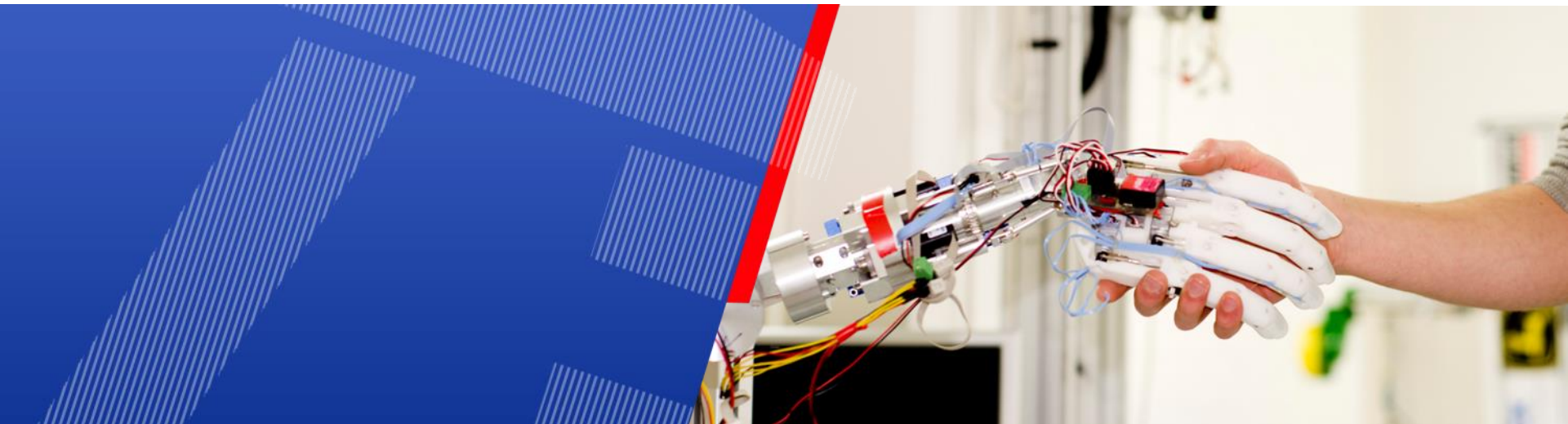


# Robotermodellierung I



**Prof. Karsten Berns**

Robotics Research Lab

Department of Computer Science

University of Kaiserslautern, Germany

# Inhalt

- Freiheitsgrade eines Robotersystems
- Geometrisches Modell
- Kinematisches Modell
- Direktes Kinematisches Problem
- Inverses Kinematisches Problem
- Dynamisches Modell

## Freiheitsgrad $f$ eines Objektes in $E_3$

- Anzahl möglicher unabhängiger Bewegungen in Bezug auf das BKS
  - Minimale Anzahl von Translationen und Rotationen zur vollständigen Beschreibung der Lage des Objektes
- Für im 3D-Raum frei bewegliche Objekte gilt  $f = 6$ 
  - 3 Translationen
  - 3 Rotationen

# Bewegungsfreiheitsgrade eines Roboters $F$

- Freiheitsgrad eines rotierenden Gelenks:  $F_R \leq 3$ 
  - Scharniergelenk, Kardangelenk, Kugelgelenk
- Freiheitsgrad eines Translationsgelenks:  $F_T = 1$
- Anzahl der Gelenke eines Roboters:  $n$  (i.d.R.  $n \geq 6$ )
- Bewegungsfreiheitsgrade:  $F = \sum_{i=1}^n (F_{R_i} + F_{T_i})$

## Zusammenhang von $f$ und $F$

- Es gilt:  $F \geq f$
- Beispiele
  - 8-achsiger Roboter: Freiheitsgrad  $f = 6$ ,  
Bewegungsfreiheitsgrad  $F = 8$
  - Menschliche Hand:  $f = 6$ ,  $F = 22$
  - Menschlicher Arm inkl. Schulter:  $f = 6$ ,  $F = 12$
- Um Freiheitsgrad  $f = 6$  für den Effektor eines Roboters zu erreichen, sind mindestens  $F = 6$  Bewegungsachsen nötig

# Begriffserklärung

- Geometrie: Mathematische Beschreibung der Roboterform
- Kinematik: Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der Bewegungszustände mechanischer Systeme
- Dynamik: Untersucht Bewegung von Körpern als Folge der auf sie wirkenden Kräfte und Momente.

# Geometrisches Modell

- Stellt Körper graphisch dar
- Grundlage zur Berechnung der Bewegungen
- Ermittlung der wirkenden Kräfte und Momente
- Ausgangspunkt der Abstandsmess- und Kollisionserkennung

# Kinematisches Modell

- Beschreibt mit Hilfe des geometrischen Modells die Stellung (Position und Orientierung) von Körpern im Raum
- Kinematische Kette: Mehrere Körper, die durch Gelenke kinematisch verbunden sind (z.B. Roboterarm)
  - Geschlossene kinematische Ketten
  - Offene kinematische Ketten
- Zweck des kinematischen Modells
  - Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Gelenkwerten und Stellungen
  - Erreichbarkeitsanalyse



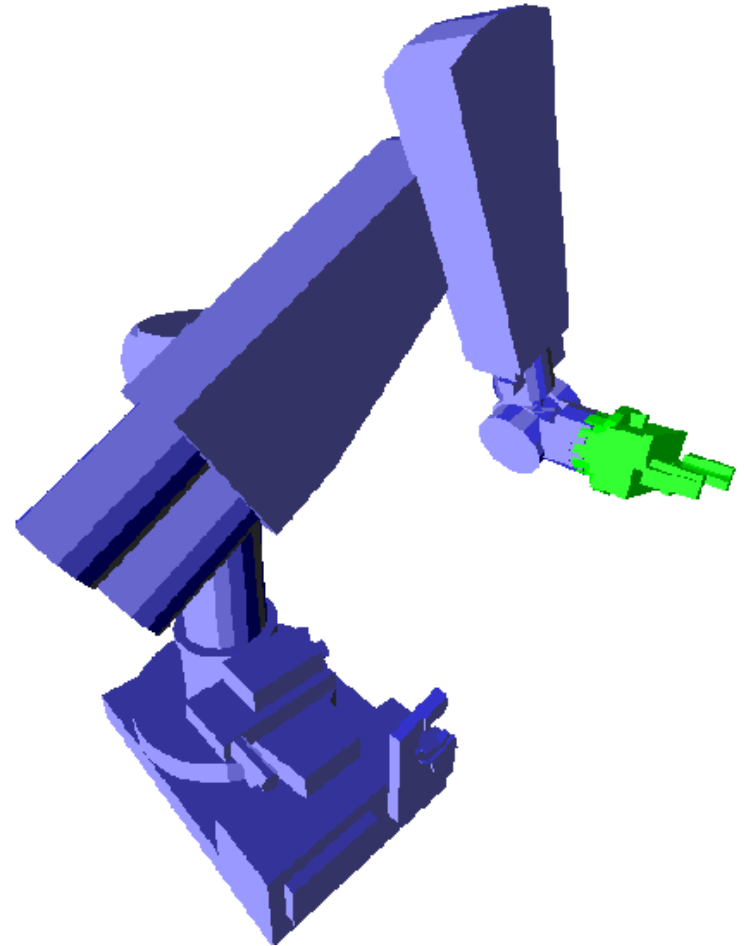
# Dynamisches Modell

- Beschreibt Kräfte und Momente, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem wirken
- Zweck des dynamischen Modells
  - Dimensionierung der Antriebsaggregate
  - Optimierung der Konstruktion (Leichtbauweise)
  - Berücksichtigung von Biegung und Steifigkeiten
  - Unterstützung der Reglerentwurfs

