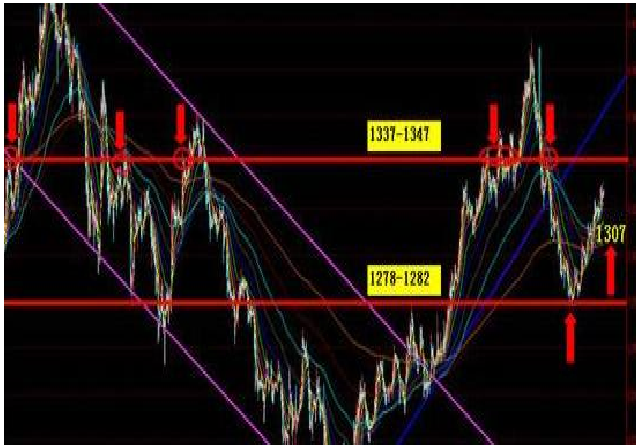
随机模型

随机现象：在一定条件下，在个别试验或观察中呈现不确定性，但在大量重复试验或观察中其结果又具有一定规律性的现象。

研究内容：事件发生的概率大小或统计量

随机建模的目的：

- 研究随机问题所蕴含的统计规律性
- 研究事件发生可能性的大小



商家购货策略

某商家代售货物A. 每天清晨从供货商购进货物零售, 晚上将没有卖掉的货物退回. 每份货物的购进价为b元, 零售价为a元， 退回价为c元, a>b>c.

该商家每天如果购进的货物太少, 不够卖时会少赚钱, 如果购得太多卖不完时要赔钱. 试为该商家筹划每天购进的货物数，使得收益最大。

同类问题：工厂存储原料

货物的需求量是随机的,所以这是一个风险决策问题

问题

商家售货： a (零售价) > b(购进价) > c(退回价)

售出一份赚 $a-b$；退回一份赔 $b-c$

每天购进多少份可使收入最大？

分析

购进太多→卖不完退回→赔钱

购进太少→不够销售→赚钱少

⇒ 存在一个合适的购进量

应根据需求确定购进量

每天需求量是随机的 ⇒ 每天收入是随机的

优化问题的目标函数应是长期的每日平均收入

从概率论大数定律知,其等于每天收入的期望

准备

调查需求量的随机规律——每天需求量为 r 的概率 $p(r)$，r=0,1,2…

建模

• 设每天购进 n 份，日平均收入为 $G(n)$

• 已知售出一份赚 a-b；退回一份赔 b-c

$$r \le n \Rightarrow 售出 r \Rightarrow 赚 (a-b)r$$
$$\Rightarrow 退回 n-r \Rightarrow 赔 (b-c)(n-r)$$

$$r > n \Rightarrow 售出 n \Rightarrow 赚 (a-b)n$$

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)np(r)$$

求 n 使 $G(n)$ 最大

结果解释

$$\frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr} = \frac{a-b}{b-c}$$

$\int_0^n p(r)dr = P_1$, 购进n份货物时卖不完的概率

$\int_n^\infty p(r)dr = P_2$, 购进n份货物时卖完的概率

则有

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a-b}{b-c}$$

a-b **~售出一份赚的钱;**

b-c **~退回一份赔的钱**

商家应购进货物的份数n应该使卖不完与卖完的概率之比，恰好等于卖出一份赚的钱a-b与退回一份赔的钱b-c之比.

机器任务的分配问题

某工厂用200台机器来加工两种零件，需要安排4周完成任务。根据以往的经验知道：机器加工第一种零件，一周后损坏的概率是1/9；加工第二种零件,一周后的损坏率为1/10。如果机器加工第一种零件一周的收益为90元，加工第二种零件一周的收益为88.5元。

问怎样分配机器的任务，才能使总收益最大?

动态规划

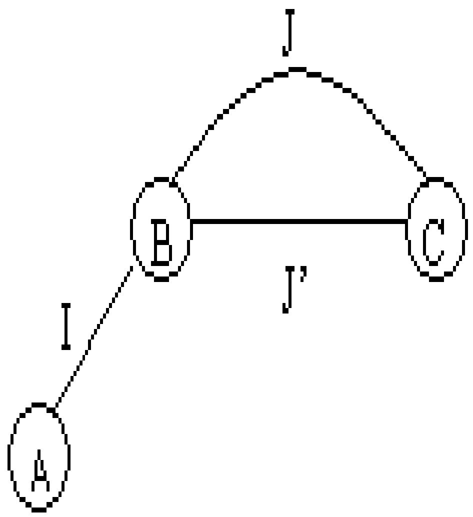
在生产、生活实践中，人们常常可以将决策的全过程依据时间或空间划分为若干个互相联系的阶段，各个阶段可供选择的决策往往不止一个，如何选择一个策略，使其在预定的标准下达到最好的效果?

