Chapter 4
Impulse and Momentum

我国舰艇上发射远程导弹实验

要点回顾

质点的动量 $\vec{P}=m\vec{\upsilon}$　　质点系的动量 $\vec{P}=\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i$

质点动量定理 $\mathrm{d}\vec{P}=\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})=\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{I}$

$$\int_{v_1}^{v_2} d(m\vec{v})=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\vec{P}_2-\vec{P}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\vec{I}$$

动量定理搭建了过程量（冲量）与状态量（动量）之间的桥梁。

在直角坐标系中

$$\left.\begin{aligned}
m\upsilon_{2_x}-m\upsilon_{1_x}&=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t\\
m\upsilon_{2_y}-m\upsilon_{1_y}&=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t\\
m\upsilon_{2_z}-m\upsilon_{1_z}&=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t
\end{aligned}\right\}$$

平均力 $\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=\overline{F}(t_2-t_1)$

质点系动量定理

$$\mathrm{d}\Big(\sum_i m_i\vec{v}_i\Big)=\sum_i \vec{F}_\mathrm{i}\mathrm{d}t$$

$$\sum_i m_i\vec{v}_i-\sum_i m_i\vec{v}_{i0}=\sum_i\int_{t_0}^{t}\vec{F}_i\mathrm{d}t$$

质点系动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i=0$ ➡ $\mathrm{d}\left(\sum m_i\vec{v}_i\right)=0$ ➡ $\left(\sum m_i\vec{v}_i\right)=\vec{C}$

动量守恒的分量表述

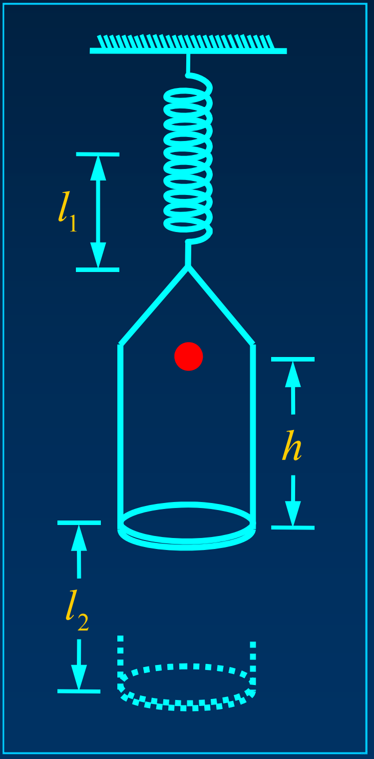
$$F_x=0\Rightarrow\left(\sum m_i v_{ix}\right)=P_x=\text{常量}$$

$$F_y=0\Rightarrow\left(\sum m_i v_{iy}\right)=P_y=\text{常量}$$

$$F_z=0\Rightarrow\left(\sum m_i v_{iz}\right)=P_z=\text{常量}$$

例1：如图，用轻弹簧把质量为m的金属盘悬挂起来，静止在平衡位置，这时弹簧伸长了$l_1 = 10\text{cm}$。现有一个质量与金属盘相同的橡皮泥从高于盘底 $h = 30\text{cm}$处由静止自由下落到盘上。

求：此金属盘向下运动的最大距离l_2。



解：泥球自由下落，落到盘底的速率为

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

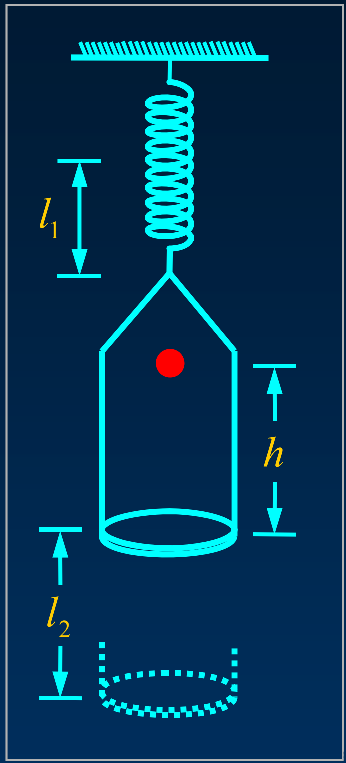
泥球与盘碰撞(完全非弹性碰撞，内力>>外力)，系统在竖直方向上的动量守恒，设碰撞后的共同速度为v_2，则

$$mv_1 = (m+m)v_2$$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

泥球和盘共同下降的过程

(弹簧、泥球、盘和地球组成的系统机械能守恒)



