

# 西安交通大学考试题 (A) 卷

课 程 线性代数与解析几何

学 院 \_\_\_\_\_

专业班号 \_\_\_\_\_

姓 名 \_\_\_\_\_

考试日期 2020 年 10 月 31 日

学号 \_\_\_\_\_ 期中 ☒

成 绩
--------

## 一、单项选择题（请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设  $A$  是  $n$  阶方阵，下列结论正确的是【   】
  - (A) 若  $A$  是上三角矩阵，则  $A$  是阶梯形矩阵；
  - (B) 若  $A$  是阶梯形矩阵，则  $A$  是上三角矩阵；
  - (C) 若  $A$  是上三角矩阵，则  $|A| \neq 0$ ；
  - (D) 若  $A$  是阶梯形矩阵，则  $|A| \neq 0$ ；
2. 设  $A, B, M, N$  是  $n$  阶方阵， $E$  是  $n$  阶单位阵，则下列结论正确的是【   】
  - (A)  $AB = O \Rightarrow A = O$  或  $B = O$ ；
  - (B)  $AM = AN \Rightarrow M = N$ ；
  - (C)  $A^2 - E = (A - E)(A + E)$ ；
  - (D)  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ；
3. 已知两平面  $-x + 2y - z + 1 = 0$ ,  $y + 3z - 1 = 0$ ，则【   】
  - (A) 两平面平行；
  - (B) 两平面重合；
  - (C) 两平面垂直；
  - (D) 两平面相交.
4. 设  $A, B$  是  $n$  阶方阵，则下列结论正确的【   】
  - (A) 若  $A, B$  都不是对称矩阵，则  $A + B$  也不是对称矩阵；
  - (B)  $A + A^T$ ,  $A - A^T$  都是对称矩阵；
  - (C) 若  $A$  是对称矩阵， $B$  不是对称矩阵，则  $A + B$  也不是对称矩阵；
  - (D) 若  $A$  是对称矩阵， $B$  不是对称矩阵，则  $A + B$  可能是对称矩阵，也可能不是对称矩阵；
5. 设  $A, B, C$  都是  $n$  阶方阵， $E$  是  $n$  阶单位阵，满足  $B = E + AB$ ,  $C = A + CA$ ，则  $B - C =$  【   】
  - (A)  $E$ ；
  - (B)  $-E$ ；
  - (C)  $A$ ；
  - (D)  $-A$ .

## 二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 四阶行列式  $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设  $A, B$  均为 3 阶方阵,  $A = (\alpha, \beta, \gamma)^T, B = (\alpha, \beta, \delta)^T$ , 已知  $|A| = 2, |B| = 3$ , 则  $|A + B| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 设  $\alpha = (1, 3, -1)^T, \beta = (2, 1, -1)^T$ , 矩阵  $A = \alpha\beta^T$ ,  $n$  为正整数,  $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 已知  $\|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\| = \sqrt{2}$ , 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ , 则  $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 平行于平面  $6x + y + 6z + 6 = 0$  且与三个坐标平面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题 (第 11-15 每题 12 分; 第 16 题 10 分, 共 70 分)

11. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = (-2A)^*$ , 求  $\det(B)$ .

12. 设  $A, B$  是  $n$  阶方阵,  $E$  是  $n$  阶单位阵, 且  $A + 2B = AB$ ,  
证明: (1)  $A - 2E$  可逆, 并求  $(A - 2E)^{-1}$ ; (2)  $AB = BA$ 。

13. 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A^{-1}XA = 2A + XA$ , 求  $X$ .

14. 已知线性方程组为 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$
, 其中  $a$  是常数, 写成矩阵形式

式为  $Ax = b$ , 称  $\bar{A} = [A:b]$  为该方程组的增广矩阵, 试讨论系数矩阵  $A$  和增广矩阵  $\bar{A}$  的秩。

15. 判断直线  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$  和直线  $L_2: x+1 = y-1 = z$  的位置关系;  
如果相交, 求出交点; 如果不相交, 求这两条直线的距离.

16. 设  $A$  是  $n$  阶非奇异方阵,  $\alpha$  是  $n \times 1$  矩阵,  $E$  是  $n$  阶单位阵,  $b$  是常数, 记

$$\text{分块矩阵 } P = \begin{bmatrix} E & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$$

(1) 计算  $PQ$ , 并化简;

(2) 证明: 方阵  $Q$  可逆的充分必要条件是  $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$ .