Chapter 4
Impulse and Momentum

我国舰艇上发射远程导弹实验

4-5 变质量动力学简介

设 t 时刻: 质点的质量为 m，速度为 $\vec{v}$。

$t+\mathrm{d}t$ 时刻: 质点质量变为 $m+\mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m$与 m合并前的速度为 $\vec{u}$), 速度为$\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$。

以质点 m 和 $\mathrm{d}m$ 为系统，设在$\mathrm{d}t$ 时间内系统所受外力为 $\vec{F}$ 。

根据质点系动量定理有 $\vec{F}\mathrm{d}t=(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-(m\vec{v}+\vec{u}\mathrm{d}m)$

略去二阶无穷小量

$$\vec{F}\mathrm{d}t=m\mathrm{d}\vec{v}+(\vec{v}-\vec{u})\mathrm{d}m$$

$$\vec{v}_r=\vec{u}-\vec{v}$$

dm 与 m 合并前相对于m 的速度

$$\vec{F}\mathrm{d}t=m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_r\mathrm{d}m$$

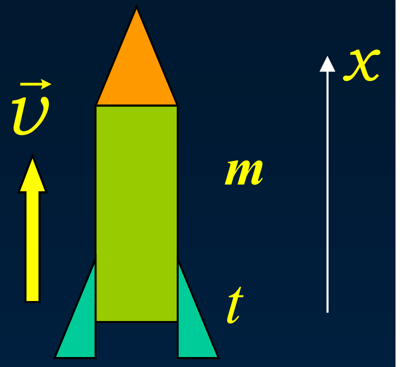
$$\boxed{\vec{F}+\vec{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

——变质量动力学的基本方程
（密歇尔斯基方程）

● 火箭的运动方程

t 时刻，火箭质量为 m，速度为 $\vec{v}$

$\mathrm{d}t$ 内火箭喷出速度为 $\vec{u}$ (相对地面的速度)，质量为 $-\mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m$为火箭质量的增量) 的燃料，火箭质量变为 $m+\mathrm{d}m$，速度变为 $\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$。



当不计空气阻力，只计重力，则 $\vec{v}_r=\vec{u}-\vec{v}$为喷气速度，方向向下

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\{(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+\vec{u}(-\mathrm{d}m)\}-m\vec{v}$$

$$=m\mathrm{d}\vec{v}+\vec{v}\mathrm{d}m-\vec{u}\mathrm{d}m \quad \text{略去二阶小量}$$

$$=m\mathrm{d}\vec{v}+(\vec{v}-\vec{u})\mathrm{d}m=m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_r\mathrm{d}m$$

$$-mg\mathrm{d}t=m\mathrm{d}v+v_r\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}v=-g\mathrm{d}t-v_r\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

喷气速度为常量

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=-v_r\int_{M_0}^{M}\frac{\mathrm{d}m}{m}-\int_0^t g\mathrm{d}t$$

$$\boxed{v=v_0+v_r\ln\frac{M_0}{M}-gt}$$

—— 火箭的速度方程

$$\boxed{\vec{F}+\vec{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

$$-mg-v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$-g\mathrm{d}t-v_r\frac{\mathrm{d}m}{m}=\mathrm{d}v$$

$$\boxed{v = v_0 + v_r \ln\frac{M_0}{M} - gt}$$ —— 火箭的速度方程

$N = M_0 / M$ —— 火箭的质量比

讨论

(1) 若不考虑重力, 且初速为零

$$\boxed{v = v_r \ln\frac{M_0}{M}}$$

$v_r = 4\text{km/s}$

$N = 6$

$v = 7.2\text{km/s} < 7.9\text{km/s}$(第一宇宙速度)

(2) 多级火箭问题

$v_1 = v_{r1}\ln N_1$ $\quad$ $v_2 = v_1 + v_{r2}\ln N_2$ $\quad$ $\cdots\cdots\cdots$

$$\Rightarrow v = v_{r1}\ln N_1 + v_{r2}\ln N_2 + v_{r3}\ln N_3 + \cdots$$

Chapter 5

ROTATIONAL KINEMATICS

前面讨论了质点和质点系的运动学与动力学规律，下面将讨论具有一定形状和大小的物体的运动。

具有形状和大小的实际物体的运动一般是较复杂的，它可以平移、转动，还可能发生形变。为了使问题简化，一般假定物体无论受多大外力或转动得多快都不变形，称这样的物体为刚体。

研究刚体力学的基本方法：设想将刚体分割成许多部分，每一部分都小到可看作一个质点，称作刚体的“质元”，对于刚体，它的任意两质元之间的距离始终保持不变。因此，刚体就像是一个冻结了的质点系，由于每个质元服从质点力学规律，由此出发，推演出刚体的运动规律。

