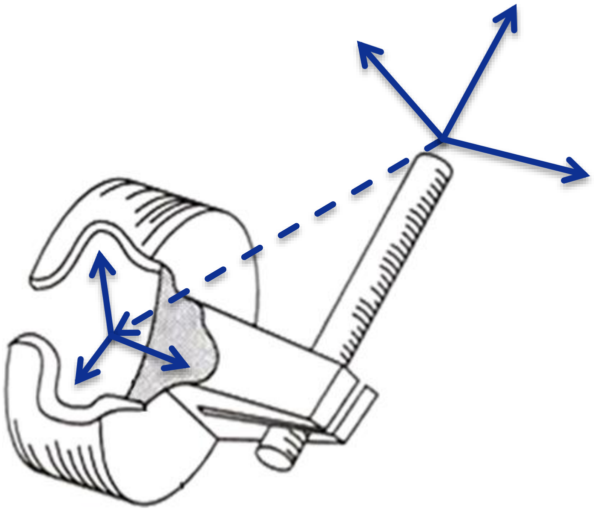
Robotermodellierung III



Prof. Karsten Berns
Robotics Research Lab
Department of Computer Science
University of Kaiserslautern, Germany

Inhalt

- Geschwindigkeitsbetrachtung der Glieder eines Manipulators bei Stellgrößenänderung der Gelenke
- Umrechnung von Geschwindigkeiten in andere KS
  - Koordinatensystem werden häufig als Frame bezeichnet
- Geschwindigkeit eines Gliedes als Überlagerung von translatorischer und rotatorischer Geschwindigkeit berechnen
- Zusammenhang zwischen Gelenk- und kartesischer Geschwindigkeit des Endeffektors (Jacobi-Matrix)
- Untersuchung von Kräften und Momenten bei starrer kinematischer Kette

Geschwindigkeitsvektor

- Freier Vektor (kein Anfangspunkt; nur Betrag u. Richtung)
  - Nur Rotation wird berücksichtigt
- Ableitung eines Positionsvektors nach Zeit: ${}^{B}\vec{v}_q = \frac{d}{dt}\,{}^{B}\vec{q}$
- Umrechnung in rotiertes KS: ${}^{A}\vec{v}_q = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q$

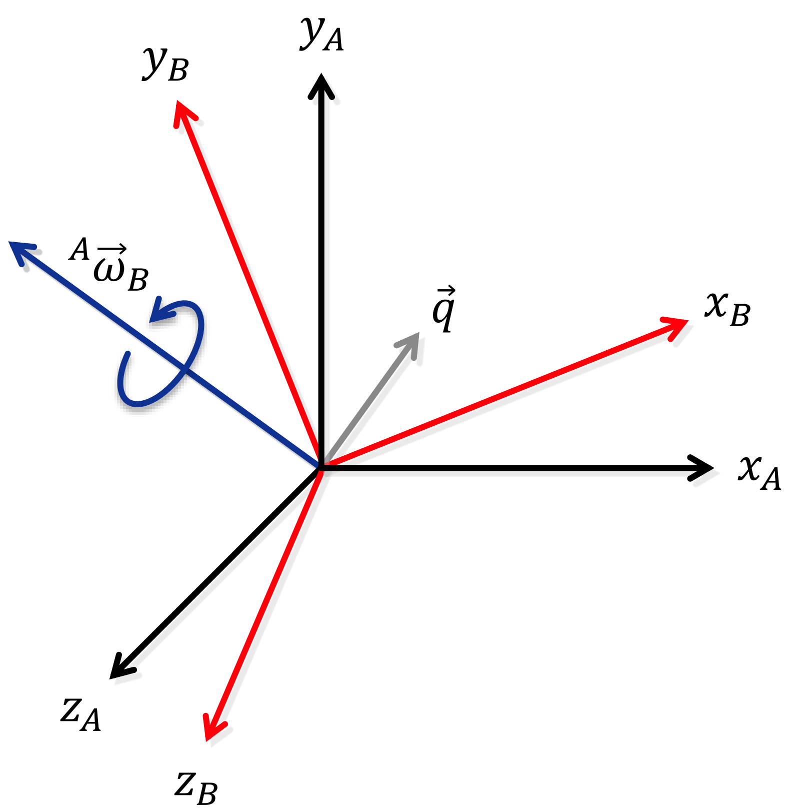
Lineargeschwindigkeiten

- Ursprung OB des Systems B bewegt sich mit einer Lineargeschwindigkeit ${}^{A}\vec{v}_{OB}$ relativ zu System A
- Punkt ${}^{B}\vec{q}$ dargestellt in System B bewegt sich mit einer Lineargeschwindigkeit ${}^{B}\vec{v}_{q}$
- System B ist aus System A durch Rotation ${}^{A}_{B}R$ entstanden
- Lineargeschwindigkeit des Punktes ${}^{B}\vec{q}$ bezogen auf System A:

$$ {}^{A}\vec{v}_{q} = {}^{A}\vec{v}_{OB} + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_{q} $$

