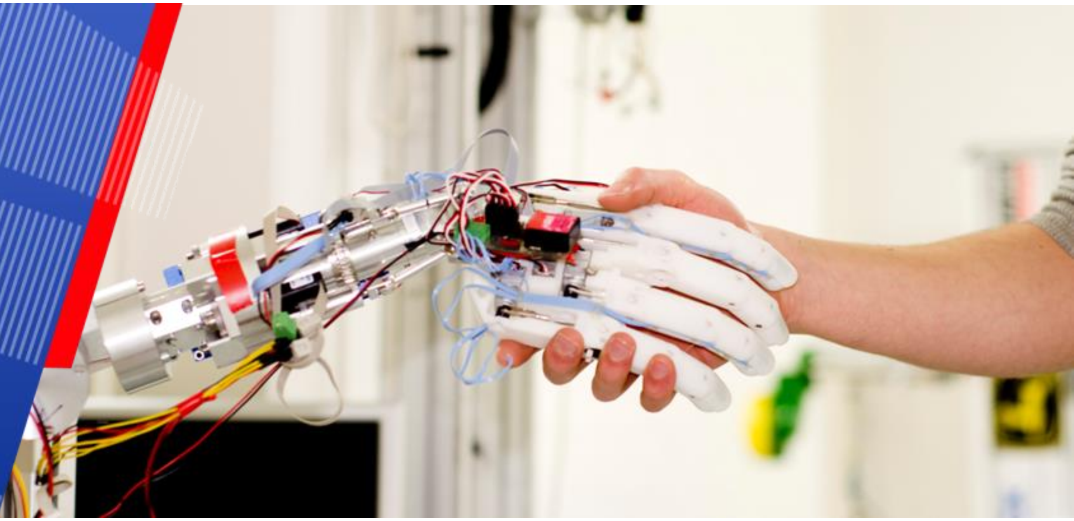
Grundlagen der Robotik - Teilsysteme eines Roboters



Prof. Karsten Berns
Robotics Research Lab
Department of Computer Science
University of Kaiserslautern, Germany

Inhalt

- Mathematische Grundlagen
- Mechanische Komponenten
  - Gelenktypen
  - Grundkonfiguration für Roboter
  - Arbeitsraum
- Antriebe
- Sensoren
- Regelung und Steuerung

Modellierung von Robotersystemen

- Notation
- Trigonometrische Funktionen
- Additionstheoreme
- Winkel
- Kosinussatz/Sinussatz
- Vektoren
- Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt
- Matrizen und deren Eigenschaften
- Geometrie im Raum
- Physikalische Grundlagen

Notationen

- Skalare: Kleinbuchstaben, z.B. s
- Vektoren: Mit Pfeil, z.B. $\vec{u}$
- Matrizen: Großbuchstaben, z.B. A
- Bezeichner für Skalare, Vektoren bzw. Punkte: Index rechts unten, z.B. $\overrightarrow{u_1}$
- sinus bzw. $\mathrm{cosinus}$ als Matrizenkomponenten: Kurzschreibweise $\cos(\theta_1) = c\theta_1 = c_1$ (sinus analog)

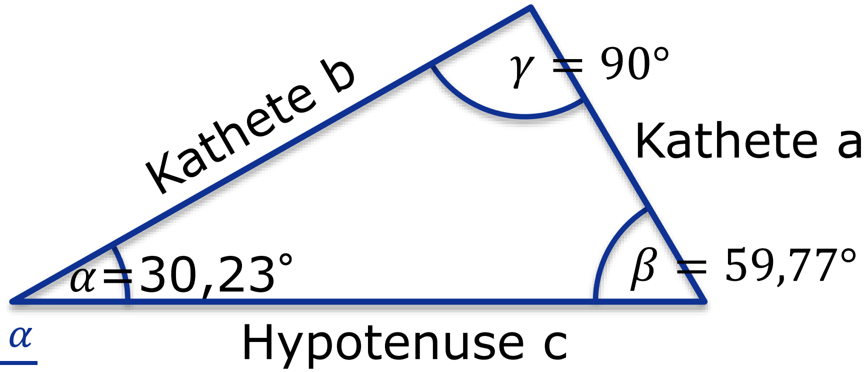
Notationen

- Koordinatensysteme (Frames):
  Großbuchstaben bzw. Ziffern, z.B. B
- Vektor mit Bezug auf bestimmtes Frame:
  Framebezeichner links oben, z.B. ${}^{B}\vec{u}$
- Matrix transformiert von Bezugsframe B in Basisframe A:
  Angabe unten bzw. oben links, z.B. ${}^{A}_{B}R$

Trigonometrische Funktionen

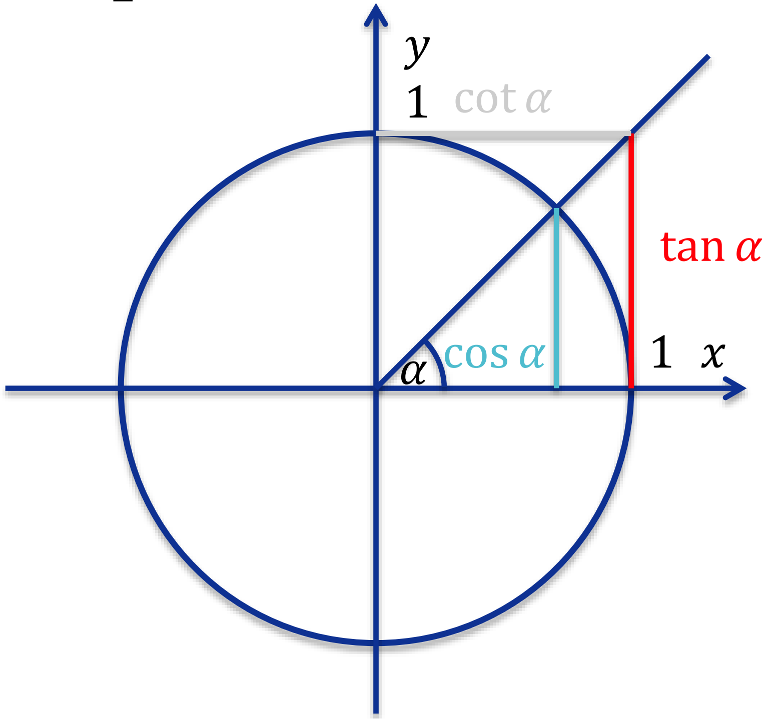
Die trigonometrische Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$ sind als Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck (zunächst nur $0°$ bis $90°$) für einen Winkel α definiert als …

- $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$
- $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$
- $\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$



Trigonometrische Funktionen

- Für bel. Winkel wird Def. auf Einheitskreis überführt
  - Länge der Hypotenuse: $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$
  - $\sin\alpha = y$
  - $\cos\alpha = x$
- Bogenmaß eines Winkels α (im Gradmaß) Länge des Kreisbogens, der den Winkel mit dem Einheitskreis (Radius $r = 1$) einschließt



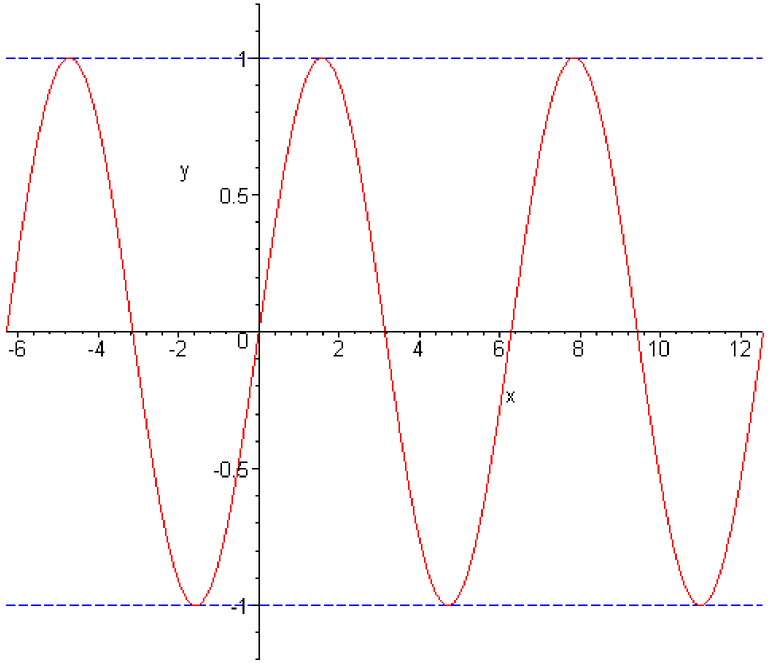
Eigenschaften von Sinus und Kosinus

	$\sin \boldsymbol{x}$	$\cos \boldsymbol{x}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	
Wertebereich	$-1 \leq \sin x \leq \infty$	$-1 \leq \cos x \leq \infty$
Periode	2π	
Symmetrie	Ungerade	Gerade
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Maxima	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x_k = k \cdot 2\pi$
Minima	$x_k = \frac{3\pi}{2} + \mathrm{k} \cdot 2\pi$	$x_k = \pi + k \cdot 2\pi$
Umrechnung	$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$

