightarrow A、B 标号结点的数目至多差 1。

H-图(H-圈)及H-路的必要性判定方法—标号法(着色法):

No1.调用判定偶图的算法以判定图G是否是偶图; 若图G是偶图, 则go to **No2**; 若图G不是偶图, 则exit;

No2.计算A、B标号结点的数目; 若数目之差大于等于1, 则图G不含H-圈, 不是H-图; 若数目之差大于等于2, 则图G没有H-路; exit。

例7.图8所示的图G不是H-图(不含H-圈)。

图G能完成标号，故图G是偶图；但其A标号结点有6个，B标号结点有4个，不相同，故图G不含H-圈 (不是H-图)；差是2，大于1，故图G没有H-路。

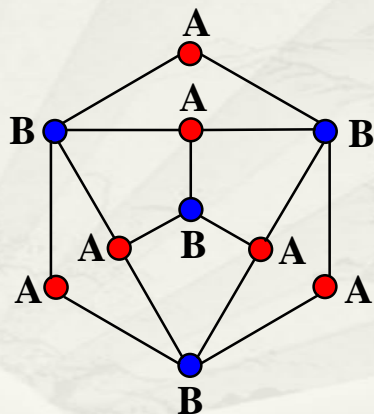


图8. G

注：●有些图G虽然不是偶图，但 可通过给图G的某个结点的某条边上增加一个结点而获得另一图G'，使得：

(1) 图G'是偶图 (能完成标号法)；

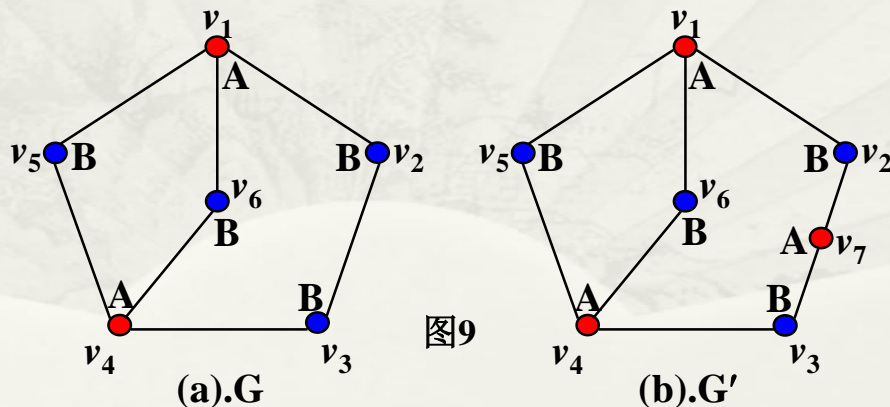
(2) 图G有H-圈 (是H-图) \Leftrightarrow 图G'有H-圈 (是H-图) ；

而图G'能用标号法判定不含H-圈 (不是H-图) ，因此， 可得图G 一定不含H-圈 (不是H-图) 。

例8.图9(a)所示的图G不是H-图(不含H-圈)。

图G不能完成标号(因为有两个B标号结点相邻)，故图G不是偶图；但给其结点 v_2 的一条边(v_2, v_3)上增加一个结点 v_7 后，得到图 G' ，能够完成标号，故图 G' 是偶图；

图 G' 的A标号结点有3个，B标号结点有4个，不相同，故图G不含H-圈 (不是H-图)； 因此，图G不是H-图(不含H-圈)。



问题：在能完成标号的前提下，选择怎样的结点，在其某一条边上增加一个结点，获得图 G' ，保证：

图 G 有H-圈(是H-图) \Leftrightarrow 图 G' 有H-圈(是H-图)。

答案：选择2度结点。

因为若图 G 有H-圈，则此H-圈必穿过所选择的2度结点及其两条边，因而必穿过所增加的那个结点，故此保证：

图 G 有H-圈(是H-图) \Leftrightarrow 图 G' 有H-圈(是H-图)。

问题: (1) 此方法能推广到非偶图H-路的必要性判定上吗?

(2) 此方法如何推广到非偶图H-路的必要性判定上?

注: ●偶图的H-图必要性判定方法 - 标号法(着色法)是不必要的, 因为此方法能判定的都能用 § 7定理1来判定。只需取结点数较小的那一种标号的结点构成 § 7定理1中的S集即可;

●从应用上, 标号法是行之有效的一种简便方法。

定义2.匹配 最大匹配 完美匹配

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图，这里： $V=V_1 \cup V_2$ ， $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ， $E \subseteq V_1 \times V_2$ 。若存在着边集 $E_1 \subseteq E$ 且 $E_1 \neq \emptyset$ ，使得：

- (1)若 E_1 中任何两边都不相邻, 则称 E_1 是图 G 的一个匹配(Matching);
- (2)若 E_1 是一个具有最多边数的匹配，则称 E_1 是图 G 的一个最大匹配(Maximum matching);
- (3)若 E_1 是一个满足条件 $|E_1| = |V_1| \leq |V_2|$ 的匹配，则称 E_1 是图 G 的一个从 V_1 到 V_2 的最大匹配(Maximum matching from V_1 to V_2);
- (4)若 E_1 是一个满足条件 $|E_1| = |V_1| = |V_2|$ 的匹配，则称 E_1 是图 G 的一个完美匹配 (Perfect matching)。

- 注：
- 匹配又称为对集(并列集、径集)，通常将匹配 E_1 记为 M ;
 - 匹配 M 中的边 $e \in M$ 称为杆(bar);
 - 完美匹配又称为1-因子(1-factor);
 - 完美匹配一定是最大匹配;
 - 最大匹配不一定是完美匹配;
 - $(|M|=|V_1| \leq |V_2|) \vee (|M|=|V_2| \leq |V_1|) \Rightarrow M$ 一定是最大匹配;
 - M 是最大匹配 $\Rightarrow (|M| \leq |V_1| \leq |V_2|) \vee (|M| \leq |V_2| \leq |V_1|)$;
 - $|V_1| \neq |V_2| \Rightarrow$ 图 G 一定没有完美匹配。

例9.在例1的图1.G中，红线所示的边集

$$M=\{(u_2,v_1), (u_3,v_2), (u_4,v_3), (u_5,v_4), (u_6,v_5), (u_8,v_6), (u_9,v_7)\}$$

是图G的一个匹配；M也是图G的一个最大匹配(因为： $|M|=|V_2|\leq|V_1|$)；M还是图G的一个从 V_2 到 V_1 的最大匹配(同上)；M显然不是图G的一个完美匹配(因为： $|V_1|\neq|V_2|$)。

例10.在图10.所示的完全二分图有最大匹配和完美匹配。

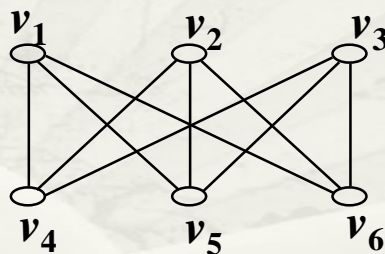


图10

定理2.(P.Hall定理(1934))

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。这里： $|V_1| \leq |V_2|$ 。则

存在着图 G 的一个从 V_1 到 V_2 的最大匹配 M

$$\Leftrightarrow (\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|) \quad (\text{相异性条件})$$

其中： $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ 称为结点集 $S \subseteq V_1$ 的邻域；

$N(v) = \{v' \mid v' \in V_2 \wedge (v, v') \in E\}$ 称为结点 $v \in V_1$ 的邻域；

注：●Hall定理中**条件(*)**的等价的、通俗易懂的叙述是：

图 G 中有从 V_1 到 V_2 的**最大匹配**的充分必要条件是：

V_1 中的任何 k ($0 \leq k \leq |V_1|$) 个结点，一定**至少连接着** V_2 中的 k 个结点。

定理3.(Philip.Hall一般婚姻定理(1934))

