第三章习题答案

习题 3-1 参数曲线曲面有几种表示形式？

解：(1) 代数形式；（2）几何形式。

习题 3-2 设有控制顶点为 $P_0(0,0)$，$P_1(48,96)$，$P_2(120,120)$，$P_3(216,72)$的三次 Bézier 曲线 $P(t)$，试计算 $P(0.4)$的(x,y)坐标，并写出$(x(t),y(t))$的多项式表示。

解：

$$\because P(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)=(1-t)^3P_0+3t(1-t)^2P_1+3t^2(1-t)P_2+t^3P_3$$

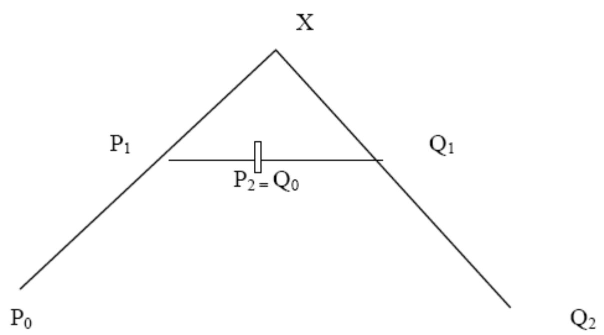
$$\begin{aligned}\therefore P(0.4)&=(0.6)^3P_0+1.2(0.6)^2P_1+1.8(0.4)^2P_2+(0.4)^3P_3\\&=0.216\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}+0.432\begin{bmatrix}48&96\end{bmatrix}+0.288\begin{bmatrix}120&120\end{bmatrix}+0.064\begin{bmatrix}216&72\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}69.12&80.64\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x(t)=(1-t)^3x_0+3t(1-t)^2x_1+3t^2(1-t)x_2+t^3x_3\\y(t)=(1-t)^3y_0+3t(1-t)^2y_1+3t^2(1-t)y_2+t^3y_3\end{cases}$$

习题 3-3 设一条二次 Bezier 曲线的控制顶点为 P0,P1,P2,另一条二次 Bezier 曲线的控制顶点为 Q0,Q1 ,Q2, P2 =Q0.写出两条曲线可以精确合并（表示）为一条二次 Bezier 曲线的条件。

解：

如下图所示，由于可以精确合并，说明两曲线是由一条曲线在参数 0<t<1 处分割而来如下图所示，假设原曲线的控制顶点为 P0 , X, Q2. 由 de Castejau 算法,有：



a. 首先要求 P1, P2(Q0), Q1 三点共线；

b. 根据抛物线三切线定理：

$$\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-X}=\frac{Q_1-Q_0}{P_2-P_1}=\frac{X-P_1}{P_1-P_0}$$

c. 消掉未知变量 X 可得：

$$Q_1-\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-Q_0}(P_2-P_1)=P_1+\frac{P_1-P_0}{P_2-P_1}(Q_1-Q_0)$$

习题 3-4 已知 Bezier 曲线上的 4 个点分别为 Q0(50,0), Q1(100,0),Q2(0,50), Q3(0,100),它们对应的参数分别为 0,1/3,2/3,1,反求 Bezier 曲线的控制顶点。给出 4 次 Bezier 曲线退化为三次 Bezier，控制顶点 P0, P1 , P2 , P3 应该满足的条件。

解：

(1) 假设控制顶点为 P0 , P1 , P2 , P3，由 Bezier 曲线（端点）性质可知：

P0= Q0= Q(0)=(50,0)　　　　　　P3= Q3=Q(1)=(0,100)

根据 Bezier 曲线的公式，将参数为 1/3,2/3 代入公式中得：

(8/27) P0 +(4/9) P1 + (2/9) P2 +(1/27) P3=(100,0)　　　　　　(1)

(1/27) P0 +(2/9) P1+ (4/9) P2 +(8/27) P3=(0,50)　　　　　　(2)

联立上述方程可到以下结果：

P1=(775/3,-125/3)　　P2=(-400/3;200/3);

(2) 对 Bezier 曲线定义式进行展开，4 次 Bezier 曲线退化为三次 Bezier 的条件是参数 t 最高次 t^3 的系数和为 0，即：

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i C_3^i P_{3-i}=\Delta^3 P_0=0$$