解决上述问题的办法是利用动态规划。该方法主要应用于最优化问题，这类问题会有多种可能的解，每个解都有一个值，而动态规划找出其中最优(最大或最小)值的解。若存在若干个取最优值的解的话，它只取其中的一个。**在求解过程中，动态规划方法是通过求解局部子问题的解达到全局最优解**，但允许这些子问题不独立(亦即各子问题可包含公共的子子问题)，该方法对每一个子问题只解一次，并将结果保存起来，避免每次碰到时都要重复计算。

最优化原理

最优化原理可这样阐述：一个最优化策略具有这样的性质，不论过去状态和决策如何，对前面的决策所形成的状态而言，余下的诸决策必须构成最优策略。简而言之，一个最优化策略的子策略总是最优的。

例如：若路线I和J是从A经过B到C的最优路径，则根据最优化原理，路线J必是从B到C的最优路线。这可用反证法证明：假设有另一路径J‘是B到C的最优路径，则A到C的路线取I和J’比I和J更优，矛盾。从而证明J‘必是B到C的最优路径 。



最优化原理是动态规划的基础，任何问题，如果失去了最优化原理的支持，就不可能用动态规划方法计算。

为了方便，记

y_k	第 k 周开始时完好的机器数
u_k	第 k 周开始时分配加工第一种零件的机器数
v_k	第 k 周的阶段效益
v_{k4}	第 k 周至最后一周的总效益函数

将一周作为一个工作阶段，先导出各阶段机器数量的变化关系和效益函数

第一阶段

$$y_2 = y_1 - \frac{u_1}{9} - \frac{1}{10}(y_1 - u_1) = 180 - \frac{u_1}{90}$$

$$v_1 = 90u_1 + 88.5(200 - u_1) = 17700 + 1.5u_1$$

第二阶段

$$y_3 = y_2 - \frac{u_2}{9} - \frac{1}{10}(y_2 - u_2) = \frac{9}{10}y_2 - \frac{u_2}{90}$$

$$v_2 = 90u_2 + 88.5(y_2 - u_2) = 88.5y_2 + 1.5u_2$$

第三阶段

$$y_4 = \frac{9}{10}y_3 - \frac{u_3}{90}$$

$$v_3 = 88.5y_3 + 1.5u_3$$

第四阶段

$$v_4 = 88.5y_4 + 1.5u_4$$

在这四个阶段的效益之和为 $v_{14} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$

问题： 求使得上式取最大的 u_1, u_2, u_3, u_4

思想方法：**动态规划**的思想，反向递推求使每一阶段效益最大的 u_1, u_2, u_3, u_4

第四阶段效益：$v_{44} = v_4 = 88.5y_4 + 1.5u_4$

当 $u_4 = y_4$ 时效益最大，即全都生产第一种零件

第三周-第四周效益：

$$
\begin{aligned}
v_{34} &= v_3 + \max v_{44} \\
&= 88.5y_3 + 1.5u_3 + 90y_4 \\
&= 169.5y_3 + 0.5u_3, \quad 0 \le u_3 \le y_3
\end{aligned}
$$

当 $u_3 = y_3$ 时效益最大，即全都生产第一种零件

第二周-第四周效益：

$$\begin{aligned} v_{24} &= v_2 + \max v_{34} \\ &= 88.5y_2 + 1.5u_2 + 170y_3 \\ &= 241.5y_2 - \frac{7}{18}u_2, \quad 0 \le u_2 \le y_2 \end{aligned}$$

当 $u_2 = 0$ 时效益最大，即全都生产第二种零件

第一周-第四周效益：

$$\begin{aligned} v_{14} &= v_1 + \max v_{24} \\ &= 17700 + 1.5u_1 + 241.5y_2 \\ &= 61170 - \frac{25.1}{6}u_1, \quad 0 \le u_1 \le 200 \end{aligned}$$

当 $u_1 = 0$ 时效益最大，即全都生产第二种零件

故应采取的策略为:

第一阶段，全部机器都生产第二种零件，其效益为 17700

第二阶段，开始时有 180 台机器可以正常工作，全部机器都生产第二种零件，其效益为15930

第三阶段，开始时有 162 台机器可以正常工作，全部机器都生产第一种零件，其效益为14580

第四阶段，开始时有 144 台机器可以正常工作，全部机器都生产第一种零件，其效益为12960