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。这里： $|V_1|=|V_2|$ 。则

存在着图 G 的一个完美匹配 M

$$\Leftrightarrow (\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|)。$$

[证].由条件 $|V_1|=|V_2|$ 以及定理2可知：定理3的结论是显然的。

推论1.完全二分图 $K_{m,n}$ 一定有一个最大匹配 M ，且

$|M|=\min\{m,n\}$ ；并且当 $m=n$ 时， M 为一完美匹配。

[证].在完全二分图 $G=(V_1,V_2,E)(|V_1|=m, |V_2|=n$ ；并且不妨设 $m\leq n$)中，对任何结点 $v\in V_1$ ，都有 $N(v)=V_2$ ；

对任何结点集 $S\subseteq V_1$ ，都有 $N(S)=V_2$ ；因而，对任何结点集 $S\subseteq V_1$ ，都有： $|N(S)|=|V_2|=n\geq m=|V_1|\geq |S|$ 。

根据定理2可知：推论1的结论成立，存在着图 G 的最大匹配 M ，而且 $|M|=m=\min\{m,n\}$ ；当 $m=n$ 时，根据定理3可知： M 为一完美匹配。

推论2. (婚姻定理) k -正则偶图(每个结点的度都是 k 的偶图)一定有一个完美匹配 M 。

[证].(1)先证: $|V_1|=|V_2|$

由于从每个结点都可引出 k 条边, 故从结点集 V_1 共引出了 $k \cdot |V_1|$ 条边, 而这是图中全部的边, 因而有

$$|E| = k \cdot |V_1|;$$

同理可证 $|E| = k \cdot |V_2|$;

因此有 $k \cdot |V_1| = k \cdot |V_2|$, 所以 $|V_1| = |V_2|$;

.....

(2)次证: $(\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|)$

由于从结点集 S 共引出了 $k \cdot |S|$ 条边, 而这些边的另一端点全部是在结点集 $N(S)$ 中, 因此这些边全部是包含在由结点集 $N(S)$ 引出的 $k \cdot |N(S)|$ 条边中, 因而有 $k \cdot |N(S)| \geq k \cdot |S|$, 所以 $|N(S)| \geq |S|$;

由(1)及(2), 根据定理3可知: 推论2的结论成立。

注: ●婚姻定理来源于历史上著名的婚姻问题: 在一群青年男女中, 已知每个男士都有 k 个女士朋友, 每个女士都有 k 个男士朋友, 那么, 他们每个人是否都能与自己的一位朋友结成婚姻?

推论3. 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。若 $(\exists k)(k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 1)$, 使得:

(1) $(\forall v)(v \in V_1 \Rightarrow \deg(v) \geq k)$;

(2) $(\forall v)(v \in V_2 \Rightarrow \deg(v) \leq k)$;

则图 G 中一定存在着一个从 V_1 到 V_2 的最大匹配 M 。

[证]. 只须证明相异性条件即可: $(\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|)$

由于从结点集 S 至少引出了 $k \cdot |S|$ 条边, 因此有 **从 S 引出的边数 $\geq k \cdot |S|$;**

而这些边的另一端点全部是在结点集 $N(S)$ 中, 因此这些边全部是包含在由结点集 $N(S)$ 引出的那些边中, 故而 **从 $N(S)$ 引出的边数 \geq 从 S 引出的边数;**

但是从结点集 $N(S)$ 至多引出了 $k \cdot |N(S)|$ 条边, 因此有 **$k \cdot |N(S)| \geq$ 从 $N(S)$ 引出的边数;**

最后, 结合上述三个不等式, 有 $k \cdot |N(S)| \geq k \cdot |S|$;

所以 $|N(S)| \geq |S|$; 根据定理3可知: 推论3的结论成立。

匈牙利方法(Hungarian method)

定义3.匹配 饱和点 非饱和点 交错路 增广路

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图, M 是图 G 的一个匹配。

(1)称结点 $u \in V_1 \cup V_2$ 被 M 所匹配 \Leftrightarrow 存在着匹配 M 的某条杆 $e \in M$, 以 u 为其一个端点(这时称结点 u 覆盖(Covering) M 的杆 e) ;

(2)称结点 $u \in V_1 \cup V_2$ 是 M 的饱和点(saturated node) $\Leftrightarrow u$ 被 M 所匹配;

否则, 称结点 $u \in V_1 \cup V_2$ 是 M 的非饱和点(unsaturated node) ;

(3)交错路(alternating path)是一条分别交替的由 M 中的边和 $E \setminus M$ 中的边构成的极大的初级路;

(4)增广路(augmenting path)是一条两个端点都是非饱和点的交错路。

例11.在图11.所示的3-正则偶图G中，红线所示的边集

$M=\{(v_2,v_6), (v_3,v_7), (v_4,v_8), (v_5,v_9)\}$ 是图G的一个匹配；

结点 $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7,$

v_8, v_9 是M的饱和点；

结点 v_1, v_{10} 是M的非饱和点；

路 $P=\{(v_1,v_6), (v_2,v_6),$

$(v_2,v_7), (v_3,v_7), (v_3,v_8), (v_4,v_8),$

$(v_4,v_9), (v_5,v_9), (v_5,v_{10})\}$ 是一条交错路；路P也是一条增广路。

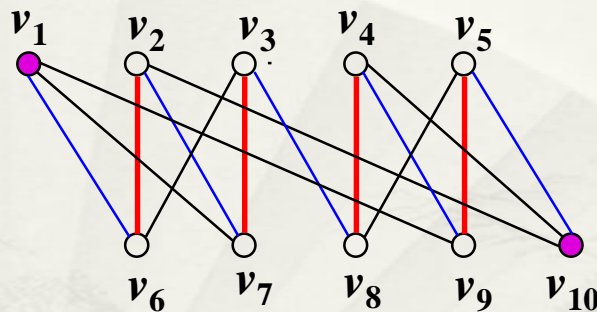


图11

求最大匹配M的算法(匈牙利方法—J.Edmonds(1965)):

- No1.任取一匹配M(可以空或只取一边);
- No2.取 $S:=\{u \mid u \in V_1 \wedge u \text{ 是 } M \text{ 的非饱和点}\}$; 若 $S=\emptyset$, 则M已是最大匹配; exit ;
- No3.任取一结点 $u_0 \in S$, 从 u_0 走出几条交错路: $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ik}$;
- No4.如果这些路中有某一条是增广路, 不妨记为P, 则令
 $M:=M \oplus P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ (并且 $|M|(\text{新}) = |M|(\text{旧}) + 1$) ; go to No2 ;
- No5.如果这些路中无一条是增广路, 则令 $S:=S \setminus \{u_0\}$; 如果 $S \neq \emptyset$, 则 go to No3 ;
- 否则 $S=\emptyset$, 则M已是最大匹配; exit ;

例12.六位教师：张、王、李、赵、孙、周，安排他们教六门课程：数学、化学、物理、语文、英语、程序设计，其中：

张老师会教数学、程序设计和英语；

王老师会教英语和语文；

李老师会教数学和物理；

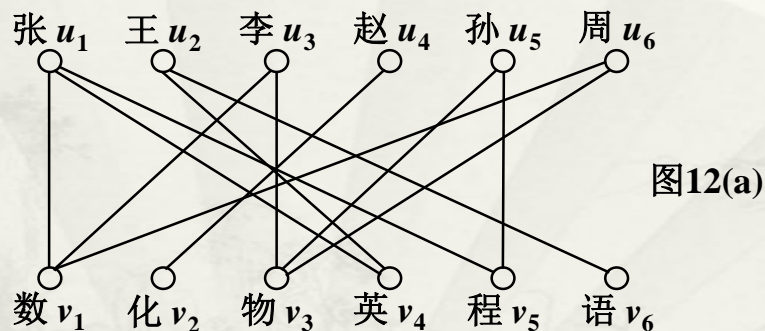
赵老师会教化学；

孙老师会教物理和程序设计；

周老师会教数学和物理。

工作分派问题：应怎样安排课程才能使每门课都有人教、每个人都只教一门课并且不致于使任何人去教他不懂的课程？

将此问题的表述抽象成一个偶图 $G=(U,V,E)$ ：将教师和课程看作偶图中两个互补的结点子集 U 和 V ，将教师和课程之间的授课关系看作边集 E ，当某教师会教某课程时就在其相应的结点间连一条边，按照所给的条件就可画出如图12(a)所示的偶图。



