

实验6 非线性方程（组）求解

一、实验目的

1. 熟悉用matlab软件求解非线性方程（组）的命令函数.
2. 掌握求非线性近似解的常用数值方法——迭代法.
3. 了解分叉与混沌现象.

二、实验内容

1. 用matlab求方程的解.
2. 用matlab求方程组的解.
3. 二分法
4. 迭代法：牛顿切线迭代法，弦截法
5. 了解分叉与混沌现象.

1.用matlab软件求方程的解

Matlab软件求方程 $f(x)=0$ 近似解的命令是**fzero**,具体用法为:

(1) 建立函数: $f=@(x)x$ %建立匿名函数 或 $f=inline('表达式')$

(2) 求函数零点: $c=fzero(f,[a,b])$ %求函数在区间内的零点

$c=fzero(f,x0)$ %求函数 f 在 $x0$ 附近的零点

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

$roots(c)$

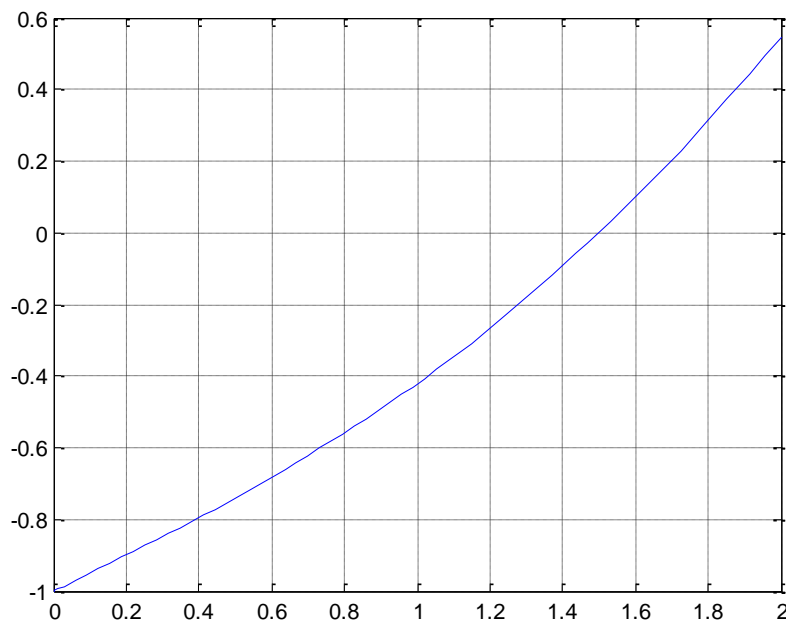
$$c = [a_n, \cdots, a_1, a_0]$$

示例1 求开普勒方程的近似解

$$x = q \sin x + a (0 < q < 1, a \text{ 为常数})$$

$$q = 0.5, a = 1$$

- $f=@(x)x-0.5*\sin(x)-1$ %建立匿名函数;
- $fplot(f,[0,2])$
- `grid`



- `f=@(x)x-0.5*sin(x)-1%`建立匿名函数;
- `c=fzero(f,[1,2])`

`c =`

1.4987

示例2 求五次曲线 $y=x^5$ 与直线 $y=1-x$ 交点的横坐标.

$$f(x) = x^5 + x - 1 \quad f(0)f(1) < 0 \quad [0,1] \text{内必有实根}$$

$$f' = 5x^4 + 1 > 0 \quad [0,1] \text{内必有唯一实根}$$

`f=inline('x^5+x-1');`

`c=fzero(f,[0,1])`

`c =`

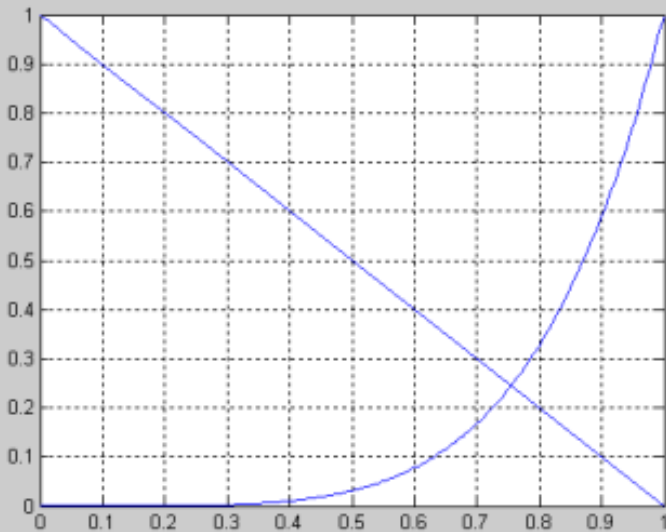
0.75487766624669

`c=fzero(f,0.8)`

`>>`

`c =`

0.75487766624669



```
c=roots([1,0,0,0,1,-1])
```

```
>>
```

```
C =
```

```
-0.87743883312335 + 0.74486176661974i
```

```
-0.87743883312335 - 0.74486176661974i
```

```
0.500000000000000 + 0.86602540378444i
```

```
0.500000000000000 - 0.86602540378444i
```

```
0.75487766624669
```

示例3 求螺旋线 $x = 4\cos\theta, y = 4\sin\theta, z = \theta, 0 \leq \theta \leq 8\pi$
与平面 $x + y + 0.5z - 2 = 0$ 的交点.

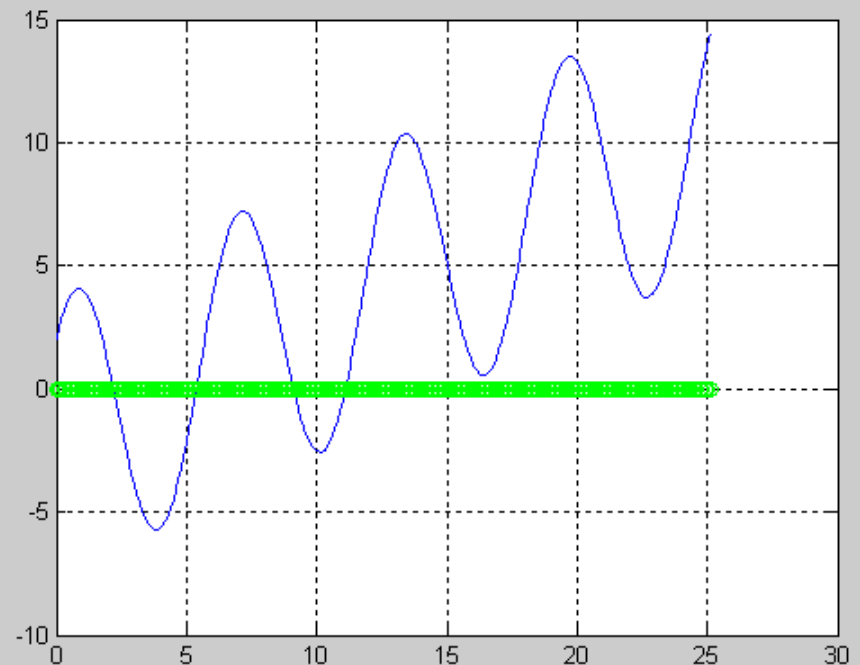
$$f = 4\cos\theta + 4\sin\theta + 0.5\theta - 2$$

$$f(0) = 2 > 0 \quad f(\pi) < 0$$

```
f=inline('4*cos(x)+4*sin(x)+0.5*x-2');  
c=fzero(f,[0,pi])
```

```
>>  
C =  
2.19606411841355
```

```
x=0:0.1:8*pi  
f1=4*cos(x)+4*sin(x)+0.5*x-2;  
f2=0;  
plot(x,f1,x,f2, 'go' ),grid
```