基本内容：*刚体运动学→刚体动力学（刚体的平动、刚体的定轴转动等）*。

§ 5.1 基本概念

一. 刚体 —— *Rigid body*

⇕ 特定的质点系，不变形（形状、体积保持不变）

即使在受力情况下，物体内的各质点间距始终保持不变

★ 说明

(1) 特殊的质点系（冻结了的质点系）。

(2) 在力作用下，组成物体的所有质点间的距离始终保持不变。

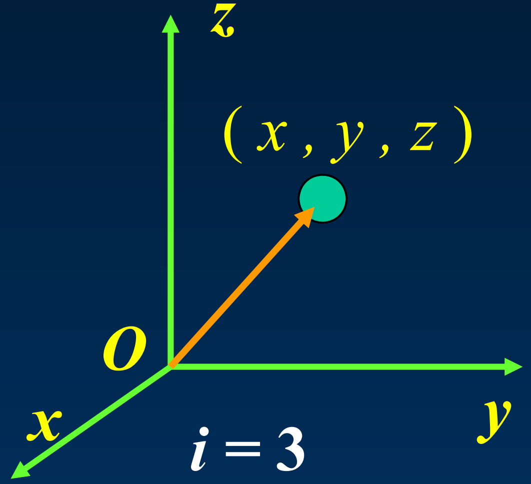
(3) 理想化模型。

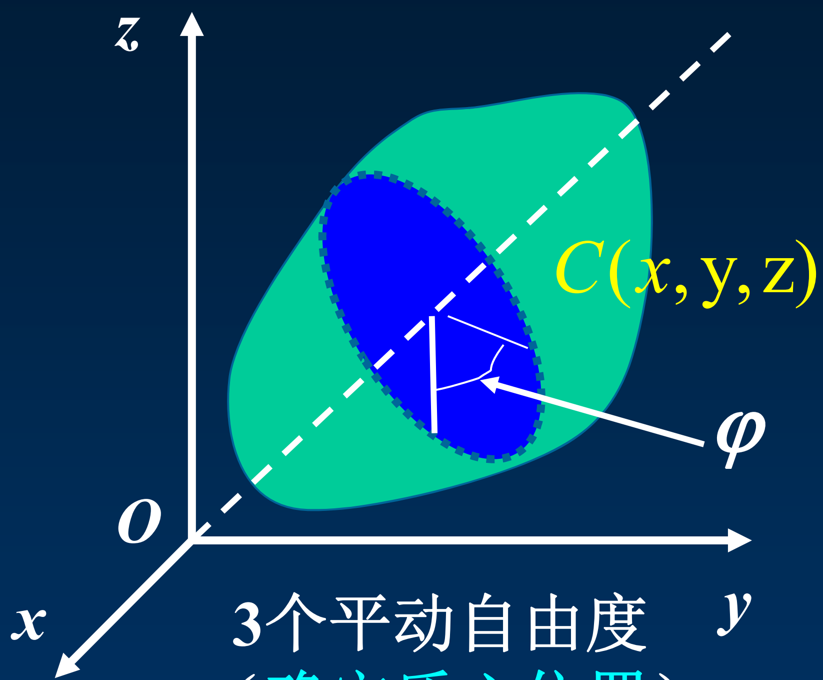
(4) 有关质点系的所有规律都可用于刚体。

(5) 由于刚体的特点，规律的表示比一般的质点系有所简化。

二、自由度—— *Degree of freedom*

确定物体的位置所需要的独立坐标数 —— 物体的自由度数





3个平动自由度
（确定质心位置）

3个转动自由度
（确定转轴的方向角2个自由度，确定转动角度1个自由度）

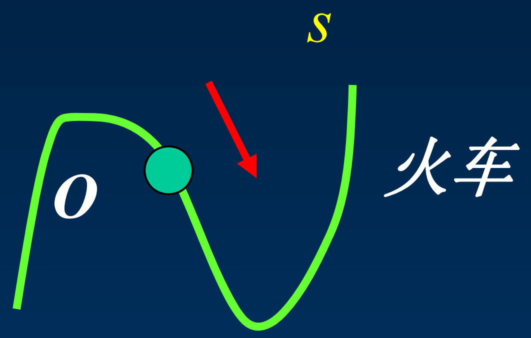
一个可以在空间自由运动的质点　　自由度数=3

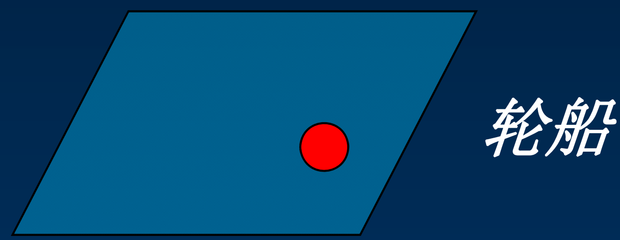
一个可以在空间自由运动的刚体　　自由度数=6

- 当刚体受到某些限制 ——自由度减少

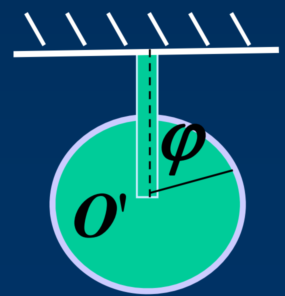
限制在平面或曲面上运动的质点　　自由度数=2

限制在直线或曲线上运动的质点　　自由度数=1





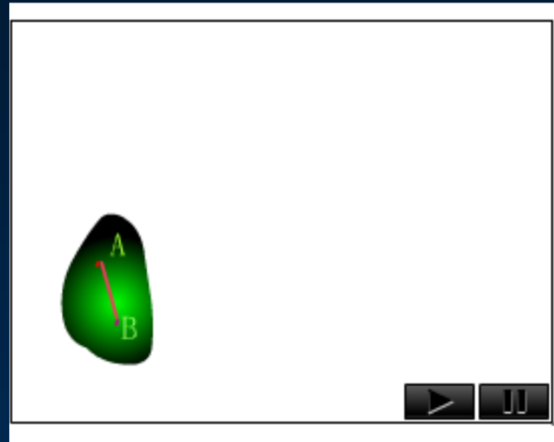
$i=1$　　$i=2$



- 定轴转动仅有一个自由度

三、刚体的平动—— Translation

定义：刚体运动时，若在刚体内所作的任一条直线都始终保持和自身平行 —— 刚体平动



例如： 电梯 汽缸中的活塞

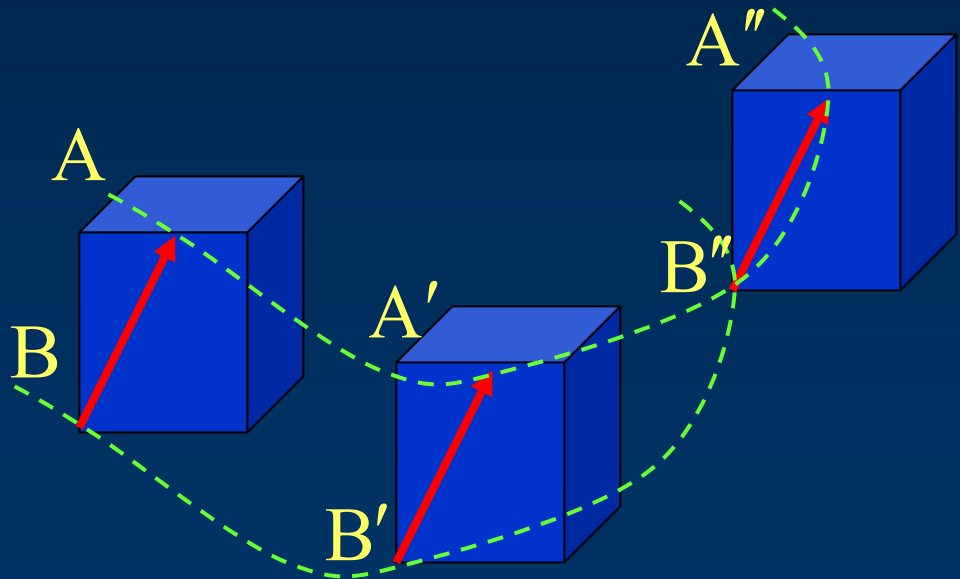
- 平动的特点

(1) 刚体上各质点的运动轨迹相同

注意：平动不一定是直线运动，可以是曲线运动。如摩天轮中的轿厢。