选弹簧的自然伸长端为弹性势能零点，以盘的最低点为重力势能零点，则

$$\frac{1}{2}(2m)v_2^2+(2m)gl_2+\frac{1}{2}kl_1^2=\frac{1}{2}k(l_1+l_2)^2$$

弹簧的劲度系数为

$$k=\frac{mg}{l_1}$$

而 $v_2=\sqrt{\frac{gh}{2}}$， $l_1=10\text{cm}$, $h=30\text{cm}$

另外一个解 $l_2=$ -10cm 略去

则 $l_2^2-20l_2-300=0$ $\Rightarrow$ $l_2=30\text{cm}$

4-4 质心 质心运动定理

一、质心

N个质点系统(质点系)，定义质量中心 ⟹ 质心

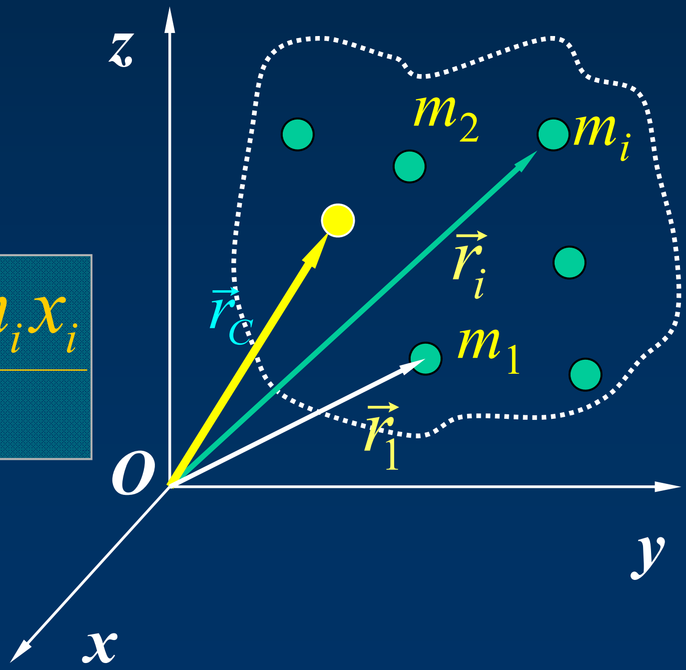
$m_1, m_2, \ldots\ldots m_i, \ldots\ldots m_n$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots \vec{r}_i, \ldots\ldots \vec{r}_n$