用matlab求方程组的解

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Matlab软件求上述非线性方程组的数值解命令是：

$$[x, fval] = fsolve(fun, x0)$$

fsolve: 求得的解是最接近初始值的解,

fun: M-文件或内联函数,

x0: 迭代初值,

x: 返回的解向量,

fval: 返回解向量处对应的函数值(向量),

示例3 求方程组
$$\begin{cases} \sin x_1 + x_2 + x_3^2 e^{x_1} - 4 = 0 \\ x_1 + x_2 x_3 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 = 0 \end{cases}$$
 的近似解.

```
[x,fval]=fsolve(fun,x0)
```

```
function f=group(x)
f=[sin(x(1))+x(2)
+x(3)^2*exp(x(1))-4;
x(1)+x(2)*x(3);
x(1)*x(2)*x(3)];
```

```
[x,fval]=fsolve( 'group' ,[1,1,1])
```

x =

Columns 1 through 2

0.00046164326023 -0.00023082156767

Column 3

1.99948065120099

fval =

1.0e-006 *

-0.26357352345130

0.12000180119623

-0.21305910169336

```
f=inline('[sin(x(1))+x(2)+  
x(3)^2*exp(x(1))-4;  
x(1)+x(2)*x(3);  
x(1)*x(2)*x(3)]');  
[x,fval]=fsolve(f,[1,1,1])
```

x =

Columns 1 through 2

0.00046164326023 -0.00023082156767

Column 3

1.99948065120099

fval =

1.0e-006 *

-0.26357352345130

0.12000180119623

-0.21305910169336

fzero命令虽然简单，但从科学的态度出发，我们应该充分了解“隐藏”在该命令背后的原理、算法以及实现过程。

因此，掌握求解一般非线性方程近似根的常用数值方法，熟悉相关原理等对从事科学研究是十分必要的。

基本理论知识

1. 零点定理

2. 压缩映射原理（证明参看工科数学分析上册第77页）

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，若满足以下两个条件：

(1) $\forall x \in [a,b]$, 有 $f(x) \in [a,b]$;

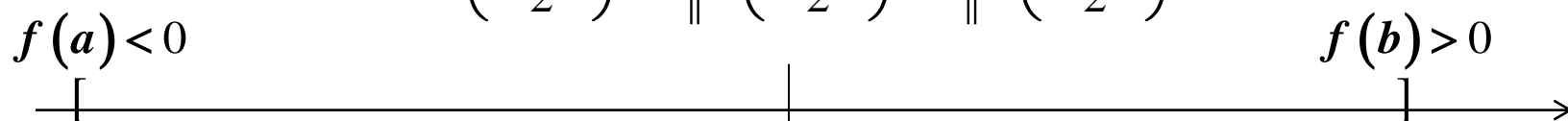
(2) $\exists L > 0$, 有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $x, y \in [a,b]$

则当 $L < 1$ 时， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的不动点。即 $f(x)=x$ 有唯一的根。

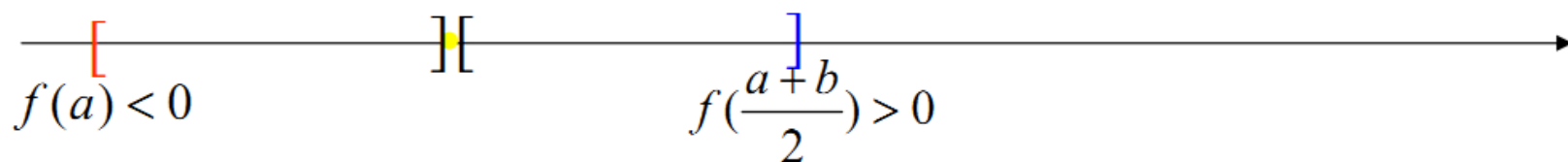
2.二分法求方程的近似解

零点定理 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x) = 0$ 在区间内至少有一个根。

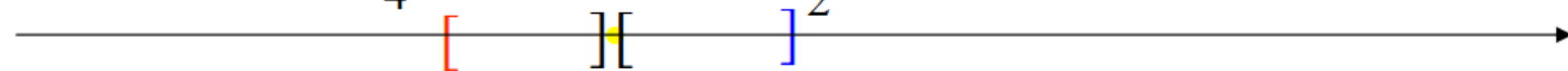
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \parallel f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \parallel f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$$



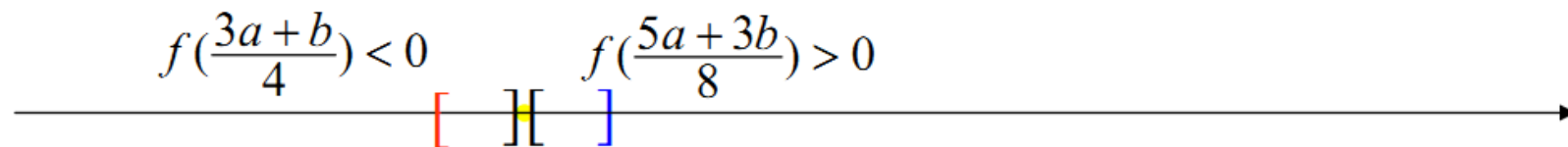
$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) = 0 \parallel f\left(\frac{3a+b}{4}\right) > 0 \parallel f\left(\frac{3a+b}{4}\right) < 0$$