(此式的证明可参考习题 3-9)

习题 3-5 设一条三次 Bézier 曲线的控制顶点为 P_0，P_1，P_2，P_3。对曲线上一点 $P(0.5)$，及一个给定的目标点 T，给出一种调整 Bézier 曲线形状的方法，使得 P(0.5)精确通过点 T。

解：

假设我们改变其中的一个控制顶点，比如将 P1 调整到 $P_1+\lambda$,使得 P(1/2)精确通过点 T，将改变后的曲线记为 $\hat{P}(t)$，则有：

$$\hat{P}(t)\big|_{\frac{1}{2}}=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)\Big|_{\frac{1}{2}}+\lambda B_{1,3}(\tfrac{1}{2})$$

即：$T=P(\tfrac{1}{2})+\lambda B_{1,3}(\tfrac{1}{2})$

因此只需将 P1 调整到：　$P_1+(T-P(\tfrac{1}{2}))/B_{1,3}(\tfrac{1}{2})$

（答案不唯一，也可以对 P2 进行调整）

习题 3-6 计算以(30,0)，(60,10)，(80,30)，(90,60)，(90,90)为控制顶点的 4 次 Bézier 曲线在 t=1/2 处的值，并画出 de Casteljau 三角形。

解：

记住递推公式：$P_0^n=(1-t)P_0^{n-1}+tP_1^{n-1}$ 中的系数特点，(1-t)在前，t 在后：

$$
\begin{array}{lllll}
P_0(30,0) & & & & \\
P_1(60,10) & P_0^1(45,5) & & & \\
P_2(80,30) & P_1^1(70,20) & P_0^2(57.5,12.5) & & \\
P_3(90,60) & P_2^1(85,45) & P_1^2(77.5,32.5) & P_0^3(67.5,22.5) & \\
P_4(90,90) & P_3^1(90,75) & P_2^2(87.5,60) & P_1^3(82.5,46.25) & P_0^4(75,34.375)
\end{array}
$$

习题 3-7 推导 Beizer 曲线的升阶公式;给定三次 Bezier 曲线的控制顶点(0,0), (0,100), (100,0), (100,100),计算升阶一次后的控制顶点。

解：

请各位同学参照《计算机图形学基础教程》（第 2 版孙家广和胡事民）课本 71 页证明公式 $P_i^*C_{n+1}^i=P_iC_n^i+P_{n-1}C_n^{i-1}$ 成立。注意：$P_{-1}=P_{n+1}=(0,0)$

根据上述公式可得升阶一次后的控制顶点分别为：

(0,0),(0,75),(50,50),(100,25),(100,100)

习题 3-8 用 de Boor 算法，求以(30,0)，(60,10)，(80,30)，(90,60)，(90,90)为控制顶点，以 T=[0,0,0,0,0.5,1,1,1,1]为节点向量的三次 B 样条曲线在 t=1/4 处的值。

解：

∵ k=4，n=4，$k-1\le j\le n$ 即 $3\le j\le 4$

∴ 5 个控制顶点控制两段三次 B 样条曲线，分别在区间$[t_3,t_4)$和$[t_4,t_5)$

∵ $t_3\le t=1/4\le t_4$

∴ $P(t=1/4)$在第一段三次 B 样条曲线上，$t\in[t_3,t_4)$，该段曲线只与前四个顶点相关

由 de Boor 递推公式

$$
P_i^{[r]}(t)=\begin{cases} P_i, \quad r=0, i=j-k+1, j-k+2,\cdots,j \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i}P_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i}P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ \qquad\qquad r=1,2,\cdots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\cdots,j \end{cases}
$$