Rotationsgeschwindigkeiten

- System A und System B haben den selben Ursprung
- Lineargeschwindigkeit zwischen den Systemen ist 0: ${}^{A}\vec{v}_{OB} = 0$
- ${}^{B}\vec{q}$ ist dargestellt in System B
- System B rotiert um eine Achse durch den gemeinsamen Ursprung von A und B mit einer Rotationsgeschwindigkeit ${}^{A}\vec{\omega}_{B}$



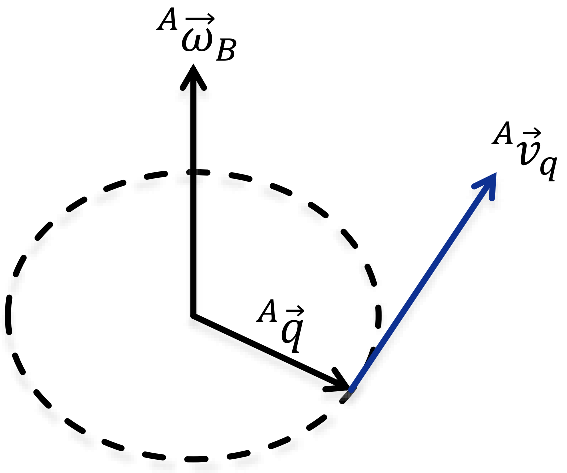
Rotationsgeschwindigkeiten

- Bahngeschwindigkeit des Punktes $\vec{q}$: ${}^{A}\vec{v}_q = {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}\vec{q}$
- Unter Berücksichtigung der eigenen Lineargeschwindigkeit

$$ {}^{A}\vec{v}_q = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q + {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} $$

- Linear- u. Rotationsgeschwindigkeit

$$ {}^{A}\vec{v}_q = {}^{A}\vec{v}_{OB} + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q + {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} $$



Punktgeschw. in anderem Referenzsystem

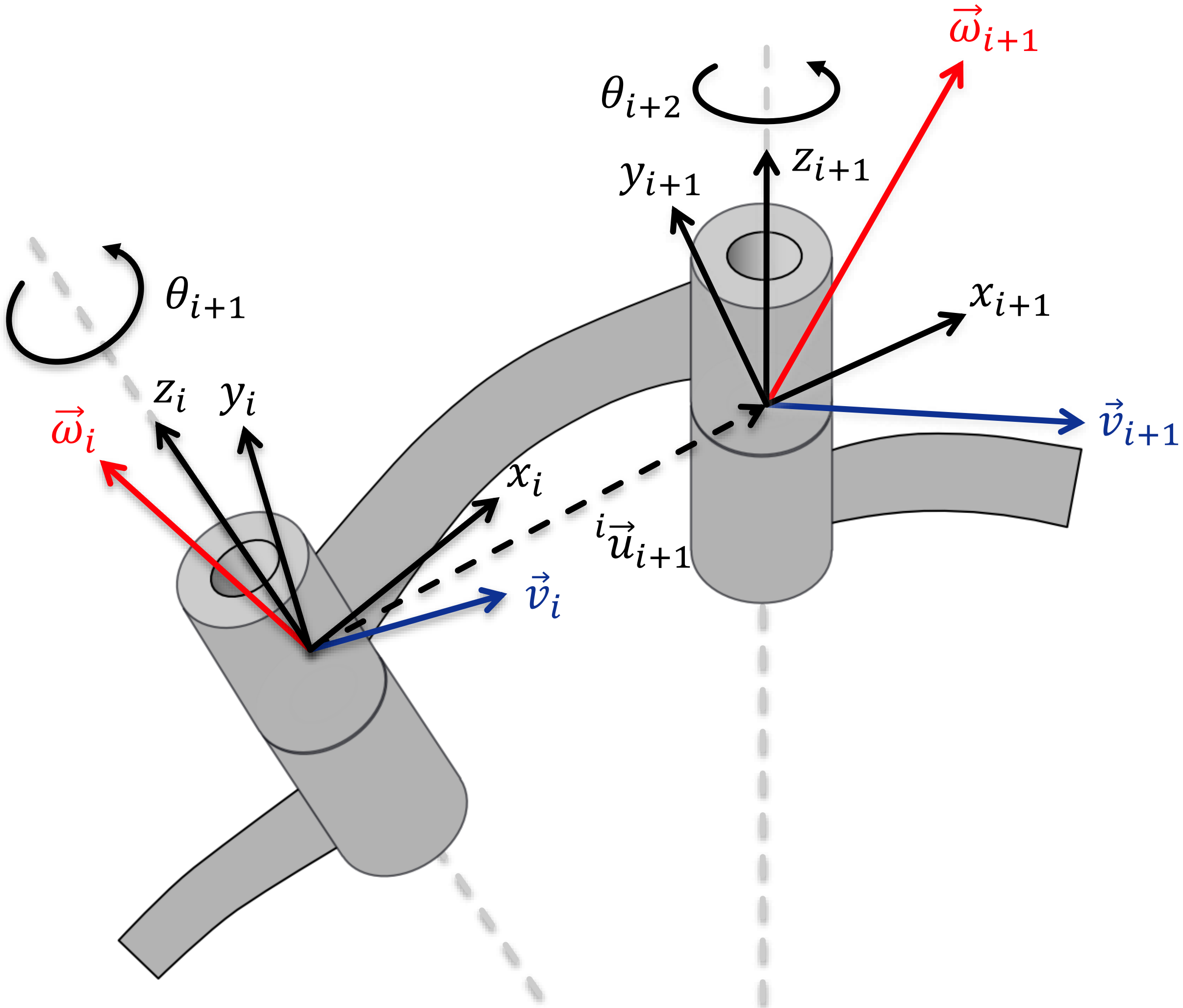
$$ {}^{A}\vec{v}_q = {}^{A}\vec{v}_{OB} + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q + {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} $$