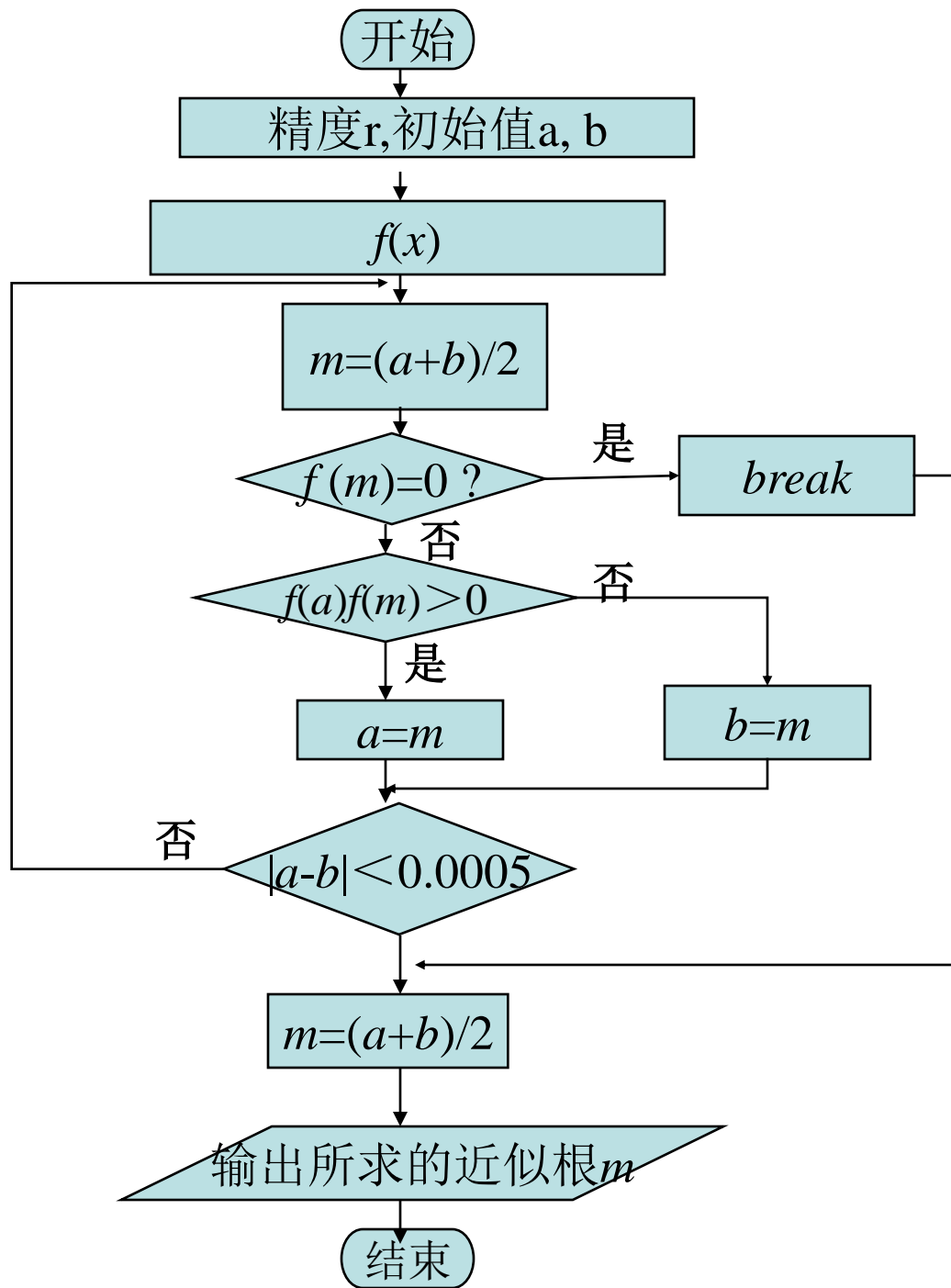


$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) < 0 \parallel f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$$



$$f\left(\frac{5a+3b}{8}\right) = 0 \parallel f\left(\frac{5a+3b}{8}\right) < 0 \parallel f\left(\frac{5a+3b}{8}\right) > 0$$





示例4 用二分法求方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 的近似解.

在 $[0,1]$ 上函数至少有一个零点.

```
a=0;b=1;
f=inline('x.^5+x-1');
k=1;
while abs(a-b)>0.0001
m=(a+b)/2;
if f(m)==0
    break;
elseif f(a)*f(m)>0
    a=m;
else
    b=m;
end
k=k+1;
end
k
m
```

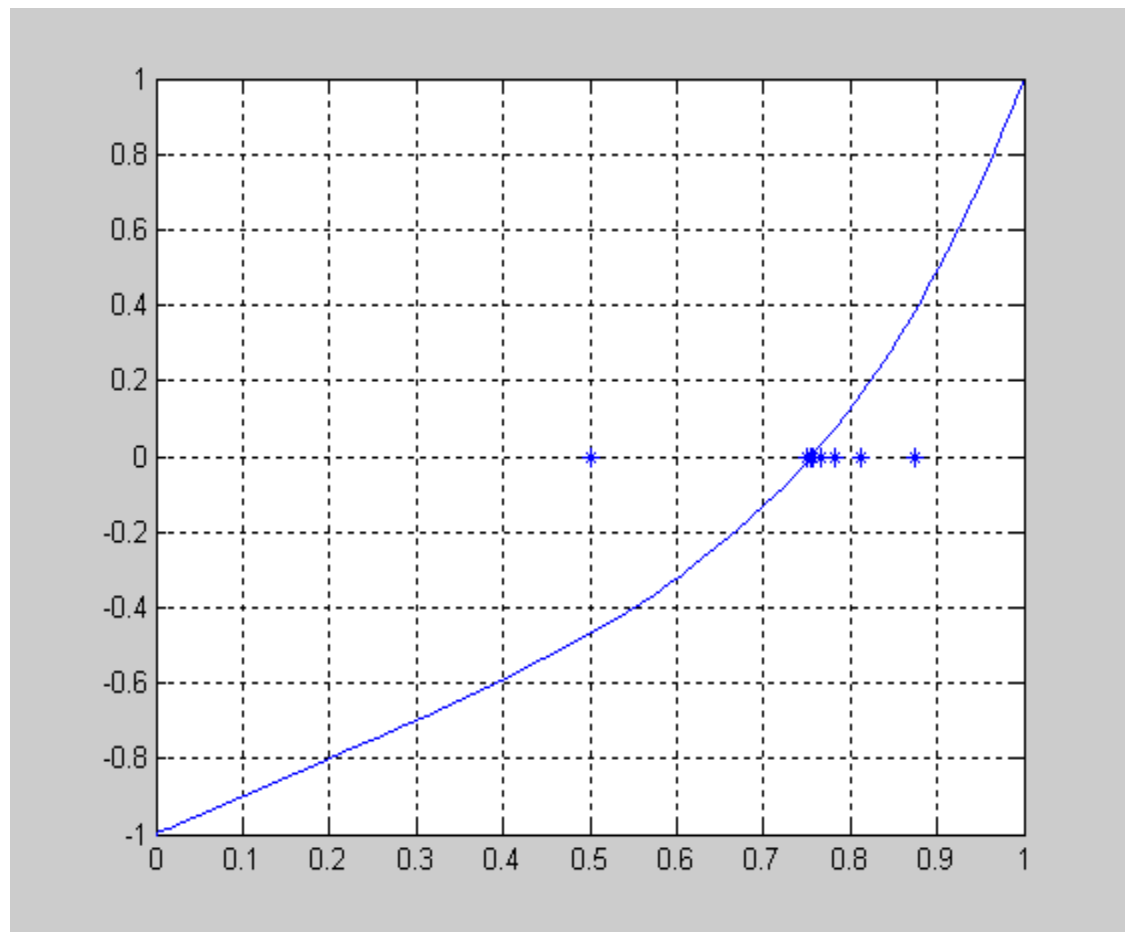
```
>>
k =

    15

m =

0.75482177734375
```

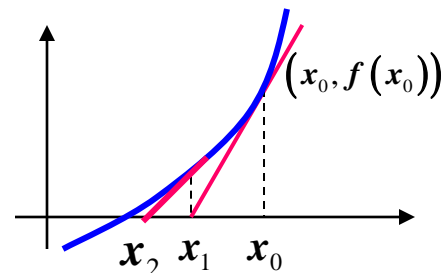
```
a=0;b=1;  
f=inline('x.^5+x-1');  
fplot(f,[0,1]);grid;  
hold on  
while abs(a-b)>0.0001  
    m=(a+b)/2;  
    if f(m)==0  
        break;  
    elseif f(a)*f(m)>0  
        a=m;  
    else  
        b=m;  
    end  
    plot(m,0,'*')  
end
```



二分法使用简单，迭代过程中只需计算函数值，只要求函数连续即可。
但缺点是收敛速度较慢。

3. 牛顿切线迭代法

设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, $x_0 \in [a, b]$ 为根 x^* 的近似值, 以 x_0 为初始点, 看能否找到比 x_0 更近似于 x^* 的点.



$$y \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{let } y = 0, \text{ then } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$y \approx f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

$$\text{let } y = 0, \text{ then } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

