第三节 向量组的秩

一 向量组的极大无关组与向量组的秩

二 向量组的秩与矩阵秩的关系

作业

- 习题4.3
- 2，4，6，7

回顾

定义4.2.5 给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，对于任何一组数 $k_1, k_2,\cdots,k_s$，称向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 为向量组的一个**线性组合**. $k_1, k_2,\cdots,k_s$ 称为组合的**组合系数**.

如果向量β可以表示为

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

则称β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性表示**或**线性表出**

定理4.2.1 β可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性表出**

$\Longleftrightarrow$ 方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\beta$ 有解

回顾

定义4.2.6(等价向量组)　**设有两个向量组**

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r,\ \ B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s.$$

若两个向量组可以互相线性表示，则称这两向量组等价.

定义4. 2. 7(线性相关与线性无关)

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是一组$n$维向量,如果存在一组不全为零的常数$k_1, k_2, \cdots, k_s$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关

否则,称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关

回顾

定理4.2.2 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关(线性无关)

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$

有非零解(只有零解)

$\Leftrightarrow$ 矩阵$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s]$的秩小于$s$(等于$s$)

定理4.1.2 $A_{m\times n}$, $Ax=0$的解的情况只有以下两种：

$Ax=0$只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

$Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

矩阵秩的求法

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵B}$$

A的秩 等于 B中非零行的个数

一、向量组的极大无关组与向量组的秩

1、极大线性无关组

如果向量组U有一个部分组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) $\forall\alpha\in U$,均有$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$线性相关,

或α均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为 U 的一个极大线性无关组.

由定义可知：向量组与它的任一极大无关组等价。

一、向量组的极大无关组与向量组的秩

1、极大线性无关组

如果向量组U有一个部分组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) $\forall\alpha\in U$,均有$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$线性相关,

或α均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为 U 的一个极大线性无关组.

问题：U的极大线性无关组唯一吗？如果不唯一，那么U的任意两个极大线性无关组所含向量个数是否唯一?

定理4.3.1 设有两个向量组:

$$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s; \qquad (\mathrm{II}):\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r;$$

且(I)可由(II)线性表示,则

(1) 当$r<s$时,(I)线性相关;

(2) 当(I)线性无关时,必有$s\le r$.

(证明从略)

显然，（2）是（1）的逆否命题

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s]\ B=[\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r] \quad A=BC_{rs}$$

先考虑齐次线性方程组$C_{rs}x=0$有非零解

$$C_{rs}x_0=0, \quad x_0\ne 0$$

$$Ax_0=BC_{rs}x_0=0 \Rightarrow A的列必定线性相关$$

定理4.3.1 设有两个向量组:

$$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s; \qquad (\mathrm{II}):\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r;$$

且(I)可由(II)线性表示,则

(1) 当$r<s$时,(I)线性相关;

(2) 当(I)线性无关时,必有$s\le r$.

(证明从略)

显然，（2）是（1）的逆否命题

(1) 少的（II）表示多的（I），多的(I)一定线性相关;

(2) 线性无关的(I)可以被(II)表出，则线性无关的(I)个数一定不会多。

推论4.3.1 如果(I)、(II)都是线性无关组,且(I)与(II)等价,则(I)与(II)所含向量个数必相同. 即两个等价的线性无关组所含向量个数相同.

定理4.3.2 设(I)、(II)都是向量组U的极大无关组,则(I)与(II)所含向量个数必相同.

(由推论4.3.1的等价关系可证明)

问题：U的极大线性无关组唯一吗？如果不唯一，那么U的任意两个极大线性无关组所含向量个数是否唯一？

定义4.3.2（向量组的秩） **向量组U的极大无关组所含向量的个数称为U的秩(rank),记为*r*(U).**

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{线性无关} \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{线性相关} \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$$

定理4.3.3 设$r(U)=r$,则U中任何r个线性无关的向量所构成的向量组都可以作为U的极大无关组.

证明: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是U的一个线性无关组

$$\Downarrow$$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是U的一个极大无关组;

如果向量组U有一个部分组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) $\forall\alpha\in U$,均有$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$线性相关,

或α均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,

$\forall\beta\in U$, 则β可以由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性表出, 否则与r(U)=r矛盾。

定理4.3.5 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示,则$r(\mathrm{I}) \le r(\mathrm{II})$.

$\Uparrow$

定理4.3.1：(2) 线性无关的(I)可以被(II)表出，则线性无关的(I)个数一定不会多。

推论4.3.2 若(I)与(II)等价,则$r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{II})$.