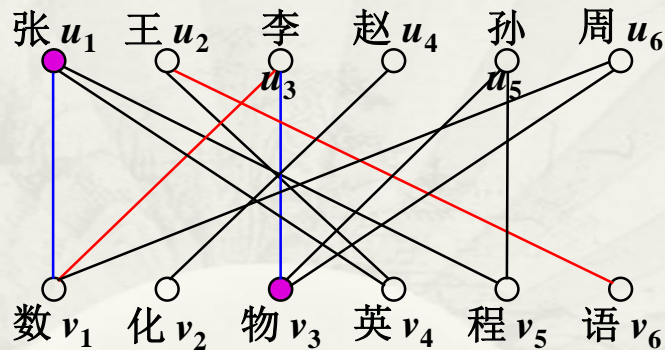
这里： $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E=\{(u_1, v_1), (u_1, v_4), (u_1, v_5), (u_2, v_4), (u_2, v_6), (u_3, v_1), (u_3, v_3), (u_4, v_2), (u_5, v_3), (u_5, v_5), (u_6, v_1), (u_6, v_3)\}$

就用Edmonds算法来求图G中的最大匹配M:

(1)先任取一个初始匹配 $M_1=\{(u_2,v_6), (u_3,v_1)\}$ ，如图12(b)中红线所示，于是得到 $S_1=\{u_1, u_4, u_5, u_6\} \subseteq U$ ，任选非饱和点 $u_1 \in S$ 作为起点，得到一条增广路

$$P_1=\{(u_1,v_1), (u_3,v_1), (u_3,v_3)\} ;$$



(2)从而得到新的匹配 $M_2=M_1\oplus P_1=\{(u_1,v_1),(u_2,v_6),(u_3,v_3)\}$ ，如图12(c)红线所示，于是得到 $S_2=\{u_4, u_5, u_6\}\subseteq U$ ，任选非饱和点 $u_4\in S$ 作为起点，得到一条增广路 $P_2=\{(u_4,v_2)\}$ ；

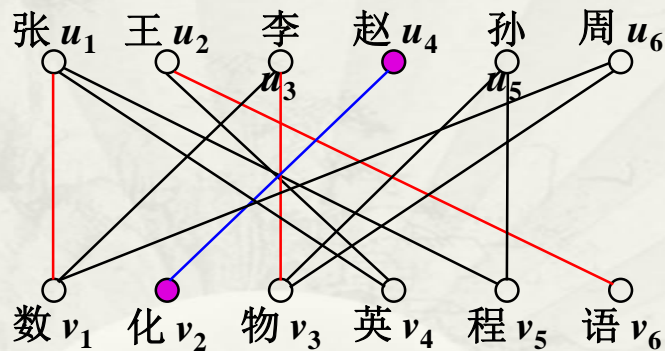


图12(c)

(3)从而得到新的匹配 $M_3=M_2\oplus P_2=\{(u_1,v_1),(u_2,v_6),(u_3,v_3),(u_4,v_2)\}$,

如图12(d)红线所示, 于是得到 $S_3=\{u_5, u_6\}\subseteq U$, 任选非饱和点 $u_6\in S$ 作为起点, 得到一条增广路 $P_3=\{(u_6,v_3), (u_3,v_3), (u_3,v_1), (u_1,v_1), (u_1,v_4)\}$;

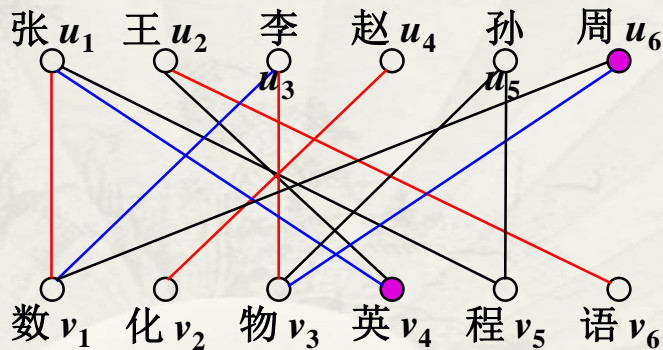


图12(d)

(4)从而得到新的匹配 $M_4=M_3\oplus P_3=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_1),$
 $(u_4,v_2),(u_6,v_3)\}$ ，如图12(e)红线所示，于是得到 $S_4=\{u_6\}\subseteq U$ ，只能选非饱和点
 $u_5\in S$ 作为起点，得到一条增广路 $P_4=\{(u_5,v_5)\}$ ；

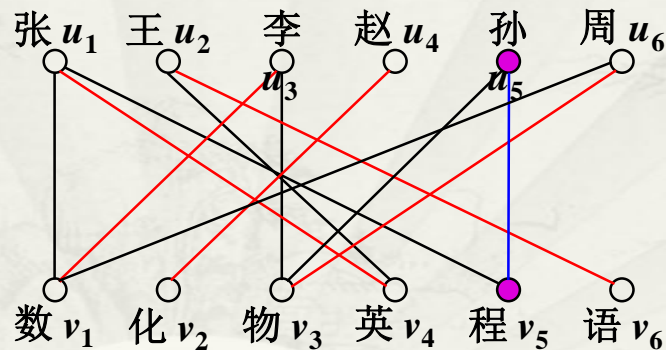


图12(e)

(5)从而得到新匹配 $M_5=M_4\oplus P_4=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_1),$

$(u_4,v_2),(u_5,v_5),(u_6,v_3)\}$ ，如图12(f)红线所示，这时得到 $S_5=\emptyset$ ，没有非饱和点可选，算法终止，exit;

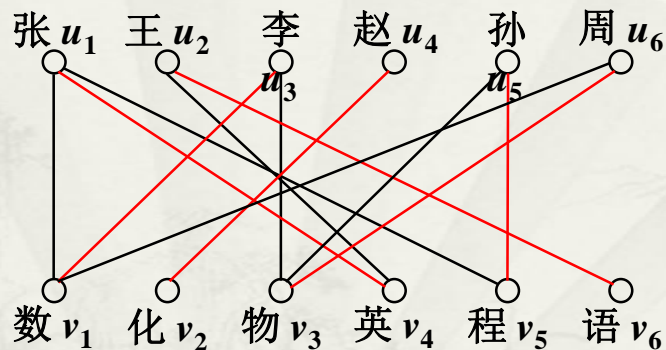


图12(f)

$M=M_5=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_1),(u_4,v_2),(u_5,v_5),(u_6,v_3)\}$

就是本例中所求的最大匹配，它显然是一完美匹配。

例13.在上例中

$M'=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_3),(u_4,v_2),(u_5,v_5),(u_6,v_1)\}$ 是另一个匹配、最大匹配和完美匹配(如图13红线所示)。