迭代格式:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

迭代函数:
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

牛顿迭代法的收敛性

定理 对于方程 $f(x) = 0$ ，若存在区间 $[a, b]$ ，使得

$$(1) f(a)f(b) < 0;$$

$$(2) f''(x) \text{ 在区间 } [a, b] \text{ 上连续且符号一致};$$

$$(3) \text{ 对于任意的 } x \in [a, b], f'(x) \neq 0;$$

则当迭代初始值 $x_0 \in [a, b]$ ，且 $f(x_0)$ 与 $f''(x_0)$ 保持同号时，

牛顿迭代法产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程在区间 $[a, b]$ 上的唯一解 x^* 。

牛顿迭代法的误差

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x^*) = f'(\xi_n)(x_n - x^*), \xi_n \text{ 介于 } x_n \text{ 与 } x^* \text{ 之间},$$

$$|x_n - x^*| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi_n)|}, \quad \xi_n \in (a, b) \qquad |x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$$

$$m = \min \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

$$|f(x_n)| < m\varepsilon$$

示例5 用牛顿切线法求方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 的近似解.

```
f=inline('x^5+x-1');  
d1f=inline('5*x^4+1');  
d2f=inline('20*x^3');  
a=0;b=1;  
if f(a)*d2f(a)>0  
    x0=a;  
else  
    x0=b;  
end  
k=1;  
while abs(f(x0))>0.00005  
    x1=x0-f(x0)/d1f(x0);  
    k=k+1  
    x0=x1  
end
```

```
k = 1  
x0 =0.8333333333333333
```

```
k = 2  
x0 =0.76438211566011
```

```
k =3  
x0 =0.75502486723184
```

```
k = 4  
x0 =0.75487770177013
```


4.一般迭代法

设方程 $f(x)=0$ 有实根，若能将方程等价地转化为 $x=g(x)$,

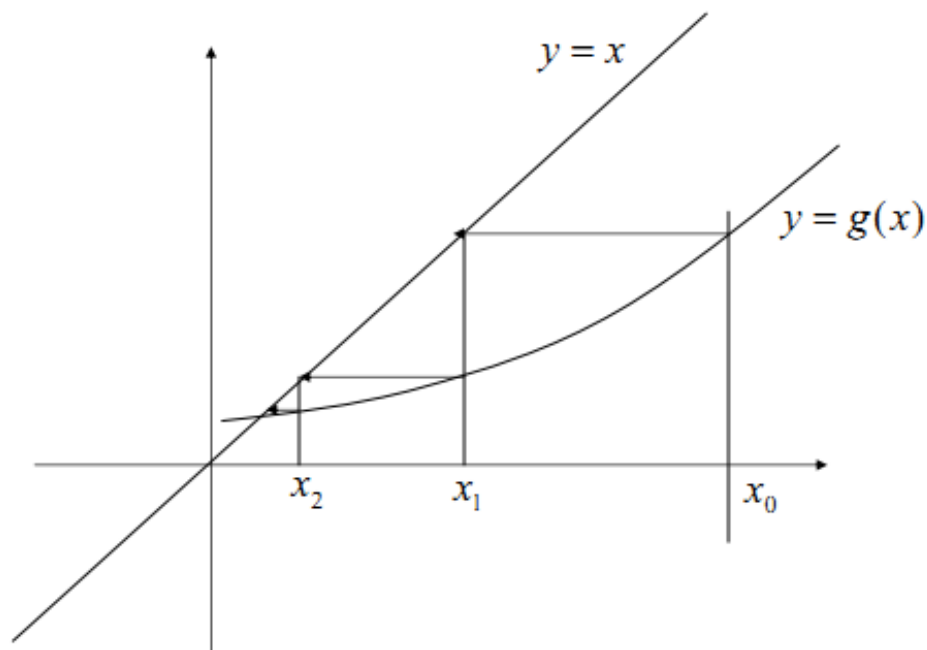
$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad \cdots, x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

得到一个序列 $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ ，称为由迭代函数 $g(x)$ 产生的迭代序列。

x_0 称为迭代初始值。

若该迭代序列收敛，则它的极限就是方程 $f(x)=0$ 的一个根。

x_k 称为方程根的 k 次近似值。使得迭代法收敛的初始值的取值范围称为迭代收敛域。



示例5 求方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的近似解.

$$x_1 = 1.3027756377$$

$$x_2 = -2.3027756377$$

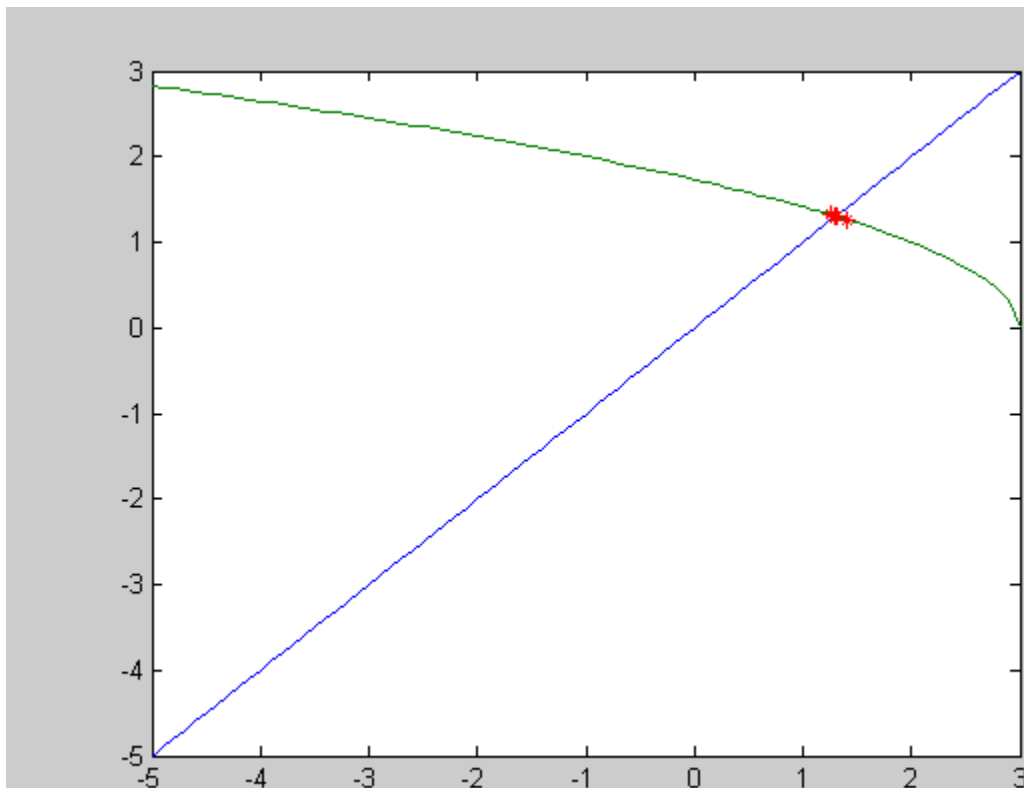
$$x = 3 - x^2$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x = \sqrt{3 - x}$$

$$x_{k+1} = \sqrt{3 - x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

```
x=-5:0.1:3;  
y1=x;  
y2=sqrt(3-x);  
plot(x,y1,x,y2)  
hold on  
x0=1;x1=sqrt(3-x0);s=[];ss=[];  
while abs(x1-x0)>0.000001  
    x0=x1;s=[s,x0];  
    x1=sqrt(3-x0);ss=[ss,x1];  
    plot(s,ss,'r*')  
    pause(0.5)  
end
```



一般迭代法的收敛性

定理： 设连续函数 $g(x)$ 满足以下两个条件：

- (1) When $x \in [a, b]$, then $g(x) \in [a, b]$;
- (2) $\forall x \in [a, b], \exists 0 < L < 1$, s.t. $|g'(x)| \leq L < 1$.