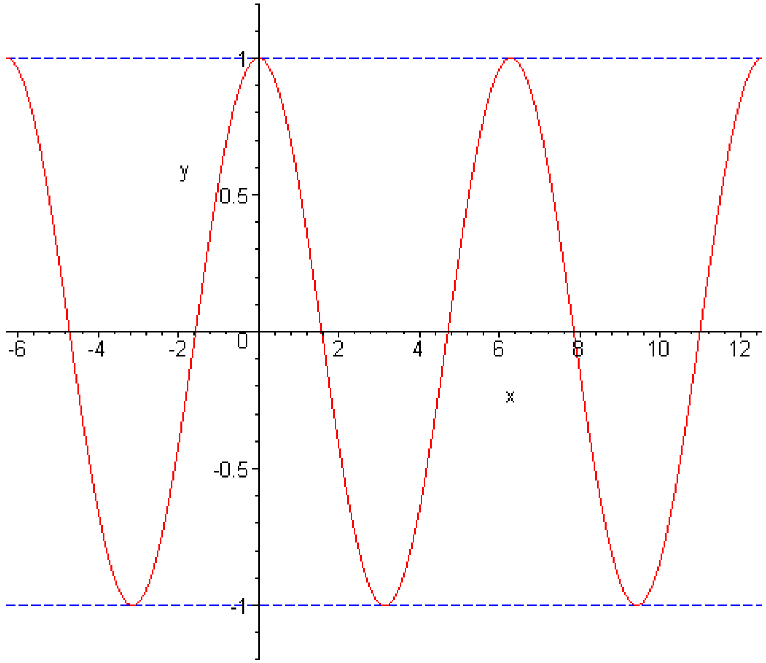
Wertetabelle von Sinus und Kosinus

	Sinus	Kosinus
$0°$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$30°$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	
$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$

Graphen von Sinus und Kosinus



Sinus



Kosinus

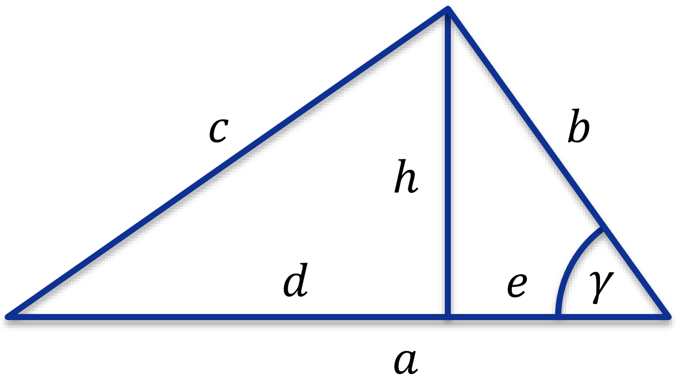
Additionstheoreme

- Sinus
  - $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2$
- Kosinus
  - $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2$
- Tangens
  - $\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2}$

Kosinussatz

Beziehungen zwischen den Seiten (a, b, c) eines ebenen Dreiecks und dem Kosinus eines der drei Winkel (α gegenüber a, …):

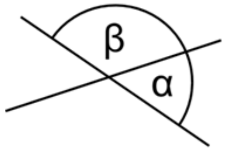
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$



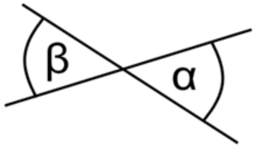
THE ROBOTICS RESEARCH LAB

Winkel

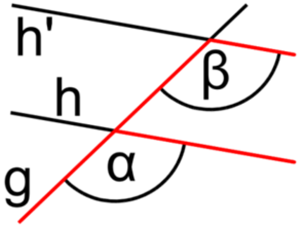
- Nebenwinkel: Zusammengerechnet 180°



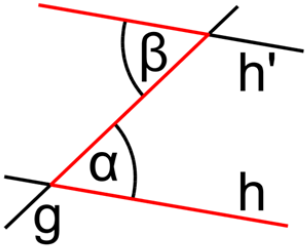
- Scheitelwinkel: Identisch



- Stufenwinkel:
  An geschnittenen Parallelen identisch



- Wechselwinkel:
  An geschnittenen Parallelen identisch



Skalarprodukt

- Skalarprodukt zweier Vektoren 0:
  Vektoren stehen senkrecht aufeinander
  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 \mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2 \mathrm{b}_2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n} \mathrm{b}_\mathrm{n}$
- Definition: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\gamma$
  - γ: Kleinster Winkel zwischen a und b
  - Kommutativ- und Distributivgesetz gelten
  - Assoziativgesetz gilt nicht
  - Gemischt assoziativ: $\mathrm{n}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (n \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(n \cdot \vec{b}\right)$
- Es gelten …
  - $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
  - $\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{e_z} = 1$
  - $\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{e_x} = 0$

Kreuzprodukt/Vektorprodukt

- Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ im Raum: Vektor, der senkrecht auf der von Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Ebene steht
- Definition im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}$
  - θ: Winkel zwischen beiden Vektoren
  - $\vec{e}$: Der senkrecht zu den Vektoren stehende Einheitsvektor
- Kreuzprodukt komponentenweise berechenbar im $\mathbb{R}^3$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Kreuzprodukt/Vektorprodukt

- Betrag des Kreuzprodukts ist Flächeninhalt des Parallelogramms $A_P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\phi$
- Für kollineare Vektoren ist Kreuzprodukt 0
- Es gilt $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- Es gelten Distributiv- und Antikommutativgesetz
- $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & a_1 & b_1 \\ \overrightarrow{e_2} & a_2 & b_2 \\ \overrightarrow{e_3} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

Spatprodukt

- Kombination aus Kreuz- und Skalarprodukt
- Größe: Orientiertes Volumens des Spats, der durch die drei Vektoren aufgespannt wird
  - $V > 0$ bei rechtshändigen Koordinatensystemen
  - $V < 0$ bei linkshändigen Koordinatensystemen
- Definition
  - $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$
  - Falls Vektoren linear abhängig sind, ist Spatprodukt 0
  - Vertauschen zweier Vektoren bewirkt Vorzeichenwechsel