- ${}^{A}\vec{v}_{OB}$: Translatorische Geschw. des Ursprungs OB in System A
- ${}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q$: Translatorische Geschwindigkeit des Punktes ${}^{B}\vec{q}$ im System B umgerechnet auf das Referenzsystem A
- ${}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q}$: Translatorischer Geschwindigkeitsanteil des Punktes aufgrund der Rotation des Systems B gegenüber A

Geschwindigkeit der Roboterglieder

- Geschwindigkeit des Endeffektors eines Roboters mit n Gelenken berechnet sich aus der kinematischen Struktur und allen an der Bewegung beteiligten Gliedern
- Geschwindigkeit eines Glieds setzt sich zusammen aus Geschwindigkeit seines körperfesten KS und rotatorischer und translatorischer Geschwindigkeit des Glieds
- Geschwindigkeit des Endeffektors im Basissystem wird bestimmt durch sukzessive Berechnung der Geschwindigkeiten der Glieder ausgehend von der Basis
- Geschwindigkeit des Glieds $i+1$ als Summe der Geschwindigkeit von Glied i und der aus Relativbewegung zwischen i und $i+1$ resultierenden Komponente
  - Achtung: Beide Summanden müssen im gleichen Koordinatensystem vorliegen!

Koordinatensystem und Bezeichner



Rotationsgeschwindigkeit bei Rotationsgelenken

- Sei Gelenk $i+1$ ein Rotationsgelenk mit Freiheitsgrad θ_{i+1}
- ${}^{i}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i}\vec{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$
  - ${}^{i}\vec{\omega}_{i}$: Rotationsgeschwindigkeit von Glied i
  - $\dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$: Komponente durch Rotation von Gelenk $i+1$
  - $\dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_{i+1} \end{pmatrix}^T$
- Transformation von ${}^{i}\vec{\omega}_{i+1}$ in das System $i+1$ durch Multiplikation mit ${}^{i+1}_{i}R$: ${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\vec{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \right)$

Lineargeschwindigkeit bei Rotationsgelenken

- Für die translat. Geschwindigkeit des Koordinatenursprungs des Systems $i+1$ dargestellt in System i gilt

$$ {}^{i}\vec{v}_{i+1} = {}^{i}\vec{v}_{i} + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} $$

- Dargestellt in System $i+1$

$$ {}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\vec{v}_{i} + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} \right) $$

Geschwindigkeiten bei Lineargelenken

- Sei Gelenk i ein Translationsgelenk mit Freiheitsgrad d_i
- Rotationsgeschwindigkeit:

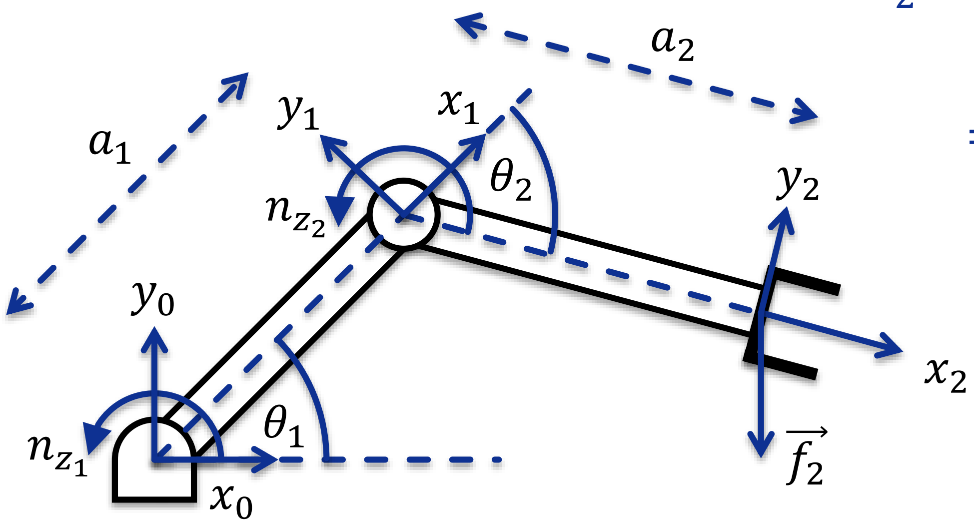
$$ {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \ {}^{i}\vec{\omega}_{i} $$

