已知$A^2 = I, A \neq I$,则$|A+I| = 0$

分析:

$$|A| = \pm 1$$

$$A^2 - I = (A+I)(A-I) = 0$$

考虑齐次线性方程组:

$$(A+I)x = 0$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$为$A-I$的列，为方程组的解。

齐次线性方程组有非零解，则系数行列式为0

课后习题

3、已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 - y_2, \\ x_3 = 4y_1 + 5y_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 4z_1 - z_2, \\ y_3 = z_1 + z_2. \end{cases}$$

求由它们复合得到的从 z_1, z_2 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换的矩阵

4、 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 问:

(1) $AB=BA$吗?

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

5、举出反例说明下列命题是错误的：

(1) 若$A^2=O$，则$A=O$;

(2) 若$A^2=A$，则$A=O$ 或$A=I$;

(3) 若$AB=O$，则 $A=O$或 $B=O$;

(4) 若$AB=AC$，且$A\neq O$，则 $B=C$。

6、（1）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}, D=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ 为对角矩阵，求 AD及DA .并归纳出用对角矩阵乘矩阵的规律性结果。

（2）设$A=(a_{ij})_{n\times n}, \varepsilon_i$是$n$ 阶单位矩阵的第i列，试求$A\varepsilon_j, \varepsilon_i^T A$及$\varepsilon_i^T A\varepsilon_j$，并指出所得结果与 A有什么关系。

6、

（3）设 $A=\begin{bmatrix}2 & 6 & 4\\ 3 & 12 & 9\\ 14 & 7 & 7\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 7\end{bmatrix}$，求矩阵 B 使得 $A=DB$。

（4）设 A 和 B 都是 n 阶矩阵，并且对任意 n 维列向量 x 满足 $Ax=Bx$，证明 $A=B$。

7、求一个3阶矩阵 A，使得

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-3y \\ y+z \end{bmatrix}$$

对任意常数 x, y, z 都成立。

10、(1) 设A为m阶对称矩阵，B为$m\times n$矩阵，证明：

$B^T AB$为n阶对称矩阵；

(2) 设A为n阶对称矩阵，B为n阶反对称矩阵，证明：AB为反对称矩阵$\Leftrightarrow AB=BA$；

(3) 设 A、B 为同阶对称（反对称）矩阵，证明：$A+B$，$A-B$，kA (k为数）都是对称（反对称）矩阵；

(4) 举例说明同阶对称矩阵之积未必是对称矩阵。

11、 (1) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，求$A^n-2A^{n-1}(n=2,3,\cdots)$;

(2) $\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，方阵$A=\alpha^T\beta$，求$A^n(n=2,3,\cdots)$.

11、 (3) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$，求 AC 及 $(ABC)^{100}$.

12、设n阶方程 A、B 满足$A=\frac{1}{2}(B+I)$，证明：$A^2=A \Leftrightarrow B^2=I$

2、设A为$m\times n$实矩阵，证明：$A=O \Leftrightarrow A^TA=O$

习题2.2

3、对于对角矩阵$D=diag(d_1,d_2,\cdots d_n)$，证明：

D可逆$\Leftrightarrow$ D的主对角线元素 $d_1,d_2,\cdots d_n$，均不为零.

且当D可逆时，有 $D^{-1}=diag(d_1^{-1},d_2^{-1},\cdots d_n^{-1})$.

4、设方阵A满足$A^2-2A+2I=O$，证明：$A-2I$和$A-3I$都可逆，并求$(A-2I)^{-1}$及$(A-3I)^{-1}$.

5、设方阵A满足$A^m = O$（m为某正整数），证明：$I-A$可逆，且$(I-A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{m-1}$.