# Geometrische Modelle

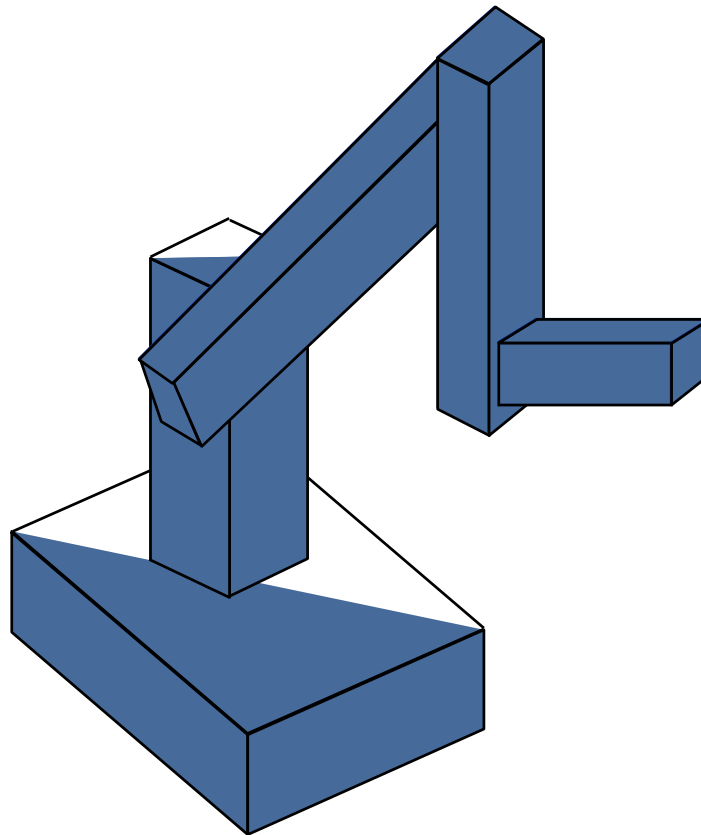
Klassifizierung:

- 2D-Modell
- 2,5D-Modelle
- 3D-Modelle
- Kanten- bzw. Drahtmodelle
- Flächen- bzw. Oberflächenmodelle
- Volumenmodell



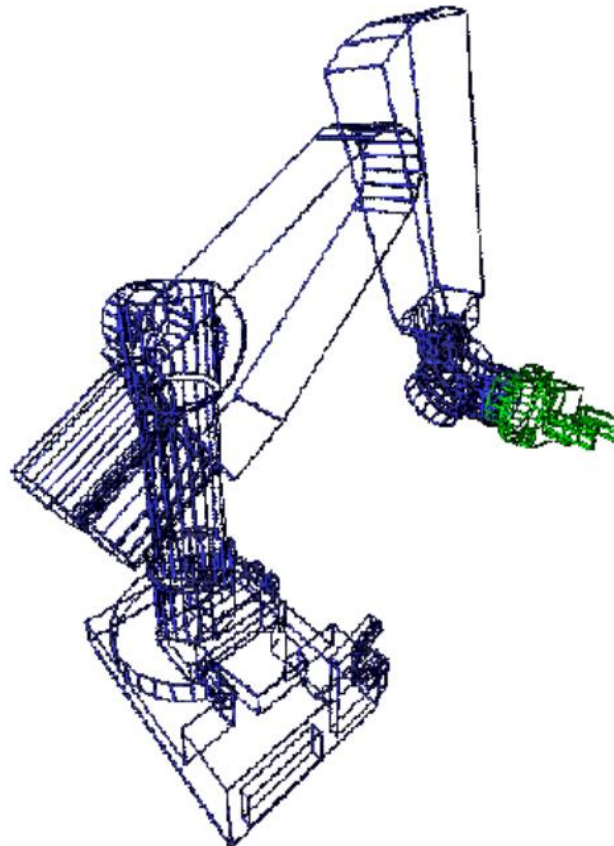
## Geometrische Modelle: Blockwelt

- Körper werden durch einhüllende Quader dargestellt
- Einfache Berechnung bzgl. Kollisionsvermeidung



