西安交通大学考试题

成绩	

课　程　高等数学（上）

学　院 ________　　考试日期　2017 年 11 月 5 日

专业班号 ________

姓　名 ________　学　号 ________　期中 ✓　期末 □

一. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}} =$ ________

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n} =$ ________

3. 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$ 则 $y'(0)=$ ________

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ b(1-x^2) & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内可导，则

   a = ______， b = ______

5. 已知（1，2）是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则

   a = ______， b = ______

二. 单选题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+2\sin x)$ 与下列哪个表达式是等价无穷小.（　）

   A. $1+2\sin x$　B. x　C. $2x^2$　D. $2x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\ne 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　）

   A. 极限不存在.　B. 极限存在但不连续.
   C. 连续.　D. 以上结论都不成立.

3．已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，

则在点 $x=0$ 处 $f(x)$　　　　（　　）

A．不可导　　　　B．可导且 $f'(0)\neq 0$

C. 取得极大值　　　　D．取得极小值

4．曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是　　　　（　　）

A.(1,0).　B．(2,0).　C. (3,0) .　D．(4,0).

三. 计算下列各题(每小题 9 分，共 54 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$.

2. 设 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$,求 y'.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

4. 设 $y^x = e^{x+y}$， 求 dy.

5. 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$ ，求 $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

6. 求曲线 $y = x^4(12\ln x - 7)$ 的凹向区间及拐点.

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le ax\} \quad (a > 0)$.

四. (10 分) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}, & x\le 0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x>0\end{cases}$ 的连续性,并确定其间断点类型

五 证明题（9 分）.

设奇函数 $f(x)$ 在[-1 1]上具有二阶导数,且 $f(1)=1$,证明

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$.

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：高等数学上(期中) 课时：______ 考试时间：2017年11月5日

一.(每小题3') 1. e^2. 2. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $a=0, b=1$. 5. $a=-1, b=3$

二.(3'×4=12') 1. D. 2. C. 3. B. 4. C

三.(6×9'=54')

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}\overset{(3')}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x+1-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}\overset{(6')}{=}\dfrac{3}{4}$ (9')

2. $y'=\dfrac{1}{1+x^2-1}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-(\ln x)(-\frac{1}{2})(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$ (3') (6')

$=x(\ln x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$ (9')

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-2x-1}{\sin x}\overset{(3')}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^x\cos x-2}{\cos x}\overset{(6')}{=}0$ (9')

4. $x\ln y=x+y$ (2') 两边对x求导得：

$\ln y+x\cdot\dfrac{y'}{y}=1+y'$ (6') $dy=\left[\dfrac{y-x}{y(\ln y-1)}\right]^{-1}dx$ (9')

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}$ (3') $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{\pi}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\dfrac{1}{2t}$ (7') $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi^3}$ (9')

6. $y' = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3$ (3')

$y'' = 12x^2(12\ln x - 7) + 84x^2 = 144x^2\ln x$ (6')

$x>1$ 时 $y''>0$. 上凹. $x<1$ 时 $y''<0$. 下凹 (8')

拐点为 $(1, -7)$ (9')

四. 1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\sin\frac{\pi}{x^2-4}$ 不存在 $x=2$ 为第二类(振荡)间断点 (2')

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. $x=0$ 为第一类(跳跃)间断点 (4')

3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi}$ $x=-1$ 为第一类(可去)间断点 (6')

4. $\lim\limits_{x\to -(2k+1)} f(x) = \infty$. $k\in N_+$. $x=-(2k+1)$ 为第二类(无穷)间断点 (8')

连续区间为 R 除去上述间断点. (10')

五. ① ∵ $f(-1) = -f(1) = -1$ 令 $F(x) = f(x) - x$ (2')

$F(0)=0$. $F(1)=0$. 据 Rolle Th. $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$. (4')

② $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi_1)$. $\xi_1\in(0,1)$. $\frac{f(-1)-f(0)}{-1-0} = f'(\xi_2)$ $\xi_2\in(-1,0)$

令 $G(x) = e^x[f'(x)-1]$ (6') $x\in[\xi_2, \xi_1]$. 用 Rolle Th 得:

$G'(\eta)=0$. $\eta\in(\xi_2, \xi_1)$. 即. $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ (9')

还可用 $f(x)$ 为奇函数. 用 $G(x)$ 在 $[-\xi, \xi]$ 上应用 Rolle Th.