# 第五节 矩阵的秩

## 作业

习题2.5

A: 1（1）（4），2,3,4;

B: (1)(2)

## 课前复习

**1、矩阵的逆** $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

**2、分块对角矩阵**

1) $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$;

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$;

3) 若$A = \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ A_s & & \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_s^{-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$;

4) 若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$, 则 $A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^n \end{pmatrix}$;

## 3、线性方程组的几种形式

$$Ax = b \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1{}^T \\ \alpha_2{}^T \\ \vdots \\ \alpha_m{}^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = b$$

## 4、$A_{m\times n}$与 的乘法

$$\Lambda_m A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1{}^T \\ \lambda_2 \alpha_2{}^T \\ \vdots \\ \lambda_m \alpha_m{}^T \end{pmatrix} \qquad A_{m\times n} \Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1 & \cdots & \lambda_n \alpha_n \end{pmatrix}$$

# 矩阵的秩

## 1、子阵与 $k$阶子式

**定义** 将矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 的某些行和列划去（可以只划去某些行和列），剩下的元素按原来的顺序构成的新矩阵叫做**矩阵 $A$ 的子矩阵**.

**定义** 在 $m\times n$ 矩阵 $A$中，任取 $k$行 $k$列 $\left(k\le\min\{m,n\}\right)$，位于这些行与列交叉处的 $k^2$ 个元素，依照它们在 $A$ 中的位置次序不变而得的 $k$ 阶行列式，称为矩阵 $A$ 的一个 **$k$ 阶子式**.

$m\times n$ 矩阵共有 $C_m^k C_n^k$ 个 **$k$ 阶子式**.

最低阶为 1阶， 最高阶为 $\min\{m,n\}$阶

如：矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 12$ 是它的一个二阶子式

易见 $A$ 的最高阶子式是3阶，共有4个3阶子式.

方阵的最高阶子式就是方阵的行列式

## 2、矩阵的秩

### 定义

如果$A=O$，则称A的秩为零；如果 $A\neq O$，则称A中非零子式的最高阶数为A的**秩**. 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$

$R(A)=r \Leftrightarrow$ (1) $\exists D_r\neq 0$； (2) $\forall D_{r+1}=0$.

**性质：** (1) 若$A_{m\times n}\neq 0$,则$:1\leq r(A)\leq \min\{m,n\}$

(2) $r(A)=r(A^T)$

(3)阶梯型矩阵的秩等于它的非零行的个数

(4) 对于$A_{n\times n}$,$r(A)=n\Leftrightarrow |A|\neq 0$,此时称$A$为满秩方阵;$r(A)<n\Leftrightarrow |A|=0$,此时称$A$为降秩方阵

**定理2.5.1** 若$A_{m\times n}$经过若干次初等行变换成为$B$，则$r(A)=r(B)$，即行等价的矩阵有相同的秩

**初等行变换不改变矩阵的非零子式的最高阶数**

**推论 2.5.1** **初等列变换也不改变矩阵的秩**

**推论2.5.2**

设$A_{m\times n}$，$P_{m\times m}$及$Q_{n\times n}$均可逆，则有

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)$$

**即满秩方阵乘矩阵后，矩阵的秩不改变**

# 矩阵秩的求法

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵}B$$

**A的秩 等于 B中非零行的个数**

**例1**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4 - 3r_1 \\ r_3 - 3r_2 \\ r_4 - 4r_2 \\ r_4 - r_3}]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad R(A) = 3.$$

**例2** 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

求 $R(A), R(B)$，其中 $B=(A\quad b)$

**解** 分析：直接将 $B$ 化为阶梯形矩阵即可，故

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-2r_1,\ r_3+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&4&2&0\\0&0&2&1&5\\0&0&-6&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\substack{r_2 \div 2 \\ r_3 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - r_3]{r_3 \div 5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A) = 2, \quad R(B) = 3.$$

## 秩标准形

称满足下列两个条件的矩阵为秩标准形：

1）左上角为单位阵； 2）其它元素均为0.

**定理2.5.2**

设$r(A_{m\times n})=r$,则∃可逆矩阵$P$及$Q$,使得$PAQ$成为下列矩阵之一：

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [\mathrm{I}_m, \quad 0], \qquad \mathrm{I}_n$$

(当$r<m$且$r<n$) (当$r=n<m$) (当$r=m<n$) (当$r=m=n$)

**例3** 将下列矩阵利用初等变换化为**行阶梯形**,再化为**行最简形**,最后化为**秩标准形**.并求其秩.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

注意：化矩阵为行阶梯形或行最简形时仅能用初等行变换. 化矩阵为秩标准形时，初等行变换和初等列变换均可以使用.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&-4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_3\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{r_2\div 2\\ r_3+5r_2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_1$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_2$$

$$B_2\xrightarrow[c_5-4c_1-3c_2+3c_3]{\substack{c_3\leftrightarrow c_4\\ c_4+c_1+c_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_3$$

最后得到的矩阵 $B_3$ 是 $A$ 的标准形， $B_1$，$B_2$ 依次为依次为行阶梯形和行最简形矩阵。

秩显然为 3 .

**例4（P76 例2.5.3）** 设$r(A_{m\times n})=r$.证明：存在列满秩矩阵$G_{m\times r}$和行满秩矩阵$H_{r\times n}$,使A=GH,其中r(G)=r(H)=r.

**解** 由定理2.5.2知存在可逆矩阵P,Q,使

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}_{m\times r}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}_{r\times n}$$

用$P^{-1}$左乘上式两端，用$Q^{-1}$右乘上式两端，得

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}_{m\times r}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}_{r\times n}Q^{-1}=GH$$

其中 $G=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$ 是m×r矩阵，且显然有r(G)=r

$H=\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}Q^{-1}$ 是r×n矩阵，且显然有r(H)=r

## 4、小结

1）子式与 $k$阶子式

2）矩阵的秩 ----------非零子式的最高阶数

3）等价的矩阵具有相同的秩

4）矩阵秩的求法

## 思考题

设A是n阶矩阵，r(A)＝r.证明：必存在n阶可逆矩阵B及秩为r的n阶矩阵C满足$C^2=C$，使A＝BC.

**解** 由定理2.5.2知存在n阶可逆方阵P,Q,使

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}Q^{-1}=P^{-1}Q^{-1}Q\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}Q^{-1}$$

$$令B=P^{-1}Q^{-1},C=Q\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times n}Q^{-1}$$

则B为n阶可逆矩阵,C为秩为r的n阶矩阵,满足 $C^2=C$

使得A=BC