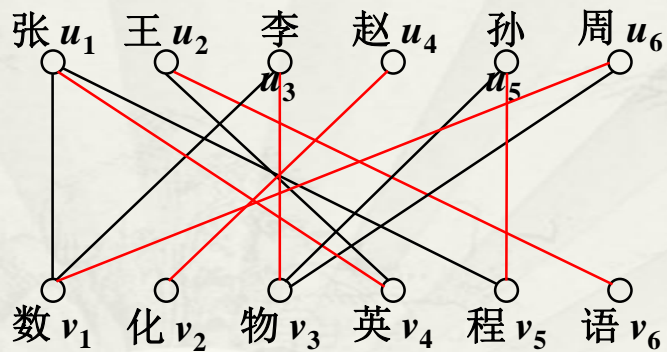


图13

§ 9 .平面图

- 平面图的定义
- Euler公式
- 空间凸多面体的平面嵌入
- 平面图的必要性判定方法
- 拉边法
- Kuratowski平面图最后定理
- K-技术
- 平面图是H-图的一个必要性判定定理
- 四色定理
- 对偶图

§ 9 .平面图

定义1.平面图(planar graph)

设 $G=(V,E)$ 是无向图,

(1)如果图 G 的任意两条边都不在非结点处相交, 则称图 G 为平面图;

(2)如果存在着图 G 的一种图示, 能够使得它的任意两条边都不在非结点处相交, 则称图 G 为可平面图(planar graph)。可平面图是平面图。

(3)如果怎么图示都不能使图 G 的所有边对在非结点处不相交, 则称图 G 为非平面图(nonplanar graph)。

注：●这里所说的图示，是在如下拓扑意义上的图形：

(1) 结点可处于(可画于)平面上的任何位置(当然是在有限内)；

(2) 两点间的边可画成平面上连接两点的一条具有任何形状的、自身不相交的连续曲线一著名的若当(Jordan)曲线；

●封闭的若当曲线(J)将平面(π)分成了内(int J)外(ext J)两个部分；关于若当曲线，有如下著名的若当定理：

(1) $\text{int } J \cap \text{ext } J = J$ $\text{int } J \cup \text{ext } J = \pi$ ；

(2) 连接封闭的若当曲线J内部int J一点和外部ext J一点的任何若当曲线J'必在某点与J相交(穿过J)；并且穿过J的次数必为奇数；

(3) 连接封闭的若当曲线J外部ext J两点的任何若当曲线J''必偶数次的穿过J。

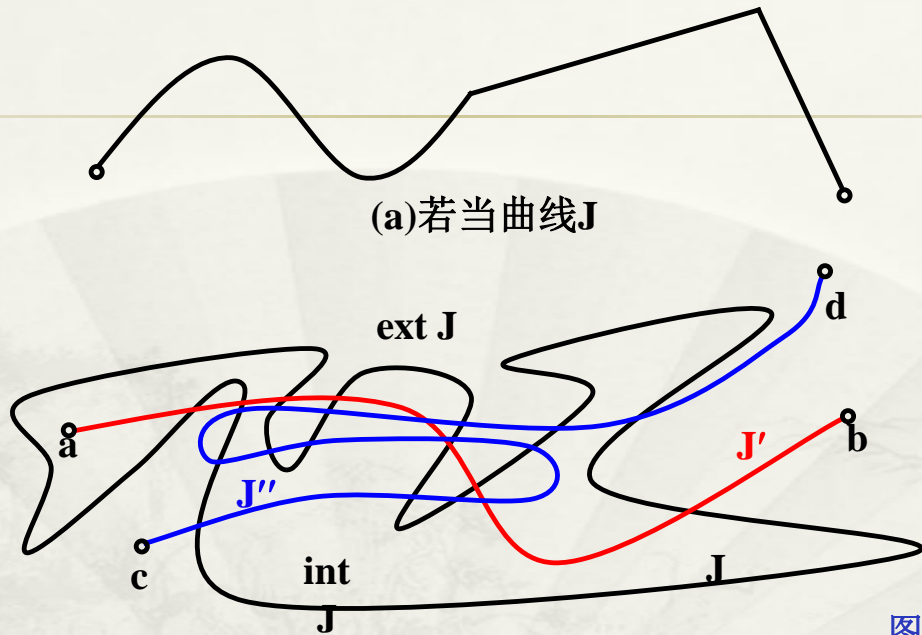


图1

(b)封闭的若当曲线J，若当曲线J'穿过J是奇数7次，若当曲线J''穿过J是偶数14次

例1.图2是平面图。

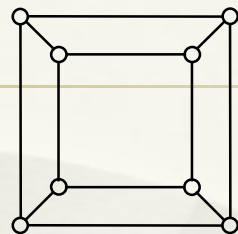
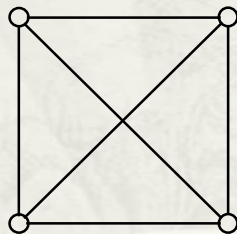
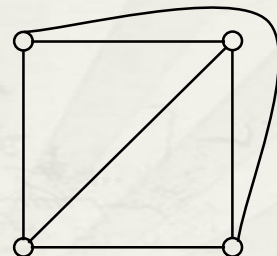


图2

例2. K_4 是可平面图，因而是平面图。



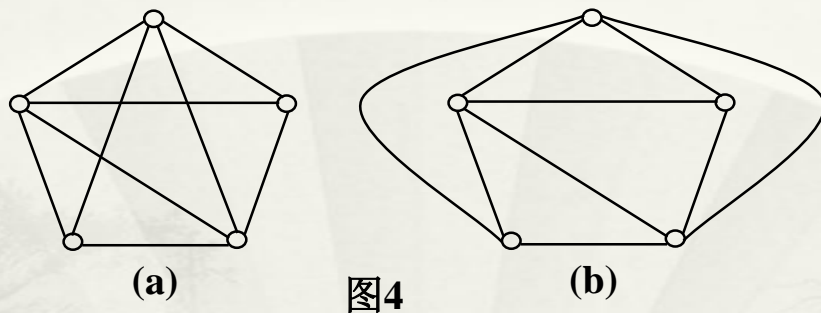
(a) K_4



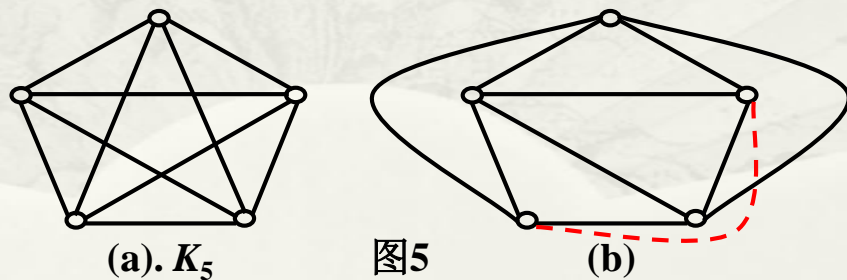
(b) K_4 的另一个图示

图3

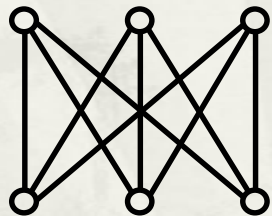
例3.图4是可平面图，因而是平面图。



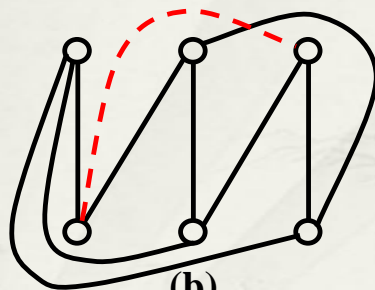
例4. K_5 不是可平面图，因而是非平面图(参见图5(b))。



例5. $K_{3,3}$ 不是可平面图，因而是非平面图(参见图6(b))。



(a) $K_{3,3}$



(b)