定义：

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$$

—— 分立系统的质心公式



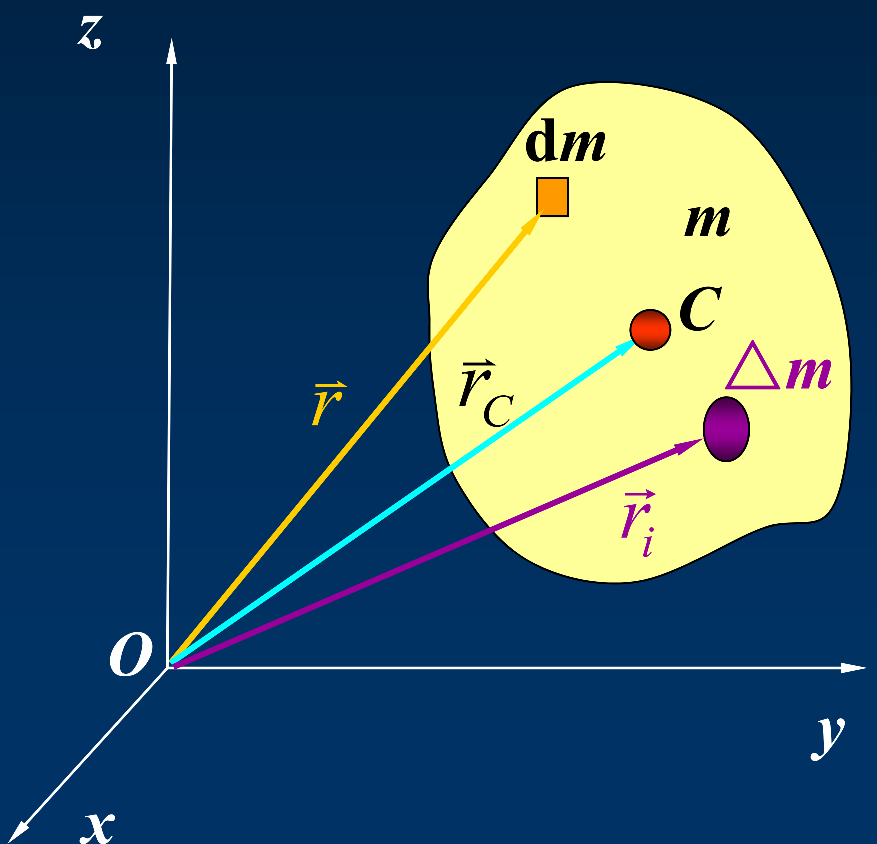
直角坐标系中的分量式

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}$$

$$y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

- 对于质量连续分布的系统

$$\vec{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\Delta m_i}{m}=\frac{\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\Delta m_i}{m}=\frac{\int\vec{r}\mathrm{d}m}{m}$$



直角坐标系中的分量式

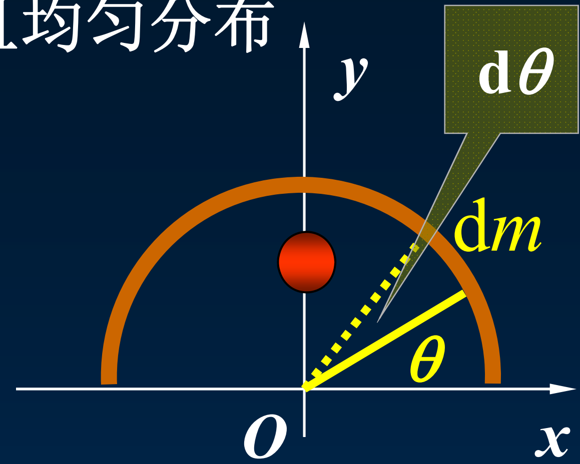
$$x_C=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int x\mathrm{d}m}{m}$$

$$y_C=\frac{\int y\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int y\mathrm{d}m}{m}$$

$$z_C=\frac{\int z\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int z\mathrm{d}m}{m}$$

例2：已知一半圆环半径为 R，质量为m, 且均匀分布

求：它的质心位置



解：建坐标系如图 $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$

$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R}R\mathrm{d}\theta = \frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$$

几何对称性

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta \frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta}{m}$$

$$\frac{\int x\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^{\pi} R\cos\theta \frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta}{m} = 0$$

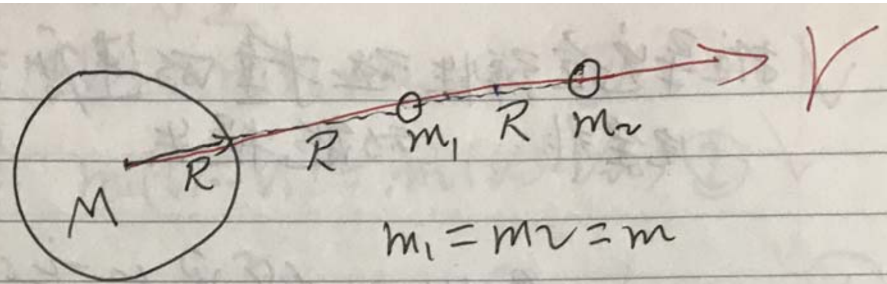
注意：弯曲铁丝的质心……心与重心的区别与联系

- 物体质心的位置只与其质量和质量分布有关，而与作用在物体上的外力无关

例如，

- 重心是作用在物体上各部分重力的合力的作用点

$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int x\mathrm{d}m}{m}$$



$m_1=m_2=m$

对于 m_1，$F_1=\dfrac{GMm}{(2R)^2}$

对于 m_2，$F_2=\dfrac{GMm}{(3R)^2}$

引力(重力)合力 $F_1+F_2=\dfrac{GMm\cdot 13}{36R^2}$

则引力中心为 $\cancel{\dfrac{13\cdot GMm}{36R^2}=\dfrac{GM(2m)}{r^2}}$

$\Downarrow$

$r=\cancel{\sqrt{\dfrac{72}{13}}R=2.35R}$

$F_1\cdot 2R+F_2\cdot 3R=(F_1+F_2)r_{引}$

$\dfrac{GMm}{2R}+\dfrac{GMm}{3R}=\dfrac{GMm\cdot 13}{36R^2}\cdot r_{引}$

$\Rightarrow r_{引}=\dfrac{30}{13}R\approx 2.31R$

质心则为 $\dfrac{m\cdot 2R+m\cdot 3R}{2m}=2.5R$

若 m_1 与 m_2 很近，则质心与重心基本重合

★说明

(1)质心矢量与参照系的选取有关，但质心相对于系统内各质点的相对位置与参照系选取无关

(2)一般形状对称的质量均匀分布的物体，其质心位于它的几何对称中心

(3) 质心的位置不一定在物体系统的某个质点上，可以在其延拓的部分

(4)对质心的位矢求导可以得出质心的速度和加速度

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}$$

二、质心运动定理

$$\vec{r}_c \Rightarrow \vec{v}_C \Rightarrow \vec{a}_C \Rightarrow \vec{F}$$

- 质心的速度

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i / m\right)}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m} = \frac{\sum \vec{P}_i}{m}$$

$$\sum \vec{P}_i = m\vec{v}_C = \vec{P}$$

$$\vec{P} = m\vec{v}_C$$

质点系的总动量

质点系的总质量

质心的速度

- 质心的加速度和动力学规律

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{m}\frac{dm\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{P}}{dt}$$

质点系的动量定理

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

质点系的动量定理

质点系的总动量

作用在质点系上的所有外力

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v}_C)}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}_C$$

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}_C}$$

质心运动定理

$$\vec{a}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系中的分量式

$$\begin{cases}\sum_i F_{ix}=ma_{Cx}\\ \sum_i F_{iy}=ma_{Cy}\\ \sum_i F_{iz}=ma_{Cz}\end{cases}$$

★ 说明

(1)质点系内各质点由于内力和外力的作用，其运动情况可能很复杂，但有一个特殊点 ⇒ 质心

(2) 可将质点系质心的运动看作为：一个质点的运动，

该质点集中了整个系统的质量，并集中了系统受的所有外力。

与质量的分布，力作用于何处无关 $\vec{F} = m\vec{a}_C$

(3) 质心动量等于质点系的总动量; $\sum \vec{P}_i = m\vec{v}_C = \vec{P}$

(4) 质心运动状态取决于系统所受外力，内力不能使质心产生加速度。 $\vec{F} = m\vec{a}_C$

例如: 跳水运动员、投掷的手榴弹

(5) 研究质心运动的意义 研究刚体的运动—— 平动、转动

★推论

质心速度不变

若 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ⟶ $m\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \vec{v}_c = \vec{C}$

即： 系统内力不会影响质心的运动

例3： 质量分别为m_1和m_2，速度分别为$\vec{v}_1$ 和$\vec{v}_2$ 的两质点碰撞后合为一体。

求： 碰撞后二者的共同速度

解： 根据动量守恒定律

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

质点系合外力为0，质心速度不变

碰撞后二者的运动速度

→ 将为质心的运动速度

$$m\vec{v}_c = \sum m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

例4： 一枚炮弹发射的初速度为v_0，发射角为θ，在它飞行的最高点炸裂成质量均为m 两部分。一部分在炸裂后竖直下落，另一部分则继续向前飞行。

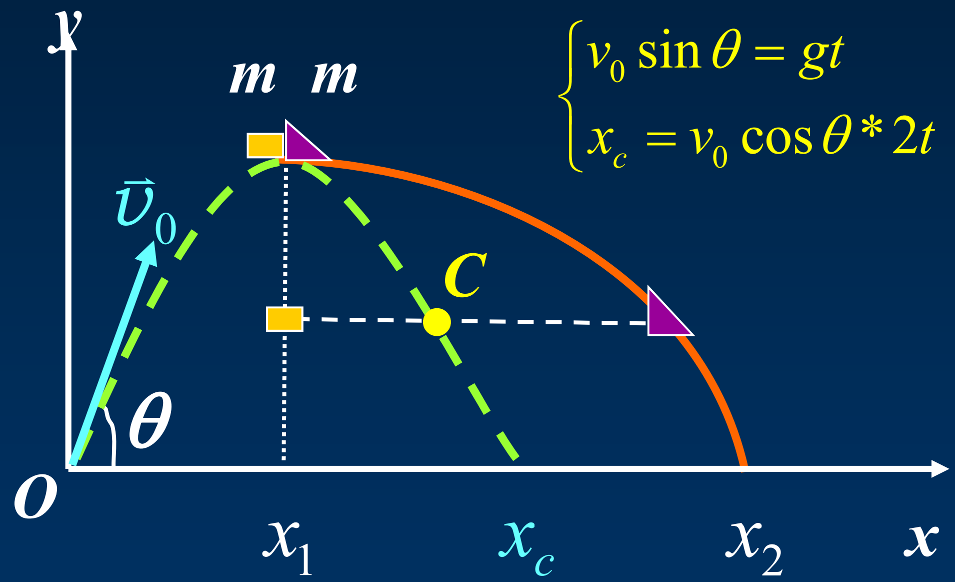
求： 两部分的着地点以及质心的着地点。（忽略空气阻力）

解： 若炮弹没有炸裂，则下落的水平距离为

$$x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

内力不影响质心的运动，故x_c不变。

竖直下落的部分炮弹的水平距离为

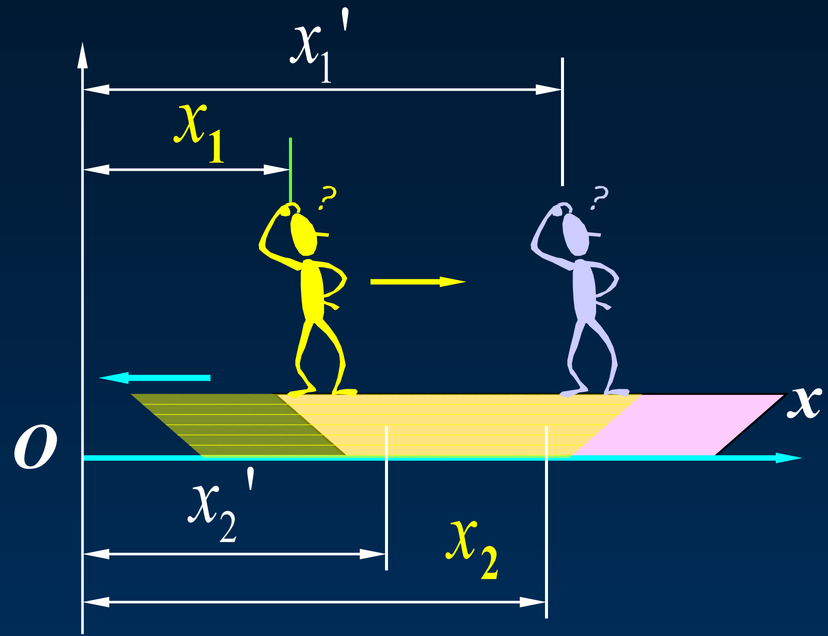


$$\begin{cases} v_0 \sin\theta = gt \\ x_c = v_0 \cos\theta * 2t \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \qquad x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

例5： 如图所示，人与船构成质点系。开始静止，人从船头走到船尾。人、船的质量为：m、M，船长为l（不考虑水的阻力）

求： 人和船各移动的距离



解： 在水平方向上，外力为零，则

$$a_{cx} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{cx}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \upsilon_{cx} = 0 \qquad x_c = x_c'$$