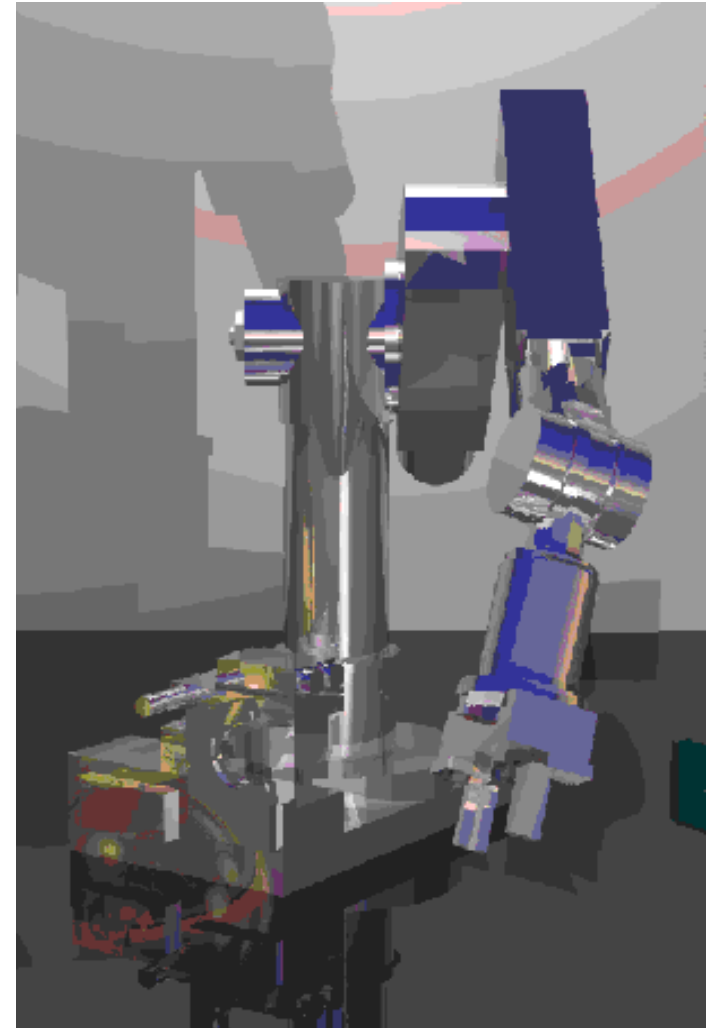
# Geometrische Modelle: Kantenmodell

- Körper werden durch Polygonzüge (Kanten) dargestellt
- Schnelle Visualisierung



# Geometrische Modelle: Volumenmodell

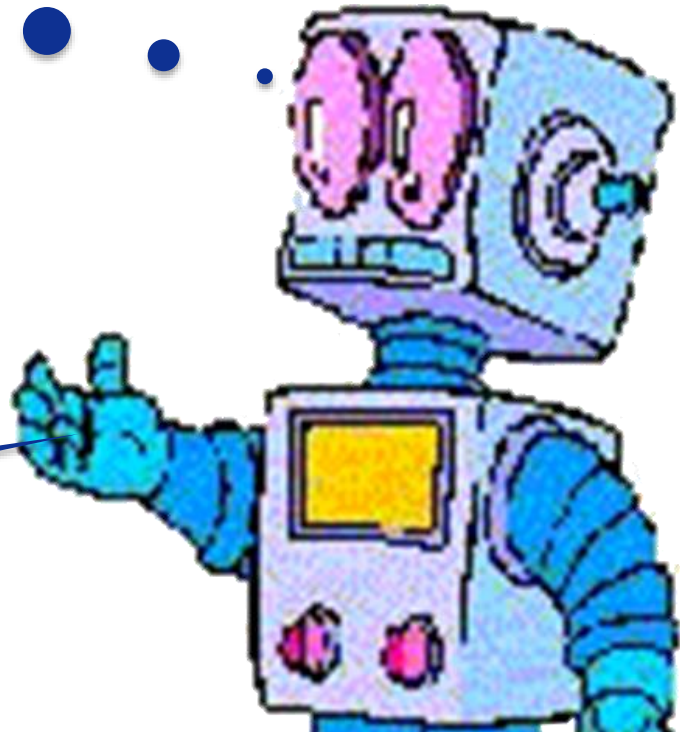
- Genaue Darstellung der Körper
- Genaue Berechnung der Kontaktpunkte zur Kollisionsvermeidung
- Darstellung in Animationen



# Direktes kinematisches Problem

Wo ist meine Hand?