Determinante

- Ordnet quadratischer Matrix eine Zahl zu
- Definition für $n \times n$-Matrizen
(Laplacescher Entwicklungssatz für i-te Zeile)
  - $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det\left(A_{ij}\right)$
- Faustregel für 2×2-Matrizen: Satz von Sarrus
  - $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Determinante

- $\det A = \det A^T$
- Vertauschen zweier Zeilen ändert VZ der Determinante
- Bel. Zeile/Spalte mit Skalar λ multiplizieren: Determinante multipliziert sich mit λ
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ mit $\det A \neq 0$
- Determinante 0, wenn …
  - Alle Elemente einer Zeile/Spalte 0
  - Zwei Zeilen identisch oder linear abhängig

Determinante: Beispiel

Entwicklung nach erster Zeile:

$$\det\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0 \cdot \det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= -3 \cdot -5 + 2 \cdot -3 = 15 - 6 = 9$$

Eigenwert einer Matrix

- Sei A n-reihige Matrix und E zugehörige Einheitsmatrix, so wird durch $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ ein n-dimensionales Eigenwertproblem gegeben
- Eigenwert ist Lösung des char. Polynoms $\det(A - \lambda E) = \vec{0}$
- Zu jedem Eigenwert λ_i gehört ein Eigenvektor x_i mit $(A -$

Eigenschaften der Eigenwerte

- Spur einer Matrix ist Summe aller Eigenwerte
  - $Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- Determinante einer Matrix ist Produkt aller Eigenwerte
  - $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
- Zu verschiedenen Eigenwerten gehörende Eigenvektoren sind linear unabhängig

Adjungierte Matrix

- Sei $A \in \mathbb{H}^{n\times m}$ eine Matrix über dem Körper $\mathbb{H}$ der reellen oder komplexen Zahlen, so gilt für die zu A adjungierte Matrix $A^* \in \mathbb{H}^{m\times n}$

$$\langle Av, w\rangle_n = \langle v, A^*w\rangle_m \text{ für alle } (v,w) \in \mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$$

, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ das Standardskalarprodukt des Körpers $\mathbb{H}^k$ ist.

- Berechnung:
  - Ist A eine reelle Matrix, so gilt $A^* = A^T$
  - Ist A eine komplexe Matrix, so gilt $A^* = \bar{A}^T$

Inverse Matrix

- Sei $A \in R^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, so gilt für die zugehörige inverse Matrix $A^{-1} \in R^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

, wobei $\cdot$ die Matrixmultiplikation darstellt, und E die Einheitsmatrix der Größe $n \times n$ ist.

- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Inversen Matrix

- Gleichungssystem (Gauß-Jordan-Algorithmus):
  - Erweitern der Koeffizientenmatrix um die Einheitsmatrix

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

  - Umformung von A mit elementarer Zeilenumformung auf obere Dreiecksgestalt

$$(D|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

Berechnung der Inversen Matrix

- D auf Diagonalgestalt bringen und in Einheitsmatrix überführen

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \hat{a}_{n1} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{array}\right)$$

- Mit Hilfe der Determinante und adjungierten Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Pseudoinverse Matrix

- Verallgemeinerung der inversen Matrix auf singuläre und nichtquadratische Matrizen
- Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix, dann gilt für die eindeutig bestimmte Matrix $A^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$
  - $AA^+A = A$
  - $A^+AA^+ = A^+$
  - $(AA^+)^* = AA^+$
  - $(A^+A)^* = A^+A$

  , wobei A^* der adjungierten zur Matrix A entspricht.

Jacobi-Matrix

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ totales Differential von y

$\vec{y} = f(\vec{x})$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{y_1} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\overrightarrow{y_1} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{y_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$dy_1 = \frac{df_1}{dx_1}dx_1 + \frac{df_1}{dx_2}dx_2 + \cdots + \frac{df_1}{dx_n}dx_n$$
$$dy_2 = \frac{df_2}{dx_1}dx_1 + \frac{df_2}{dx_2}dx_2 + \cdots + \frac{df_2}{dx_n}dx_n$$
$$\vdots$$
$$dy_n = \frac{df_n}{dx_1}dx_1 + \frac{df_n}{dx_2}dx_2 + \cdots + \frac{df_n}{dx_n}dx_n$$

Jacobi-Matrix in Vektorschreibweise

- Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \cdots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

- Alternativ $d\vec{y} = df(\vec{x}) = \frac{df(\vec{x})}{d\vec{x}} d\vec{x}$ mit Jacobi-Matrix $J(\vec{x}) = \frac{df(\vec{x})}{d\vec{x}}$

Geometrie im Raum

- Gerade $g = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ im Raum mit …
  - Stützpunkt $\vec{a}$
  - Richtungsvektor $\vec{b}$
- Abstand $d = \frac{|\vec{b}\times(\vec{x}-\vec{a})|}{|\vec{b}|}$ zwischen Punkt x und Gerade g
- Abstand $d = \frac{|\overrightarrow{b_1}\times(\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_1})|}{|\overrightarrow{b_1}|}$ zweier paralleler Geraden g_1, g_2