则方程 $x=g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一的根 x^* ，且对任意的初始点 $x_0 \in [a, b]$

$x_{k+1} = g(x_k) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 均收敛于 x^* .

实验7 Logistic方程与混沌

一、实验目的

通过对Logistic方程解的问题的讨论，经过实验，了解分岔与混沌的概念。

二、实验内容

- 1.建立生物种群的生长模型
- 2.通过数值实验观察参数变化对迭代数列的影响；
- 3.介绍混沌的概念。

- 在生物学中，有一个刻画生物种群个体总量增长情况的著名的方程——逻辑斯谛（Logistic）方程：

第 n 代的个体总数 M_n ，经过繁殖后第 $n+1$ 代的个体总数为 M_{n+1} ，

繁殖规律：（1）种群的繁殖与规模成正比；

（2）资源一定的情况下，种群的繁殖与容纳量成正比。

$$M_{n+1} = KM_n(M - M_n)(n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\frac{M_{n+1}}{M} = KM \frac{M_n}{M} \left(1 - \frac{M_n}{M}\right)$$

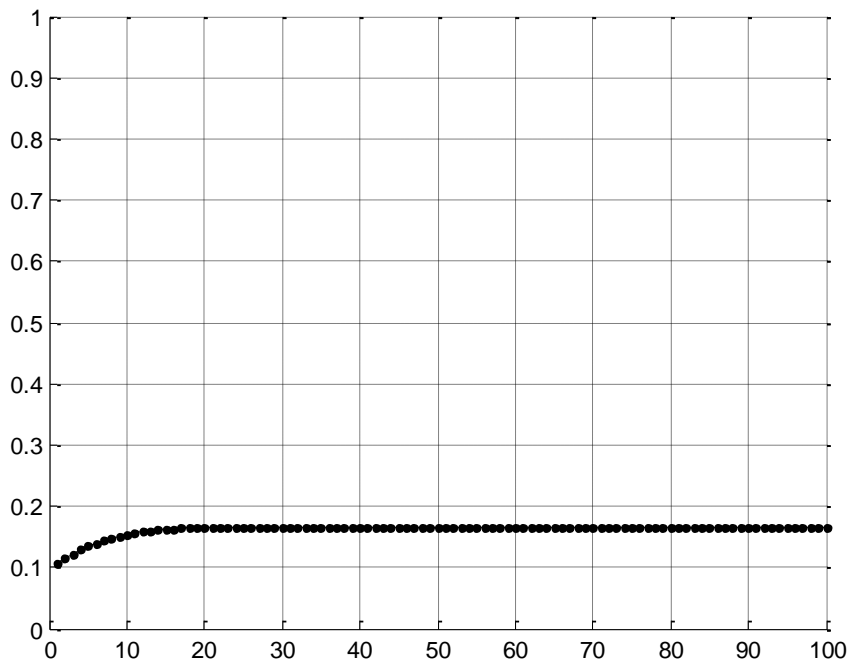
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad r \text{ 为比例系数}$$

这个数列的极限是否存在？ 初值 $x_0 = 0.1$

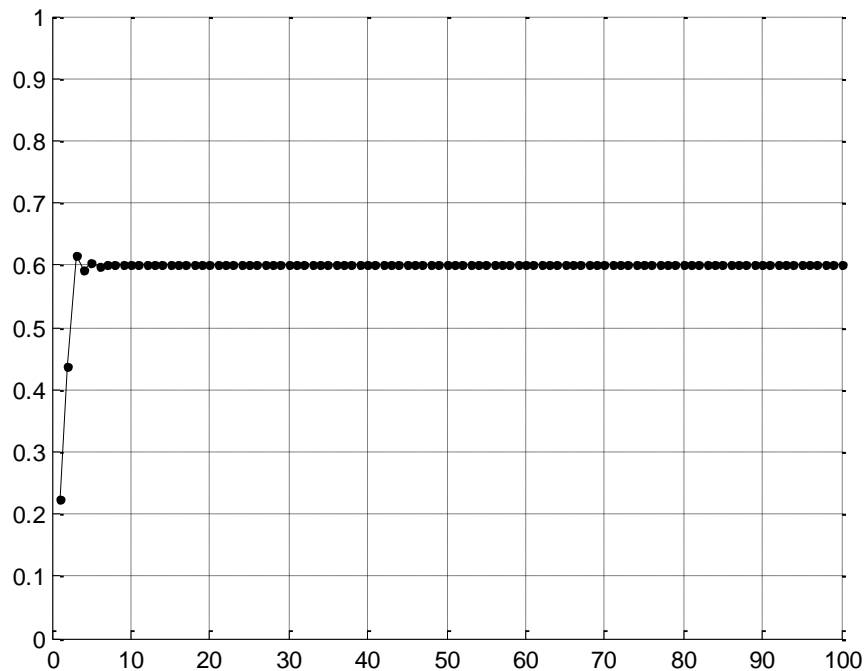
1. 当参数 r 取值分别为1.2, 2.5, 3.2, 3.5, 3.8时

考察其迭代序列的收敛情况

```
clc;clf;  
x=0.1; y=[ ];  
r=1.2;           %改变取值得到相应的图形  
hold on  
axis([0 100 0 1])  
for i=1:100  
    x=r*x*(1-x);y=[y,x];  
    plot(i,x,'k.','markersize',10)  
    fprintf('x(%d)=%.10f\n',i,x);  
end  
t=1:100;  
plot(t,y,'k-');  
grid
```