- Translationsgeschwindigkeit:

$$ {}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\vec{v}_{i} + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} + \dot{d}_{i+1}\ {}^{i}\vec{e}_{z_i} \right) $$

Beispiel: Planarer Roboterarm

- Berechnung der für die Geschwindigkeit notwendigen Drehmatrizen ${}^{i+1}_{i}R = {}^{i}_{i+}R^T$
- Rotationen und Translationen getrennt



$$
{}^{0}_{1}A = T_{z_0}(0) \cdot R_{z_0}(\theta_1) \cdot R_{x_1}(0°) \cdot T_{x_1}(a_1)
= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 a_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{2}A = T_{z_1}(0) \cdot R_{z_1}(\theta_2) \cdot R_{x_2}(0°) \cdot T_{x_2}(a_2)
= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 a_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Beispiel: Planarer Roboterarm

- Vorgabe: ${}^{0}\vec{v}_0 = \vec{0},\ {}^{0}\vec{\omega}_0 = \vec{0}$
- Anwendung der Herleitung:

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\vec{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \right) \\ {}^{i+1}\vec{v}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\vec{v}_i + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} \right) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} {}^{0}\vec{\omega}_1 &= {}^{0}\vec{\omega}_0 + \dot{\theta}_1\, {}^{0}\vec{e}_{z_0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{1}\vec{\omega}_1 &= {}^{1}_{0}R \cdot {}^{0}\vec{\omega}_1 \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{1}\vec{v}_1 &= {}^{1}_{0}R\left({}^{0}\vec{v}_0 + {}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{0}\vec{u}_1 \right) \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \right. \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel: Planarer Roboterarm

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\vec{\omega}_2 &= {}^{1}\vec{\omega}_1 + \dot{\theta}_2\, {}^{1}\vec{e}_{z_1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
{}^{2}\vec{\omega}_2 &= {}^{2}_{1}R \cdot {}^{1}\vec{\omega}_2 \\
&= \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\vec{v}_2 &= {}^{2}_{1}R\left({}^{1}\vec{v}_1 + {}^{1}\vec{\omega}_2 \times {}^{1}\vec{u}_2 \right) \\
&= {}^{2}_{1}R \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ a_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2 a_2 \\ s_2 a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_2 a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ a_1\dot{\theta}_1 + c_2 a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_2 a_1 \dot{\theta}_1 \\ a_1 c_2 \dot{\theta}_1 + a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Planarer Roboterarm

TCP-Lineargeschwindigkeit in Bezug zum Basissystem

$$ {}^{0}_{2}R = {}^{0}_{1}R \cdot {}^{1}_{2}R = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{0}\vec{v}_2 = {}^{0}_{2}R\ {}^{2}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -s_1 a_1 \dot{\theta}_1 - s_{12} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ c_1 a_1 \dot{\theta}_1 + c_{12} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{0}\vec{\omega}_2 = {}^{0}_{2}R\ {}^{2}\vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} $$

Verwendung der Jacobi-Matrix

Sei $\vec{y} = f(\vec{x})$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^m, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{df_1}{dx_1} dx_1 + \frac{df_1}{dx_2} dx_2 + \dots + \frac{df_1}{dx_m} dx_m \\ dy_2 &= \frac{df_2}{dx_1} dx_1 + \frac{df_2}{dx_2} dx_2 + \dots + \frac{df_2}{dx_m} dx_m \\ &\vdots \\ dy_n &= \frac{df_n}{dx_1} dx_1 + \frac{df_n}{dx_2} dx_2 + \dots + \frac{df_n}{dx_m} dx_m \end{aligned}$$

Verwendung der Jacobi-Matrix

- Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \cdots & \frac{df_1}{dx_m} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \cdots & \frac{df_2}{dx_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \cdots & \frac{df_n}{dx_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix} = J(\vec{x})d\vec{x}$$

- $d\vec{y} = df(\vec{x}) = \frac{df(\vec{x})}{d\vec{x}} d\vec{x} = J(\vec{x})d\vec{x}$ mit Jacobi-Matrix $J(\vec{x}) = \frac{df(\vec{x})}{d\vec{x}}$