$\Uparrow$

推论4.3.1 **如果(I)、(II)都是线性无关组,且(I)与(II)等价,则(I)与(II)所含向量个数必相同.即两个等价的线性无关组所含向量个数相同.**

P159例4.3.2 已知两个向量组

$$(\mathrm{I})\ \alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(3,0,1)^T,\alpha_3=(9,6,-7)^T$$

$$(\mathrm{II})\ \beta_1=(0,1,-1)^T,\beta_2=(a,2,1)^T,\beta_3=(b,1,0)^T$$

(1) 求向量组（I）的秩；

(2) 如果向量组（II）与向量组（I）有相同的秩，且 β_3 可由（I）线性表示，试求常数 a, b的值

解: (1) 显然，α_1，α_2线性无关，又由计算可得:

$$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$$

故α_1，α_2为（I）的极大线性无关组，所以$r(\mathrm{I})=2$。

P159例4.3.2 已知两个向量组

$$(\mathrm{I})\ \alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(3,0,1)^T,\alpha_3=(9,6,-7)^T$$

$$(\mathrm{II})\ \beta_1=(0,1,-1)^T,\beta_2=(a,2,1)^T,\beta_3=(b,1,0)^T$$

(1) 求向量组（I）的秩；

(2) 如果向量组（II）与向量组（I）有相同的秩，且 β_3 可由（I）线性表示，试求常数 a, b的值

解: (2)（II）与向量组（I）有相同的秩 ,且（II）有3个向量，则（II）一定线性相关，则

$$\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right]=0 \Rightarrow a=3b$$

$$\left[\alpha_1,\alpha_2,\beta_3\right]=0 \Rightarrow b=5$$

二、向量组的秩与矩阵的秩的关系

定义 称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

的列向量组的秩为 A 的**列秩**; 称 A 的行向量组的秩为**行秩**

2、矩阵的秩

定义

如果 $A=O$, 则称A的秩为零；如果 $A\neq O$ ， 则称A中非零子式的最高阶数为A的**秩**. 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$

$R(A)=r \Longleftrightarrow$ (1) $\exists\, D_r \neq 0$; (2) $\forall\, D_{r+1}=0$.

矩阵的秩和它的行秩、它的列秩之间有什么关系呢?

定理4.3.4 $\forall A,\quad r(A)=A$的列秩$=A$的行秩

向量组的秩等于它所构成的矩阵的秩;

(证明略)

例4.3.1 求向量组

$(\mathrm{I})\alpha_1=(1,-2,0,3)^T,\alpha_2=(2,-5,-3,6)^T,\alpha_3=(0,1,3,0)^T$

$\alpha_4=(2,-1,4,-7)^T,\alpha_5=(5,-8,1,2)^T$

的秩**及一个极大线性无关组，并用极大无关组线性表示该组中的其他向量。**

解：$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5]$

$$=\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow r(A)=3$$

$\alpha_1 \neq 0$

$\alpha_1,\alpha_2 \ \Rightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$

$$[\alpha_1,\alpha_2]\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

极大线性无关组:

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$

$$
\to
\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_4 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\to
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_4 &
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\
0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\to
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_4 &
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$$

例2 求下列向量组的秩：$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$

$\alpha_2=(2,3,4,8)^T,\alpha_3=(3,7,-1,0)^T\alpha_4=(0,1,2,0)^T.$

解 所求秩等于下列矩阵A的秩：

$$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$$

$$\text{由}A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&3&7&1\\3&4&-1&2\\4&8&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 所求秩为3.

例4 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

求向量组 A 的列向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{ERT} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 A 的列向量组的秩为 3.

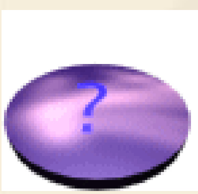
故极大线性无关组所含向量的个数为 3 个.

显然极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{ERT} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以可得 $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_4$, $\alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4$.

例4设 $\alpha_1 = (1 \quad 1 \quad 1), \alpha_2 = (1 \quad 2 \quad 3), \alpha_3 = (1 \quad 3 \quad t)$,



①当 t 为何值时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

②当 t 为何值时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

③当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将α_3用α_1,α_2线性表示.

例5 设α_1,α_2线性无关,试求向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$的秩.