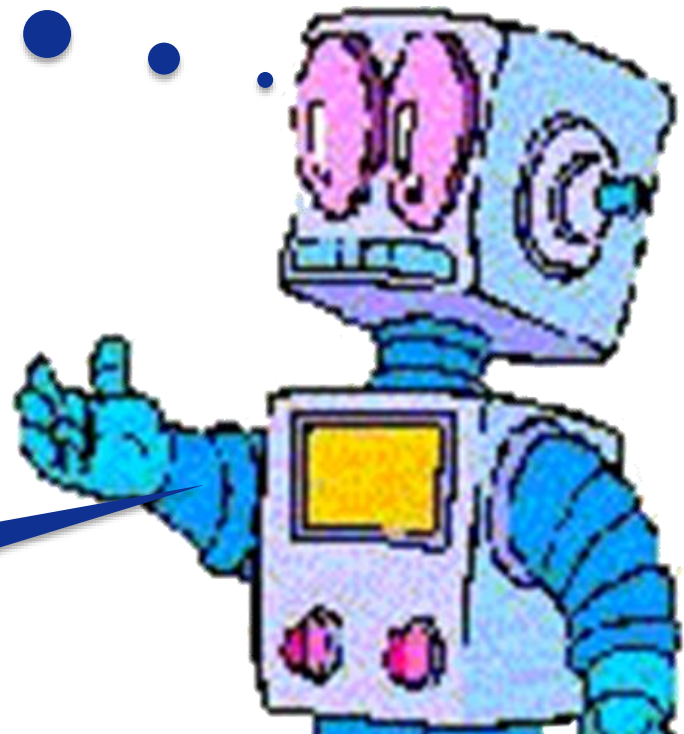
Bestimmt die Lage des TCP



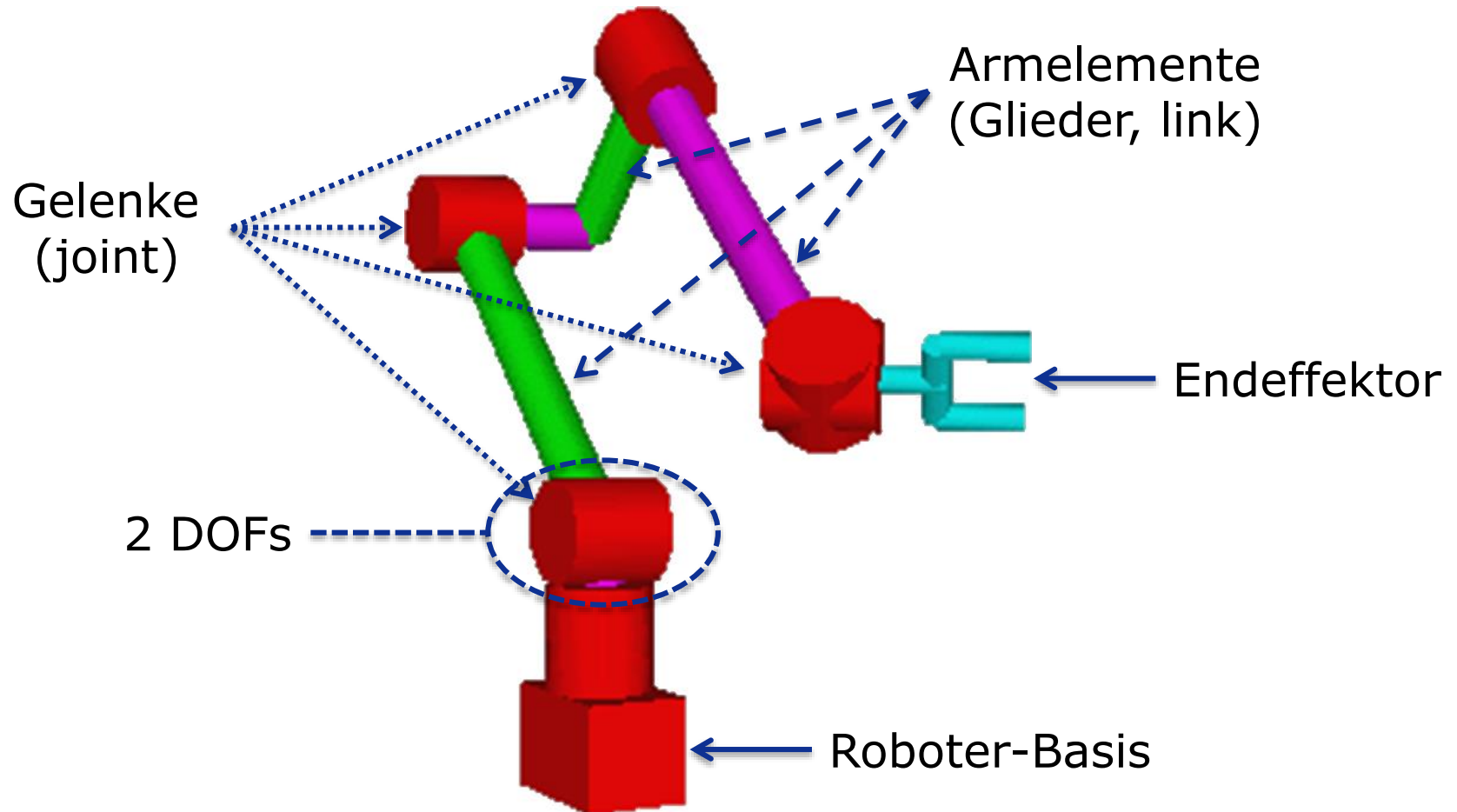
# Inverses kinematisches Problem

Wie soll ich meine Hand  
dorthin bewegen?

Bestimmt die Gelenkwinkel



# Kinematisches Modell: Glieder und Gelenke





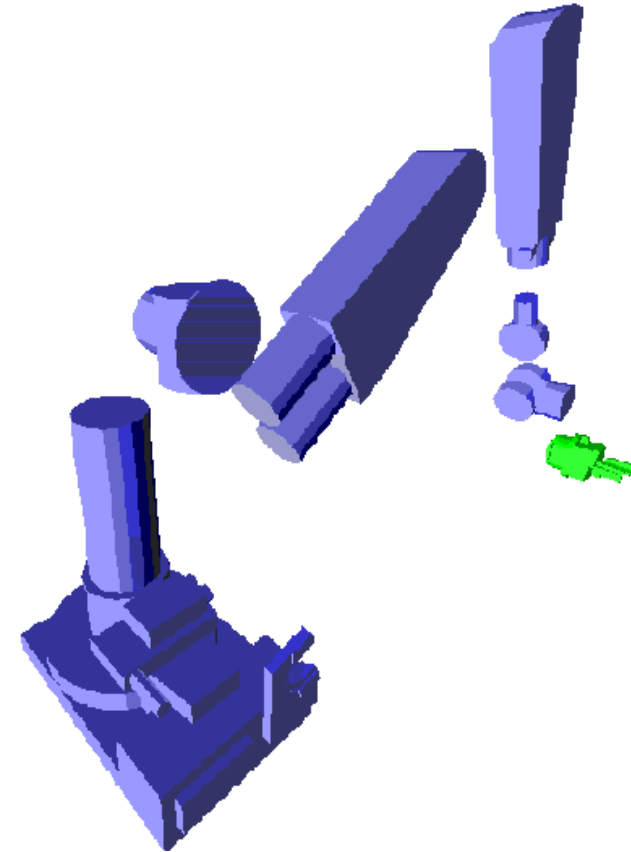
# Kinematisches Modell: Puma 260

## Volumenmodell

- Jedes Armelement entspricht einem starren Körper
- Jedes Armelement ist mit dem nächsten durch ein Schub- oder Rotationsgelenk verbunden
- Jedes Gelenk hat nur einen Freiheitsgrad (rot. oder transl.)
- Kin. Par. = Gelenk- + Armelementpar.

## Puma 260

- 6-achsiger Roboter
- Basis und 6 Armelemente (Glieder)



# Kinematisches Modell: Koordinatensysteme

Zur Beschreibung der Kinematik eines Roboters (kinematische Kette) ist die Lage jedes einzelnen Armelements bezogen auf ein Referenzsystem zu definieren.

- In jedes Armelement wird ein festes lokales KS gelegt
- Ursprung des KS liegt in dem Armgelenk, welches das jeweilige Armelement bewegt
- Für jedes Armelement muss eine Transformationsmatrix bestimmt werden, die das jeweilige lokale KS in das Bezugskoordinatensystem überführt
- Überführung der lokalen Koordinatensysteme in das Bezugskoordinatensystem durch Beschreibungsvektor oder  $4 \times 4$  homogene Transformationsmatrix