Geometrie im Raum

- Schnittwinkel $\varphi = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2}}{\left|\overrightarrow{b_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b_2}\right|}\right)$ zweier Geraden g_1, g_2
- Ebene im Raum: $E = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$
  - Stützpunkt $\vec{a}$
  - Richtungsvektoren $\vec{b}, \vec{c}$
- Ebene im Raum: $E = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}) = 0$
  - Ortsvektor $\overrightarrow{a_2}$ des Stützpunktes
  - Ortsvektor $\overrightarrow{a_1}$ des laufenden Punktes
  - Normalvektor $\vec{n}$ zu $(\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2})$

Geometrie im Raum

- Abstand $d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{a_2})|}{|\vec{n}|}$ zwischen Punkt x und Ebene E
- Abstand $d = \frac{|\vec{n} \cdot (\overrightarrow{a_g} - \overrightarrow{a_{E2}})|}{|\vec{n}|}$ mit …
  - Ebene $E = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{a_{E1}} - \overrightarrow{a_{E2}})$
  - Gerade $g = \overrightarrow{a_g} + \lambda \overrightarrow{b_g}$

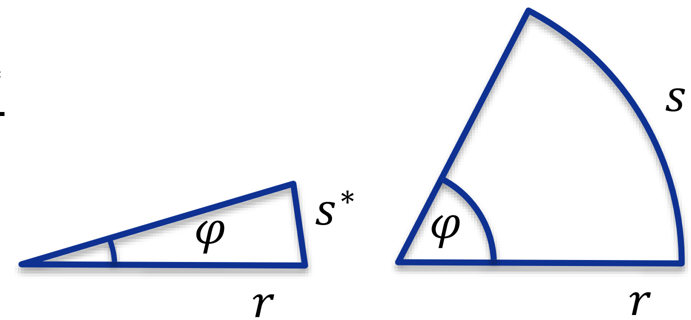
Physikalische Grundlagen: Translation

Durch Trägheit bewegen sich Körper ohne Krafteinwirkung gleichförmig ohne Richtungsänderung.

- Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt}$
- Ortsvektor $\vec{s}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)$, falls Start im Ursprung zum Zeitpunkt $t = 0$
- Beschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$
- Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$
  - $\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t)$, wenn $\vec{v}(0) = \vec{0}$
  - $\vec{v}(t) = \vec{a}t$, wenn $\vec{s}(t_0) = \vec{v}(t_0) = \vec{0}$ und $\vec{a}(t_0) = \mathrm{const}$
  - Im freien Fall $v = gt, s = \frac{1}{2}gt^2, v = \sqrt{2gs}$ mit Erdbeschleunigung g und Fallhöhe s

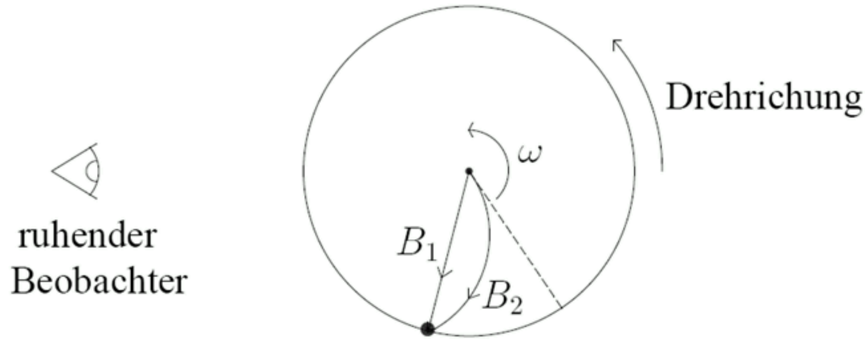
Physikalische Grundlagen: Rotation

- Drehwinkel $\varphi = \frac{s}{r}$ (mit s in Radian)
  - Näherung für kleine Winkel: $\varphi = \frac{s^*}{r}$
- Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$
- Winkelbeschleunigung $\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$
  - $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ für $\omega = \text{const}$, Kreisfrequenz f, Umlaufzeit T
- Tangentialgeschwindigkeit $|\vec{v}(t)| = r\frac{d\varphi(t)}{dt}$ bei gleichförmiger Kreisbewegung
- Radialbeschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ (zeigt zum Drehzentrum)