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_B \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_B \end{aligned}}$$



(2) 用质心的运动 来代替 刚体的平动

四、刚体绕定轴转动(*Rotation*)

转动：刚体内各点都绕同一直线作圆周运动

例如：陀螺　门　直升飞机的螺旋桨

转轴固定不动　------定轴转动

例如：门　固定在地面上的电动机转子

刚体的平动和绕定轴转动是刚体的
两种最简单最基本运动

★ 说明

平动和转动，可以描述所有质元的运动。

例如：　一个车轮的滚动，

拧紧或松开螺帽，　钻头

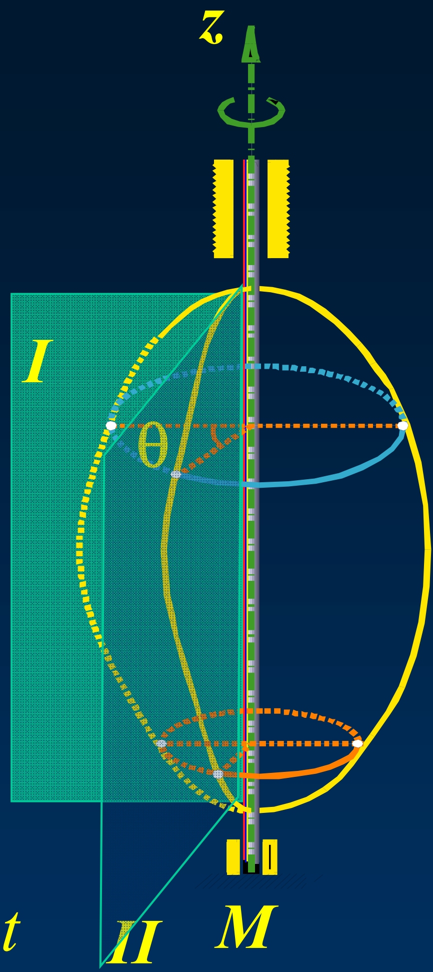
1. 描述刚体绕定轴转动的角量

绕定轴转动的刚体只有一个自由度

角坐标 $\theta = f(t)$ （运动学方程）

角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = f'(t)$

角加速度 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = f''(t)$



刚体绕定轴转动可归结为其上任一质元绕该轴的转动

$\omega = \omega_0 + \int_0^t \beta \, dt$

$\omega = \omega_0 + \beta t$

$\omega\beta = \omega \dfrac{d\omega}{dt} = \beta \dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} \omega \, d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \beta \, d\theta$

$\Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\int_{\theta_0}^{\theta} \beta \, d\theta$