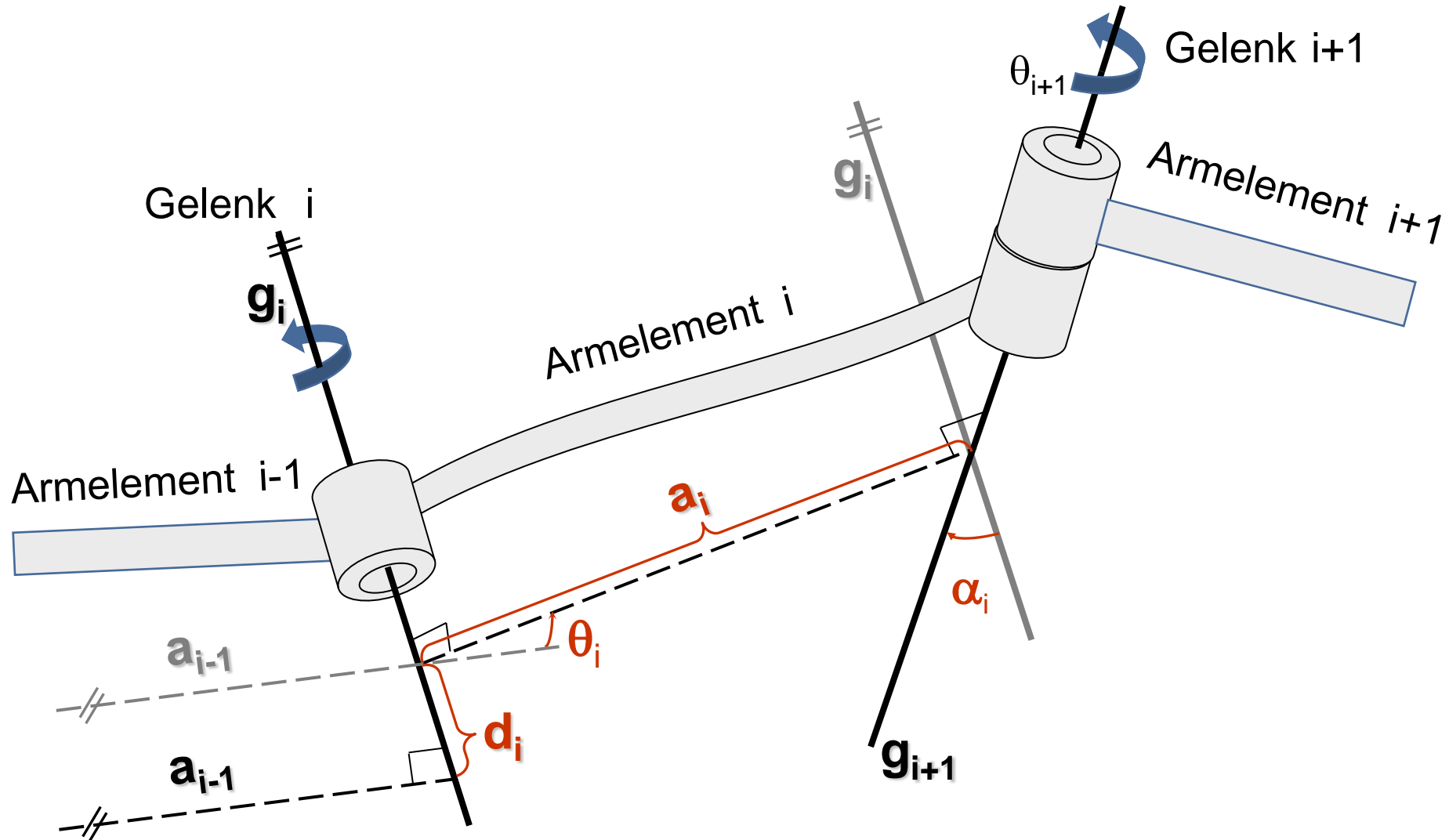
## Parameter der Armelemente

- Jedes Armelement  $i$  ist durch 2 begrenzende Gelenke  $i$  und  $i + 1$  eingebunden
- Seien  $g_i$  und  $g_{i+1}$  die Bewegungsachsen der Gelenke (Windschief zueinander)
- Sei  $a_i$  das Lot zwischen  $g_i$  und  $g_{i+1}$
- Abstand der Lotfußpunkte von  $a_{i-1}$  und  $a_i$  auf  $g_i$  wird als Abstand der Gelenke  $d_i$  bezeichnet
- Winkel  $\theta_i$  zwischen  $a_{i-1}$  und  $a_i$  wird als Gelenkwinkel (joint angle) bezeichnet
- Länge von  $a_i$  (kürzester Abstand zw.  $g_i$  und  $g_{i+1}$ ) wird als Armelementlänge (link length) bezeichnet
- Winkel  $\alpha_i$  zwischen  $g_i$  und  $g_{i+1}$  wird als Armelementverwindung (link twist) bezeichnet

## Parameter der Gelenke

Parameter	Symbol	Rotationsgelenk	Schubgelenk
Armelementlänge	$a$	Invariant	Invariant
Verwindung	$\alpha$	Invariant	Invariant
Gelenkabstand	$d$	Invariant	Variabel
Gelenkwinkel	$\theta$	Variabel	Invariant

# Herleitung von Gelenkabstand und -winkel

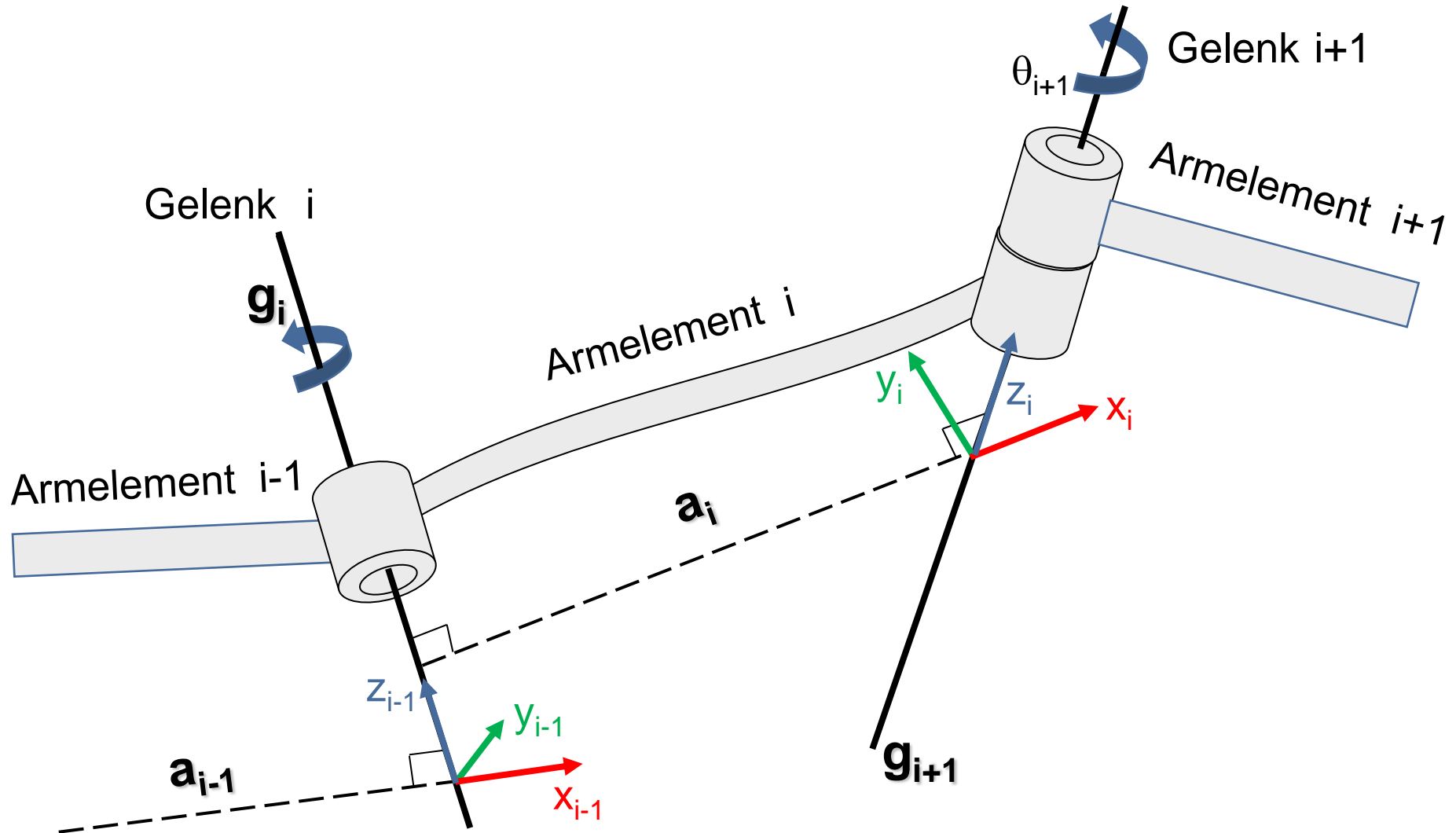


# Denavit-Hartenberg-Konvention

Festlegung der Koordinatensysteme für jedes Gelenk:

- Ursprung von KS  $i$  liegt im Schnittpunkt von  $a_i$  und  $g_{i+1}$
- Achse  $z_i$  liegt entlang der Gelenkachse  $g_{i+1}$
- Achse  $x_i$  ergibt sich als Verlängerung des Lotes  $a_i$
- Ergänzung um Achse  $y_i$ , sodass sich ein rechtsdrehendes Koordinatensystem ergibt
- Ursprung von KS 0 kann beliebig auf  $g_1$  festgelegt werden
- Das letzte Koordinatensystem liegt im Endeffektor

# Denavit-Hartenberg-Konvention



- rrlab.cs.uni-kl.de



# Denavit-Hartenberg-Transformation

Transformation von  $\text{OKS}_i$  auf  $\text{OKS}_{i-1}$

- (1) Rotation  $\theta_i$  um die  $z_{i-1}$ -Achse damit die  $x_{i-1}$ -Achse parallel zur  $x_i$ -Achse liegt

$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (2) Translation  $d_i$  entlang der  $z_{i-1}$ -Achse zu dem Punkt, in dem sich  $z_{i-1}$  und  $x_i$  schneiden

$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Denavit-Hartenberg-Transformation

Transformation von  $\text{OKS}_{i+1}$  auf  $\text{OKS}_i$

- (3) Translation  $a_i$  entlang der  $x_i$ -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (4) Rotation  $\alpha_i$  um die  $x_i$ -Achse, um die  $z_{i-1}$ -Achse in die  $z_i$ -Achse zu überführen

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Denavit-Hartenberg-Transformation

In Matrizenschreibweise lautet die DH-Transformation der Koordinatensysteme des Armelement  $i - 1$  auf  $i$ :

$${}^{i-1}_iA = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Denavit-Hartenberg-Transformation (Inverse)

Die Inverse der Transformationsmatrix  ${}^{i-1}_iA$  entspricht der Transformation aus dem  $KS_{i-1}$  in das  $KS_i$ :

$${}^{i-1}_iA^{-1} = {}^{i-1}_iA = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Direktes kinematisches Modell

Um die Stellung des Greifers (engl.: Tool Center Point, TCP) in Bezug auf das BKS zu bestimmen, werden die DH-Matrizen in der Reihenfolge der Armelemente multipliziert:

$$\text{Basis}_{\text{TCP}}^A = \text{Basis}_1^A(\theta_1) \cdot {}_1^2A(\theta_2) \cdots {}_{n-1}^{n-2}A(\theta_{n-1}) \cdot {}_n^{n-1}A(\theta_n)$$

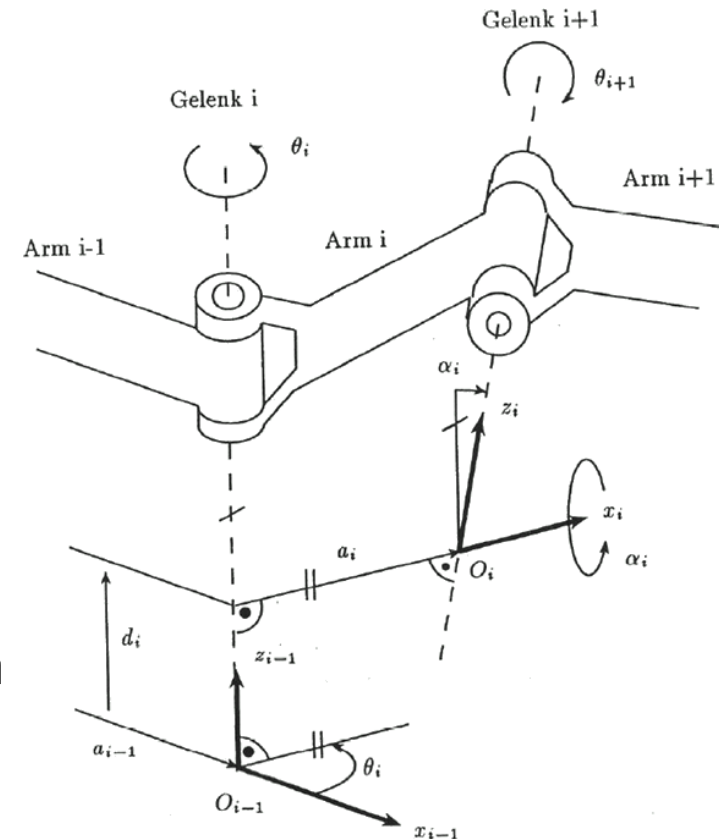
# Direkte Kinematik: Vorgehensweise mit DH

## (1) Bestimmung der Normalen $a_i$

- Gelenkachsen  $g_i$
- $a_i$  zeigt von  $g_i$  nach  $g_{i+1}$

## (2) Festlegung des KS

- Ursprung  $O_i$  liegt im Schnittpunkt von  $a_i$  mit  $g_{i+1}$
- $x_i$  liegt auf Normalen  $a_i$  und zeigt in gleiche Richtung
- $z_i$  liegt auf  $g_{i+1}$  in der Richtung, sodass Gelenkrot. bzw. -translation in math. pos. Sinn erfolgt
- $y_i$  ergänzt zu Rechtssystem, bei TCP gibt  $y_i$  Öffnungsbreite des Greifers an



# Direkte Kinematik: Vorgehensweise mit DH

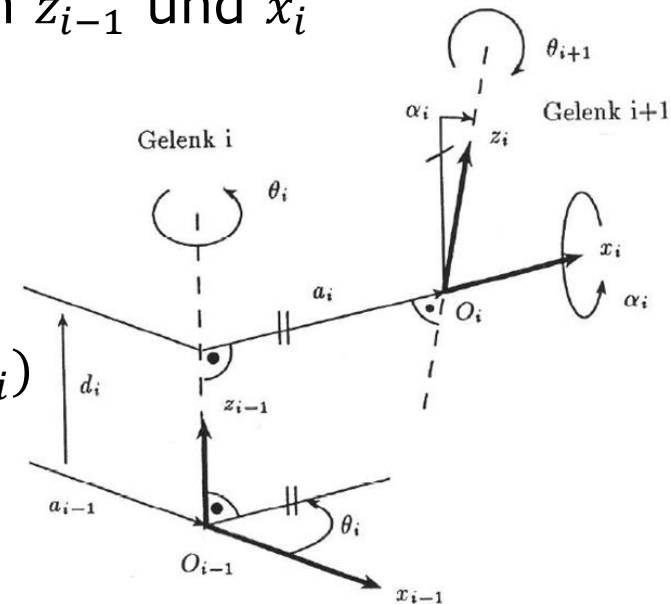
Sonderfälle bei (1), (2)