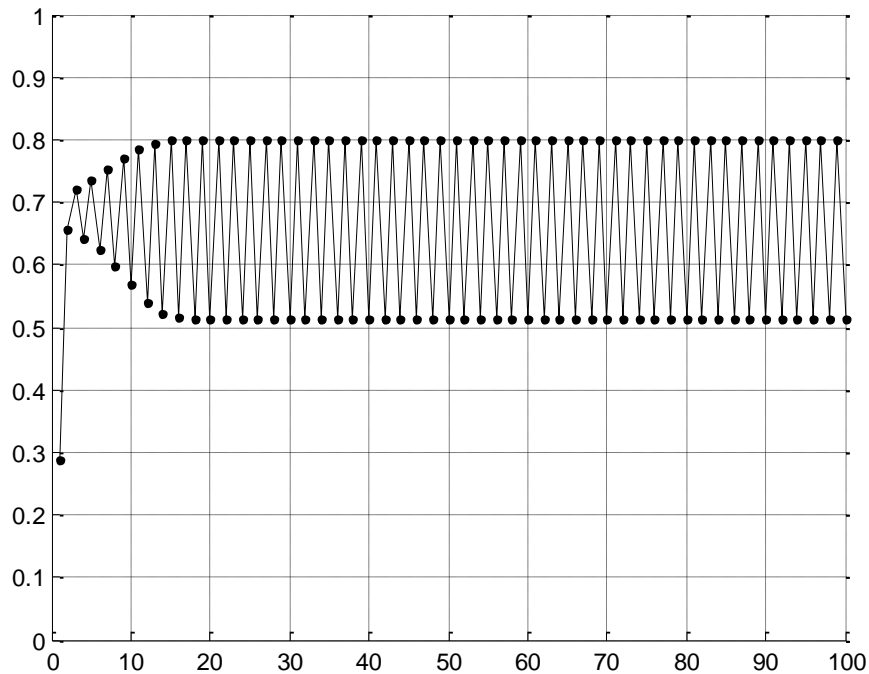


$$r = 1.2, x_0 = 0.1$$

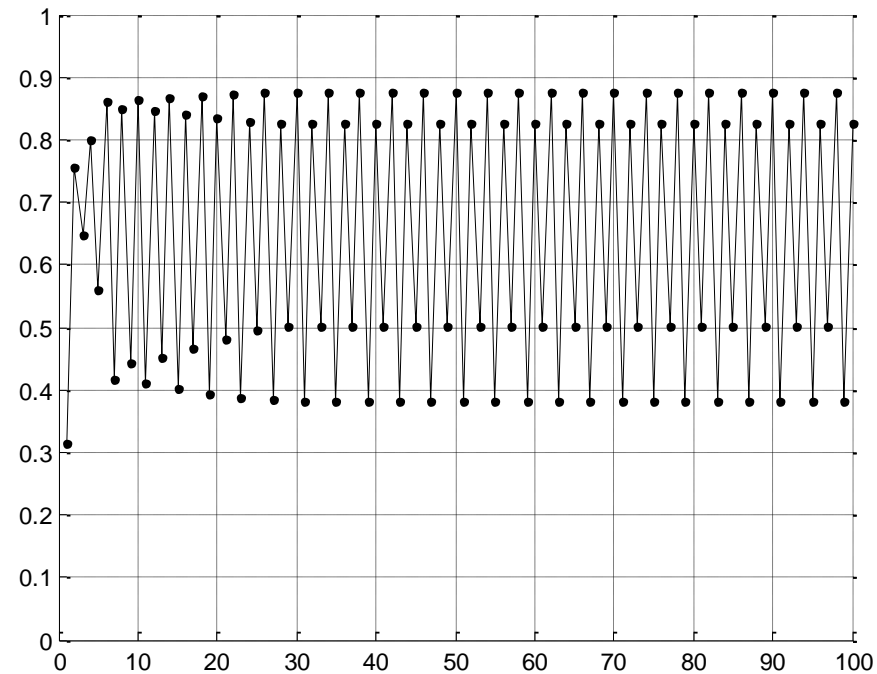


$$r = 2.5, x_0 = 0.1$$

结论： 当比例系数 r 为1和3之间的任意一个值时，按照上面的迭代格式产生的迭代序列是收敛的，且收敛结果与迭代初值无关。

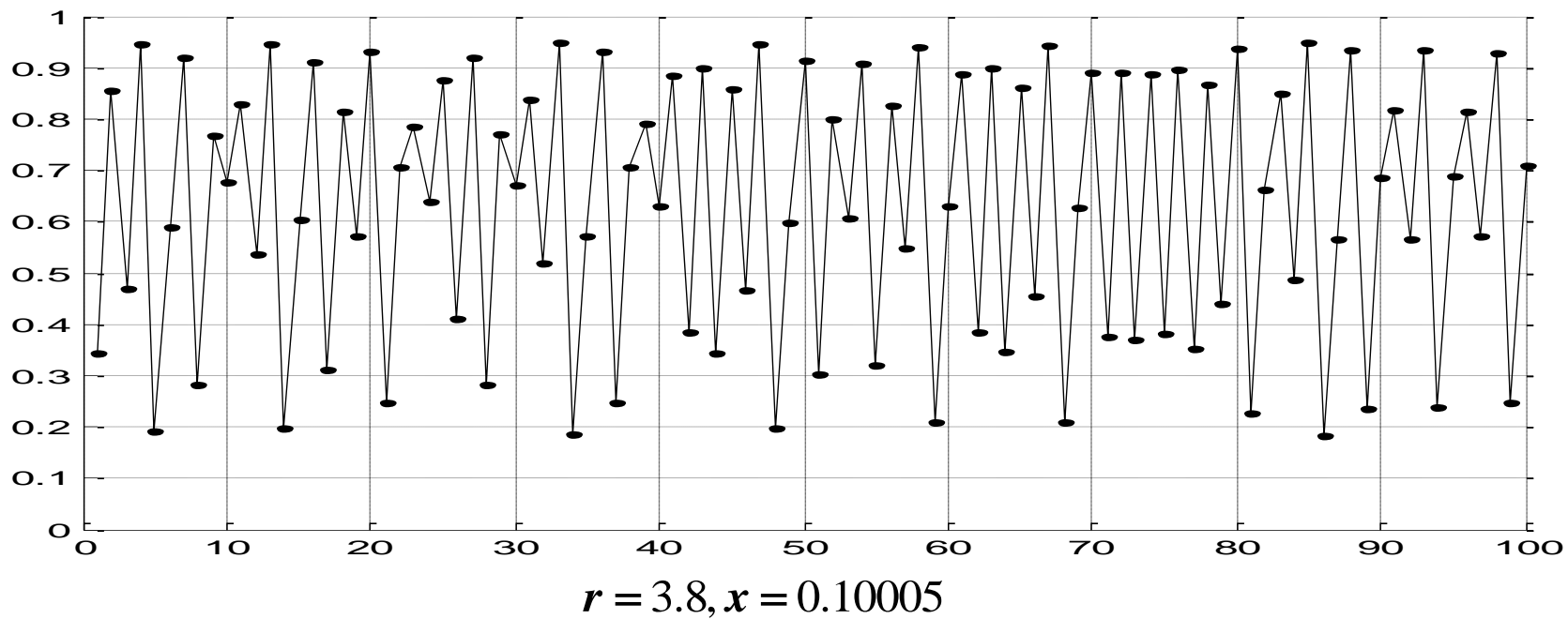
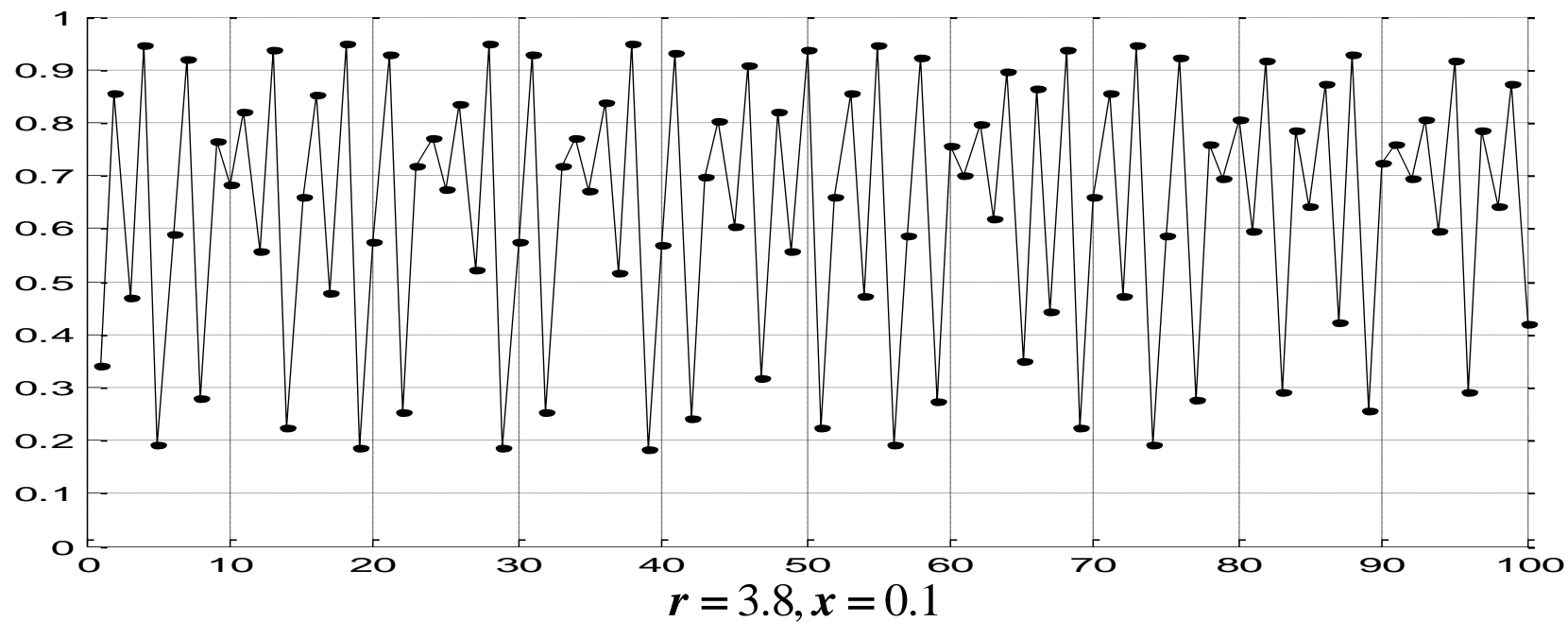