2. 定轴转动刚体上各点的速度和加速度

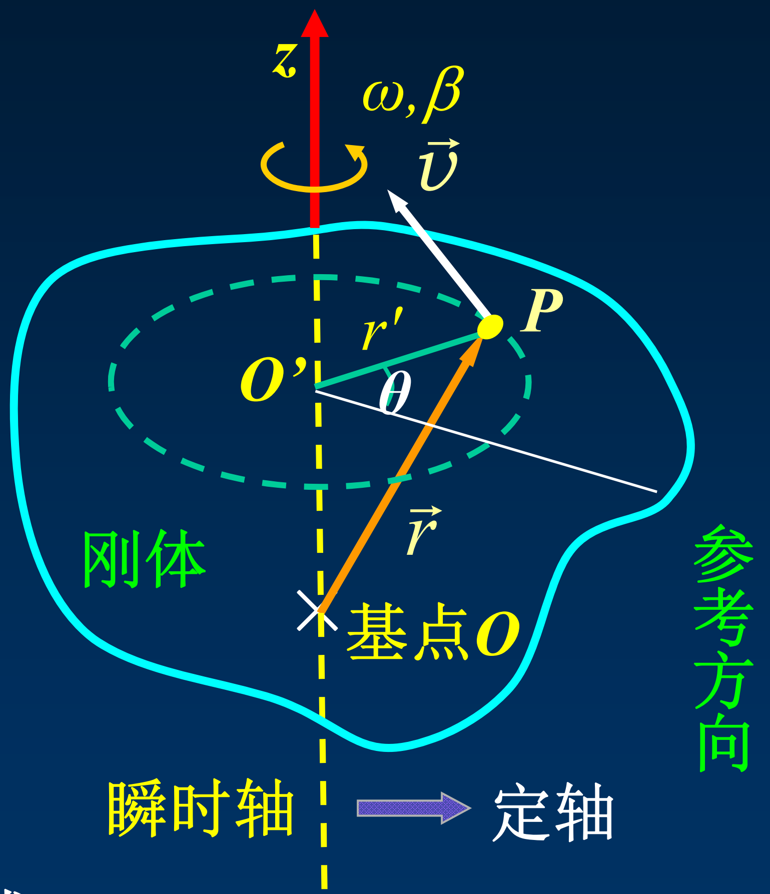
任意点都绕同一轴作圆周运动,

且 ω，β 都相同

$$v = r'\omega$$

$$a_n = r'\omega^2$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r'\beta$$



速度与角速度的矢量关系式

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

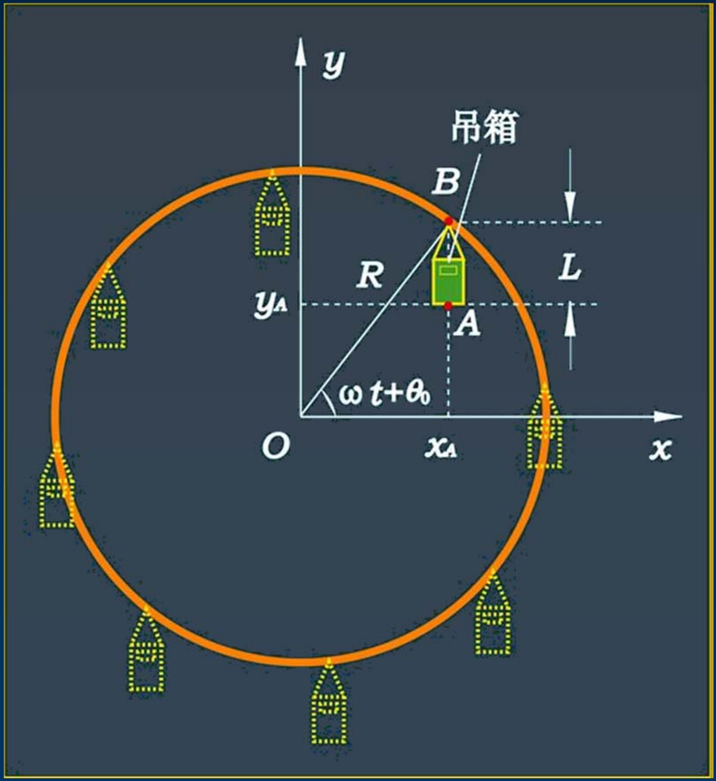
加速度与角加速度的矢量关系式

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\beta}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\beta}\times\vec{r} \qquad \vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v}$$

例1 一大型回转类“观览圆盘”（摩天轮）如图所示。圆盘的半径R=25 m，供人乘坐的吊箱高度L=2 m。若大圆盘绕水平轴匀速转动，转速为0.1 r/min。

求 吊箱底部A点的轨迹及A点的速度和加速度的大小。



解 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{10\times 60} = \dfrac{\pi}{300}$

吊箱平动

$$x_A = x_B = R\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y_A = y_B - L = R\sin(\omega t + \theta_0) - L$$

$$x_A^2 + (y_A + L)^2 = R^2$$

$v_A = R\omega \qquad a_A = R\omega^2$ ***WHY?***

$$x_A = R\cos(\omega t + \theta_0)$$
$$y_A = R\sin(\omega t + \theta_0) - L$$

$$\upsilon_{Ax} = \frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\upsilon_{Ay} = \frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t} = R\omega\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{Ax}^2 + \upsilon_{Ay}^2} = R\omega = \frac{25\pi}{300} = 0.26\,\mathrm{m/s}$$

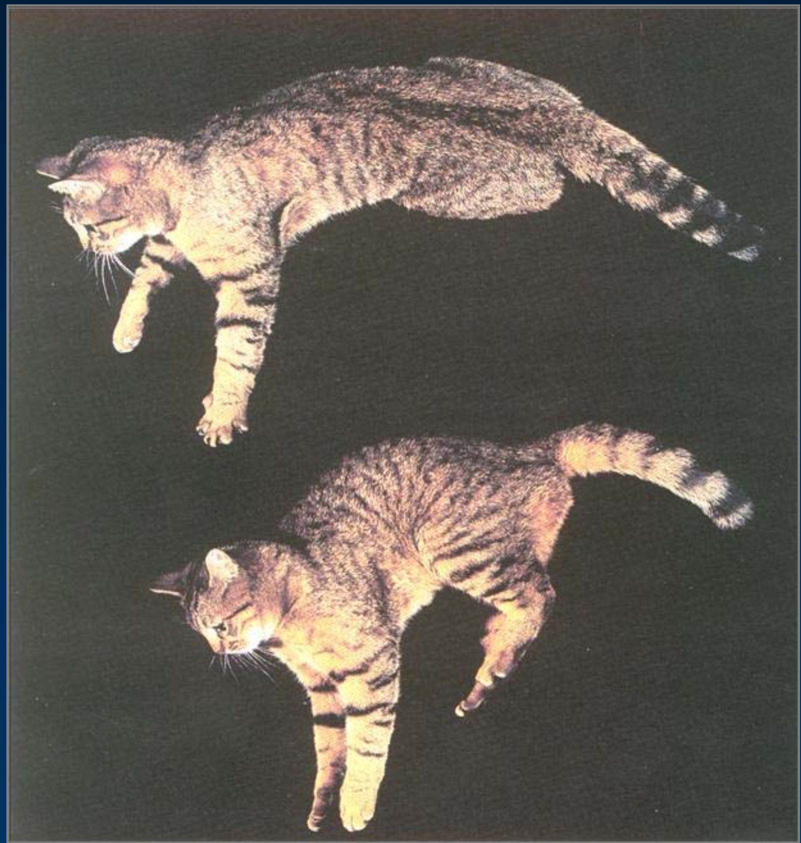
$$a_{Ax} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{Ax}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$a_{Ay} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{Ay}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = R\omega^2 = \frac{25\pi^2}{300^2} = 2.7\times10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

