第三节 分块矩阵及其运算

一 矩阵的分块

二 分块矩阵的运算法则

三 应用

四 两种特殊的分块法

作业

- 习题2.3（A）
  1

课前复习

定义 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使得

$$AB=BA=E,$$

则称矩阵A是**可逆**的，并把矩阵B称为A的**逆矩阵**.

A的逆矩阵记作A^{-1}.

说明 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是**唯一**的.

定理1 若矩阵A可逆，则$|A|\neq 0.$

定理2 矩阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},$$

其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.

当$|A|=0$时，A称为**奇异矩阵**；

当$|A|\neq 0$时，A称为**非奇异矩阵**.

运算规律 （设A B均是n阶方阵）

1）若$A^{-1}\exists \Rightarrow A^{-1}\exists$，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

2）若$A^{-1}\exists,\lambda\neq 0 \Rightarrow (\lambda A)^{-1}\exists$,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$

3）若$A^{-1}\exists,B^{-1}\exists$，且$A,B$同阶， $\Rightarrow (AB)^{-1}\exists$,

且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

推广 $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

4）若$A^{-1}\exists \Rightarrow \left(A^T\right)^{-1}\exists$,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

5）若$A^{-1}\exists \Rightarrow \left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$

6）若$A^{-1}\exists$, $\Rightarrow \left(A^*\right)^{-1}\exists$, 且$\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*=\frac{A}{|A|}.$

7）其它的一些公式

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$A^* = |A|A^{-1}$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

$$A = |A|\left(A^*\right)^{-1}.$$

$$\left(A^*\right)^* = |A|^{n-2}A$$

$$(kA)^* = k^{n-1}A^*$$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

$$\left|(kA)^*\right| = k^{n(n-1)}|A|^{n-1}$$

8）一些规定

$$A^0 = E$$

$$A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k$$

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}$$

$$\left(A^\lambda\right)^\mu = A^{\lambda\mu}$$

(其中 $k\lambda\mu$为整数)

一、子矩阵

对于行数和列数较高的矩阵，有时仅需考虑由它的若干行与若干列相交处的元素按照原来的相对次序所构成的矩阵，称它为原矩阵的**子矩阵**。

例 $$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(-9) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

都是矩阵 A 的子矩阵.

前主子矩阵

对于方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 它的左上角的各阶方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \cdots,\ A$$

二、分块矩阵

对于行数和列数较高的矩阵，为了简化运算，经常采用**分块法**，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为**子块**，以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

例

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},\quad \text{即}\quad A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

注： 分块时首先满足 E, 再考虑对角或三角矩阵，然后考虑 O 以及其它的特殊矩阵.

按行分块或按列分块是两种特殊的分块形式.

二、分块矩阵的运算规则

分块矩阵的运算规律与普通矩阵规律运算相类似.

1、矩阵的加法

设 A 与 B 为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 为同型矩阵，则

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

2、数乘

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \lambda \in R, \text{则 } \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

3、乘法

设 $A_{m\times l}$，$B_{l\times n}$ 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数.

那么

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj} \ (i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r).$

4、转置

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的转置为先大转置，而后小转置.

5、分块对角矩阵

设 A 为 n 阶方阵，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块（这些非零子块必须为方阵），其余子块全为零，那么方阵 A 就称为**分块对角阵**.

即如 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，$A_i\left(i=1,2,\cdots s\right)$ 都是方阵.

$$\left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

都是**分块对角阵**.

分块对角矩阵具有下述性质:

1) $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$;

2) 若$|A_i| \neq 0$则有 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$;

3) 若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}$,

则有 $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_sB_s \end{pmatrix}$;

4) 若$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$, 则 $A^n=\begin{pmatrix} A_1{}^n & & \\ & \ddots & \\ & & A_s{}^n \end{pmatrix}$;

5) 若 $A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_s & & \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_s{}^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1{}^{-1} & & \end{pmatrix}$;

$A_i\,(i=1,2,\cdots s)$ 均为可逆方阵.

6、设$B=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s)$, 则

$$AB=A(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s)=(A\alpha_1 \quad A\alpha_2 \quad \cdots \quad A\alpha_s).$$

三、应用

例1 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$ 求 AB.

解 分块 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

则 $AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$

又 $A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},\quad \begin{cases} A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}, \\ A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \\ A_2^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，其中$a_i \neq 0$，求 A^{-1}.

解 $A=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=a_n^{-1}$,

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

例4 设 A,B 为 阶方阵， A^*,B^* 分别为 的伴随矩阵，

分块阵 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ ，则 $C^* =$ ( ) B

A. $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

分析 $C^* = |C|C^{-1} = |AB|\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = |A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} |A||B|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

例5 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$，求 $|A^8|, A^4$.