6、设n阶方阵A的元素都是1，证明：$(I-A)^{-1} =$

$$I - \frac{1}{n-1}A$$

8、设n阶方阵A的行列式$\det(A)=0$，证明：

$$\det(A^*)=0$$

若A=0，A^*=0; A不等于0，则$AA^*=\det(A)I=0$,若$\det(A^*)$不为零，则A^*可逆，可推出A=0，矛盾

9、设A为n阶方阵，常数$k\neq 0, k\neq 1$，证明：

$$(kA)^*=k^{n-1}A^*$$

kA的每个代数余子式等于A的对应元素的代数余子式的k^{n-1}

10、设3阶矩阵A、B满足$2A^{-1}B = B-4I$，其中I是3阶单位矩阵。

AB-4A-2B=0

(A-2E)(B-4E)=8E

(1) 证明 $A-2I$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵 A.

11、

(1) 设 A是一个可逆矩阵，并且 $AB=BA$，证明 $BA^{-1}=A^{-1}B$；

(2) 设B 及 $I-AB$ 均为 n 阶可逆矩阵，证明 $A-B^{-1}$也是可逆矩阵.

12、设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

（1）求 $A^2, A^n (n=2,3,\cdots)$ 及 A^{-1} ；　　$A^2=4E$　　$A^{-1}=A/4$

（2）若方阵 B 满足 $A^2+AB-A=I$，求 B

13、设 n 阶方阵 A、B 的行列式分别等于2，-3，求行列式 $\det(-2A^{*}B^{-1})$ 的值。

14、设 m 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，$A$ 为方阵，记 $f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$，称 $f(A)$ 为方阵 A 的多项式.设k为正整数，试证：若 A 为 n 阶方阵，且存在方阵 P 及 B，使 $A=PBP^{-1}$，则 $A^k=PB^kP^{-1}$，且 $f(A)=Pf(B)P^{-1}$.

15、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 $B_{4\times 3}\neq O$，且满足

BA=0,可知A不可逆。

$BA=O$，求常数 t 的值

16、设 α 为 n 维非零列向量，$A=I-\alpha\alpha^T$，其中

I 为 n 阶单位矩阵，证明：

(1) $A^2=A\Leftrightarrow \alpha^T\alpha=1$.

(2) 当 $\alpha^T\alpha=1$ 时，A 不可逆.

反证法可推出A=I, 与n维非零向量矛盾

17、设 $A,B,A+B$ 均为 n 阶可逆方阵，证明：

(1) $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$ ；

(2) $A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$

1、设$A_{m\times n}$可逆矩阵，α,β 均为n维列向量，且 $1+\beta^T A^{-1}\alpha \neq 0$. 证明：$A+\alpha\beta^T$ 可逆，且

$$(A+\alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha}$$

2、设n阶方阵A可逆，证明：$(A^*)^* = [\det(A)]^{n-2} A$

习题2.3

5、设矩阵 A 按列分块为 $A=[a_1 \quad a_2 \quad a_3]$，求一个矩阵 B，使得 $AB=[a_1+2a_2+3a_3 \quad 2a_1-a_2+a_3 \quad 5a_1+a_2-a_3]$

1、设 A,B,C,D 均为 n 阶方阵，且 $\det(A)\neq 0, AC=CA$

I 为 n 阶单位矩阵.

（1）试分别由(1,2,2)式及(1,2,4)式说明怎样计算分块上（下）三角形矩阵的行列式;

（2）试计算分块矩阵的乘法

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

（3）利用（2），证明 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\det(AD-CB)$

习题2.4

3、利用初等变换法求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$;

5、设 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵$A$满足$AP = PB$，求 A及 A^5.

6、设矩阵 X 满足方程 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

求 X .

7、设矩阵 B 满足方程 $BA = 3B + A$,其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

求 B .

8、设矩阵 B 满足方程 $AB+4I=A^2-2B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$，求 B .

9、设矩阵 B 满足方程 $A^*B=A^{-1}+2B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$，求 B .

10、设矩阵 X 满足方程 $AXA+BXB=AXB+BXA+I$

其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

求矩阵 X.

11、设方阵A可逆矩阵，

(1) 证明 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A$

(2) 若 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求$(A^*)^{-1}$.