解 由已知,β_1,β_2可由α_1,α_2线性表示,

又因 $\alpha_1=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2, \alpha_2=\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{2}\beta_2$

故两向量组等价,$\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2.$

定理4.3.6 ① 对$A_{m\times n}, B_{n\times p}$,有 $r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$

② 对$A_{m\times n}, B_{m\times n}$,有 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

证 ①:设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$,并设A按列分块为

$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$,则AB的第j列为

$$A\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}$$

$$=b_{1j}\alpha_1+b_{2j}\alpha_2+\cdots+b_{nj}\alpha_n,\quad j=1,2,\cdots,p$$

$\Rightarrow$ AB的列向量组可由A的列向量线性表示,

定理4.3.5 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示,则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$.

$\Rightarrow$ AB的列秩 $\le$ A的列秩,$\Rightarrow$ 即$r(AB)\le r(A)$.

$$r(AB)=r(AB)^T=r(B^TA^T)\le r(B^T)=r(B).$$

定理4.3.6 ① 对$A_{m\times n}, B_{n\times p}$,有 $r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$

② 对$A_{m\times n}, B_{m\times n}$,有 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

证（2）:

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n], B=[\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n],$$

$$A+B=[\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots\alpha_n+\beta_n]$$

A+B列向量组可以有A的列向量组的极大线性无关组与B的列向量组的极大线性无关组线性表出。

定理4.3.5 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示, 则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$.

$$r(A+B)\le r(A)+r(B)$$

例7 设矩阵$A_{n\times m}$、$B_{m\times n}$满足$AB=I_n$,其中I_n为n阶单位矩阵，且$n<m$.证明：B的列向量组线性无关.

证法1 设B按列分块为$B=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]$

设有$x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$

$$即 \quad [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=0$$

亦即$Bx=0$,其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 两端左乘A,得,

$ABx=0$. 因为$AB=I$,得$x=0$,

即$x_1=x_2=\cdots x_n=0,\Rightarrow \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.

证法2

要证$B_{m\times n}$的列向量组线性无关,

即相当于要证$r(B)=n$.

由已知 $AB=I$,$\Rightarrow$

$$n=r(I_n)=r(AB)\le r(B_{m\times n})\le \min(m,n)\le n$$

$$\Rightarrow r(B)=n.$$

相关知识点

① 一个向量组的极大无关组不是唯一的.

② 向量组与它的任一极大无关组等价.

③ 一个向量组的任意两个极大无关组都等价.

④ 一个向量组的任意两个极大无关组所含向量个数相同.

⑤ 一个线性无关的向量组的极大无关组就是其自身.

⑥ 一个线性相关的向量组的极大无关组是其真子集.

⑦ 零向量组构成的向量组不存在极大无关组.

⑧ 任何非零向量组必存在极大无关组.

⑨ 任何 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$如果线性无关，那么它就是$R^n$中的极大无关组.

⑩ 显然 n 维向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 就是R^n中的极大无关组.

⑾ 等价的向量组同秩.

课堂练习

1、向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，证明：

$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\ \beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$ 线性无关.

2、向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，证明：

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_r,\beta_2=\alpha_2+\alpha_r,\cdots,\beta_{r-1}=\alpha_{r-1}+\alpha_r,\beta_r=\alpha_r$

线性无关.

3、已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组

中线性相关的是（ *D* ）

A、$\alpha_1-\alpha_2$,$\alpha_2-\alpha_3$,$\alpha_3+\alpha_1$　　B、$\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3$,$\alpha_3+\alpha_1$

C、$\alpha_1-\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3$,$\alpha_3-\alpha_1$　　D、$\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2-\alpha_3$,$\alpha_3+\alpha_1$

4、设 $\alpha_1=(1\quad 1\quad 1),\alpha_2=(0\quad 2\quad 5),\ \alpha_3=(2\quad 4\quad 7)$,

试讨论 $A:\alpha_1,\alpha_2$ **及** $B:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **秩及线性相关性.**

解 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

所以 $R(A)=2\quad A:\alpha_1,\alpha_2$ **线性无关**

$R(B)=2\quad B:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性相关**

且 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$

5、已知 $\mathrm{I}:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \mathrm{II}:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ \mathrm{III}:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$,

设 $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{II})=3,R(\mathrm{III})=4$,

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ **线性无关.**

5、已知 $\mathrm{I}:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $\mathrm{II}:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, $\mathrm{III}:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$,

设 $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{II})=3, R(\mathrm{III})=4$,

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关.

分析: