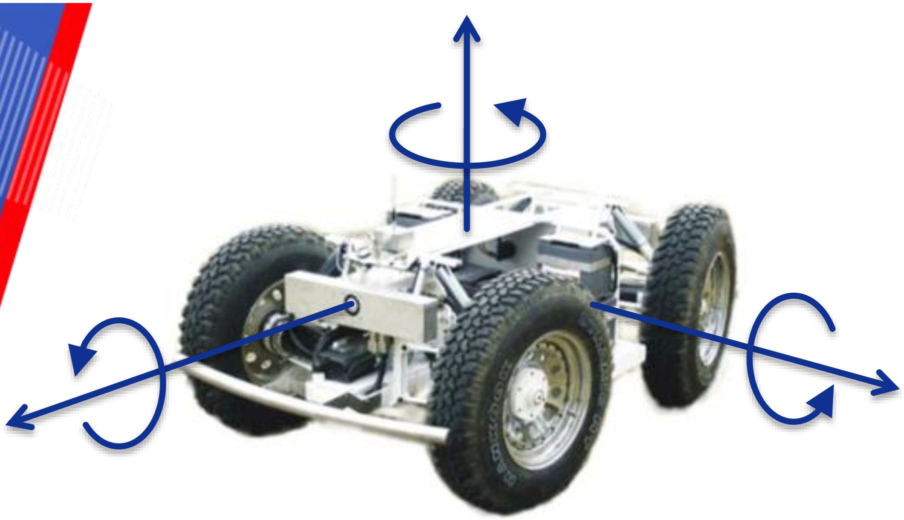
Raumkinematik – Grundlagen I



Prof. Karsten Berns
Robotics Research Lab
Department of Computer Science
University of Kaiserslautern, Germany

Technische Universität Kaiserslautern

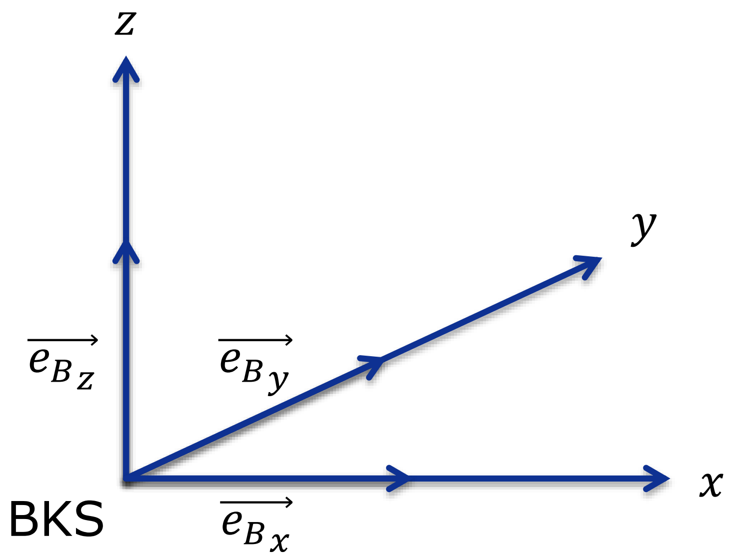
Inhalt

- Beschreibung von Objekten und Objektlagen im 3D euklidischen Raum (E_3)
- Orientierungsbeschreibung mit 3×3 Matrizen
- 6-dim. Beschreibungsvektor
- Homogene Koordinaten und Transformationsmatrix
- Verkettete Lagebeschreibungen

Beschreibung von Objekten und Lagen in E_3

Basiskoordinatensystem (BKS)

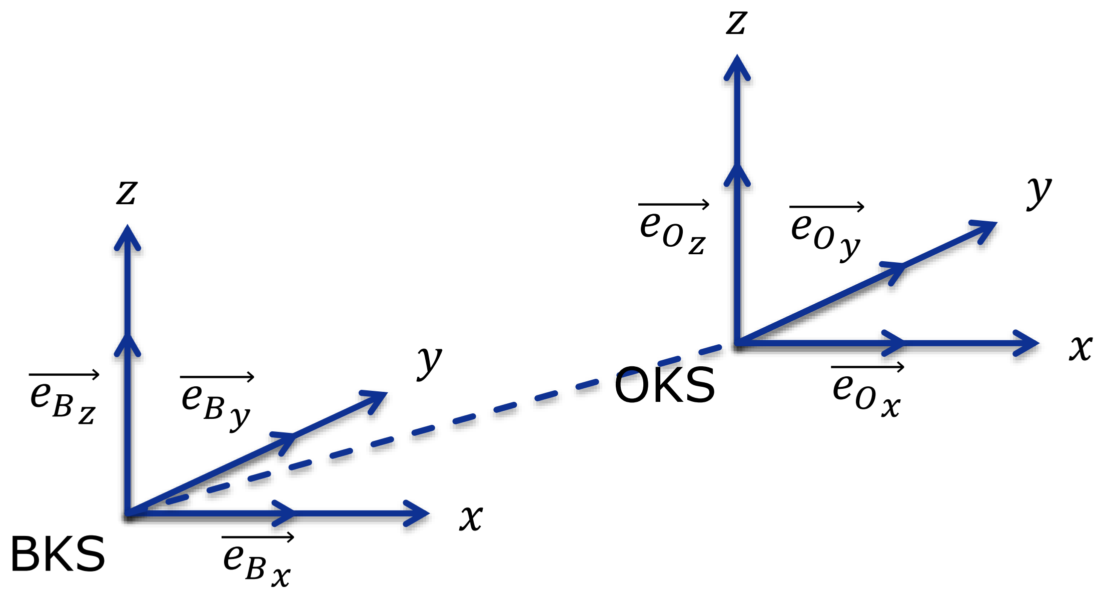
- 3-dim. Koordinatensystem definiert durch orthogonale Einheitsvektoren $\overrightarrow{e_{B_x}}, \overrightarrow{e_{B_y}}, \overrightarrow{e_{B_z}}$



Beschreibung von Objekten und Lagen in E_3

Objektkoordinatensystem (OKS)

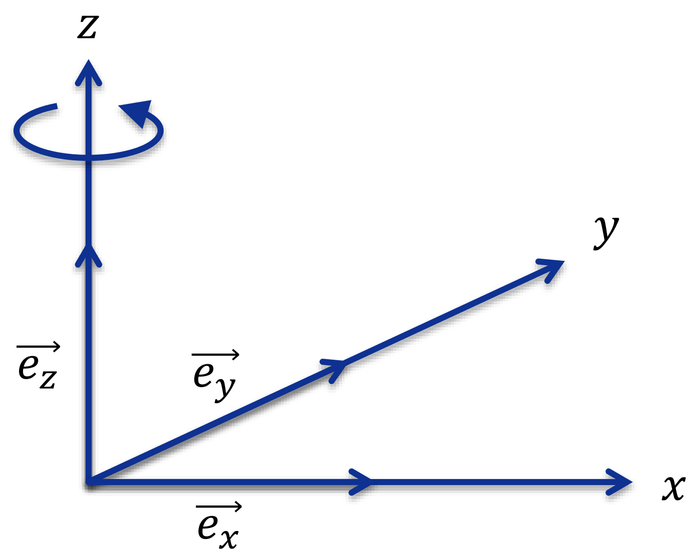
- Jeder starre Körper kann auf ein lokales Koordinatensystem bezogen werden
- Lokales Koordinatensystem wird durch orthogonale Einheitsvektoren $\overrightarrow{e_{O_x}}, \overrightarrow{e_{O_y}}, \overrightarrow{e_{O_z}}$ definiert



Rechtwinklige, kartesische Koordinatensysteme

Rechtsdrehendes Koordinatensystem

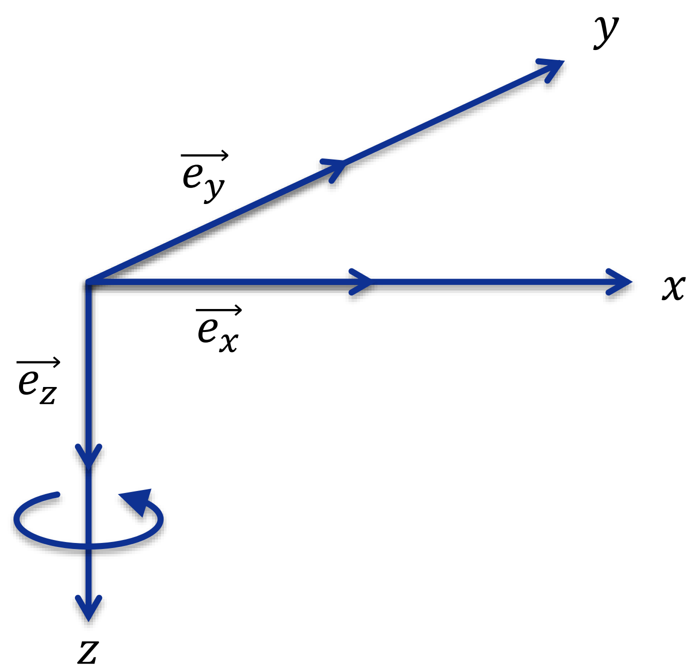
- Rechte-Hand-Regel: Daumen x, Zeigefinger y, Mittelfinger z
- $\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}$ mit $\times$ als Kreuzprodukt
- Richtung nicht angegeben, dann Rechtsdrehendes KS



Rechtwinklige, kartesische Koordinatensysteme

Linksdrehendes Koordinatensystem

- Linke-Hand-Regel: Daumen x, Zeigefinger y, Mittelfinger z
- $\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = -\overrightarrow{e_z}$



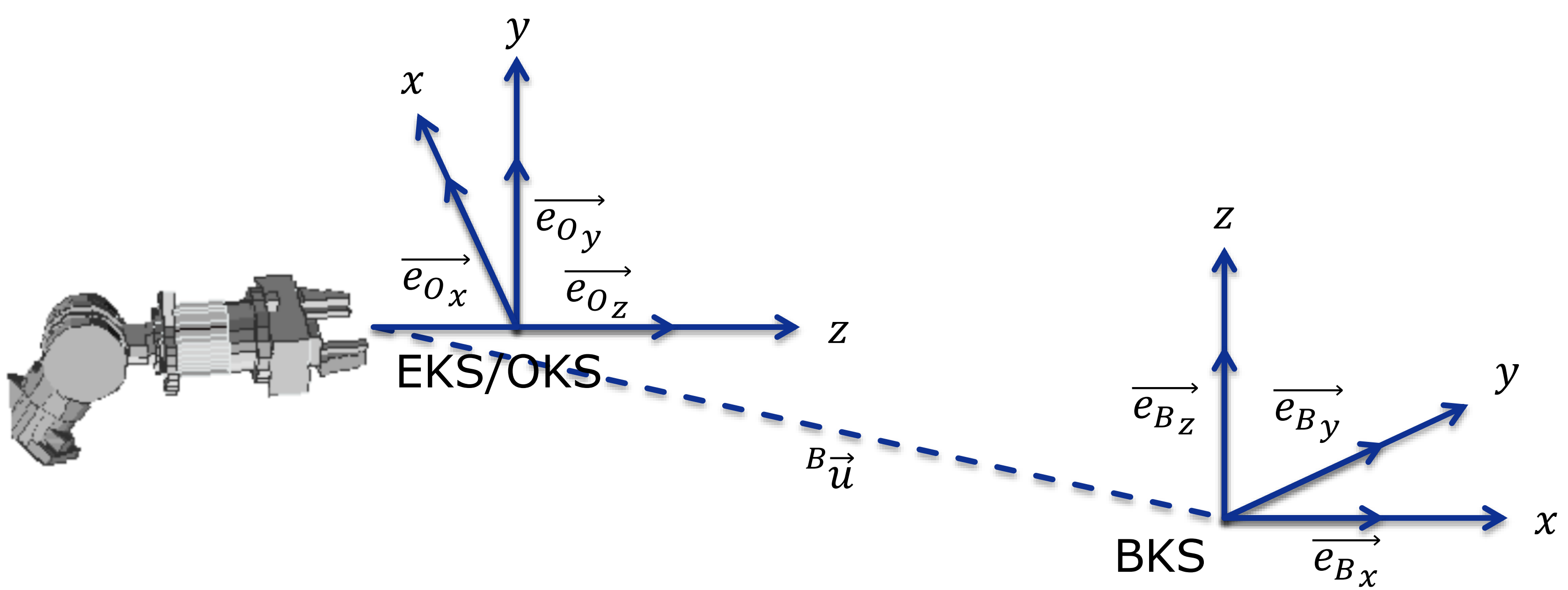
Lage eines Objektes im Raum

- Ort bezogen auf BKS: Ortsvektor vom Ursprung des BKS zum Ursprung des OKS
- Orientierung bezogen auf BKS: Rotationsmatrix zur Abbildung der Einheitsvektoren des OKS auf die Einheitsvektoren des BKS
- Lage: Ortsvektor und Rotationsmatrix des OKS bezogen auf das BKS

Transformationen

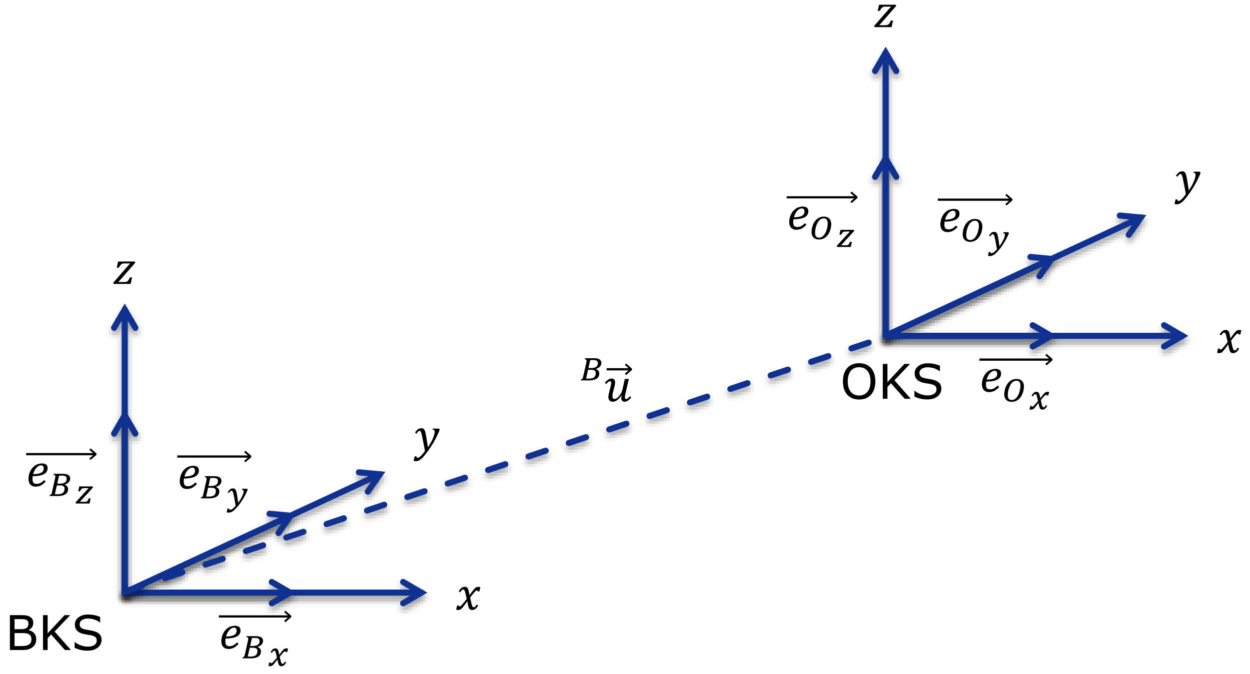
Zur Beschreibung von Roboteranwendungen werden neben dem BKS zahlreiche lokale Koordinatensysteme verwandt, z.B. …

- OKS: Objektkoordinatensystem
- EKS: Effektorkoordinatensystem (TCP)
- SKS: Sensorkoordinatensystem



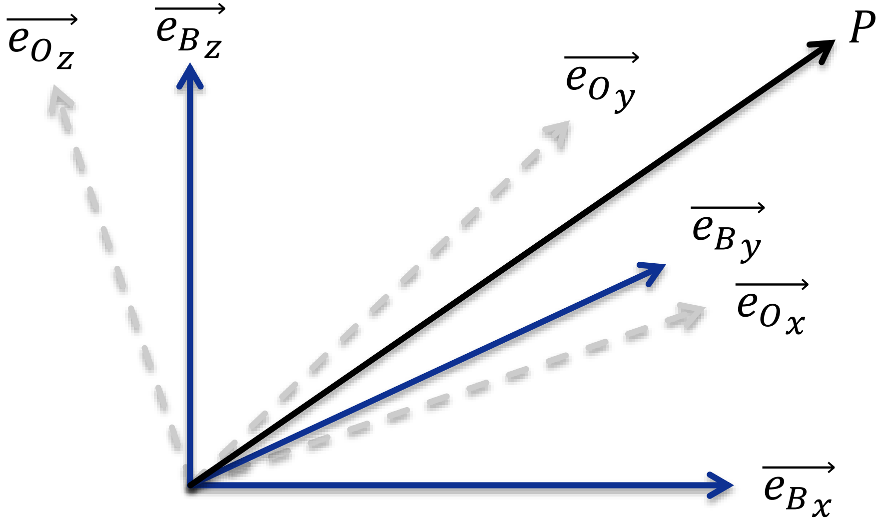
Mögliche Transformation

- Translationsvektor: ${}^{B}\vec{u} = {}^{B}a \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} + {}^{B}b \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} + {}^{B}c \cdot \overrightarrow{e_{B_z}}$
- Rotationsmatrix: $R = R_\alpha \cdot R_\beta \cdot R_\gamma$
- Rotationswinkel um die Koordinatenachsen x, y, z: $\alpha_x, \beta_y, \gamma_z$



Drehung eines Koordinatensystems

- Seien BKS und OKS gegeneinander rotiert mit Einheitsvektoren $\overrightarrow{e_{B_x}}, \overrightarrow{e_{B_y}}, \overrightarrow{e_{B_z}}$ und $\overrightarrow{e_{O_x}}, \overrightarrow{e_{O_y}}, \overrightarrow{e_{O_z}}$
- Gegeben sei der Ortsvektor eines Punktes P, entweder bzgl. des OKS ${}^{O}\vec{p}$ oder bzgl. des BKS ${}^{B}p$. Gesucht ist der Ortsvektor bzgl. des jeweils anderen Koordinatensystems.



Drehung eines Koordinatensystems

- $^{B}\vec{p} = {}^{B}p_x \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} + {}^{B}p_y \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} + {}^{B}p_z \cdot \overrightarrow{e_{B_z}}$ mit $^{B}\vec{p} = \begin{bmatrix} {}^{B}p_x \\ {}^{B}p_y \\ {}^{B}p_z \end{bmatrix}$
- $^{O}\vec{p} = {}^{O}p_x \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} + {}^{O}p_y \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} + {}^{O}p_z \cdot \overrightarrow{e_{O_z}}$ mit $^{O}\vec{p} = \begin{bmatrix} {}^{O}p_x \\ {}^{O}p_y \\ {}^{O}p_z \end{bmatrix}$
- $^{O}\vec{p}$ projeziert auf BKS-Basisvektoren liefert BKS-Koordinaten
  - $^{B}p_x = \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot {}^{O}\vec{p} = \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot {}^{O}p_x + \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot {}^{O}p_y + \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot {}^{O}p_z$
  - $^{B}p_y = \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot {}^{O}\vec{p} = \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot {}^{O}p_x + \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot {}^{O}p_y + \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot {}^{O}p_z$
  - $^{B}p_z = \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot {}^{O}\vec{p} = \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot {}^{O}p_x + \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot {}^{O}p_y + \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot {}^{O}p_z$

Drehung eines Koordinatensystems

Analog erfolgt die Umrechnung von BKS- in OKS-Koordinaten

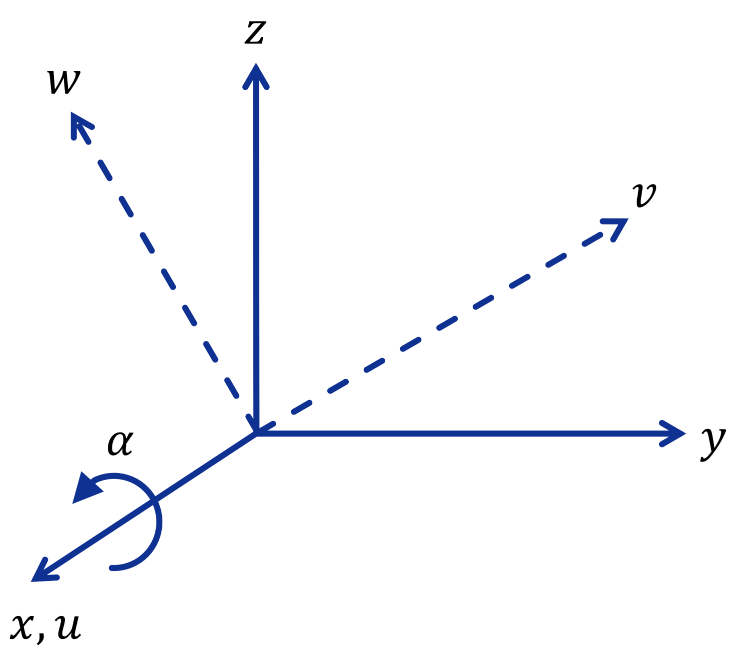
- $^{O}p_x = \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot {}^{B}\vec{p} = \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot {}^{B}p_x + \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot {}^{B}p_y + \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot {}^{B}p_z$
- $^{O}p_y = \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot {}^{B}\vec{p} = \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot {}^{B}p_x + \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot {}^{B}p_y + \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot {}^{B}p_z$
- $^{O}p_z = \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot {}^{B}\vec{p} = \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot {}^{B}p_x + \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot {}^{B}p_y + \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot {}^{B}p_z$

Matrixschreibweise

- $${}^B_O R_1 = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} & \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} & \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} \\ \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} & \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} & \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} \\ \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} & \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} & \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} \end{bmatrix} \text{ und } {}^O\vec{p} = \begin{bmatrix} {}^O p_x \\ {}^O p_y \\ {}^O p_z \end{bmatrix}$$
- $${}^O_B R_2 = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} & \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} & \overrightarrow{e_{O_x}} \cdot \overrightarrow{e_{B_z}} \\ \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} & \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} & \overrightarrow{e_{O_y}} \cdot \overrightarrow{e_{B_z}} \\ \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot \overrightarrow{e_{B_x}} & \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot \overrightarrow{e_{B_y}} & \overrightarrow{e_{O_z}} \cdot \overrightarrow{e_{B_z}} \end{bmatrix} \text{ und } {}^B\vec{p} = \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ {}^B p_y \\ {}^B p_z \end{bmatrix}$$
- $${}^B\vec{p} = {}^B_O R_1 \cdot {}^O\vec{p} = {}^O_B R_2^{-1} \cdot {}^O\vec{p}$$
- $${}^O\vec{p} = {}^O_B R_2 \cdot {}^B\vec{p} = {}^B_O R_1^{-1} \cdot {}^B\vec{p}$$
- Somit $R_1 = R_2^{-1}$, $R_2 = R_1^{-1}$ sowie $R_2 = R_1^T$
  - Ergebnis: Orthogonale Matrizen
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$

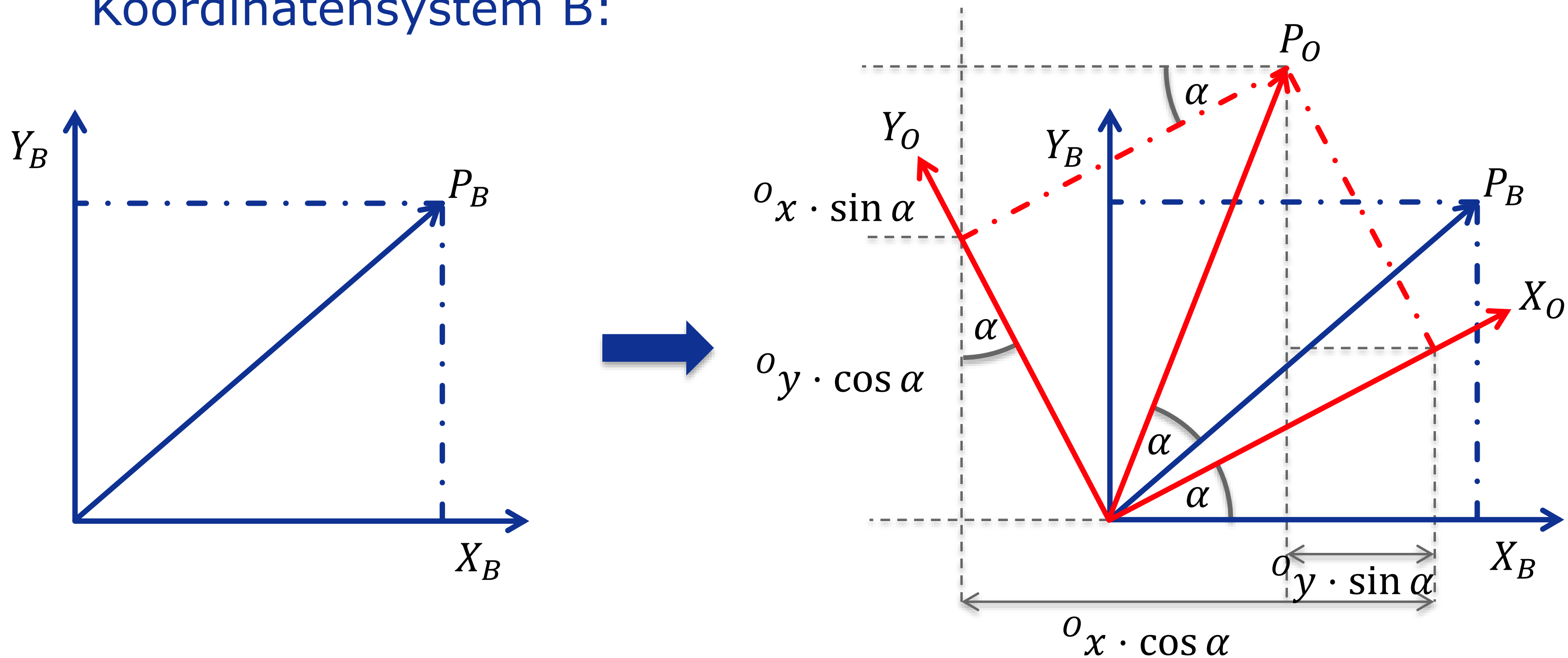
Drehung um x-Achse mit Winkel α

- $$\begin{matrix} \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} = 1 & \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} = 0 & \overrightarrow{e_{B_x}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} = 0 \\ \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} = 0 & \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} = \cos(\alpha) & \overrightarrow{e_{B_y}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} = \mathrm{c}(\alpha) \\ \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_x}} = 0 & \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_y}} = \mathrm{c}(-\alpha) & \overrightarrow{e_{B_z}} \cdot \overrightarrow{e_{O_z}} = \cos(\alpha) \end{matrix}$$
- $\mathrm{c}(\alpha) = \cos(90 + \alpha) = -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$
- $$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{C}\alpha & -\mathrm{S}\alpha \\ 0 & \mathrm{S}\alpha & \mathrm{C}\alpha \end{bmatrix}$$
- $\mathrm{C} = \cos,\ \mathrm{S} = \sin$



Rotationsmatrix: Geometrische Herleitung

- Frame $OX_OY_OZ_O$ ist aus Frame $BX_BY_BZ_B$ durch Rotation um die z-Achse mit Winkel α entstanden.
- Berechnung der Koordinaten von Punkt $P_O = ({}^Ox, {}^Oy, {}^Oz)^T$ im Koordinatensystem B:



Rotation um die z-Achse

- Drehung um Winkel α um z-Achse
  - Punkt P_O mit den Koordinaten $\left({}^{O}x, {}^{O}y, {}^{O}z\right)^T$ im OKS erhält im BKS die Koordinaten …

$$\begin{aligned} {}^{B}x &= {}^{O}x \cdot \cos\alpha - {}^{O}y \cdot \sin\alpha \\ {}^{B}y &= {}^{O}x \cdot \sin\alpha - {}^{O}y \cdot \cos\alpha \\ {}^{B}z &= {}^{O}z \end{aligned}$$

  - z-Koordinate fest, da z-Achse Drehachse ist
- Matrixform: ${}^{B}\vec{p} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{O}x \\ {}^{O}y \\ {}^{O}z \end{bmatrix} = {}^{B}_{O}R_z(\alpha) \cdot {}^{O}\vec{p}$

Rotationsmatrix

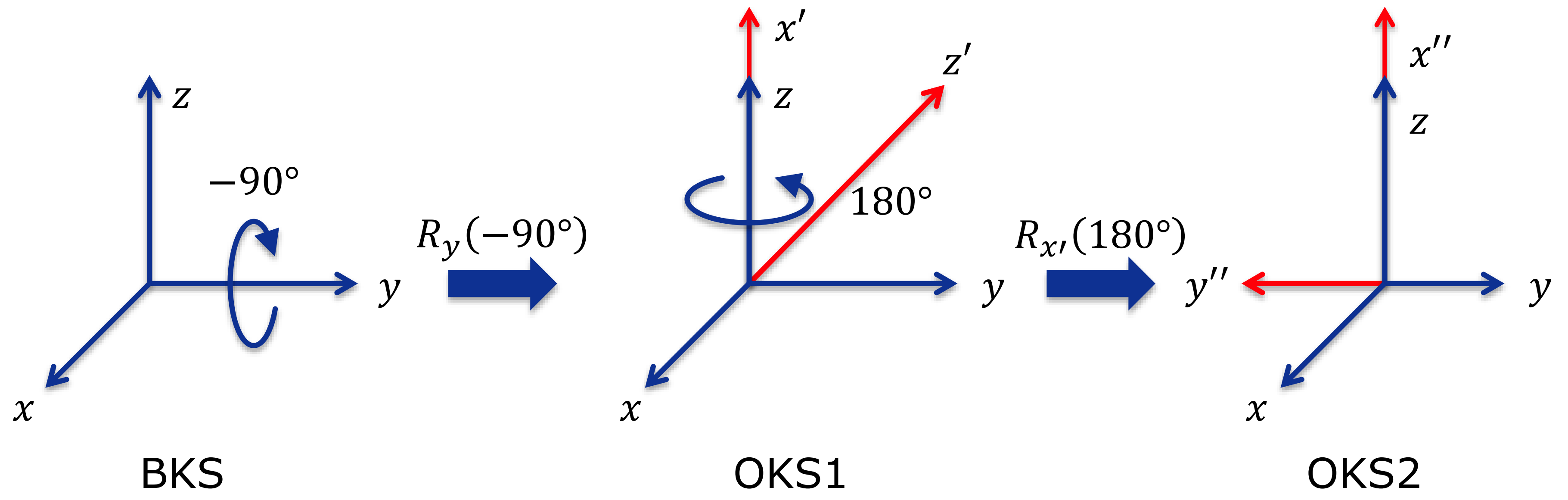
- Rotationsmatrix $R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ beschreibt Drehung
- Drehungen um x und y-Achse analog
  - $R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$
  - $R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Rotationsmatrix: Eigenschaften

- Affine Abb. von $\mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$
- Reelle Matrix
- Quadratisch
- Regulär
- Orthogonal
  - Zeilen- bzw. Spaltenvektoren orthogonal zueinander
- Sei R Rotationsmatrix
  - Rang $R_g(R) = 3$
  - $R^T = R^{-1}$
  - $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = E$
  - $\det R = 1$

Verkettete, elementare Rotationen

Sei OKS durch 2 Rotationen aus BKS entstanden



$$R_y(-90°) = \begin{bmatrix} \cos -\frac{\pi}{2} & 0 & \sin -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin -\frac{\pi}{2} & 0 & \cos -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \qquad R_{x'}(180°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}$$

Verkettete, elementare Rotationen

- Berechnung von ${}^{B}\vec{u}$ aus ${}^{O2}\vec{u}$
- ${}^{B}\vec{u} = {}^{B}_{O1}R_y(-90°) \cdot {}^{O1}\vec{u} = {}^{B}_{O1}R_y(-90°) \cdot {}^{O1}_{O2}R_{x'}(180°) \cdot {}^{O2}\vec{u}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{O2}u_1 \\ {}^{O2}u_2 \\ {}^{O2}u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{O2}u_3 \\ -{}^{O2}u_2 \\ {}^{O2}u_1 \end{pmatrix}$$

- ${}^{B}\overrightarrow{e_{O2_x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ${}^{B}\overrightarrow{e_{O2_y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ${}^{B}\overrightarrow{e_{O2_z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Interpretation von verketteten Rotationen

- Vormultiplikation: $R = \big(R_n(R_{n-1} \cdots (R_2 R_1) \cdots)\big)$
  - Interpretation: Drehung des momentanen KS um feste Achsen des Ursprungskoordinatensystems
- Nachmultiplikation: $R = \big((\cdots (R_1 R_2) \cdots R_{n-1})R_n\big)$
  - Interpretation: Drehung um momentanes KS

Drehachsen in der Robotik

Festlegung der Rotationsachsen und Reihenfolge üblicherweise in …

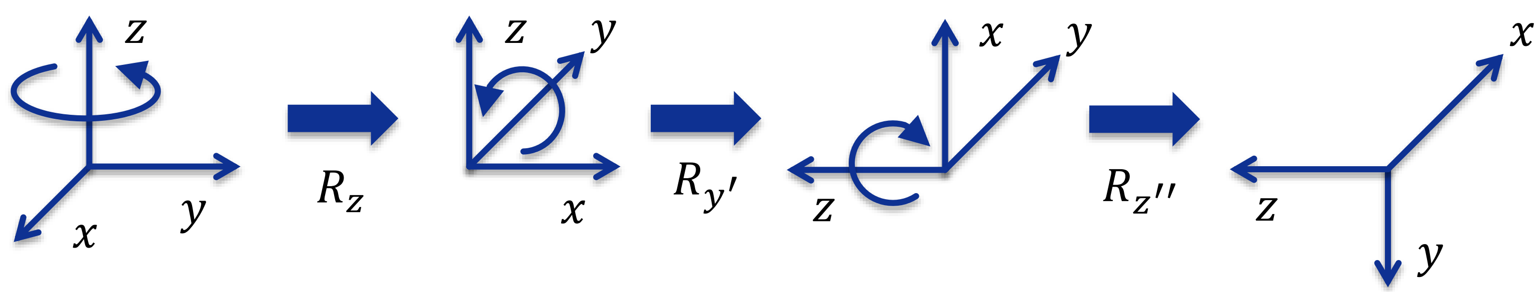
- Euler-Winkel
- Roll, Pitch, Yaw

Euler-Winkel (zxz)

- Drehung α um die z-Achse des BKS: $R_z(\alpha)$
- Drehung β um die neue x-Achse x': $R_{x'}(\beta)$
- Drehung γ um die neue z-Achse z'': $R_{z''}(\gamma)$
- $R_s = R_z(\alpha) \cdot R_{x'}(\beta) \cdot R_{z''}(\gamma)$
- $R_s(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \mathrm{C}\alpha\,\mathrm{C}\gamma - \mathrm{C}\beta\,\mathrm{S}\gamma\,\mathrm{S}\alpha & -\mathrm{C}\alpha\,\mathrm{S}\gamma - \mathrm{C}\beta\,\mathrm{C}\gamma\,\mathrm{S}\alpha & \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{S}\beta \\ \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{C}\gamma + \mathrm{C}\beta\,\mathrm{S}\gamma\,\mathrm{C}\alpha & \mathrm{C}\alpha\,\mathrm{C}\beta\,\mathrm{C}\gamma - \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{S}\gamma & -\mathrm{C}\alpha\,\mathrm{S}\beta \\ \mathrm{S}\gamma\,\mathrm{S}\beta & \mathrm{C}\gamma\,\mathrm{S}\beta & \mathrm{C}\beta \end{bmatrix}$

Euler-Winkel (zyz)

- Drehung α um die z-Achse des BKS: $R_z(\alpha)$
- Drehung β um die neue y-Achse y': $R_{y'}(\beta)$
- Drehung γ um die neue z-Achse z'': $R_{z''}(\gamma)$
- $R_s = R_z(\alpha) \cdot R_{y'}(\beta) \cdot R_{z''}(\gamma)$
- $$R_s(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} C\alpha\, C\beta\, C\gamma - S\alpha\, S\gamma & -C\alpha\, C\beta\, S\gamma - S\alpha\, C\gamma & C\alpha\, S\beta \\ S\alpha\, C\beta\, C\gamma + C\alpha\, S\gamma & -S\alpha\, C\beta\, S\gamma + C\alpha\, C\gamma & S\alpha\, S\beta \\ -S\beta\, C\gamma & S\beta\, S\gamma & C\beta \end{bmatrix}$$
- Drehung um veränderte Achsen $R_{z,\alpha}, R_{y',\beta}, R_{z'',\gamma}$

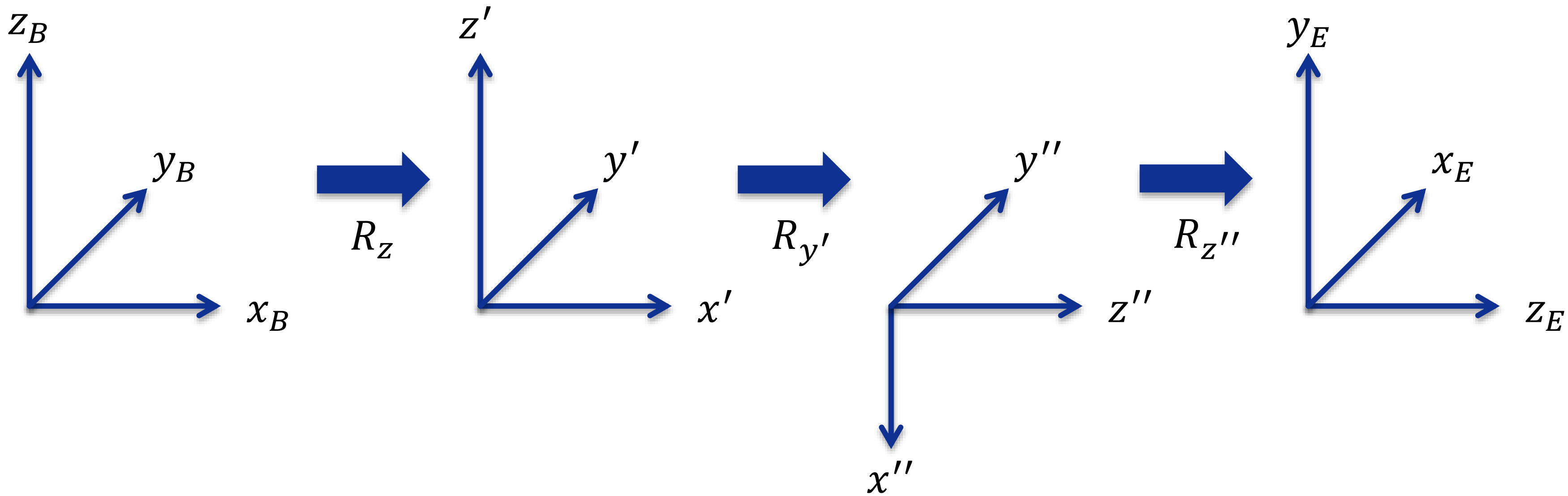


Euler-Winkel: Beispiel

$$R_s = R_z(0°) \cdot R_{y'}(90°) \cdot R_{z''}(90°)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



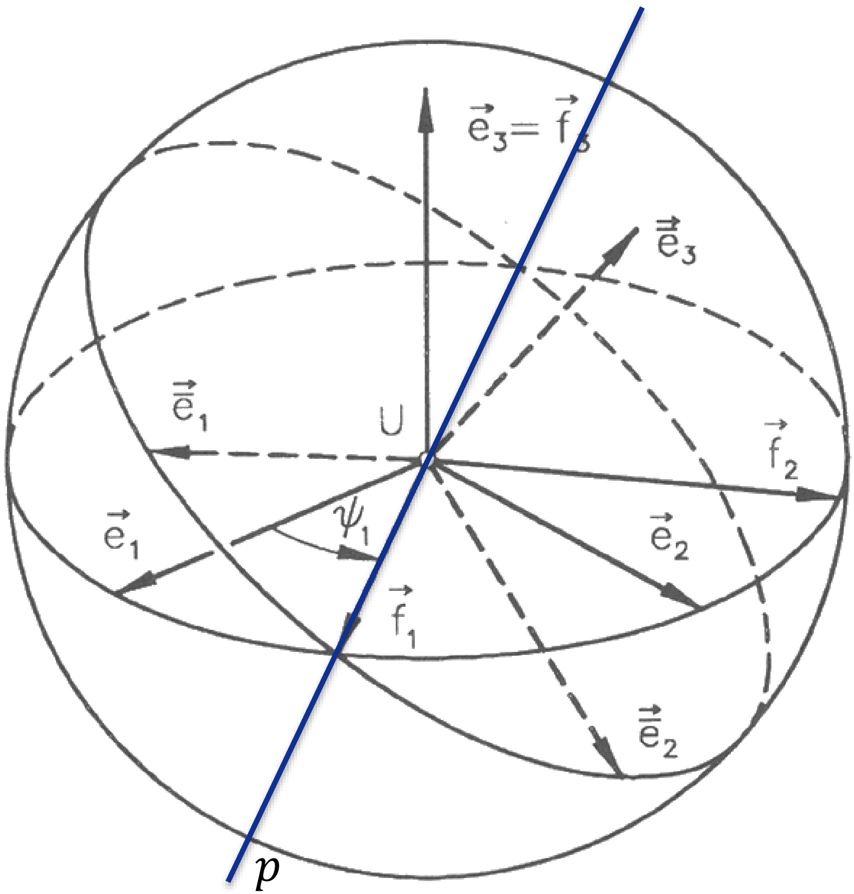
Euler-Winkel: Herleitung

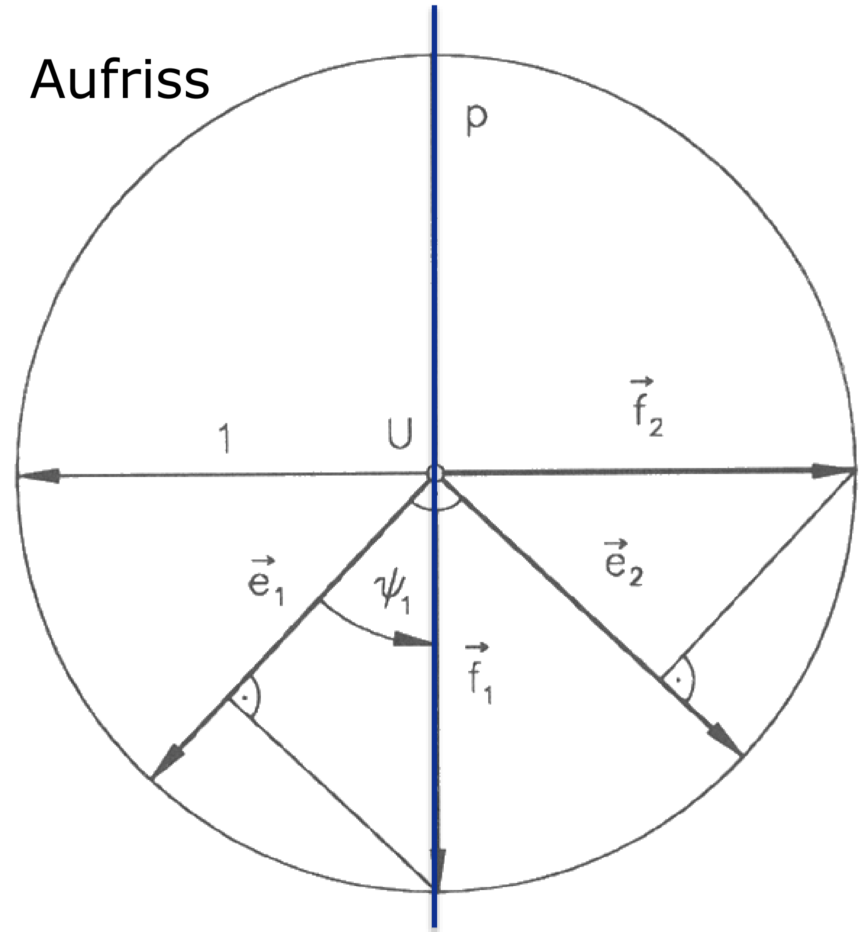
- Beweis: Mit Euler-Winkel können alle Orientierungen beschrieben werden

- Satz: Sind zwei kartesische Rechtssysteme $R = \{U, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ und $\bar{R} = \{U, \overrightarrow{\bar{e}_1}, \overrightarrow{\bar{e}_2}, \overrightarrow{\bar{e}_3}\}$ mit gemeinsamen Ursprung gegeben, so gibt es eine orthogonale Matrix A, die R nach $\bar{R}$ abbildet.

- Herleitung: Siehe KS-Bild für Euler-Winkel

Euler-Winkel: Koordinatensysteme



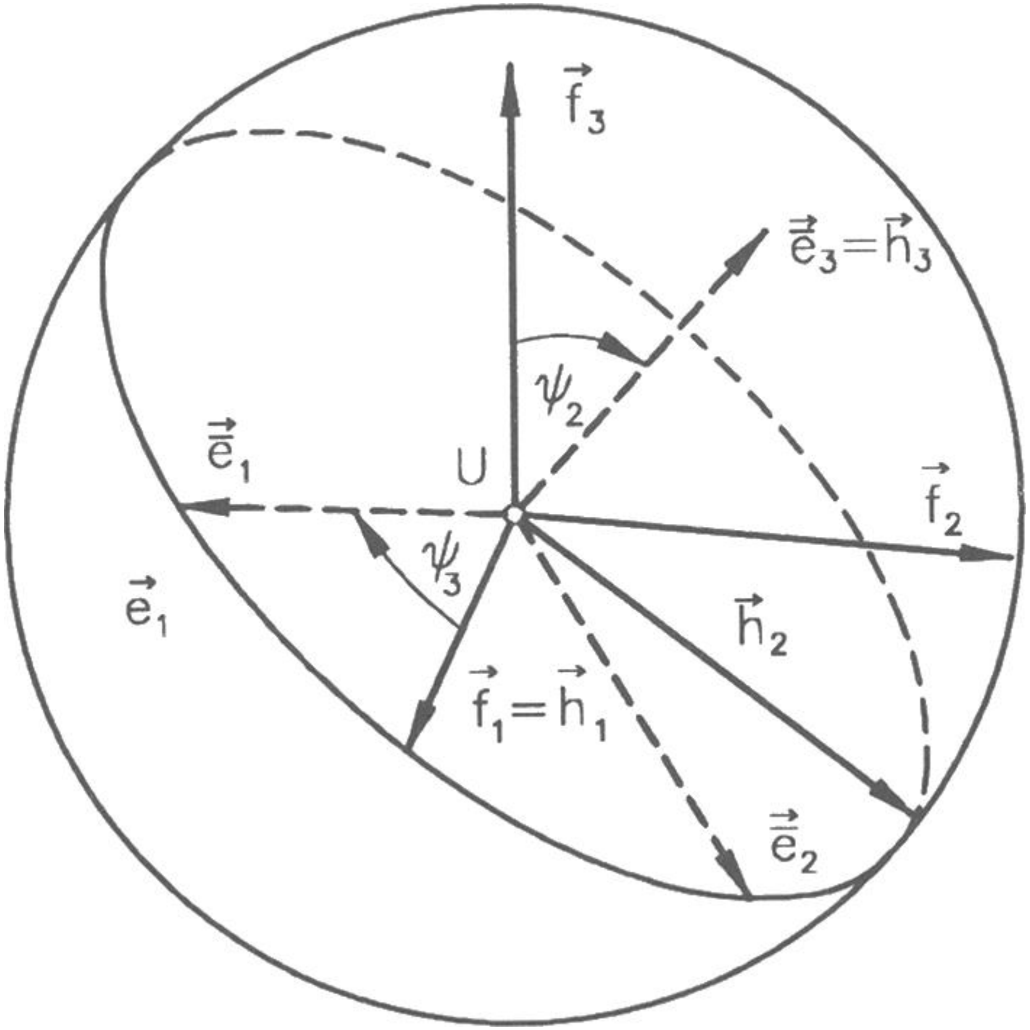


Ebene E_1 (aufgespannt durch $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$) schneidet E_2 (aufgespannt durch $\overrightarrow{\overrightarrow{e_1}}$ und $\overrightarrow{\overrightarrow{e_2}}$) in einer Gerade p (Knotenlinie).

Euler-Winkel: Herleitung

1. Drehe um $\overrightarrow{e_3}$ um Winkel ψ_1 im positiven Sinn, sodass $\overrightarrow{e_1}$ auf $\overrightarrow{f_1}$ abgebildet wird
   - $\overrightarrow{f_1}$ liegt auf p, wobei $\overrightarrow{f_1}$ durch positive Drehung um ψ_1 entsteht mit $0 \leq \psi_1 \leq \pi$
   - R geht über in $R = \{U, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_3}\}$
   - $A_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & -\sin\psi_1 & 0 \\ \sin\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_1 = RA_1$
   - $\overrightarrow{f_1} \perp \overrightarrow{e_3}$ und $\overrightarrow{\mathrm{f}_1} \perp \overrightarrow{\overline{e_3}}$

Euler-Winkel: Koordinatensysteme



Euler-Winkel: Herleitung

2. Drehe R_1 um Achse $\overrightarrow{f_1}$ um Winkel ψ_2, sodass $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_3}$ mit $\overrightarrow{\overrightarrow{e_3}}$ zusammenfällt
   - R geht über in $R_2 = \{U, \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{h_3} = \overrightarrow{\overrightarrow{e_3}}\}$
   - $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_2 & -\sin\psi_2 \\ 0 & \sin\psi_2 & \cos\psi_2 \end{bmatrix} R_2 = R_1 A_2$
   - $\overrightarrow{f_2}$ wird auf $\overrightarrow{h_2}$ abgebildet
   - $\overrightarrow{h_2}$ liegt in der von $\overrightarrow{\overrightarrow{e_1}}$ und $\overrightarrow{\overrightarrow{e_2}}$ aufgespannten Ebene

Euler-Winkel: Herleitung

3. Drehe R_2 um Winkel ψ_3, sodass R_2 mit $\bar{R}$ zusammenfällt

- $A_3 = \begin{bmatrix} \cos\psi_3 & -\sin\psi_3 & 0 \\ \sin\psi_3 & \cos\psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_3 = R_2 A_3$

Euler-Winkel: Herleitung

- $\bar{R} = (R_1 A_2) A_3 = (R A_1)(A_2 A_3)$
- Sei $A = A_1 A_2 A_3$, dann $\bar{R} = RA$ mit $A =$
$$\begin{bmatrix} C\psi_1 C\psi_3 - S\psi_1 C\psi_2 S\psi_3 & -C\psi_1 S\psi_3 - S\psi_1 C\psi_2 C\psi_3 & S\psi_1 S\psi_2 \\ S\psi_1 C\psi_3 - C\psi_1 C\psi_2 S\psi_3 & -S\psi_1 S\psi_3 + C\psi_1 C\psi_2 C\psi_3 & -C\psi_1 S\psi_2 \\ S\psi_2 S\psi_3 & S\psi_2 C\psi_3 & C\psi_2 \end{bmatrix}$$
- Durch Koeffizientenvergleich lassen sich ψ_1, ψ_2, ψ_3 eindeutig bestimmen mit $0 \leq \psi_1 < \pi$
  - $\cos\psi_2 = a_{33}$ $\sin\psi_1 \sin\psi_2 = a_{13}$ $-\sin\psi_2 \cos\psi_1 = a_{23}$
  - $\sin\psi_2 \sin\psi_3 = a_{31}$ $\sin\psi_2 \cos\psi_3 = a_{32}$

Drehachse und Drehwinkel

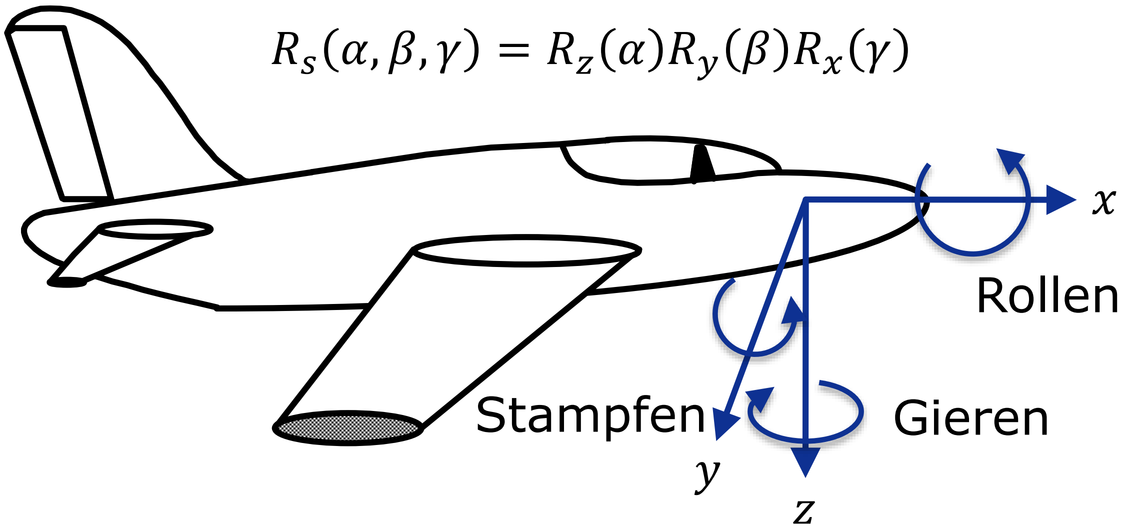
- Jede orthogonale (3×3) Matrix $A = (a_{ik})$ mit $\det A = 1$ beschreibt eine Drehung um Achse g um Drehwinkel ψ.
- Drehwinkel $\cos\psi = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)$
- Falls $\psi \neq 0°$ und $\psi \neq 180°$, dann Drehachse g …
  - $g_1 = (a_{32} - a_{23})$
  - $g_2 = (a_{13} - a_{31})$
  - $g_3 = (a_{21} - a_{12})$
- Satz von Rodriques: Rotation des Vektors $\vec{q}$ um die Achse, die durch Vektor $\vec{k}$ beschrieben wird, mit Winkel θ.

$$\overrightarrow{q'} = \vec{q}\cos\theta + \sin\theta\left(\vec{k} \times \vec{q}\right) + (1 - \cos\theta)\left(\vec{k} \cdot \vec{q}\right)\vec{k}$$

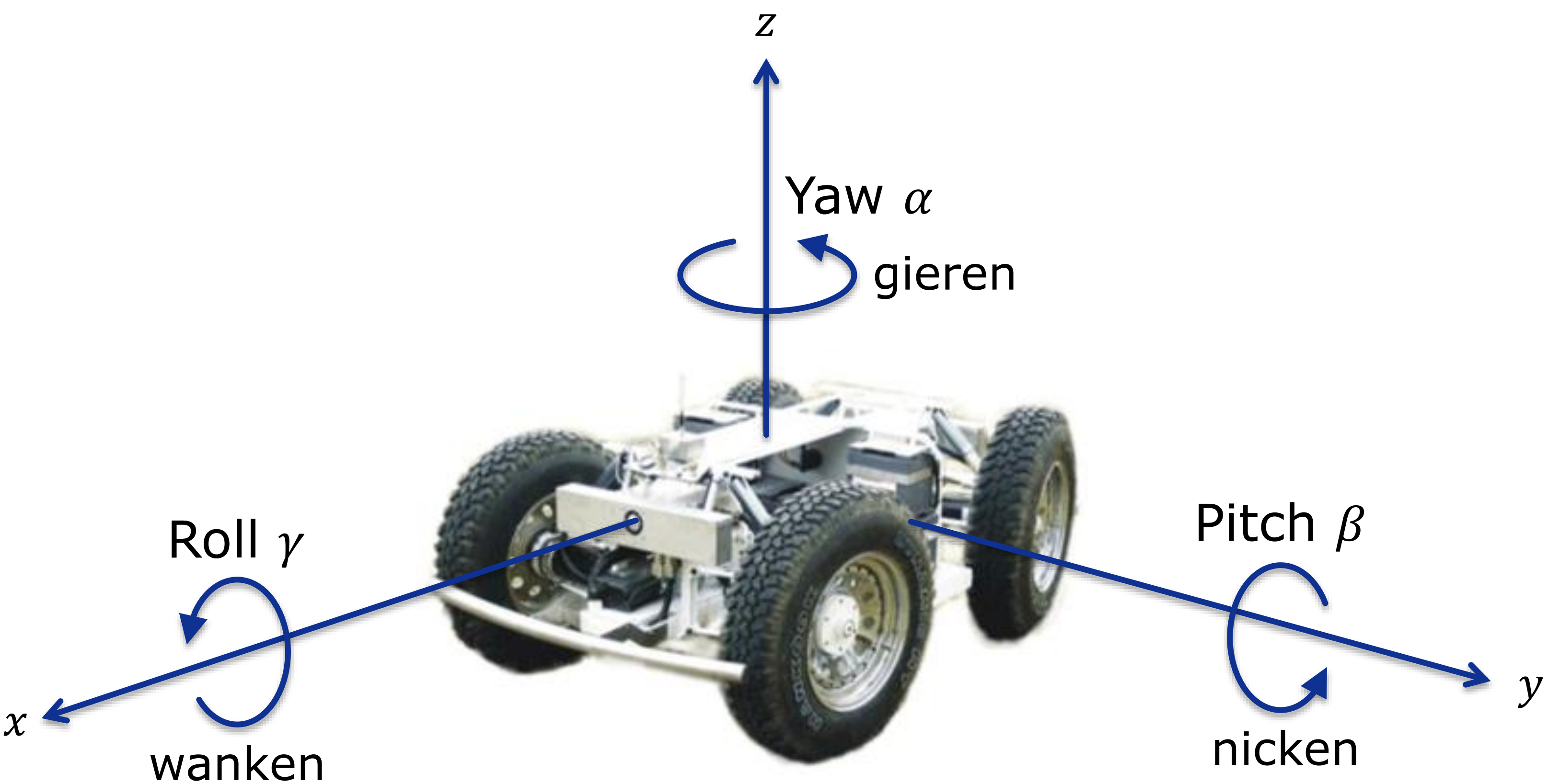
Roll-Pitch-Yaw (Rollen-Stampfen-Gieren)

- Drehung γ (Scherwinkel) um x-Achse des BKS: $R_x(\gamma)$
  - rollen, schlingern, wanken, eng: roll
- Drehung b (Neigungswinkel) um y-Achse des BKS: $R_y(\beta)$
  - stampfen, neigen, nicken, eng: pitch
- Drehung a (Rollwinkel) um z-Achse des BKS: $R_z(\alpha)$
  - gieren, schwenken, scheren, eng: yaw

$$R_s(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$$



Roll-Pitch-Yaw in der Robotik



Roll-Pitch-Yaw: Rotationsmatrix

- $$R_s = \begin{bmatrix} \mathrm{C}\alpha\,\mathrm{C}\beta & \mathrm{C}\alpha\,\mathrm{S}\beta\,\mathrm{S}\gamma - \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{C}\gamma & \mathrm{C}\alpha\,\mathrm{S}\beta\,\mathrm{C}\gamma + \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{S}\gamma \\ \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{C}\beta & \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{S}\beta\,\mathrm{S}\gamma + \mathrm{C}\alpha\,\mathrm{C}\gamma & \mathrm{S}\alpha\,\mathrm{S}\beta\,\mathrm{C}\gamma - \mathrm{C}\alpha\,\mathrm{S}\gamma \\ -\mathrm{S}\beta & \mathrm{C}\beta\,\mathrm{S}\gamma & \mathrm{C}\beta\,\mathrm{C}\gamma \end{bmatrix}$$
- Rotationsmatrix R_S bezogen auf das BKS
- Drehung um unveränderte Achsen
  - Aufschreiben von rechts nach links!

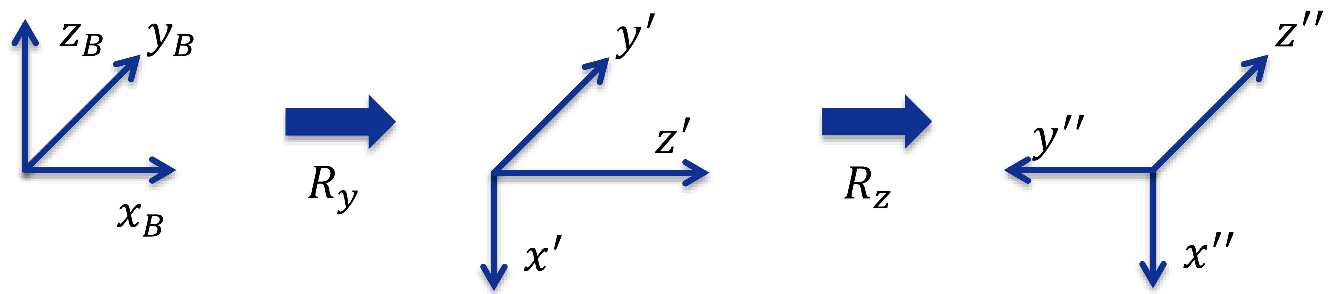
Roll-Pitch-Yaw: Beispiel

Roll-Pitch-Yaw: $R_s = R_z(90°) \cdot R_y(90°) \cdot R_x(0°)$

$$
\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$



Darstellung der Orientierung

- Roll-Pitch-Yaw
  - xyz-System
  - Luft- und Raumfahrt
- Euler-Winkel:
  - $zx'z''$-System: Übliche Definition in der Mathematik
  - $zy'x''$-System: Programmierung numerisch gesteuerter Handhabungseinrichtungen
  - $zy'z''$-System: Programmiersprache VAL, PUMA-Roboter
  - IRDATA (Handgelenk TRR)

Nächste Vorlesung

- Grundlagen zur Raumkinematik
  - Homogene Koordinaten
  - Transformationsmatrizen
  - Verkettete Lagebeschreibungen