$$r = 3.2, x_0 = 0.1$$



$$r = 3.5, x_0 = 0.1$$

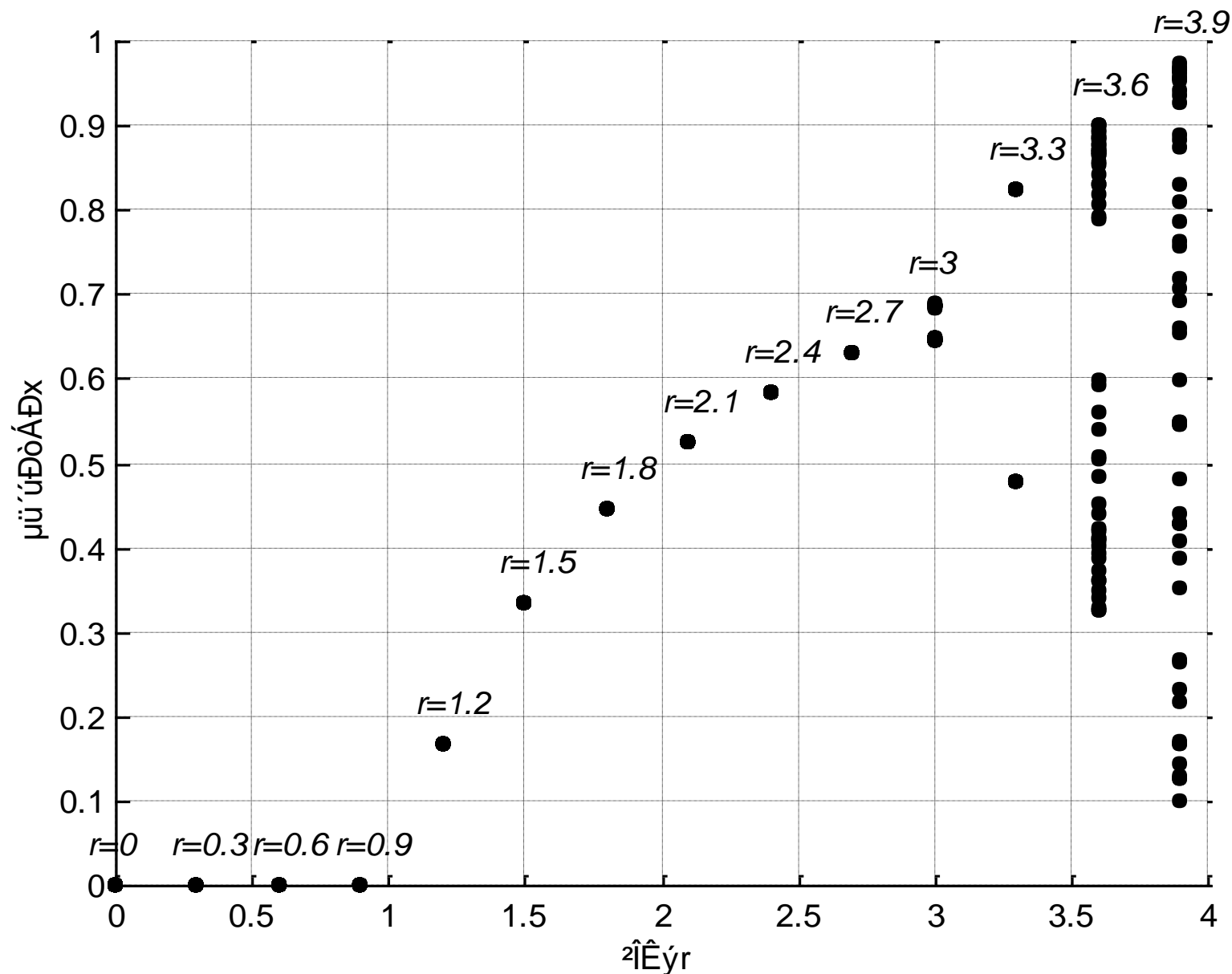
结论： 当比例系数 $r=3.2$ 时，迭代数列周期性的取两个值，相应的轨道由一支分为两支；当 $r=3.5$ 时，迭代数列周期性地取四个值，相应的轨道由一支分为两支，再由两支分为四支，改变初值，观察分布是否会发生变化？



结论： 在 $r=3.8$ 不变的情况下，对初值没增加0.0005，分布会发生很大的改变，这就是“蝴蝶效应”，数学上叫“混沌”。由于在很多实际问题中，方程的系数 r 是一个与环境因素有关的参数，在某些特定条件下，种群的繁殖会出现难以预料的混沌线性，其发展趋势会失去控制，甚至会出现“生物灾难”。