Verwendung der Jacobi-Matrix

- Ableitung der Funktion $f(x)$ nach der Zeit ergibt
  $\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{df(\vec{x})}{dt} = J(\vec{x})\frac{d\vec{x}}{dt}$ oder $\dot{\vec{y}} = J(\vec{x})\dot{\vec{x}}$
- Jacobi-Matrix (Robotik): Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit des Endeffektors $\dot{\vec{y}}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\vec{\theta}}$
  - $\dot{\vec{y}} = J(\vec{\theta})\dot{\vec{\theta}}$ mit Beschreibungsvektor $\dot{\vec{y}} = \left(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}\right)^T$
- Anzahl der Spalten $m =$ Bewegungs-/Gelenkfreiheitsgrade
- Anzahl der Zeilen $n =$ Freiheitsgrade im kartesischen Raum

Verwendung der Jacobi-Matrix

- Transformation quadrat. 6×6 Jacobi-Matrix in anderes KS:

$$ {}^{0}J(\vec{\theta}) = \underbrace{\begin{pmatrix} {}^{0}_{1}R & 0 \\ 0 & {}^{0}_{1}R \end{pmatrix}}_{6\times 6} \cdot \ {}^{1}J(\vec{\theta}) $$

- Weitere Vorgehensweise
  - Bestimme ${}^{m}\vec{v}_m$ und ${}^{m}\vec{\omega}_m$ wie gezeigt
  - Transformiere mit obiger Gleichung in ${}^{0}\vec{v}_m$ und ${}^{0}\vec{\omega}_m$

Beispiel: Jacobi-Matrix

Verwendung von ${}^{0}\vec{v}_2$ aus obigem Beispiel:

$$\dot{\vec{y}} = {}^{0}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -s_1 a_1 \dot{\theta}_1 - s_{12} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ c_1 a_1 \dot{\theta}_1 + c_{12} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -s_1 a_1 - s_{12} a_2 & -s_{12} a_2 \\ c_1 a_1 + c_{12} a_2 & c_{12} a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

Mit $J(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} -s_1 a_1 - s_{12} a_2 & -s_{12} a_2 \\ c_1 a_1 + c_{12} a_2 & c_{12} a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Verwendung der Jacobi-Matrix

- Mit Berücksichtigung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} {}^0\vec{v}_2 \\ {}^0\vec{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0v_{2_x} \\ {}^0v_{2_y} \\ {}^0v_{2_z} \\ {}^0\omega_{2_x} \\ {}^0\omega_{2_y} \\ {}^0\omega_{2_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1a_1 - s_{12}a_2 & -s_{12}a_2 \\ c_1a_1 + c_{12}a_2 & c_{12}a_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

- Weitere Möglichkeit zur Berechnung der Jacobi-Matrix: Ableitung der Vorwärtskinematik

Inverse Jacobi-Matrix

- Berechnung der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten aus kartesischen Geschwindigkeiten mit inverser Jacobi-Matrix

$$\dot{\vec{\theta}} = J(\vec{\theta})^{-1}\dot{\vec{y}}$$ Lösung, falls $\det(J) \neq 0$

- Nicht quadratisch → Kartesische Freiheitsgrade größer als Gelenkfreiheitsgrade
  1. Beseitigung linear abhängiger Zeilen in J → reguläre Matrix
  2. Least-Square-Methode als Näherung

$$\dot{\vec{\theta}} = (J^T J)^{-1} J^T \dot{\vec{y}}$$

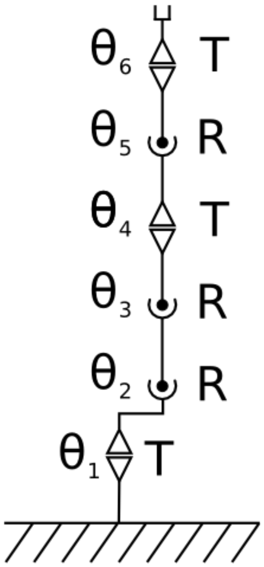
Inverse Jacobi-Matrix

- Nicht quadratisch → Gelenkfreiheitsgrade größer als kartesische Freiheitsgrade
  - Es existiert eine Vielzahl von Lösungen
  1. Blockiere Bewegungsfreiheitsgrade bis J quadratisch
  2. Hinzunahme von Zwangsbedingungen (Kollisionsvermeidung)

Singularitäten

- Roboterkonfigurationen oft mit singulären Jacobi-Matrizen, somit Verlust von kartesischen Freiheitsgraden
- Arten von Singularitäten
  - Am Rand des Arbeitsraums
  - Im Innern des Arbeitsraums

  z.B. nebenstehender typischer Industrieroboter mit $\theta_5 = 0$ wirken θ_4 und θ_6 in die gleiche Richtung, d.h. ein Freiheitsgrad geht verloren



- Achtung: In der Nähe von Singularitäten können aus kleinen kartesischen Geschwindigkeiten sehr große Gelenkgeschwindigkeiten resultieren