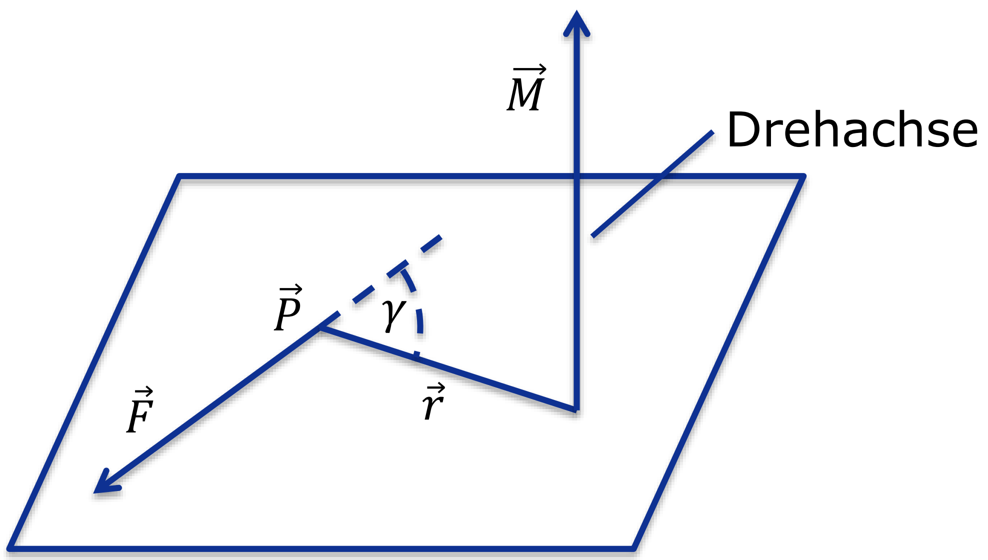
Physikalische Grundlagen: Kräfte

- Grundgleichung der Mechanik $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
- Gewichtskraft $G = m \cdot g$ $(1\text{kg} \approx 9{,}81\text{N})$
- Zentrifugalkraft $\vec{F_z} = -m \cdot \overrightarrow{a_r} = -m \cdot \vec{r} \cdot \omega^2$
- Corioliskraft: Lenkt Körper in drehendem System ab, der sich in Richtung des Radius bewegt
  - Geradlinige Bahn B_1 bzgl. ruhendem Beobachter
  - Gekrümmte Bahn B_2 bzgl. Beobachter in dreh. System
  - Somit Kraft notwendig, um Körper in drehendem System auf gerader Bahn zu bewegen



Physikalische Grundlagen: Drehmomente

- Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ auf Körper mit Hebel $\vec{r}$ und Kraft $\vec{F}$
  - Abstand r von Massenpunkt und Achse
- Betragsgleichung für Drehmoment $M = F \cdot r \cdot \sin\gamma$



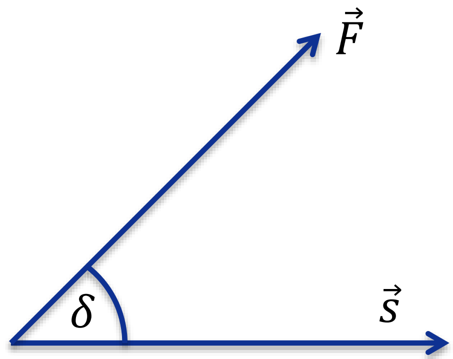
Physikalische Grundlagen: Trägheitsmomente

- Trägheitsmoment $dJ = r^2 dm$ für Massenpunkt mit Masse dm
- Trägheitsmoment $J = \int_{\text{Volumen}} r^2 dm$ für Körper
  - Maß J für Massenverteilung zur Drehachse
- Tensor: Trägheitsverhalten bzgl. x-y-z-System in homogenen Koordinaten $M = \int \vec{r} \cdot \vec{r}^T dm =$

$$\begin{pmatrix} \int x^2\,dm & \int yx\,dm & \int xz\,dm & \int x\,dm \\ \int xy\,dm & \int y^2\,dm & \int yz\,dm & \int y\,dm \\ \int xz\,dm & \int yz\,dm & \int z^2\,dm & \int z\,dm \\ \int x\,dm & \int y\,dm & \int z\,dm & \int dm \end{pmatrix}$$

Physikalische Grundlagen: Arbeit

- Arbeit $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ mit Kraft $\vec{F}$ und Weg $\vec{s}$
- $A = F \cdot s \cdot \cos\delta$ als Betragsgleichung für die Kraft
- $A = \int_{(s)} \overrightarrow{F_s} d\vec{s}$, falls Kraft nicht konstant ($\overrightarrow{F_s}$ in Richtung $d\vec{s}$)



Physikalische Grundlagen: Energie

- Potentielle Energie $P = m \cdot g \cdot h$ mit Masse m, Höhe h
- Kinetische Energie $K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
- Kin. Energie eines rotierenden Körpers

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

- Kin. Energie nach Fall aus Höhe h

$$K = m \cdot g \cdot h = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot g = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