按迭代格式迭代150步，产生14个迭代序列，取这14个迭代序列的后50个迭代值，画在同一个坐标面 rox 上。

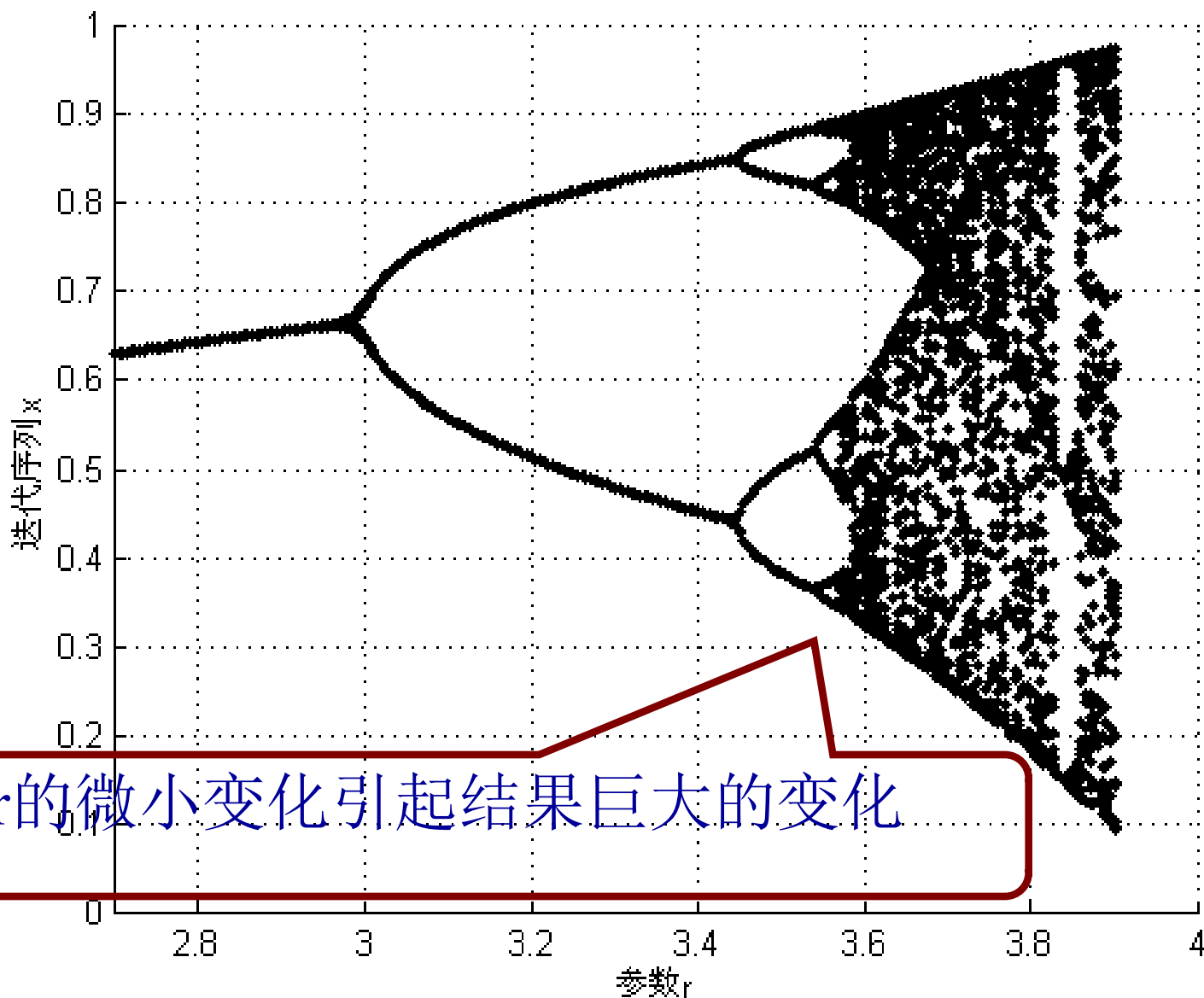
2. 将参数 r 取0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, ..., 3.9的迭代序列收敛情况放置到同一坐标系中观察其变化



结果分析：

- (1) 当 $r < 3.0$ 时，每个 r 对应的50个迭代值凝聚在一点，这表明对这些 r 取值所产生的迭代序列是收敛的。
- (2) 当 r 为3、3.3时，对应的50个迭代值凝聚在两个点，表明 r 所对应的迭代序列不收敛，但凝聚在两个点附近。
- (3) 当 r 由3.3到3.6再到3.9越来越大时，对应的50个迭代值凝聚的点也越来越多，表明 r 对应的迭代序列变化情况逐渐复杂，轨道分岔也越来越多，但会不会还是按照一支分叉为两支的变化规律来变化呢？

3. 现在对取值在2.7到3.9之间进行加密迭代并作图，
取步长为0.005时



结论：轨道由1条分叉为2条、由2条分叉为4条、再由4条分叉为8条等等，这种现象称为**倍周期现象**。

什么是混沌呢？

- 混沌（译自英文Chaos）的原意是指无序和混乱的状态。这些表面上看起来无规律、不可预测的现象，实际上有它自己的规律。
- 混沌学的任务：就是寻求混沌现象的规律，加以处理和应用。
- 60年代混沌学的研究热悄然兴起，渗透到物理学、化学、生物学、生态学、力学、气象学、经济学、社会学等诸多领域，成为一门新兴学科。

混沌的特征

1. 差之毫厘，失之千里、牵一发而动全身。

- 一个小小初始条件的差异可以严重影响系统长期的大变化。

• 2. 对初始条件的敏感性。

- 对原本西方的科学基本理念来说，「如果你正在计算台面上的一颗撞球，就不用去理会室外一片树叶的掉落。很轻微的影响可以被忽略，事物进行总会殊途同归，任意的小干扰，并不致于膨胀到任意大的后果。」

- 1960年，美国麻省理工学院教授洛伦兹研究“长期天气预报”问题时，在计算机上用一组简化模型模拟天气的演变。他原本的意图是利用计算机的高速运算来提高长期天气预报的准确性。但是，事与愿违，多次计算表明，初始条件的极微小差异，均会导致计算结果的很大不同。
- 由于气候变化是十分复杂的，所以在预测天气时，输入的初始条件不可能包含所有的影响因素（通常的简化方法是忽略次要因素，保留主要因素），而那些被忽略的次要因素却可能对预报结果产生重大影响，导致错误的结论。由此，洛伦兹认定，尽管拥有高速计算机和精确的测量数据（温度、风速、气压等），也难以获得准确的长期天气预报。

蝴蝶效应

- 1979年12月，洛伦兹在华盛顿的美国科学促进会的一次讲演中提出：一只蝴蝶在巴西扇动翅膀，有可能会在美国的德克萨斯引起一场龙卷风。他的演讲和结论给人们留下了极其深刻的印象。从此以后，所谓“蝴蝶效应”之说就不胫而走，名声远扬了。

从科学的角度来看，“蝴蝶效应”反映了混沌运动的一个重要特征：系统的长期行为对初始条件的敏感依赖性。

- **经典动力学的传统观点认为：系统的长期行为对初始条件是不敏感的，即初始条件的微小变化对未来状态所造成的差别也是很微小的。可混沌理论向传统观点提出了挑战。混沌理论认为在混沌系统中，初始条件的十分微小的变化经过不断放大，对其未来状态会造成极其巨大的差别。**

分叉与混沌的应用

混沌的原意是指无秩序和混乱的状态。

在客观世界中，人们原先以为只存在两类现象：确定性现象、随机性现象。

后来人们发现，除了以上两类现象外，还有第三类现象。混沌现象所以显得捉摸不定乃是由于它内部蕴含着非线性因素。只要初始条件有些微不同，便可引起种种大相径庭的结果。因此简单的数学方程也可能得出复杂的答案。这是对复杂现象必来自复杂系统这一传统观念的挑战。

当前，运用混沌学来解决的实际问题主要有三类：

- 第一，实现高性能的神经计算机。人脑是按照能产生混沌现象的构造来形成自己的神经网络，从而可以处理复杂的信息
- 第二，分析和预报自然现象和经济现象，例如地震预报、经济发展预报等。
- 第三，提高大规模工程系统的可靠性。尽管目前利用混沌理论进行长期预报误差还太大，但用于短期预报则有相当的效果。

本次上机任务：

P198: 练习1,2;

P200:练习1， 2;

P207:练习1,2;

P212:练习1,人选一题： 2,3， 4