开始时，系统质心位置

$$x_c = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$$

终了时，系统质心位置

$$x_c' = \frac{mx_1' + Mx_2'}{m+M}$$

S

$$\vec{S}_{绝} = \vec{S}_{相} + \vec{S}_{牵}$$

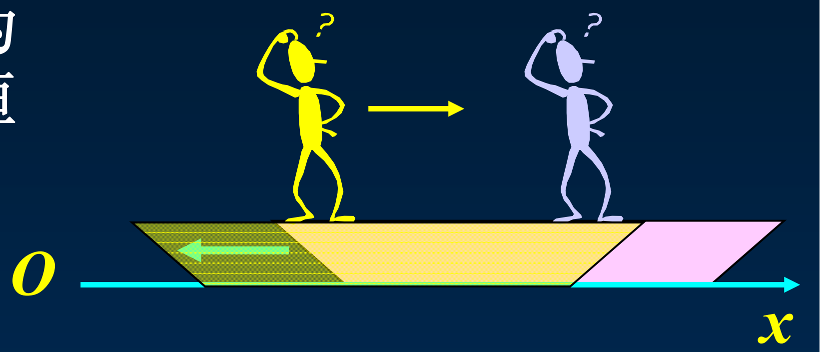
$$M(x_2 - x_2{}') = m(x_1{}' - x_1)$$

l - S

解得 $S = \dfrac{ml}{m+M}$ $\quad s_{人} = l - S = \dfrac{Ml}{m+M}$

另解（利用相对运动思想）

水平方向上，系统所受合外力为零，则其在水平方向上动量守恒



$$m\upsilon + MV = 0$$

$$m(V+\upsilon_r) = -MV$$

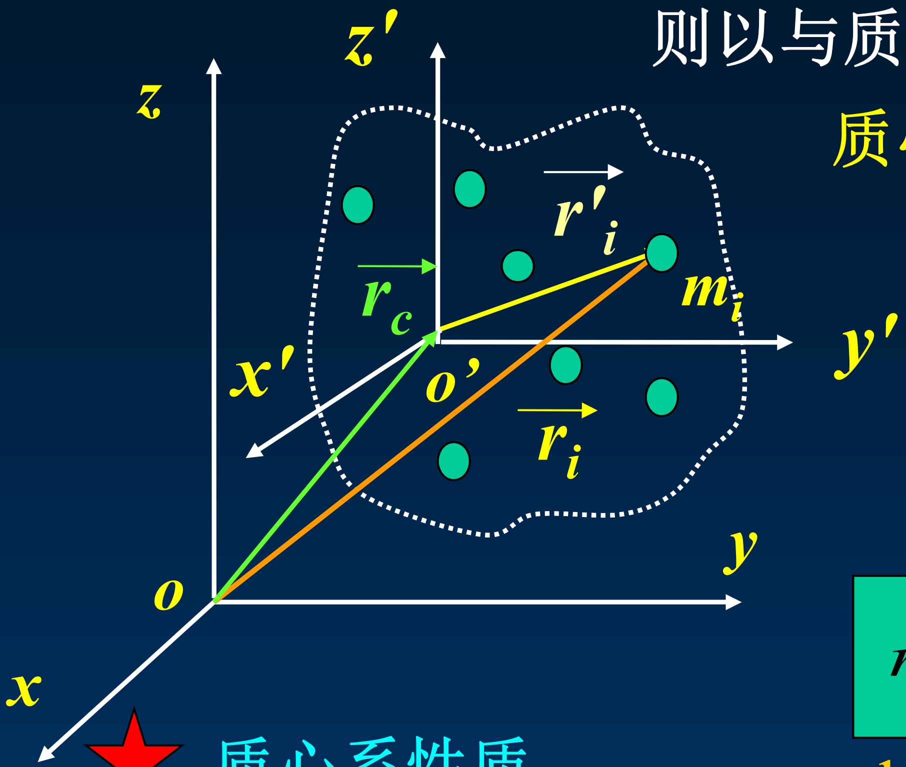
$$m\upsilon_r = -(m+M)V$$ 两边同乘以dt

$$m\mathrm{d}x_r = -(m+M)\mathrm{d}x_{canoe}$$

$$m\int_0^l \mathrm{d}x_r = -(m+M)\int_0^{x_{canoe}} \mathrm{d}x_{canoe} \qquad S = -x_{canoe} = \frac{ml}{m+M}$$

利用 $\vec{S}_{绝} = \vec{S}_{相} + \vec{S}_{牵}$ 求得人移动的距离

三、质心参考系 —— 若将参照系的坐标原点选在系统质心上，则以与质心相同速度作平移的参照系称质心参考系，简称质心系



取 $\vec{r}_{\mathrm{i}}\,' = \vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{c}}$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{c}}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\,' = 0$$

$$m\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{\mathrm{i}}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}\,' = 0$$

★ 质心系性质

根据 $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_C$

- 若质点系所受外力矢量和为零，则其总动量守恒 —— 质心作惯性运动 —— 质心系是惯性系，反之，为非惯性系。
- 质心系为零动量系 $\vec{P}' = \sum m_i\vec{v}_i\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i\dfrac{d\vec{r}_i\,'}{dt} = d\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\,'/dt = 0$

- 克尼希定理（了解即可）

$\vec{r}_{\mathbf{i}}\,' = \vec{r}_{\mathbf{i}} - \vec{r}_c$ ——→ 伽利略速度变换 $\vec{\upsilon}'_i = \vec{\upsilon}_i - \vec{u}$

质点系的动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\upsilon}_{\mathbf{i}}' + \vec{u})^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\upsilon_i'^2 + u^2 + 2\vec{\upsilon}_{\mathbf{i}}' \cdot \vec{u})$$

$$= E_k' + \frac{1}{2} m u^2 + (\sum_i m_i \vec{\upsilon}_{\mathbf{i}}') \cdot \vec{u}$$

$$= E_k' + \frac{1}{2} m \upsilon_{\mathbf{c}}^2$$

如果惯性系S’是质心系，则有

$$\sum m_i \vec{\upsilon}'_i = 0$$

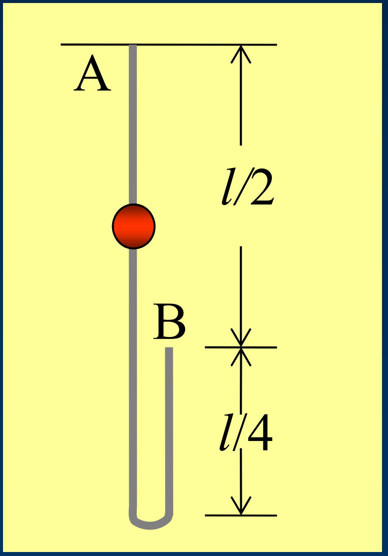
$$\vec{u} = \vec{\upsilon}_{\mathbf{c}}$$

质点系的总动能，等于相对质心系的动能，加上随质心整体平动的动能 —— 克尼希定理（**König theorem**）。

思考题： 长 l、质量线密度为λ的匀质软绳，开始时两端A和B均悬挂在固定点上。使B端脱离悬挂点自由下落，如图示，当B端下落高度为$l/2$ 时，使A脱离悬挂点，分析此后经过多长时间绳子完全伸直？

（提示：在质心参考系中分析） $t=\dfrac{7}{12}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

解： A端脱离悬挂点后，质心和B端相对于地面的加速度都是g，在质心系中，B端相对质心加速度为0，相对质心速度不变



B端的速度 $v_B=\sqrt{gl}$ (自由下落)

质心动量等于质点系总动量

质心速度 $mv_C=mv_B/4 \Rightarrow v_C=\sqrt{gl}/4$

质心离A点的位置 $\dfrac{3}{4}m\dfrac{3}{8}l+\dfrac{1}{4}m\dfrac{5}{8}l=mr_A \Rightarrow r_A=\dfrac{7}{16}l$

B端相对质心的距离 $r_{BC}=l/16$

绳子伸直后B端相对质心的距离 $r_{BC}=l/2$

绳子伸直所用时间 $t=\dfrac{l/2-l/16}{v_B-v_C}$

质点动力学小结

$\vec{F}$ 在空间上的累积：功 $\Rightarrow$ 机械能

功： $A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ $\qquad A=\int_{a(L)}^{b}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$

功率： $P=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=F\upsilon\cos\theta$

动能定理：$A=\sum_i A_i=\sum_i A_{i外}+\sum_i A_{i内}=E_{k2}-E_{k1}$ 不等于合力的功！

势能： $E_p(M)=\int_M^{M_0}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$\vec{F}=-(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k})$$

机械能守恒定律： $A_{外}+A_{非内}=\Delta E_k+\Delta E_p=\Delta E$

$E=E_k+E_p=$ 常数 $\qquad A_{外}+A_{非内}=0$

$\vec{F}$ 在时间上的累积：冲量 $\Rightarrow$ 动量定理

冲量： $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$

质点动量定理： $\mathrm{d}(m\vec{v})=\mathrm{d}\vec{P}=\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{I}$

$$m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

$$mv_{2_x}-mv_{1_x}=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t$$

$$mv_{2_y}-mv_{1_y}=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t$$

$$mv_{2_z}-mv_{1_z}=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t$$

质点系动量定理： $\mathrm{d}(\sum_i m_i\vec{v}_i)=\sum_i\vec{F}_i\mathrm{d}t$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{P}=\vec{F}\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i m_i\vec{v}_i-\sum_i m_i\vec{v}_{i0}=\sum_i\int_{t_0}^{t}\vec{F}_i\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}(\sum_i\vec{F}_i)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\vec{P}_2-\vec{P}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}$$

质点系动量守恒定律：

$$\sum_i\vec{F}_i=0$$

$$\left(\sum m_i\vec{v}_i\right)=\text{常矢量}$$

$$\boxed{\begin{aligned}F_x&=0\Rightarrow\left(\sum m_iv_{ix}\right)=P_x=\text{常量}\\F_y&=0\Rightarrow\left(\sum m_iv_{iy}\right)=P_y=\text{常量}\\F_z&=0\Rightarrow\left(\sum m_iv_{iz}\right)=P_z=\text{常量}\end{aligned}}$$

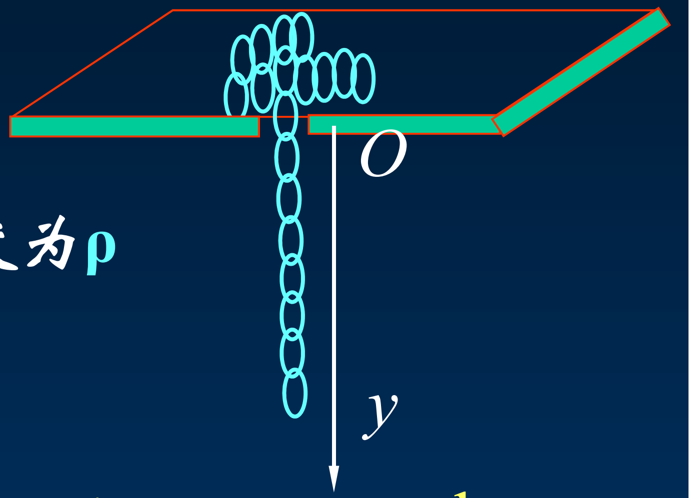
质心：$\vec{r}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$

$$\vec{r}_c = \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$

质心运动定理：$\vec{P} = m\vec{v}_c$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_c$$

例 如图所示，由可以看作非弹性体的金属小环组成的均质链条，堆放在光滑的水平桌面上（堆放体积可忽略不计），它的一端从光滑的小孔中由静止自由下落，没有进入小孔的链条在桌面上保持静止。**求** 下落端的运动学方程



解 （方法一）用牛顿运动定律求解

选整个链条为研究对象，设链条线密度为ρ

$$m = \rho y \qquad \sum f = mg = \frac{\mathrm{d}(m\upsilon + 0)}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \rho y g = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\upsilon + m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \Rightarrow yg = \upsilon^2 + y\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \upsilon^2 + y\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}\upsilon$$

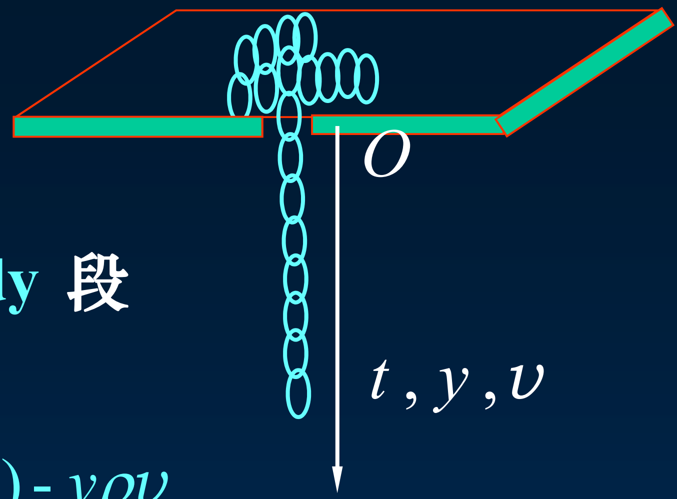
两边同乘以2y

$$2y^2 g\mathrm{d}y = 2y\upsilon^2\mathrm{d}y + 2y^2\upsilon\mathrm{d}\upsilon = \mathrm{d}(\upsilon^2 y^2) \rightarrow \upsilon^2 = \frac{2}{3}yg$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2}{3}yg} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^y \mathrm{d}y \Big/ \sqrt{\frac{2}{3}gy}} \qquad y = \frac{1}{6}gt^2$$

（方法二）用动量定理解

设 $t\,,y\,,v$ $\quad t+\mathrm{d}t\,,y+\mathrm{d}y,v+\mathrm{d}v$



选落下 **y** 部分和此后即将下落的 **dy** 段为研究对象

$$\sum f\,\mathrm{d}t = y\rho g\mathrm{d}t = (y+\mathrm{d}y)\rho(v+\mathrm{d}v) - y\rho v$$

$$yg\mathrm{d}t = \cancel{yv} + y\mathrm{d}v + \mathrm{d}y\,v + \cancel{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v} - \cancel{yv}$$

$$yg = y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v^2 = v^2 + y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}v$$

两边同乘以2y

$$2y^2g\mathrm{d}y = 2yv^2\mathrm{d}y + 2y^2v\mathrm{d}v = \mathrm{d}(v^2y^2) \rightarrow v^2 = \frac{2}{3}yg$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}yg} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^y \mathrm{d}\,y\Big/\sqrt{\frac{2}{3}gy}} \qquad y = \frac{1}{6}gt^2$$