Chapter 6

ROTATIONAL DYNAMICS



猫习惯于在阳台上睡觉，因而从阳台上掉下来的事情时有发生。长期的观察表明猫从高层楼房的阳台掉到楼外的人行道上时，受伤的程度将随高度的增加而减少，为什么会这样呢？

§ 6.1 力矩 刚体绕定轴转动微分方程

一. 力矩

(Torque)

力 ➡ 改变质点的运动状态 ➡ 质点获得加速度

? ➡ 改变刚体的转动状态 ➡ 刚体获得角加速度

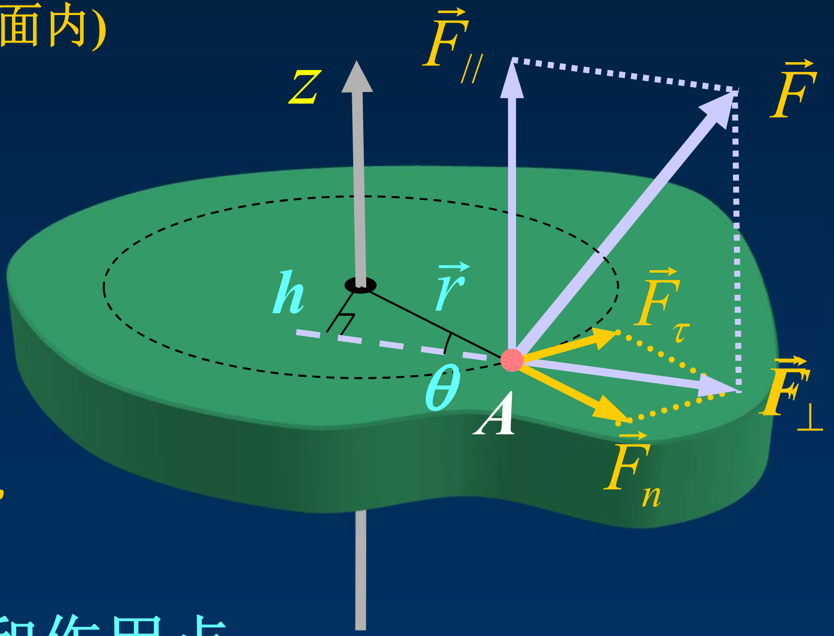
力 F 对 z 轴的力矩(力在垂直于轴的平面内)

$$M_z(F) = Fr\sin\theta = F\,h = F_\tau r$$

力 F 对 z 轴的力矩

(力不在垂直于轴的平面内)

$$M_z(F) = F_\perp r\sin\theta = F_\perp h = F_\tau r$$

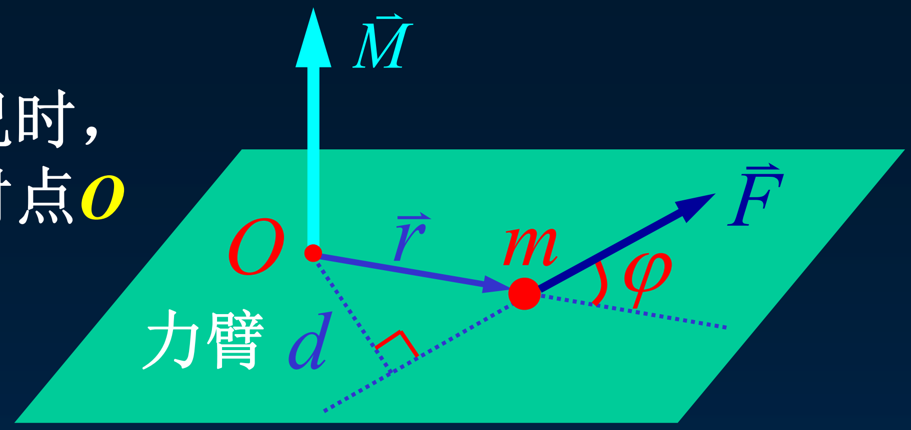


- 力矩取决于力的大小、方向和作用点
- 在刚体的定轴转动中，力矩只有两个指向（沿转轴的正或负方向，$r \rightarrow F$右手螺旋）

$$\vec{M}_Z = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

讨论

- 在研究物体一般的转动情况时，可以引进力对点的力矩。力对点$\boldsymbol{O}$的力矩

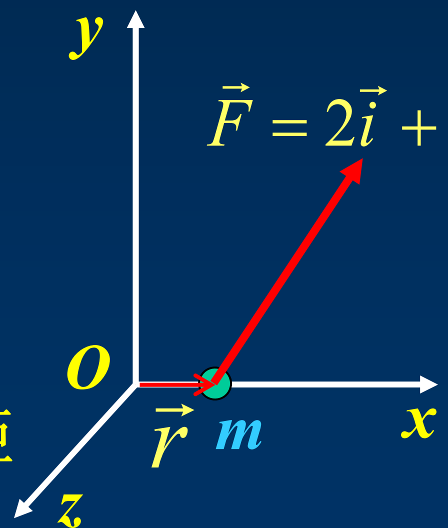


$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$M = Fr\sin\varphi = Fd$ 同一力对不同参考点的力矩是不相同的。