- $g_i$  und  $g_{i+1}$  schneiden sich
  - Richtung von  $x_i$  nicht eindeutig
  - $x_i$  entsteht aus  $x_{i-1}$  durch kleinstmögliche Drehung um  $z_{i-1}$
- $g_i$  und  $g_{i+1}$  sind parallel oder fallen zusammen
  - Schnittpunkt von  $a_i$  und  $g_{i+1}$  nicht eindeutig
  - Rückwärtsgehend die Normalen bestimmen
  - Ausgehend vom nächsten eindeutig bestimmbar Ursprung  $O_j$  mit  $j > i$
  - Beim letzten Gelenk ist Ursprung im Zentrum des TCP

## Direkte Kinematik: Vorgehensweise mit DH

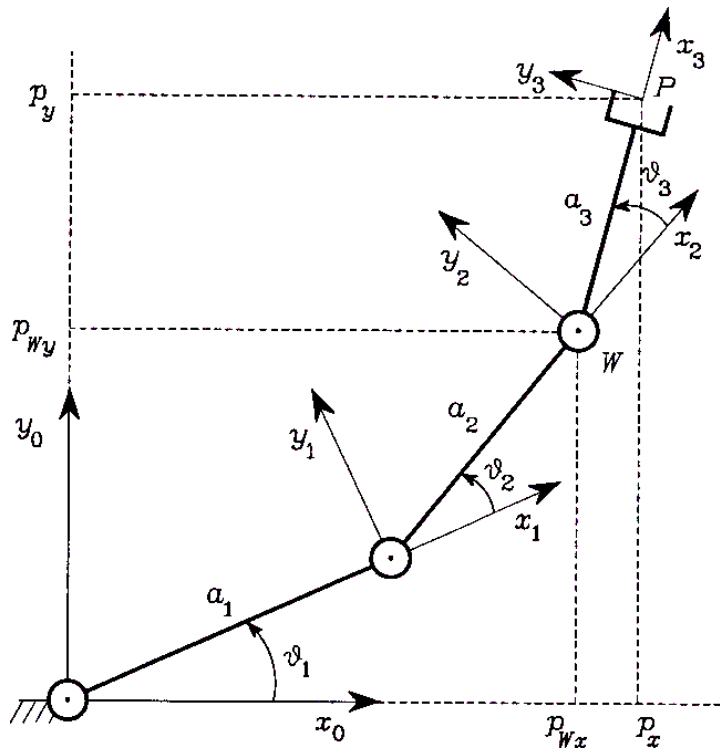
### (3) Bestimmung der Transformationsmatrix ${}^{i+1}_i A$

- Rotation des KS von Gelenk  $i$  um  $z_{i-1}$  mit Gelenkwinkel  $\theta_i$   
→  $x'_{i-1}$  liegt parallel zu  $x_i$
- Translation entlang  $z_{i-1}$  um  $d_i$   
→ Ursprung liegt auf Schnittpunkt von  $z_{i-1}$  und  $x_i$
- Translation entlang  $x_i$  um  $|a_i|$   
→ Ursprünge liegen aufeinander
- Rotation um  $x_i$  mit Verdrehwinkel  $\alpha_i$   
→  $z'_{i-1}$  liegt parallel zu  $z_i$
- ${}^{i-1}_i A = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(|a_i|) \cdot R_{x_i}(\alpha_i)$





# Direkte Kinematik: Beispiel 1



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$	0	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$
3	$a_3$	0	0	$\theta_3$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

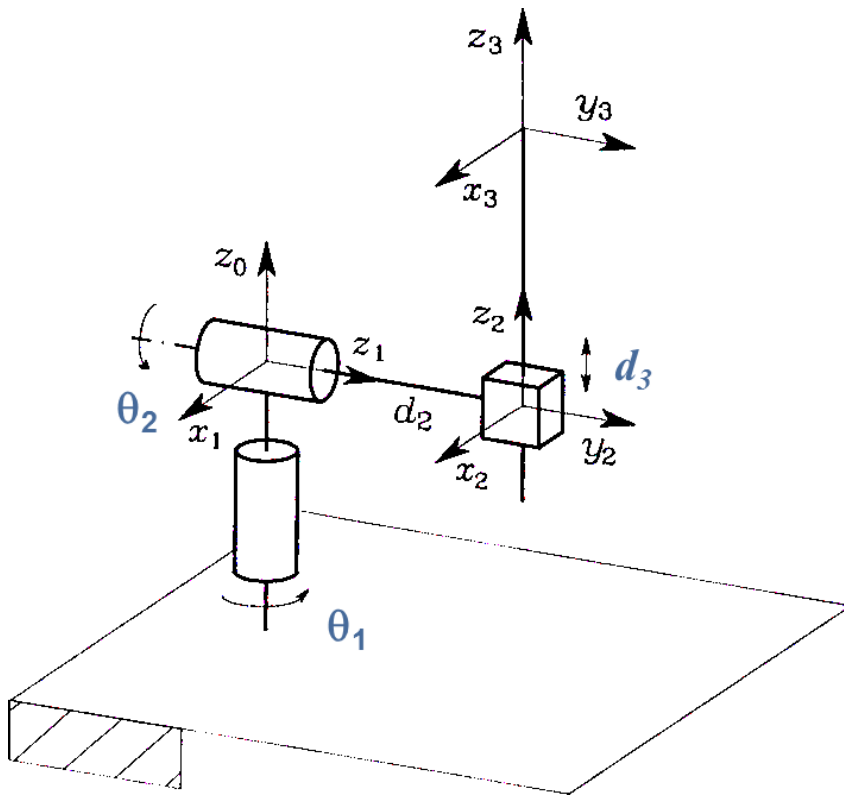
$$\Rightarrow {}^{i-1}_i A = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i \cdot c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i \cdot s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Direkte Kinematik: Beispiel 1

Ergebnis

$${}^0_3A = {}^0_1A \cdot {}^1_2A \cdot {}^2_3A = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_{12} + a_3 \cdot c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_{12} + a_3 \cdot s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Direkte Kinematik: Beispiel 2



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-90^\circ$	0	$\theta_1$
2	0	$90^\circ$	$d_2$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