图6

注： $\bullet K_{3,3}$ 是许多公用设施问题的图论模型：

(1) 现有三个车库，三个油库，问是否能在一个平面内不交叉地从每个车库到每个油库都修一条路，以使三个车库的车都可安全的到每个油库去加油？

(2) 现有三座楼房，三条管道，问这三条管道是否能不交叉地在一个平面内通向这三座楼房？

$\bullet K_5$ 和 $K_{3,3}$ 是两个有名的非平面图(恶例)；许多复杂图的平面性判定都归结于它们(参见K-定理)。

平面图的几个概念术语

在平面图的图示中

- (1)区域(regions): 由一条极小的初级圈所包围的面称为平面图的一个(有限)区域;
- (2)边界(boundary): 构成区域的初级圈中的边称为此区域的边界;
- (3)无限区域(infinite regions): 最大的初级圈之外部称为平面图的无穷区域;
- (4)相邻(adjacent): 有公共边界的区域称为相邻。

注：●所谓极小初级圈是指：在此圈内不再含有其它更小的初级圈，但不排斥圈内可以有其它结点；

- 当图中无任何圈时(比如树图)，整个平面即为无穷区域；
- 一个平面图有且仅有一个无穷区域；
- 区域又称为面，区域数又称为面数。

例6. 图7是一个平面图，共有4个区域。

它们的边界分别是：

区域1——(a, b, f, a)

区域2——(b, d, f, b)

区域3——(b, c, d, b)

区域4——(a, b, c, d, f, a)

区域4为无穷区域。

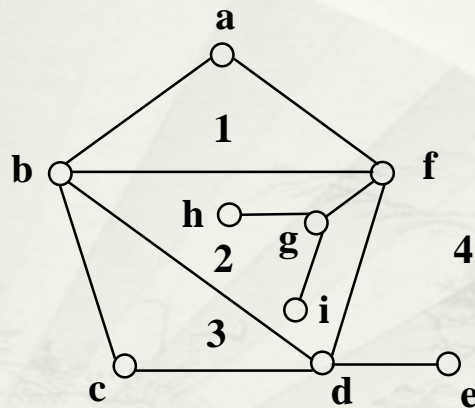


图7

定理1.(Euler公式 (1750)).

设 $G=(V, E)$ 是连通的平面图，其结点数 $|V|=n$ ，边数 $|E|=m$ ，区域(面)数 $|R|=r$ ，则它们必满足如下的Euler公式：

$$n-m+r=2。$$

注：●有些书的Euler公式写成： $n-m+f=2$ ，这里 $f=|F|$ 是面数(face)；

●还有些书的Euler公式写成： $n-m+r=1$ 或 $n-m+f=1$ ，他们在区域(面)数中不计无穷区域。

[证]. 整体上采用数学归纳法, 取边数 m 为归纳变量。

当 $m=1$ 时, 对连通平面图来说, 只有下列两种可能情况(参见图8):

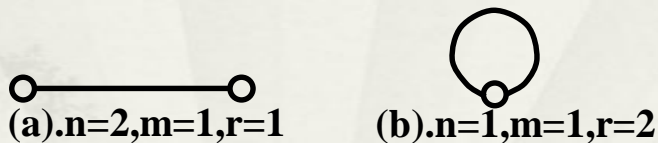


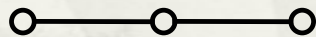
图8

上面两个连通平面图都满足Euler公式;

.....

.....

当 $m=2$ 时，对连通平面图来说，只有下列三种可能情况(参见图8'):



(a). $n=3, m=2, r=1$



(b). $n=2, m=2, r=2$



(c). $n=1, m=2, r=3$

图8'

上面三个连通平面图都满足Euler公式;

$m=3, m=4, \dots$

假设当 $m=k$ 时, Euler公式成立;

证明当 $m=k+1$ 时, Euler公式也成立;

事实上, 可以分两种情况(二分法): **连通平面图** G 中有悬挂点或无悬挂点来讨论。

(1) G 中有悬挂点 v :

在图 G 中删去悬挂点 v 及与其关联的悬挂边, 仍然得到连通的平面图 G' , 并且图 G' 有 $n-1$ 个结点, $m-1=(k+1)-1=k$ 条边, 区域数 r 不变(因为删去悬挂边不会破坏连通性及任何区域), 符合归纳假设, 从而有: $(n-1)-(m-1)+r=(n-1)-k+r=2$ 。

于是, 就有: $n-m+r=(n-1)-(m-1)+r=2$

故对连通平面图 G , Euler公式

成立(参见图9);



图9.图G

(2)G中无悬挂点:

此时图G中的每一个结点的度都不小于2，每一条边都是某个区域的边界。从图G的某一**有限区域的边界**上任意删去一边e（**红边或蓝边**），**使得...**，仍然得到连通的平面图G'，并且图G'有 $m-1=(k+1)-1=k$ 条边， $r-1$ 个区域，结点数n不变(因为删去有限区域的边界边e不会破坏连通性，不会改变结点数，并且该有限区域和其一以e为边界的相邻区域合二为一)，符合归纳假设，从而有：

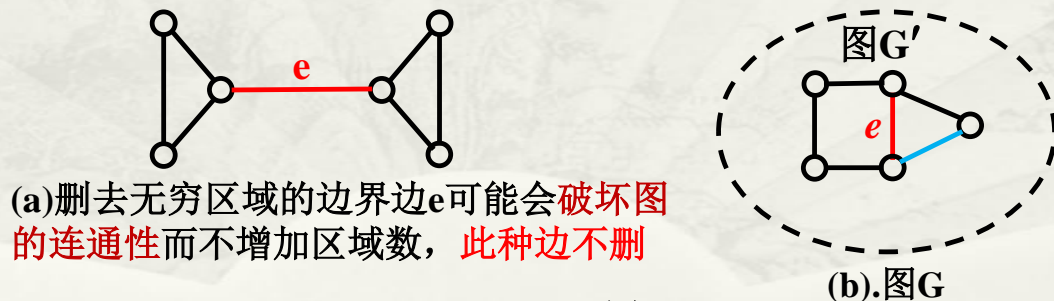


图10

符合归纳假设，从而有： $n-(m-1)+(r-1)=n-k+(r-1)=2$ 。

于是，就有： $n-m+r=n-(m-1)+(r-1)=2$

故对连通平面图G，Euler公式仍成立(参见图10(b))；

所以，根据数学归纳法，对任何连通平面图G，Euler公式总成立。

注：●事实上，Euler当年提出Euler公式并不是针对平面图的，而是针对空间凸多面体的(那时还没有平面图的概念)；

●1750年，Euler在总结空间凸多面体的顶点数 n ，棱数 m ，及面数 f 之间的相互数量关系时，提出了公式： $n-m+f=2$ 。后人发现此公式对平面图也是成立的，为了纪念Euler的贡献，今天，人们用Euler之名命名此公式；

例7.正四面体(图11)有4个顶点, 6个棱, 4个面, $n=4$, $m=6$, $f=4$, 从而Euler公式 $n-m+f=4-6+4=2$ 成立;

正六面体(图12)有8个顶点, 12个棱, 6个面, $n=8$, $m=12$, $f=6$, 从而Euler公式 $n-m+f=8-12+6=2$ 成立;

正十二面体(图13)有20个顶点, 30个棱, 12个面, $n=20$, $m=30$, $f=12$, 从而Euler公式 $n-m+f=20-30+12=2$ 成立。

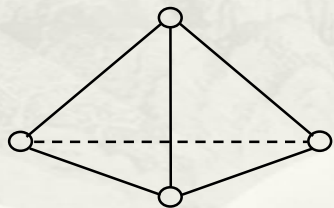


图11.正四面体

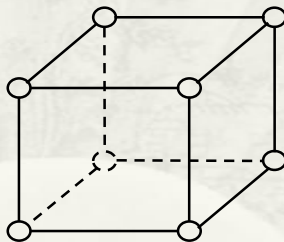


图12.正六面体

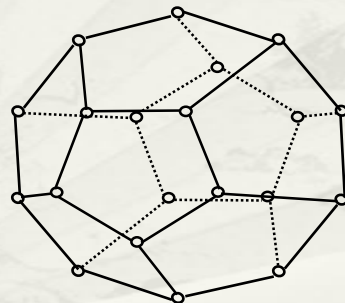


图13.正十二面体

***空间凸多面体的平面嵌入(同胚):**

空间凸多面体和平面图服从同一规律—Euler公式, 说明它们之间有着某种本质方面的联系, 这就是:

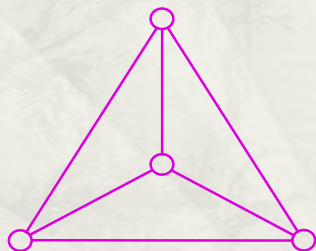
任何空间凸多面体都可拓扑的嵌入平面而成为一平面图, 称为平面嵌入或平面展开。

平面嵌入的实现是靠一种拓扑变换过程, 称为球极平面投影, 它能将球面上的任何图形拓扑映射到平面上而成为一平面图形。而空间凸多面体在拓扑学的意义上实际是一球面图形, 因此能够经球极平面投影而实现平面嵌入。

例8. 正四面体的平面展开图如图15所示；

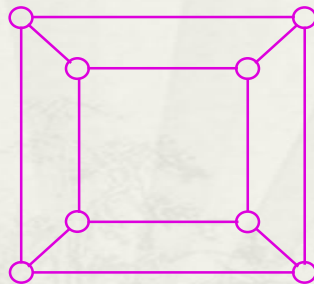
正六面体的平面展开图如图16所示；

正十二面体的平面展开图如图17所示。



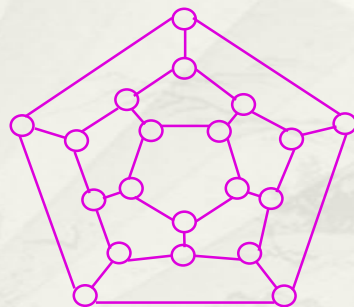
正四面体的
平面展开图

图15



正六面体的
平面展开图

图16



正十二面体
的平面展开图

图17

平面图的必要性判定方法

推论1. 设 $G=(V,E)$ 是 (n,m) 简单连通平面图, 即 $|V|=n$, $|E|=m$,

那么 $m \leq 3n-6$ ($n \geq 3$) 。

[证]. 注意到图 G 是简单图, 无平行边、无自环, 因而图 G 中的每个区域都至少由三条边围成, 故 诸区域边界边数总和 $\geq 3r$,

又因为一条边至多是两个区域的公共边界, 故 诸区域边界边数总和 $\leq 2m$,

所以 $2m \geq 3r$, 于是 $r \leq \frac{2}{3} m$,

代入Euler公式 $n-m+r=2$, 得 $n-m+\frac{2}{3}m \geq 2$,

即 $3n-3m+2m \geq 6$, 从而有 $3n-m \geq 6$,

所以 $m \leq 3n-6$ 。

例9.完全图 K_5 不是平面图。

利用推论1来判断 K_5 不是平面图：注意到 K_5 中的每个圈(区域)都至少由三条边围成，适应于推论1。完全图 K_5 中 $n=5$ ， $m=10$ ，于是有 $m=10 > 9 = 3 \times 5 - 6 = 3n - 6$ ，与推论1的条件矛盾，故 K_5 不是平面图。

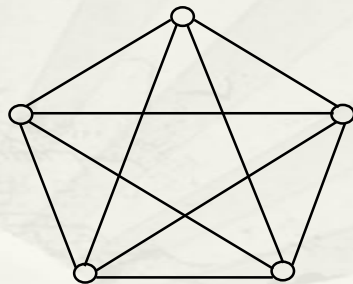


图18. K_5

例10.利用推论1的条件，却判断不出 $K_{3,3}$ 是非平面图。

$K_{3,3}$ 中的每个圈(区域)都至少由三条边围成(简单图)，适应于推论1。
完全图二分图 $K_{3,3}$ 有6个结点，9条边，即 $n=6$ ， $m=9$ ，于是有
 $m=9 < 12 = 3 \times 6 - 6 = 3n - 6$ ，并不违背推论1的条件，故必要性判定失效
(参见图19)。

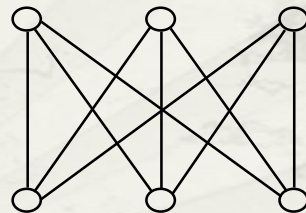


图19. $K_{3,3}$

推论2.设 $G=(V,E)$ 是 (n,m) 简单连通平面图，即 $|V|=n,|E|=m$ ，

且图 G 中的每个区域都至少由四条边围成，那么

$$m \leq 2n - 4 \quad (m \geq 4)。$$

例11.完全二分图 $K_{3,3}$ 不是平面图。

利用推论2来判断 $K_{3,3}$ 不是平面图：

$K_{3,3}$ 与 K_6 的子图(图20)同构(参见本章 § 2例12),
因此 $K_{3,3}$ 中的每个圈(区域)都至少由四条边围成,
适应于推论2。

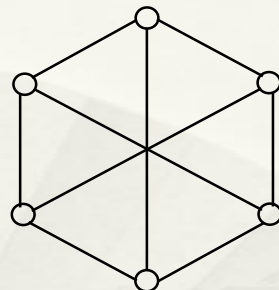


图20. K_6 的子图

完全二分图 $K_{3,3}$ 有六个结点，九条边，即 $n=6$, $m=9$ ，于是有 $m=9 > 8 = 2 \times 6 - 4 = 2n - 4$ 与推论2的条件矛盾，故 $K_{3,3}$ 不是平面图(参见图19)。

例12.利用推论2的条件,
却判断不出Petersen-图是非平面图。

P-图中的每个圈(区域)都至少由四条边围成,
适应于推论2。

P-图中 $n=10$, $m=15$, 于是有

$m=15 < 16 = 2 \times 10 - 4 = 2n - 4$, 并不违背推论2的条件, 故必要性判定失效(图21)。

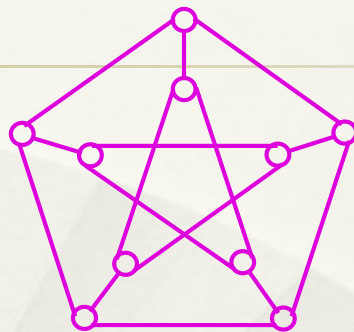


图21.P-图

推论3.设 $G=(V,E)$ 是 (n,m) 简单连通平面图, 即 $|V|=n, |E|=m$, 且图 G 中的每个区域都至少由五条边围成, 那么 $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ ($m \geq 5$)

注：●平面图的定义(拉边法)是充分性判定方法，只能判断图是平面图，因为这只需用拉边法给出一种成功的图示即可；

●平面图的定义(拉边法)不能判断图是非平面图，因为你给不出成功的图示，并不等于别人也给不出成功的图示，以及并不等价于该图本身就是非平面图；所以还需发展理论证明。

拉边法

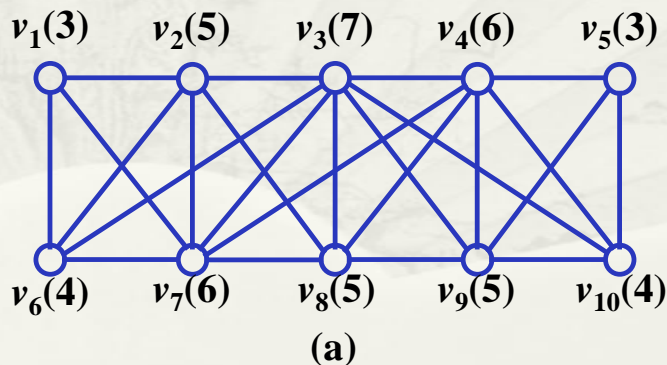
有一些图刚好是推论1、推论2的边缘情况，故不好用它们来判定，只好仍用拉边法(平面图的定义)来判定了。