例1 如图，一质量为 $\boldsymbol{m}$ 的质点位于$\boldsymbol{x}$轴上**1m**处，受到图示力$\boldsymbol{F}$ 的作用。求 此力对$\boldsymbol{O}$点的力矩

$$\boxed{\vec{M}_Z = \vec{r} \times \vec{F}_\perp}$$



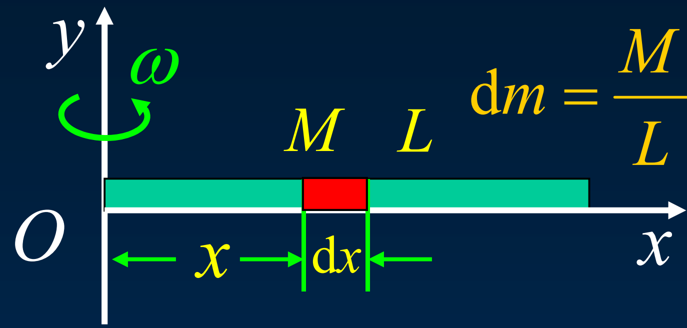
解 $\vec{r} = \vec{i}$ $\quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{i} \times (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 3\vec{k}$$ 力对**O**点的力矩

另 $x=1,\ F_\tau = F_y = 3$ $\quad M = xF_y$ 力对过**O**点的**Z**轴的力矩

例2 已知棒长 L，质量 M， 在摩擦系数为 μ 的水平桌面转动

求： 摩擦力对 y 轴的力矩



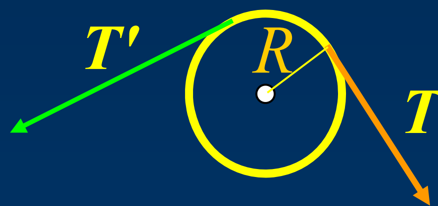
$$\mathrm{d}m=\frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

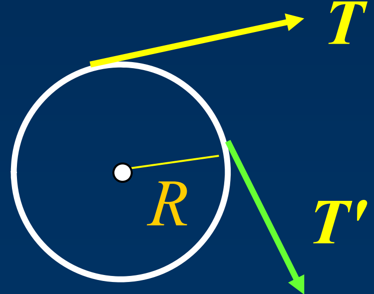
解：$\mathrm{d}f=\mu g\mathrm{d}m \qquad \mathrm{d}M'=-\mu\frac{M}{L}\cdot gx\mathrm{d}x$

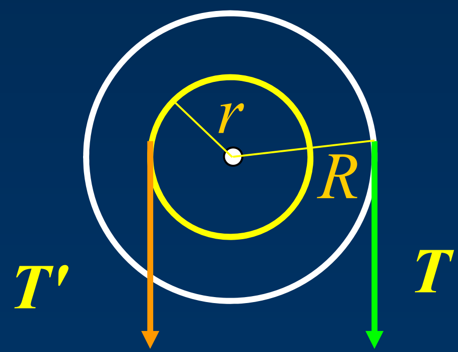
$$M'=\int_0^L-\mu\frac{M}{L}\cdot gx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mu MgL$$

- 在定轴转动中，力矩可用代数值进行计算

例如（力矩垂直纸面向内为正）







$$\sum M_i=TR-T'R \qquad \sum M_i=TR+T'R \qquad \sum M_i=TR-T'r$$

二. 转动定律 (Newton's Second Law for Rotation)

对第 i 个质元 $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$

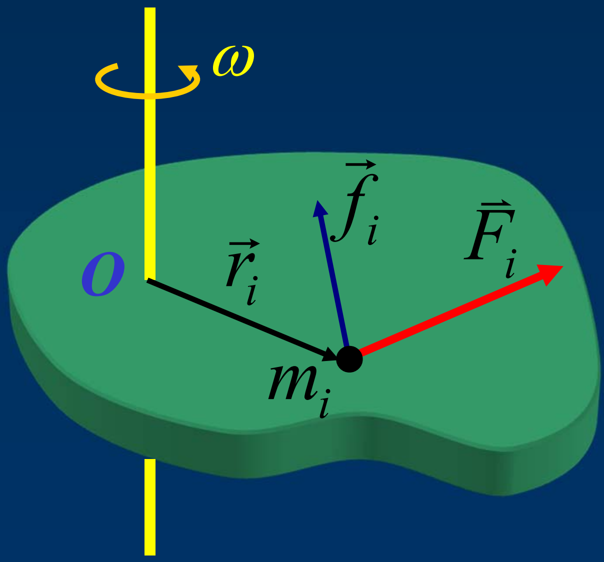
切线方向 $F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i a_{i\tau}$ $a_{i\tau} = r_i \beta$

同乘以 r_i $F_{i\tau} r_i + f_{i\tau} r_i = m_i a_{i\tau} r_i = m_i r_i^2 \beta$

对所有质元求和

$$\sum F_{i\tau} r_i + \underbrace{\cancel{\sum f_{i\tau} r_i}}_{\text{内力矩之和为0}} = (\underbrace{\sum m_i r_i^2}_{\text{转动惯量}J})\beta$$

$$\boxed{M = J\beta}$$ —— *转动定律*



$M=0$ —— 静止或匀角速度转动

$M \neq 0$ —— $\beta \propto M$

讨论

（1） β 正比于 M，力矩越大，刚体的 β 越大 $\boxed{M = J\beta}$

（2）转动惯量 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ $\vec{F} = m\vec{a}$