解 令 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，

$A^8=\begin{pmatrix}A_1^{\ 8}&O\\O&A_2^{\ 8}\end{pmatrix}$，所以 $|A^8|=|A_1^{\ 8}||A_2^{\ 8}|=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16}$

$A^4=\begin{pmatrix}A_1^{\ 4}&O\\O&A_2^{\ 4}\end{pmatrix}$，而 $A_1^{\ 2}=\begin{pmatrix}5^2&O\\O&5^2\end{pmatrix}, \Rightarrow A_1^{\ 4}=\begin{pmatrix}5^4&O\\O&5^4\end{pmatrix}$，

$A_2=2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$A_2^{\ 4}=2^4\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^4&0\\2^6&2^4\end{pmatrix}$，所以$A$可求.

四、两种特殊的分块法--按行分块与按列分块.

$m\times n$ 矩阵 A 有 m 个行，称为矩阵 A 的 m 个**行向量**.

若第 i 行记作 $\alpha_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ ，则矩阵 A 便记为

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}$$

$m\times n$ 矩阵 A 有 n 个列，称为矩阵 A 的 n 个**列向量**.

若第 j 列记作 $\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ ，则矩阵 A 便记为

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$$

对于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

若记

$$A = \left(a_{ij}\right), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

其中 A 称为系数矩阵， x 称为未知数向量，

b 称为常数项向量，B 称为增广矩阵.

按分块矩阵的记法，可记 $B = \left(A\ b\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b\right)$

利用矩阵的乘法，此方程组可记作 $Ax = b$

如果把系数矩阵按行分成 m 块，则线性方程组 $Ax=b$

可记作
$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

这就相当于把每个方程 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

记作 $\alpha_i^T x = b_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

如果把系数矩阵按列分成 n 块，则与 A 相乘的 x 相应

的应分为 n 块，从而可记作
$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$

五、小结

在矩阵理论的研究中,矩阵的分块是一种最基本,最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似:

(1) 加法　同型矩阵，采同相同的分块法;

(2) 数乘　数 k 乘矩阵 A 需 k 乘 A 的每一个子块;

(3) 乘法　若 A 与 B 相乘，需 A 的列的划分与 B 的行的划分相一致.

(4) 转置

(5) 分块对角阵的行列式与逆阵

$$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{pmatrix};$$

$$A^{n} = \begin{pmatrix} A_1^{n} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{n} \end{pmatrix};$$

(6) 两种特殊的分块法：按行分块与按列分块.

六、思考题

设 $A=\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$,其中$B$和$C$都是可逆方阵,

证明A可逆,并求A^{-1}.

证　由B,C可逆, 有$|A|=|B||C|\neq 0$, 得A可逆.

设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} BX+DW=E, \\ BZ+DY=O, \\ CW=O, \\ CY=E. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=B^{-1}, \\ Y=C^{-1}, \\ Z=-B^{-1}DC^{-1}, \\ W=O. \end{cases}$$

因此　$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 1^3 \\ 3^3 & 4^3 & 1^3 & 2^3 \\ 4^3 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix}$$

$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)\begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 3^3 & 4^3 & 1^3 \\ 1 & 4^3 & 1^3 & 2^3 \\ 1 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix}$$

$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)\begin{vmatrix} 3^3-2^3 & 4^3-3^3 & 1^3-4^3 \\ 4^3-2^3 & 1^3-3^3 & 2^3-4^3 \\ 1^3-2^3 & 2^3-3^3 & 3^3-4^3 \end{vmatrix}$$

$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)\begin{vmatrix} 3^3-2^3+1^3-4^3 & 4^3-3^3 & 1^3-4^3 \\ 4^3-2^3+2^3-4^3 & 1^3-3^3 & 2^3-4^3 \\ 1^3-2^3+3^3-4^3 & 2^3-3^3 & 3^3-4^3 \end{vmatrix}$$

$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)(3^3-2^3+1^3-4^3)\begin{vmatrix} 1 & 4^3-3^3 & 1^3-4^3 \\ 0 & 1^3-3^3 & 2^3-4^3 \\ 1 & 2^3-3^3 & 3^3-4^3 \end{vmatrix}$$

$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)(3^3-2^3+1^3-4^3)\begin{vmatrix} 1 & 4^3-3^3 & 1^3-4^3 \\ 0 & 1^3-3^3 & 2^3-4^3 \\ 0 & 2^3-4^3 & 3^3-1^3 \end{vmatrix}$$

$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)(3^3-2^3+1^3-4^3)\begin{vmatrix} 1^3-3^3 & 2^3-4^3 \\ 2^3-4^3 & 3^3-1^3 \end{vmatrix}$$