例14.图22(a)所示图G是平面图。

G的每个圈(区域)都至少由三条边围成(简单图)，适应于推论1。

图G有十个结点，二十四条边，即 $n=10$ ， $m=24$ ，于是有 $m=24=3 \times 10 - 6 = 3n - 6$ ，并不违背推论1的条件，故必要性判定失效。

但是，对图G 采用拉边法可得图22(b)，它显然是一平面图，因此图G是平面图。



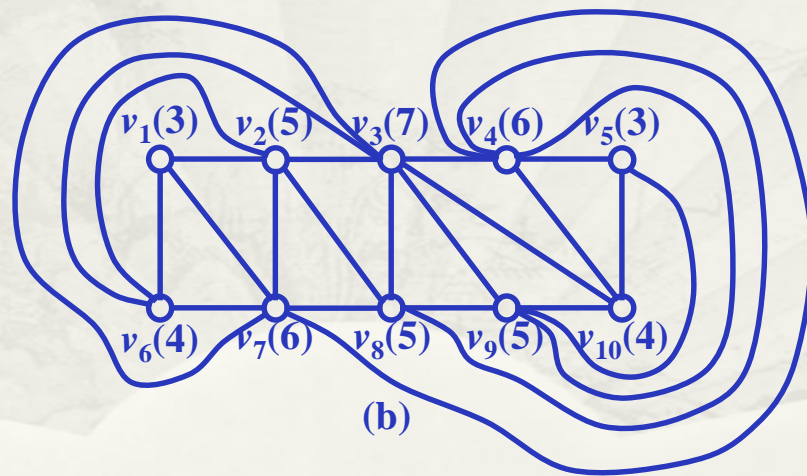
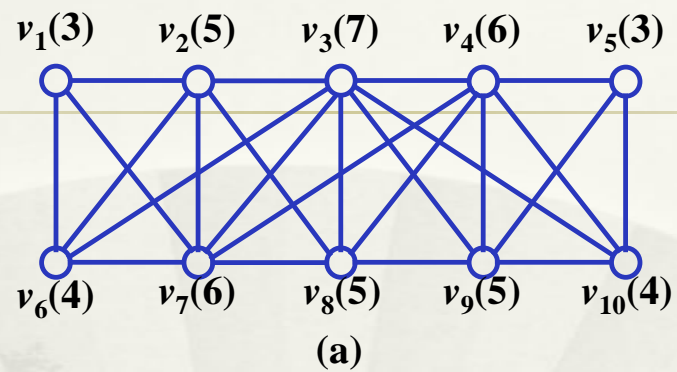


图22

*K-技术

(1). 在一图中两结点间，增加平行边(重复边)或删除平行边。不会改变该图的平面性；



图23(a)

(2). 在一图中两结点间已有的边上，增加一个2-度结点，从而使一条边分为两条边。不会改变该图的平面性；

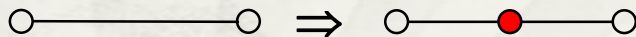
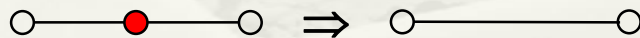


图23(b) 2-度结点

(3). 在一图中两结点间，删去另一个与此二结点相邻的2-度结点，从而使两条边合为一条边。不会改变该图的平面性。



2-度结点

图23(c)

注： ●所谓对一个图使用 K-技术不会改变图的平面性是指：

原来是平面图，使用 K-技术后仍为平面图；

原来是非平面图，使用 K-技术后仍为非平面图。

定理2.(Kuratowski-平面图最后定理(1930))

设 $G=(V,E)$ 是无向图。那么，图 G 是平面图 \Leftrightarrow

(1)图 G 中**无一子图**与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构；

(2)图 G 中无一经由K-技术所得的子图与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构。

例15. Petersen-图不是平面图。

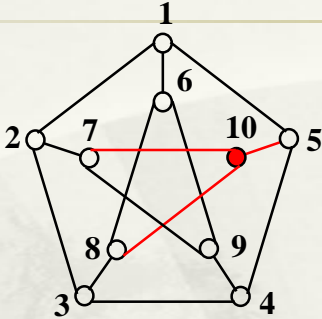


图24(a).P-图

删去红色的边和结点

⇒

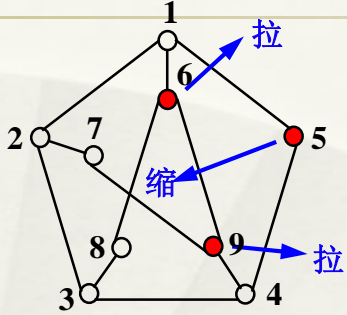


图24(b).P-图的子图

膨胀(拉缩红色的结点)

⇒

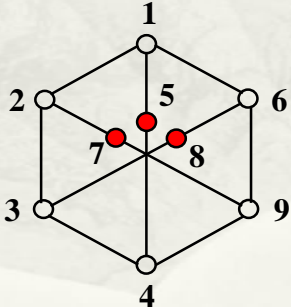


图24(c). P-图的子图

K-技术
(去掉红色的结点5,7,8)

⇒

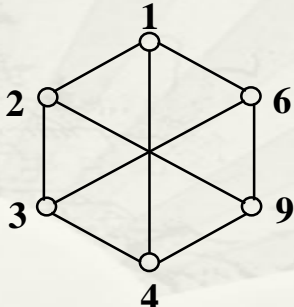


图24(d). K_6 的子图

平面图是H-图的一个必要性判定定理

定理3.(格林贝格(Gringberg)(1968) - 柯车列夫(Kozyrev)定理)

设 $G=(V,E)$ 是无向图。那么,

平面图 G 有Hamilton-圈 $\Rightarrow \sum_{i=2}^n (i-2)(l_i - Q_i) = 0$ (*)

其中: n —是图 G 的结点数;

l_i —是 H -圈内由 i 条边围成的区域个数;

Q_i —是 H -圈外由 i 条边围成的区域个数。

[证].设图G的Hamilton-圈为H。由上例 知道：不在H上的边或者在H之内部，或者在H之外部。

(1)先考虑H的内部：设其间有d条边，由于是平面图，故这些边是互不相交的，因此每一条边都把它所经过的区域分成两部分，从而H内部应有d+1个区域，也就是说

$$d+1=\sum_{i=2}^n l_i \quad (1)$$

这里： n是图G中的结点个数；上述求和到n为止是明显的，因为图G中不存在有超过n条以上的边所围成的区域。

另外， 来计算围成这些内部区域的总边数(包括重复计数)，即计算 $\sum_{i=2}^n i \cdot l_i$ 。由于在计算中H内部的每条边都计算了两次，而H上的每条边(显然共n条)仅计算了一次，因此

$$2d+n=\sum_{i=2}^n i \cdot l_i = 2 \cdot l_2 + 3 \cdot l_3 + \dots + n \cdot l_n \quad (2)$$

解出(1)式中的d，并代入(2)式，可得

$$\sum_{i=2}^n i \cdot l_i = 2 \left(\sum_{i=2}^n l_i - 1 \right) + n = \sum_{i=2}^n 2 \cdot l_i + n - 2$$