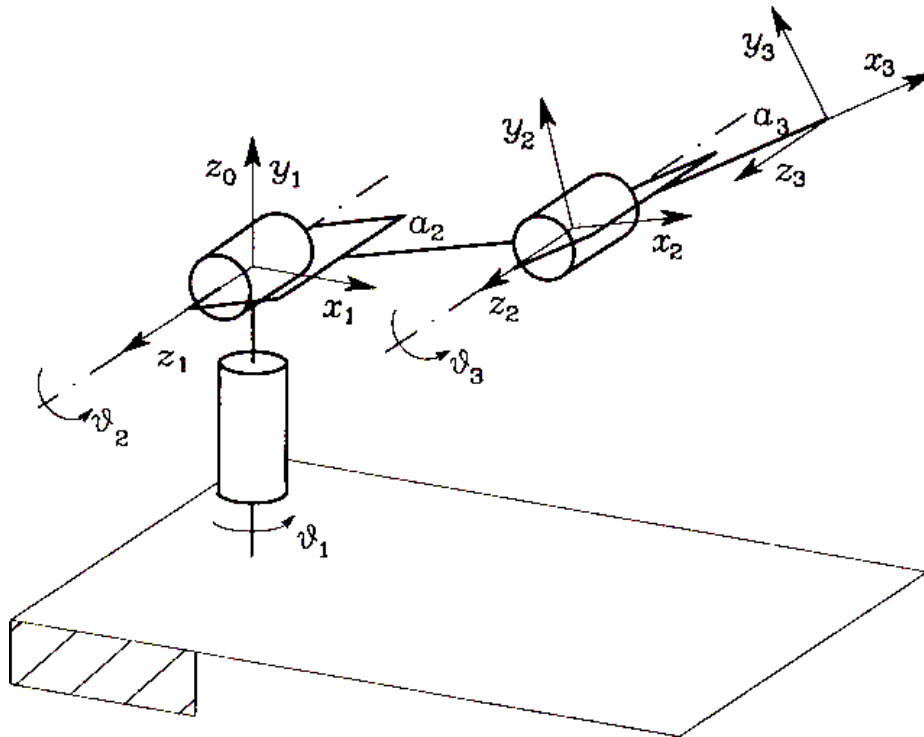
$${}^1_2A = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Direkte Kinematik: Beispiel 2

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

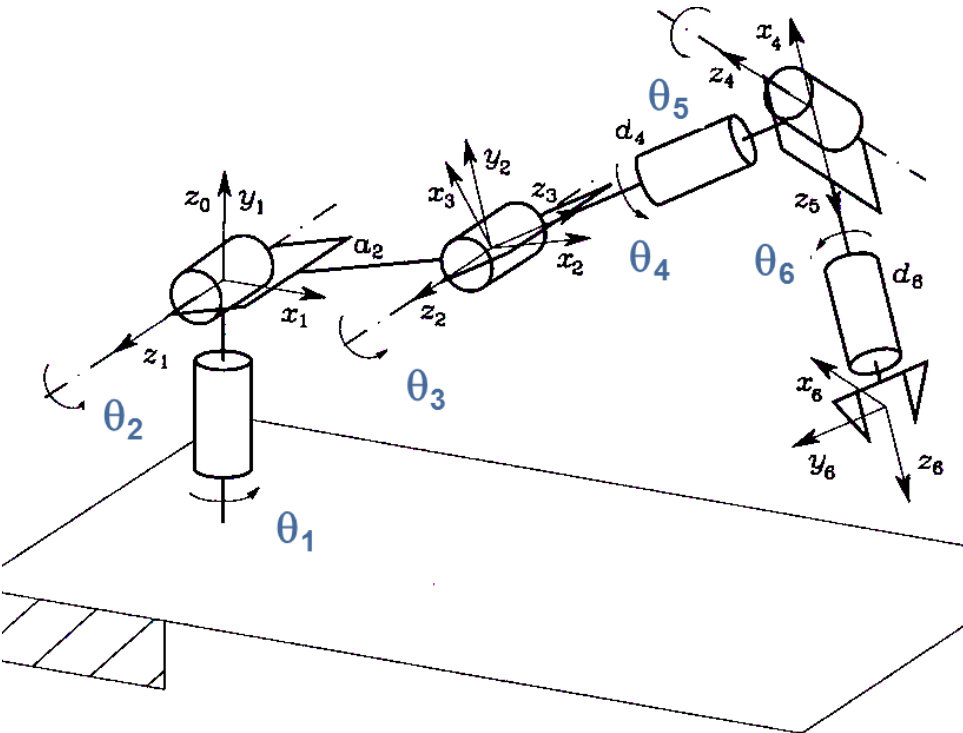
$$\Rightarrow {}^3_0A = {}^0_1A \cdot {}^1_2A \cdot {}^2_3A = \begin{bmatrix} c_1 \cdot c_2 & -s_1 & c_1 \cdot s_2 & c_1 \cdot s_2 \cdot d_3 - s_1 \cdot d_2 \\ s_1 \cdot c_2 & c_1 & s_1 \cdot s_2 & s_1 \cdot s_2 \cdot d_3 + c_1 \cdot d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 \cdot d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Direkte Kinematik: Beispiel 3



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$90^\circ$	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$
3	$a_3$	0	0	$\theta_3$

## Direkte Kinematik: Beispiel 4



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$90^\circ$	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$
3	0	$90^\circ$	0	$\theta_3 + 90^\circ$
4	0	$-90^\circ$	$d_4$	$\theta_4$
5	0	$90^\circ$	0	$\theta_5 - 90^\circ$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6 + 90^\circ$

# Roboterkinematik

- Beschreibt Zusammenhänge zwischen dem Raum der Gelenkwinkel und dem Raum der Position und Orientierung des Endeffektor in Weltkoordinaten
  - Raum der Gelenkwinkel:  
Roboterkoordinaten, Konfigurationsraum
  - EE: Abk. für Endeffektor
- Direktes kinematisches Problem (Vorwärtskinematik)
- Inverses kinematisches Problem (Rückwärtskinematik)

## Direktes kinematisches Problem

- Aus DH-Parametern und Gelenkwinkeln soll Stellung des Greifers (TCP) ermittelt werden

- Stellung des TCP in Bezug auf das BKS (Basis)

$${}^{\text{BASIS}}_{\text{TCP}}A = {}^{\text{BASIS}}_1A(\theta_1) \cdot {}^1_2A(\theta_2) \cdots {}^{n-2}_{n-1}A(\theta_{n-1}) \cdot {}^{n-1}_nA(\theta_n)$$

- $\vec{\theta}$  gegeben



# Direkte Kinematik: Übersicht

- Skizze des Manipulators
- Glieder nummerieren: Basis = 0, letztes Glied =  $n$
- Identifiziere und nummeriere die Gelenke
- Zeichne Achsen  $z_i$  für jedes Gelenk  $i$
- Bestimme Parameter  $a_i$  zwischen  $z_{i-1}$  und  $z_i$
- Zeichne  $x_{i-1}$ -Achsen
- Bestimme Parameter  $\alpha_{i-1}$  (Twist um die  $x_{i-1}$ -Achsen)
- Bestimme Parameter  $d_i$  (Offset)
- Bestimme Winkel  $\theta_i$  um  $z_i$ -Achsen
- Gelenk-Transformation-Matrizen  $A_{i-1,1}$

# Nächste Vorlesung ...

## Robotermodellierung

- Inverses kinematisches Problem
- Algebraische und geometrische Lösungen
- Numerische Methoden
- Optimierung