Singularitäten: Beispiel planarer Roboter

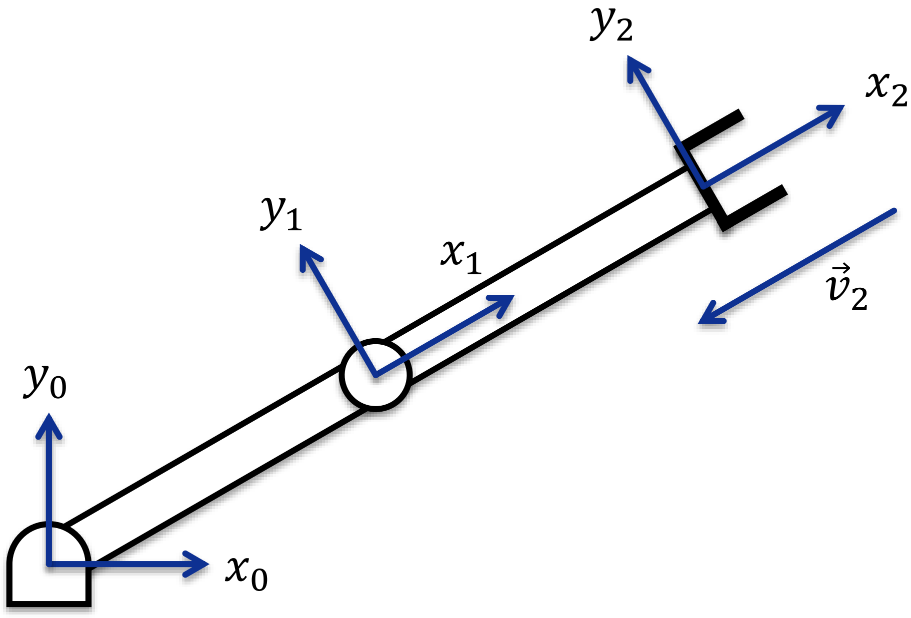
- Singuläre Stellung des planaren Roboters
- Jacobi-Matrix: $J(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} -s_1 a_1 - s_{12} a_2 & -s_{12} a_2 \\ c_1 a_1 + c_{12} a_2 & c_{12} a_2 \end{pmatrix}$
- Determinante: $\det(J) = a_1 a_2 \sin(\theta_2)$
- Singularität ($\det = 0$): $a_1 a_2 \sin(\theta_2) = 0 \rightarrow \theta_2 = 0$ und $\theta_2 = \pi$
- Für Praxis relevant: $\theta_2 = 0$, d.h. Roboterarm gestreckt (Singularität am Rand des Arbeitsraums)

Singularitäten: Beispiel planarer Roboter

- Inverse Jacobi-Matrix

$$J^{-1}(\vec{\theta}) = \frac{1}{a_1 a_2 s_2} \begin{pmatrix} a_2 c_{12} & a_2 s_{12} \\ -a_1 c_1 - a_2 c_{12} & -a_1 s_1 - a_2 s_{12} \end{pmatrix}$$

- Für $\theta_2 \to 0 \Rightarrow \sin\theta_2 \to 0 \Rightarrow \dot{\theta}_1$ und $\dot{\theta}_2 \to \infty$



Statische Kräfte/Momente

- Berechnung ohne Berücksichtigung von Bewegungen
- Beispiel: Wie hoch müssen Drehmomente sein, um mit TCP ein Objekt der Masse m in einer bestimmten Lage zu halten?
- Lösungsidee
  - Propagiere Kräfte und Momente von Glied zu Glied
  - Berechne für jedes Glied ein Kraft/Momente-Gleichgewicht
  - Beginne beim TCP
- $\vec{f}_i$: Kraft, die an Glied i angreift durch Glied $i-1$
- $\vec{n}_i$: Moment, das an Glied i angreift durch Glied $i-1$
- Kräfte/Momente-Gleichung
  (Einfluss des nächst höheren Glieds)

$$^{i}\vec{f}_i = {}^{i}\vec{f}_{i+1} \qquad\qquad {}^{i}\vec{n}_i = {}^{i}\vec{n}_{i+1} + {}^{i}\vec{u}_{i+1} \times {}^{i}\vec{f}_{i+1}$$