从而

$$\sum_{i=2}^n (i-2) \cdot l_i = n - 2 \quad (3)$$

(2)次考虑H的外部：对H的外部进行完全相同的讨论，

同理可得

$$\sum_{i=2}^n (i-2) \cdot Q_i = n - 2 \quad (4)$$

(3)-(4)，最后就得到(*)式

$$\sum_{i=2}^n (i-2)(l_i - Q_i) = 0 \quad \circ$$

例16.图25所示的图G显然是平面图，含有H-圈,满足条件(*)。其中： $n=8$

$$l_2=2, Q_2=0,$$

$$l_3=1, Q_3=1,$$

$$l_4=1, Q_4=1,$$

$$l_5=1, Q_5=1,$$

$$l_6=l_7=l_8=0;$$

$$Q_6=Q_7=Q_8=0;$$

$$\text{所以 } \sum_{i=2}^8 (i-2)(l_i-Q_i)=0。$$

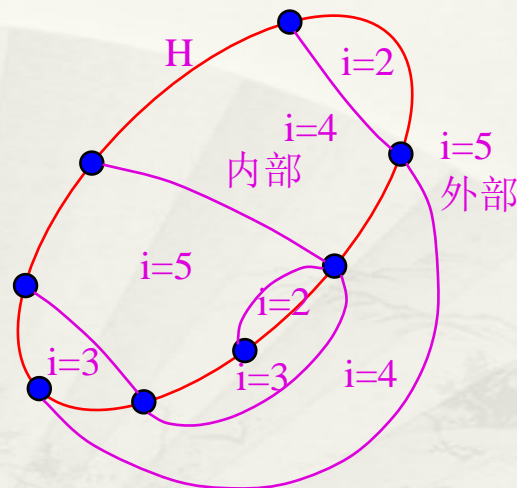


图25

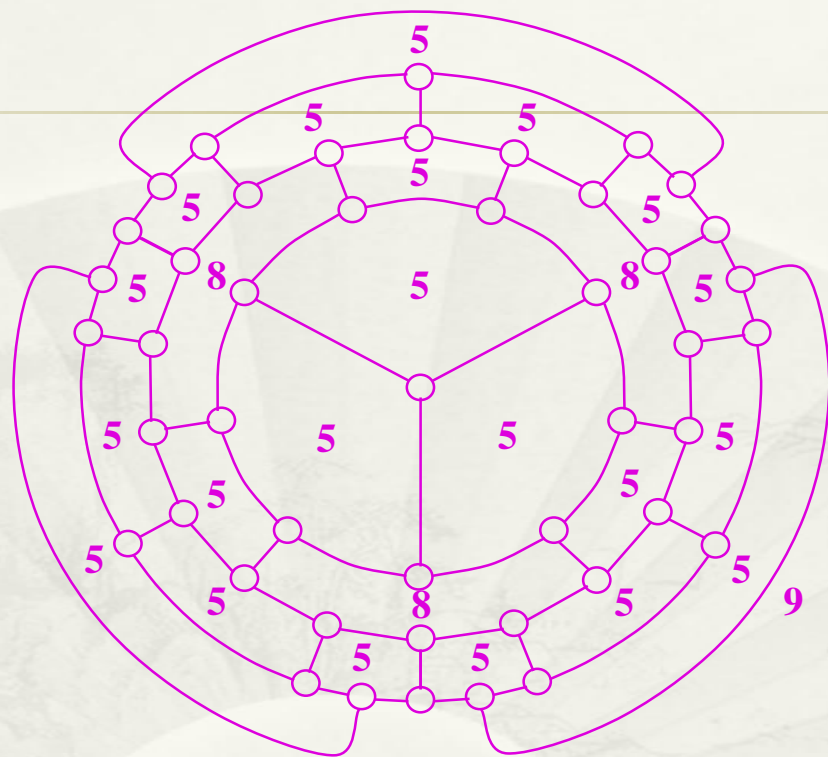


图26

* 四色定理

与平面图密切关联着的一个图论应用问题是平面图形的着色(参见 § 8 的一个注(3)将平面图的面染以颜色,使相邻面的颜色不同;)。

这个问题最早起源于地图的着色。给一个地图中相邻国家着以不同的颜色,最少需用多少种颜色?

一百五十多年前,英国的格色里(Guthrie)猜想用四种颜色即可对地图进行着色—这就是著名的四色定理。

1879年,肯普(Kempe)给出了四色定理的第一个证明; 1890年,希伍德(Hewood)发现肯普的证明有一个漏洞,实际上没有能够证明四色定理;

随后,希伍德对肯普的证明方法加以改进,据此他证明了五色定理(参见《图论及其应用》[美]J.A.邦迪 U.S.R.默蒂 著 吴望名 等译 P₁₆₆);

但是，在以后的几十年里，四色定理成了一个既令数学家感兴趣又令数学家头疼的悬而未决的问题；

1976年，美国阿肯色州伊利诺大学的两位数学家阿佩尔 (Appel)和哈肯 (Haken)借助于大型电子计算机，花费连续1000多个机时，而后宣布他们成功的证明了四色定理，证明长达两卷五百多页！

阿佩尔和哈肯的贡献在于考虑有限情况下的四色问题时，对于一个含有5-度结点的平面图，采用穷举法，分析了所有的(大约10万多个)可能情况，要证明出它们都能用四种颜色进行着色。借助于计算机，能很快的归纳(归约)出所有需要考虑的(大约2000多种)情况，然后再利用计算机对上述每一种情况进行分析和证明。

注：●四色定理的证明开创了数学和计算机结合起来完成某一重大数学难题的新局面。利用计算机的大容量、高速性，人们在组合分析，密码破解，基因解读等领域都取得了巨大的成绩；

●另一方面，数学家又把这种穷举法+计算机称为‘暴力破解法’，他们担心使用暴力破解法会破坏数学证明的因果性、简明性。

定义2.对偶图(dual graph)

设 $G=(V,E)$ 是平面图， R 是图 G 的区域集，并且 $|V|=n$ ， $|E|=m$ ， $|R|=r$ 。则平面图的对偶图 $G^d=(V^d,E^d)$ 是一(多重)无向图，其中：

$V^d=\{v_i^d: v_i^d \text{是在区域 } r_i \text{ 中的结点} \wedge r_i \in R\}$;

$E^d=\{e_k^d: e_k^d=(v_i^d, v_j^d) \wedge v_i^d \text{在 } r_i \text{ 中} \wedge v_j^d \text{在 } r_j \text{ 中} \wedge e_k^d \text{与 } e_k \text{ 相交} \wedge e_k \in E \wedge e_k \text{ 是 } r_i \text{ 和 } r_j \text{ 的公共边界}\}$;

并且 $|V^d|=r$ ， $|E^d|=m$ ， $|R^d|=n$ 。

例17.图27所示的平面图 G (红线)的对偶图 G^d 如图中蓝线所示。

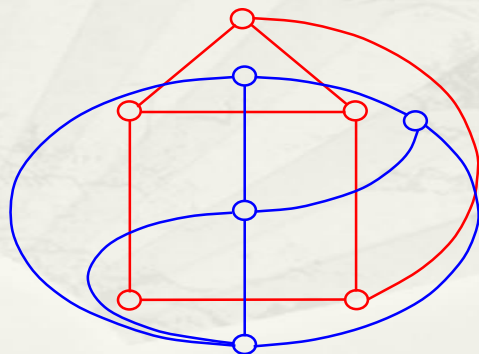


图27.图 G 及其的对偶图 G^d

注：●平面图G的对偶图 G^d 从拓扑学的角度来看，就是将图G的每个区域都收缩为结点，将图G的每个结点都扩张为区域；

●因此，平面图G的面着色问题就相当于其对偶图 G^d 的结点着色问题；所以，四色定理的证明就归结为含有5-度结点的平面图的结点着色问题；

●平面图G和它的对偶图 G^d 互为对偶,即 $(G^d)^d=G$ ；

●平面图G的对偶图 G^d 也满足Euler公式，即

$$|V^d| - |E^d| + |R^d| = r - m + n = n - m + r = |V| - |E| + |R| = 2。$$

定理3.设 $G=(V,E)$ 是无向图。那么，

图G是可平面图 \Leftrightarrow 图G有对偶图 G^d 。