及 T=[0,0,0,0,0.5,1,1,1,1]，可得：

$$P_1^{[1]} = \frac{t-t_1}{t_4-t_1}P_1 + \frac{t_4-t}{t_4-t_1}P_0 = 2tP_1 + 2(\frac{1}{2}-t)P_0 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_0 = (45,5)$$

$$P_2^{[1]} = \frac{t-t_2}{t_5-t_2}P_2 + \frac{t_5-t}{t_5-t_2}P_1 = tP_2 + (1-t)P_1 = \frac{1}{4}P_2 + \frac{3}{4}P_1 = (35,15)$$

$$P_3^{[1]} = \frac{t-t_3}{t_6-t_3}P_3 + \frac{t_6-t}{t_6-t_3}P_2 = tP_3 + (1-t)P_2 = \frac{1}{4}P_3 + \frac{3}{4}P_2 = (82.5,37.5)$$

$$P_2^{[2]} = \frac{t-t_2}{t_4-t_2}P_2^{[1]} + \frac{t_4-t}{t_4-t_2}P_1^{[1]} = 2tP_2^{[1]} + 2(\frac{1}{2}-t)P_1^{[1]} = \frac{1}{2}P_2^{[1]} + \frac{1}{2}P_1^{[1]} = (40,10)$$

$$P_3^{[2]} = \frac{t-t_3}{t_5-t_3}P_3^{[1]} + \frac{t_5-t}{t_5-t_3}P_2^{[1]} = tP_3^{[1]} + (1-t)P_2^{[1]} = \frac{1}{4}P_3^{[1]} + \frac{3}{4}P_2^{[1]}$$
$$= (46.875,20.625)$$

$$P_3^{[3]} = \frac{t-t_3}{t_4-t_3}P_3^{[2]} + \frac{t_4-t}{t_4-t_3}P_2^{[2]} = 2tP_3^{[2]} + 2(\frac{1}{2}-t)P_2^{[2]} = \frac{1}{2}P_3^{[2]} + \frac{1}{2}P_2^{[2]}$$
$$= (43.4375,15.3125) = P(\frac{1}{4})$$

习题 3-9 试证明 n 次 Bezier 曲线退化为 n-1 次 Bezier 曲线的条件为$\Delta^n P_0 = 0$。

解：

先写出 n 次 Bezier 曲线的展开式：

$$P(t) = P_0 C_0^0 t^0 (1-t)^n + P_1 C_n^1 t^1 (1-t)^{n-1} + \ldots + P_n C_n^n t(1-t)^0$$

从上式可以看出 t 的次数最高项 t^n 系数为：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^{n-i} P_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i P_{n-i}$$

根据公式：

$$\begin{aligned}\Delta^k P_t &= \Delta(\Delta^{k-1}P_t)\\ &= \Delta^{k-1}P_{t+1} - \Delta^{k-1}P_t\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i P_{t+k-i}\end{aligned}$$

可推导得到：
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i P_{n-i} = \Delta^n P_0$$

而 n 次 Bezier 曲线退化为 n-1 次 Bezier 曲线条件是 t 的次数最高项 t^n 系数等于 0，从而得到：

$$\Delta^n P_0 = 0$$

习题 3-10 NURBS 曲线的凸包性.

解：

定义在非零节点区间上$t\in[t_i,t_{i+1}]\subset[t_{k-1},t_{n+1}]$的曲线段于定义它的 k+1 个控制顶点$P_{i-k+1},\cdots,P_i$的凸包内。整条 NURBS 曲线位于所有定义各曲线段的控制顶点的凸包的并集内。所有权因子的非负性，保证了凸包性质的成立。

习题 3-11 Q，Q_1，Q_2，S_1，S_2是平面上的 5 个点。请设计一条均匀三次 B 样条曲线，使曲线经过这 5 个点，且满足如下设计要求：

(1) 在 Q_1，Q_2点与 QQ_1，QQ_2相切；

(2) 分别在 Q，Q_1和 Q，Q_2间生成一段直线段；

(3) 在 Q 是一尖点。

解：

首先了解均匀三次 B 样条曲线的端点性质。

对于每一段曲线，

已知：k=4，n=3，T=[0,1,2,3,4,5,6,7]

所以：$k-1\le j\le n$ 即 j=3，$t\in[t_3,t_4)$

起点：t=3

$$P(3)=P_3^{[3]}=(t-3)P_3^{[2]}+(4-t)P_2^{[2]}=P_2^{[2]}=\frac{t-2}{2}P_2^{[1]}+\frac{4-t}{2}P_1^{[1]}$$
$$=\frac{1}{2}P_2^{[1]}+\frac{1}{2}P_1^{[1]}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}P_2+\frac{2}{3}P_1)+\frac{1}{2}(\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{3}P_0)=\frac{1}{6}P_0+\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{6}P_2$$

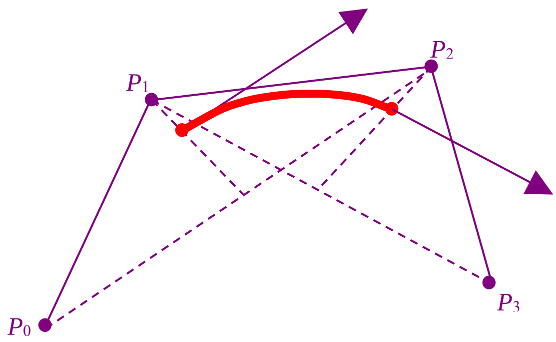
同理，终点：t=4

$$P(4)=P_3^{[3]}=(t-3)P_3^{[2]}+(4-t)P_2^{[2]}=P_3^{[2]}=\frac{1}{2}P_3^{[1]}+\frac{1}{2}P_2^{[1]}$$
$$=\frac{1}{6}P_1+\frac{2}{3}P_2+\frac{1}{6}P_3$$

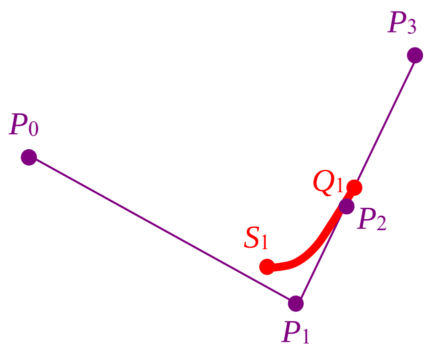
起点和终点的切线方向：

$$P'(3)=\frac{1}{2}(P_2-P_0)$$
$$P'(4)=\frac{1}{2}(P_3-P_1)$$

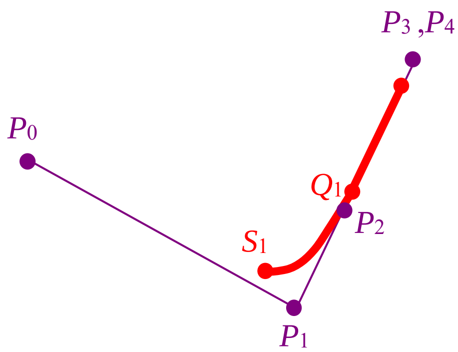
最后结果：



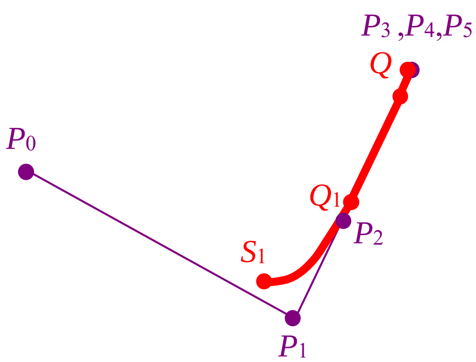
要求(1)：为了使均匀三次 B 样条曲线和某一直线相切，则 P_1，P_2 ，P_3 位于直线上。



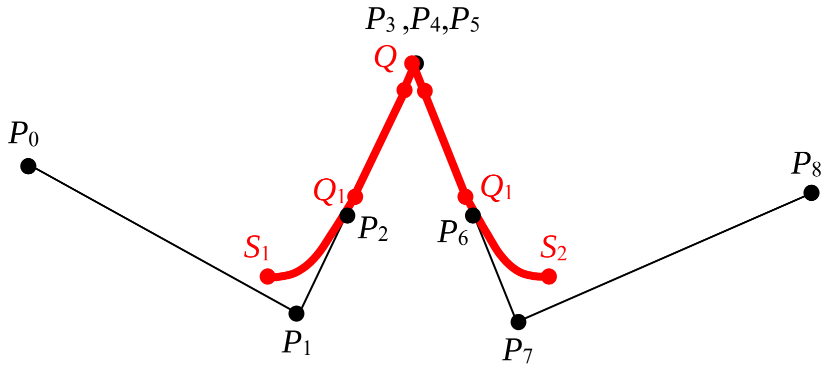
要求(2)：若要得到一条直线段，只要 P_1, P_2, P_3, P_4 四点位于一条直线上。



要求(3)：为了使曲线能过尖点 Q，只要使 P_3, P_4, P_5, Q 重合。



最后结果：



习题 3-12 常见的曲面、曲面求交方法有哪些？

解：

主要包含四种代数方法、几何方法、离散方法、跟踪方法。

习题 3-13 用几何法求平面和球的交线。

解：

可按以下步骤求解：

(1)求球心到平面的距离，设 d，交点(投影点)为 P；

(2)设球的半径为 r，如果 r<d，则平面与球相交，交线为圆，圆心为 P，半径为 $\sqrt{r^2-d^2}$。

可以参考课本第 152 页的求解过程。

习题 3-13．形体表示有哪些常见的方法？

解

包含三种表示方法分解表示；构造表示；边界表示。

习题 3-15．网格简化时如何度量删除一个顶点的误差？

解

可以从以下两篇论文里找答案：

（1）基于顶点删除的三角网络模型简化新方法；

（2）基于顶点删除网格简化在战场仿真中的应用。

附加题 3-1 设一条三次 Bezier 曲线的前三个控制顶点为(30,0),(60,20),(80,20),曲线在 t=1/2 处的值为(70,15)，试求最后一个控制顶点。

– 列出 de Casteljau 算法：

解：

记住 de Casteljau 算法递推公式：$P_i^k \begin{cases} P_i & k=0 \\ (1-t)P_i^{k-1}+tP_{i+1}^{k-1} & k=1,2,..,n, i=0,1,...,n-k \end{cases}$

系数特点，(1-*t*)在前，*t* 在后：

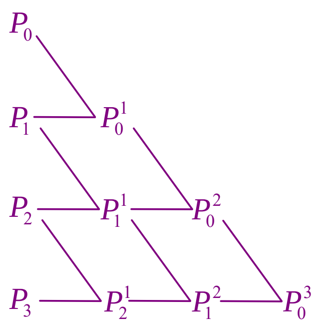


图3. 1. 11　n=3时P_i^n 的递推关系

t=1/2 时，可求得 $P_0^1=(45,10)$，$P_1^1=(70,20)$，$P_0^2=(57.5,15)$

同理可反推角点：$P_1^2=(82.5,15)$，$P_2^1=(95,10)$，$P_3=(110,0)$

附加题 3-2 一条以 P0,P1,P2,P3,P4 为控制顶点的 4 阶(三次)B 样条曲线，其节点向量为{0,0,0,1,2,3,4,4, 4},则其定义域为：

解：

B 样条曲线的定义域为有基函数“完全支持”的区间。对于包含 n 个控制点和 k 阶(k-1)次的 B 样条曲线，区间$[t_0,t_{k-1})$和$[t_{n+1},t_{n+k})$不会有基函数的“完全支持”。因此该题的答案为：$[t_3,t_5]=[1,3]$。

附加题 3-3 改变一条以 P0,P1,⋯,P9 为控制顶点的 4 阶(三次)B 样条曲线的一个顶点 P5，有几段曲线的形状会改变为：

解：

移动曲线的第 i 个控制顶点 P_i，至多影响定义在区间$[t_i,t_{i+k})$上的那部分曲线的形状，因此移动控制顶点 P_i，曲线在$[t_5,t_9)$区间会发生变化，即改变的了 4 段曲线的形状。

附加题 3-4 五个控制顶点的三次 B 样条曲线由几个节点构成？

解： $m = n + k$,故有 9 个节点构成。

附加题 3-5 由五个控制顶点所决定的 3 次 B 样条曲线，由几段 3 次 B 样条曲线段光滑连接而成？

解： B 样条曲线的定义域 $t \in (t_{k-1}, t_{n+1})$,故由两段 3 次 B 样条曲线段光滑连接而成。