与牛顿定律比较：$M \to F, J \to m, \beta \to a$

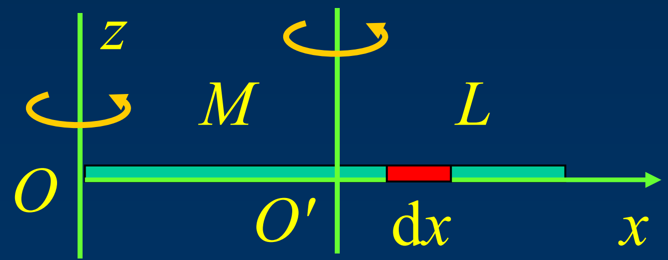
三. 转动惯量 (Rotational Inertia)

定义 $\boxed{J = \sum \Delta m_i r_i^2}$ ●质量连续分布：$\boxed{J = \int r^2 \mathrm{d}m}$

● 刚体的转动惯量涉及三个因素：(1) 总质量 (2) 质量分布 (3) 转轴的位置

(1) J 与刚体的总质量有关

例如两根等长的细木棒和细铁棒绕端点轴转动惯量



$$J = \int_0^L x^2 \lambda \mathrm{d}x = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} ML^2$$

$$J_{\mathrm{iron}} > J_{\mathrm{wood}}$$

(2) J 与转轴的位置有关

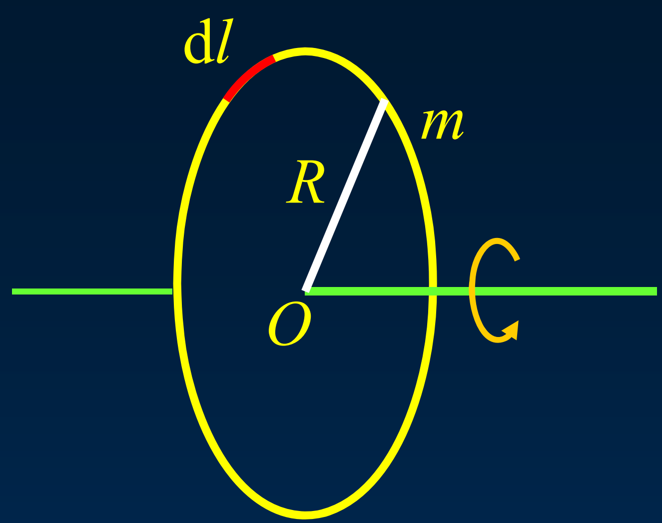
$$J = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{12} ML^2$$

(3) J 与质量分布有关

例如圆环绕中心轴旋转的转动惯量

$$J=\underline{\int_m R^2\mathrm{d}m}=\int_0^{2\pi R}R^2\lambda\mathrm{d}l$$

$$=R^2\lambda\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l=2\pi R^3\frac{m}{2\pi R}=mR^2$$

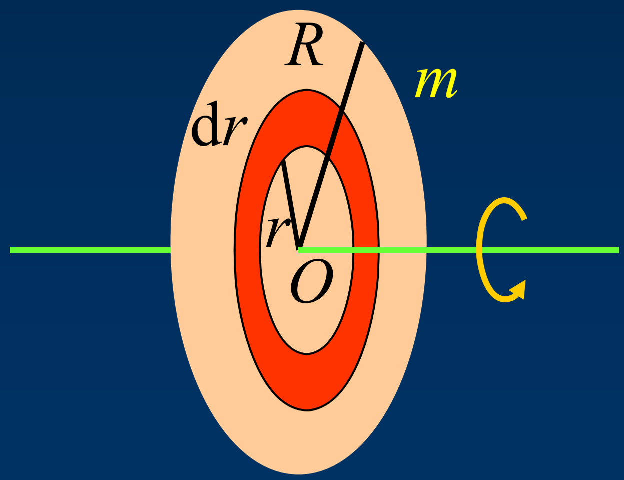


例如圆盘绕中心轴旋转的转动惯量

$$\mathrm{d}s=2\pi\, r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}s=\frac{m}{\pi R^2}2\pi\, r\mathrm{d}r=\frac{2mr}{R^2}\mathrm{d}r$$

$$J=\underline{\int_0^m r^2\mathrm{d}m}=\int_0^R\frac{2m}{R^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}mR^2$$



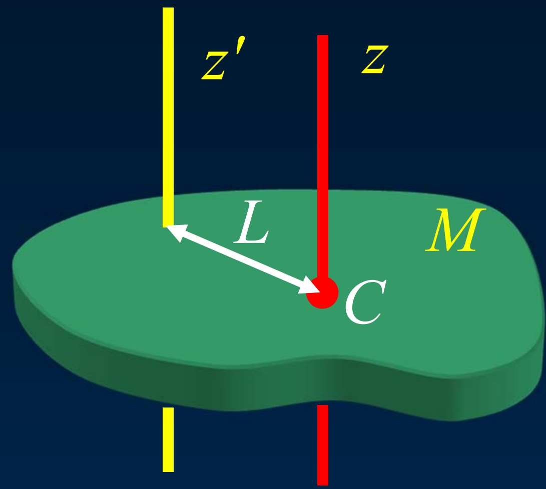
比较：……

➢ 平行轴定理及垂直轴定理

$$J_{z'} = J_z + ML^2$$ —— *平行轴定理* ***(Parallel-Axis Theorem)***

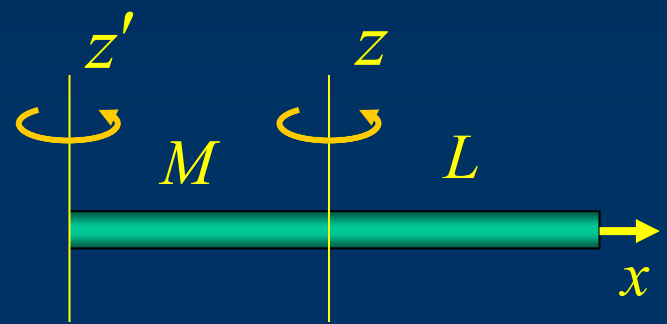
刚体绕任意轴

刚体绕通过质心的轴



例如:

$$J_{Z'} = J_Z + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$



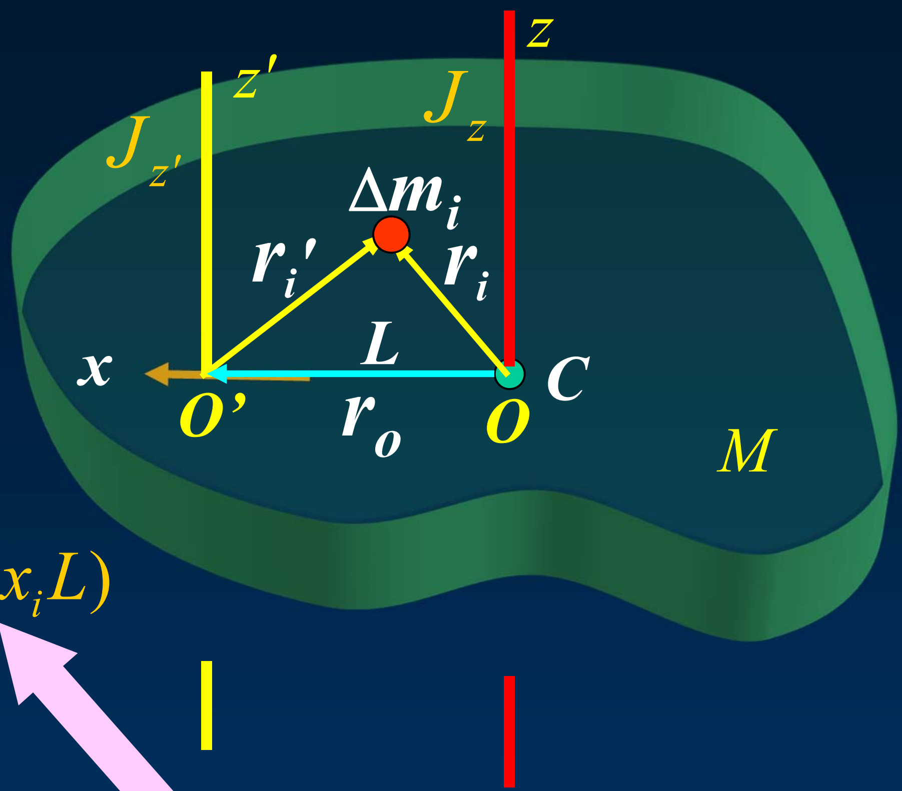
$$J_{Z'} = \int_0^L x^2 \lambda \mathrm{d}x = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}ML^2$$

$$J_Z = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{12}ML^2$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_o$$

$$r_i'^2 = r_i^2 + r_o^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_o$$

$$= r_i^2 + L^2 - 2x_i L$$



$$\sum_i \Delta m_i r_i'^2 = \sum_i \Delta m_i (r_i^2 + L^2 - 2x_i L)$$

$$= J_z + ML^2 - 2MLx_c$$

当x_c=*0*时，*Z*为通过质心的轴

$$\boxed{J_{z'} = J_z + ML^2}$$

刚体绕任意轴

刚体绕通过质心的轴

$$\sum(\Delta m_i x_i L) = \frac{M\sum(\Delta m_i x_i)L}{M} = Mx_C L$$

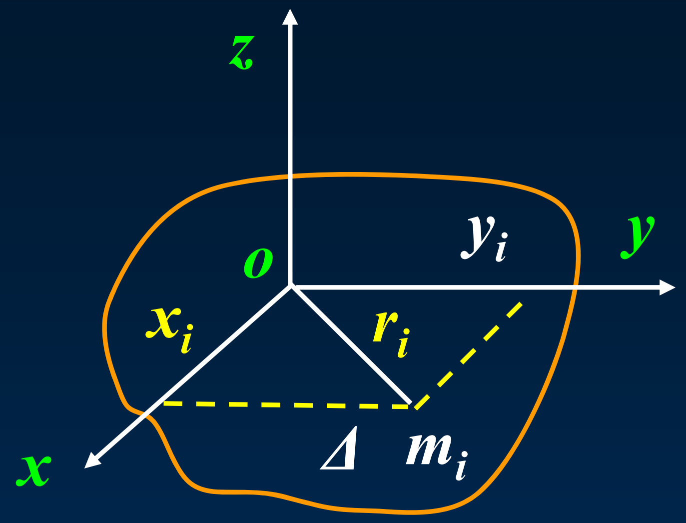
对薄平板刚体的垂直轴定理

$$J_z = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad （Z_i=0）$$

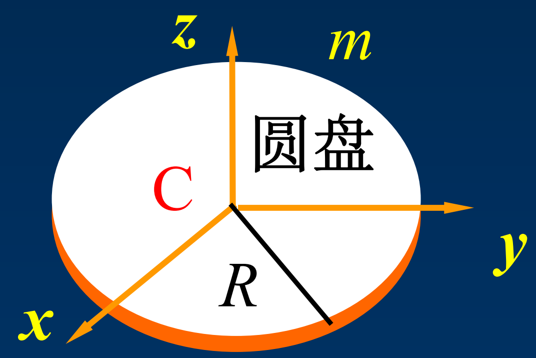
$$= \sum \Delta m_i x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2$$

$$= J_y + J_x$$

（仅对薄刚体板成立）



例：求对圆盘的一条直径的转动惯量



已知 $J_z = \frac{1}{2} mR^2$

垂直轴定理 $\begin{cases} J_z = J_x + J_y \\ J_x = J_y \end{cases} \Rightarrow J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2$