Statische Kräfte/Momente: Propagierung

- Stat. Propagierung der Kräfte/ Momente von Glied zu Glied
- Kräfte in Glied i

$${}^{i}\vec{f}_i = {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1}$$

- Momente in Glied i

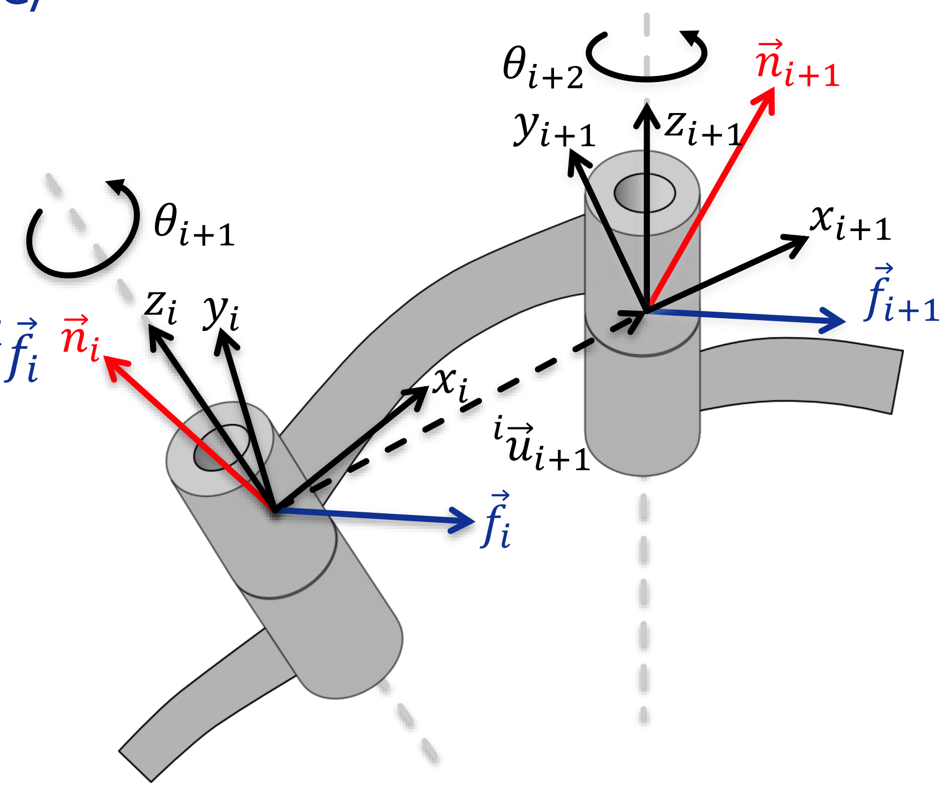
$${}^{i}\vec{n}_i = {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}\vec{n}_{i+1} + {}^{i}\vec{u}_{i+1} \times {}^{i}\vec{f}_i$$

- Benötigtes Moment bei Rotationsgelenken

$$\tau_{i+1} = {}^{i}\vec{n}_i^T \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$$

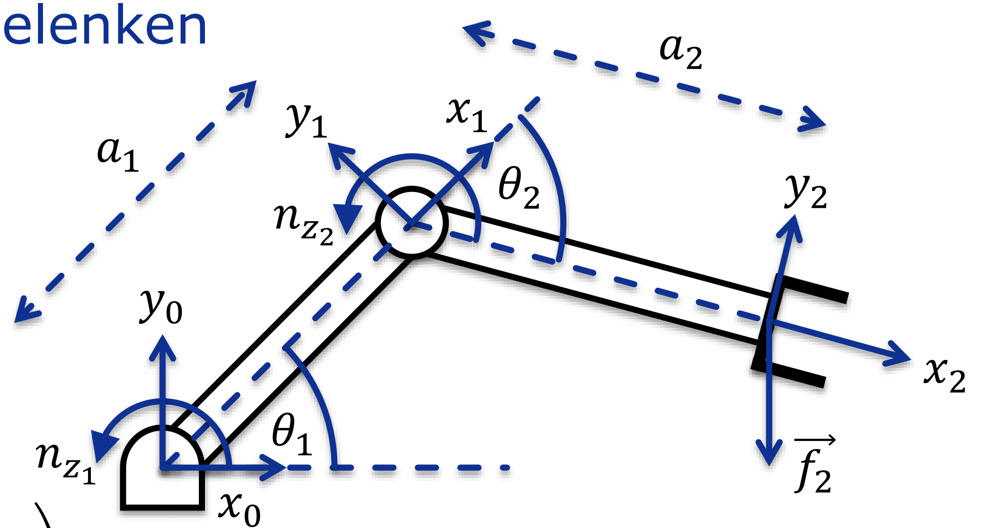
- Benötigte Kraft bei Schubgelenken

$$\tau_{i+1} = {}^{i}\vec{f}_i^T \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$$



Statische Kräfte/Momente: Beispiel

- Gegeben: Kräfte f, die am TCP angreifen
- Gesucht: Momente in den Gelenken



$$^2\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} ^2f_{2_x} \\ ^2f_{2_y} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ^2\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ^1\vec{n}_1 &= {}^1\vec{n}_2 + {}^1\vec{u}_2 \times {}^1\vec{f}_1 \\ &= {}^1\vec{u}_2 \times \left({}^1_2R \cdot {}^2\vec{f}_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_2c_2 \\ a_2s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2 \cdot {}^2f_{2_x} - s_2 \cdot {}^2f_{2_y} \\ s_2 \cdot {}^2f_{2_x} + c_2 \cdot {}^2f_{2_y} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \cdot {}^2f_{2_y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