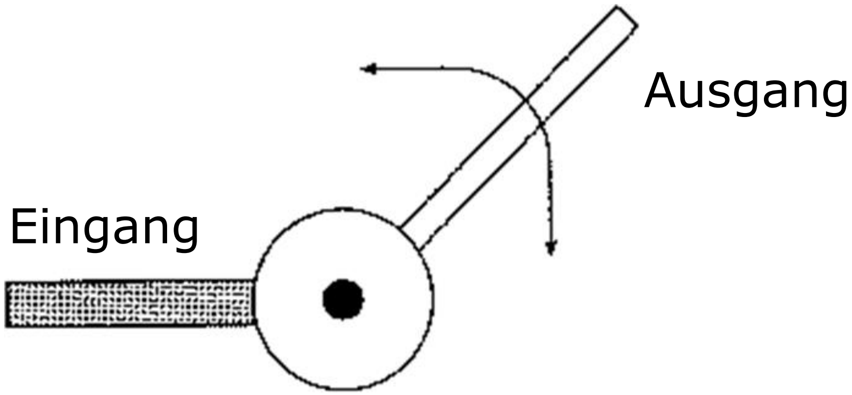
Physikalische Grundlagen: Einheiten

Größe	Zeichen	Einheit	Name
Weg/Strecke	s	m	Meter
Zeit	t	s	Sekunde
Geschwindigkeit	v	m/s	
Beschleunigung	a	m/s^2	
Winkel-Geschwindigkeit	ω	$\frac{rad}{s}$	
Drehwinkel	φ	rad	
Kraft	$\vec{F}$	$N = \frac{kgm}{s^2}$	Newton
Trägheitsmoment	J	kgm^2	
Arbeit	A	$J = \frac{kgm^2}{s^2}$	Joule

Teilsysteme von Robotersystemen

Gelenktypen: Rotationsgelenk

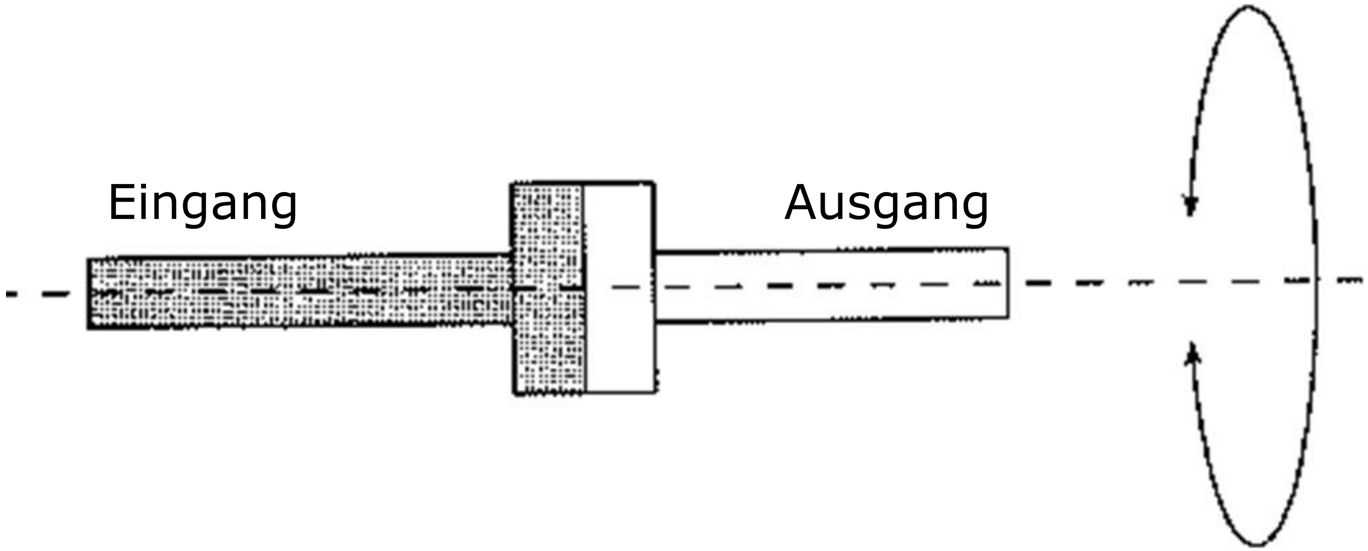
Die Drehachse eines Rotationsgelenks (R) bildet einen rechten Winkel mit den Achsen der beiden angeschlossenen Glieder.



[*Siegert, Bocionek 96*]

Gelenktypen: Torsionsgelenk

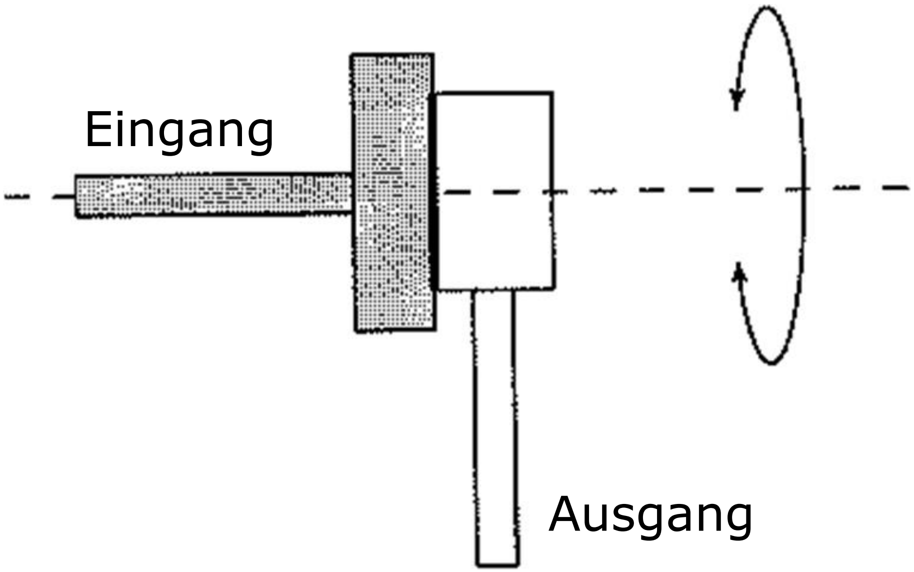
Die Drehachse des Torsionsgelenks (T) verläuft parallel zu den Achsen der beiden Glieder.