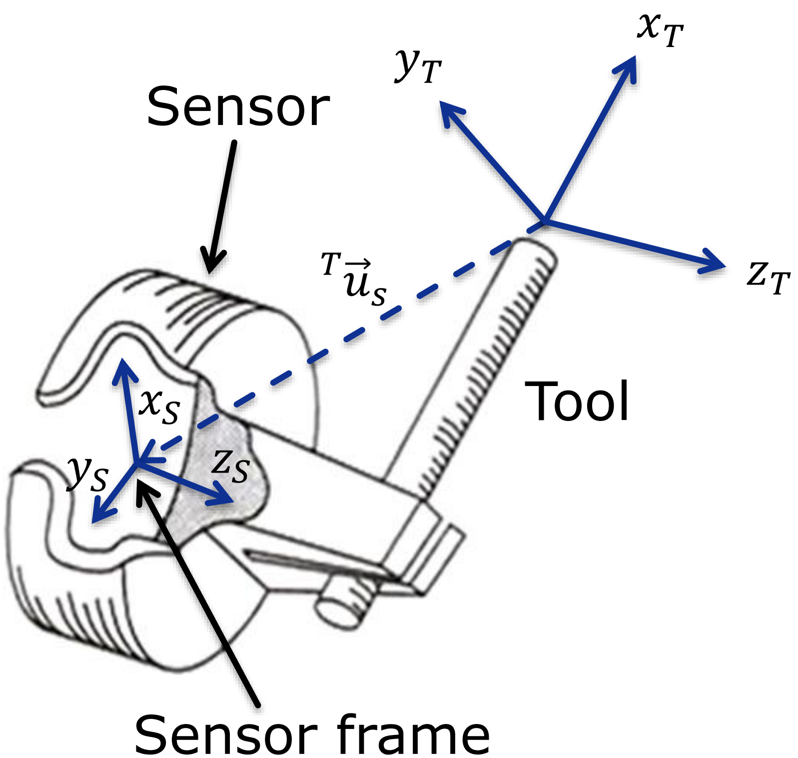
Statische Kräfte/Momente: Beispiel

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\vec{n}_0 &= {}^{0}_{1}R \cdot {}^{1}\vec{n} + {}^{0}\vec{u}_1 \times {}^{0}\vec{f}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \cdot {}^{2}f_{2_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{12} \cdot {}^{2}f_{2_x} - s_{12} \cdot {}^{2}f_{2_y} \\ s_{12} \cdot {}^{2}f_{2_x} + c_{12} \cdot {}^{2}f_{2_y} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \cdot {}^{2}f_{2_y} + s_2 a_1 \cdot {}^{2}f_{2_x} + c_2 a_1 \cdot {}^{2}f_{2_y} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= a_2 \cdot {}^{2}f_{2_y} + s_2 a_1 \cdot {}^{2}f_{2_x} + c_2 a_1 \cdot {}^{2}f_{2_y} \\
\tau_2 &= a_2 \cdot {}^{2}f_{2_y}
\end{aligned}
$$

Transformat. von Kräften: Anwendungsbeispiel

- TCP greift Stab → Kraftmessdose misst Kräfte und Momente in der Handwurzel
- Gesucht: Kräfte und Momente am Ende des Stabes



Kraft/Momenten-Berechnung mit Jakobi-Matrix

- Betrachtung der virtuellen Arbeit im kartesischen Raum und im Konfigurationsraum
- Arbeit, welche durch die am TCP wirkenden Kräfte und Momente $\vec{\eta}$ verursacht wird, muss gleich der Arbeit sein, die durch Stellkräfte und Stellmomente $\vec{\tau}$ in den Gelenken aufgebracht wird
- $\vec{\eta}^T \cdot \delta\vec{y} = \vec{\tau}^T \cdot \delta\vec{\theta}$ (1)
  - $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{TCP} \\ \vec{n}_{TCP} \end{pmatrix}$: 6×1, kartes. Kraft-/Momentenvektor am TCP
  - $\delta\vec{y}$: 6×1, infinitesimaler Versatzvektor des TCP
  - $\vec{\tau}$: 6×1, Kraft-/Momentenvektor in Gelenken
  - $\delta\vec{\theta}$: 6×1, Änderung der Gelenkstellungen

Kraft/Momenten-Berechnung mit Jakobi-Matrix

- Durch Einsetzen der Beziehung $\delta\vec{y} = J(\vec{\theta}) \cdot \delta\vec{\theta}$ kann (1) umgeformt werden in $\vec{\eta}^T \cdot J(\vec{\theta}) \cdot \delta\vec{\theta} = \vec{\tau}^T \cdot \delta\vec{\theta}$
- Somit $\vec{\eta}^T \cdot J(\vec{\theta}) = \vec{\tau}^T$ und $\vec{\tau} = J^T(\vec{\theta}) \cdot \vec{\eta}$

Nächste Vorlesung

Robotermodellierung

- Dynamische Modellierung
- Massenträgheitsmoment
- Dynamikberechnungen