[*Siegert, Bocionek 96*]

Gelenktypen: Revolvergelenk

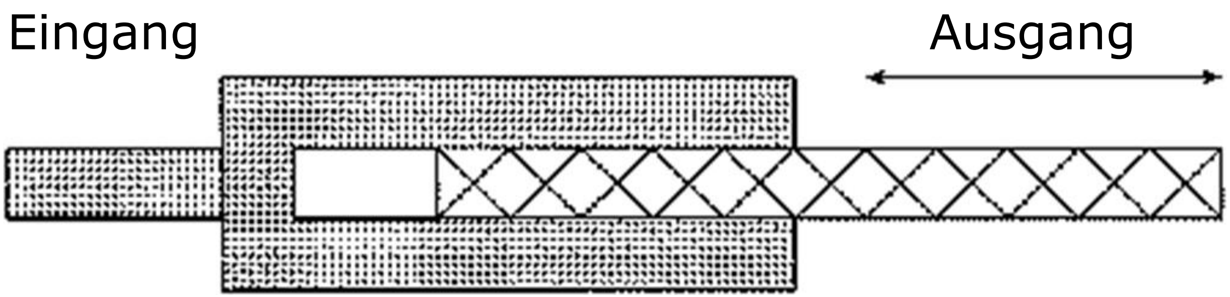
Das Eingangsglied des Revolvergelenks (V) verläuft parallel zur Drehachse, das Ausgangsglied steht im rechten Winkel zur Drehachse.



[*Siegert, Bocionek 96*]

Gelenktypen: Lineargelenk

Ein Lineargelenk (L) - auch Translationsgelenk, Schubgelenk oder prismatisches Gelenk genannt - bewirkt eine gleitende oder fortschreitende Bewegung entlang der Achse.



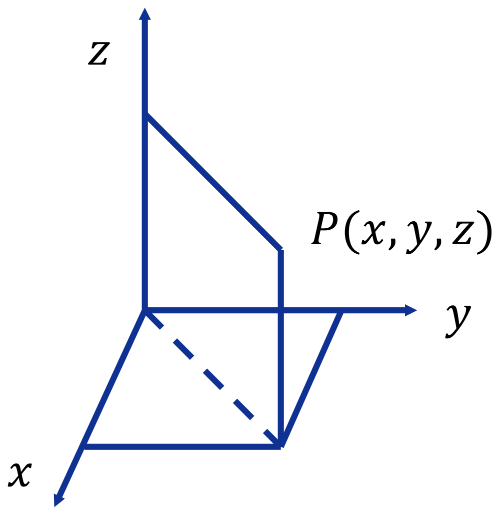
[*Siegert, Bocionek 96*]

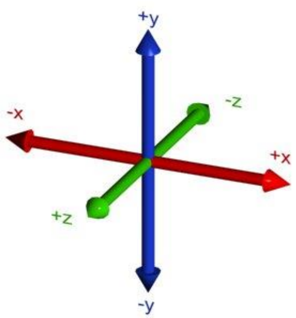
Begriffserklärung

- Arbeitsraum: Besteht aus denjenigen Punkten im 3-D Raum, die von der Roboterhand angefahren werden können
  - Drei Freiheitsgrade in der Bewegung benötigt
  - Mindestens drei Gelenke
- Grundform des Arbeitsraums: Arbeitsraum, der sich ergibt, wenn die gegenseitige Behinderung der Roboterarme und die Begrenzung der Gelenkwinkel nicht berücksichtigt wird

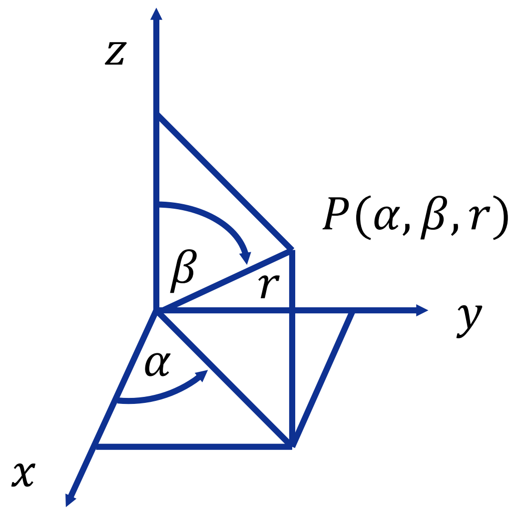
Räumliche Koordinatensysteme

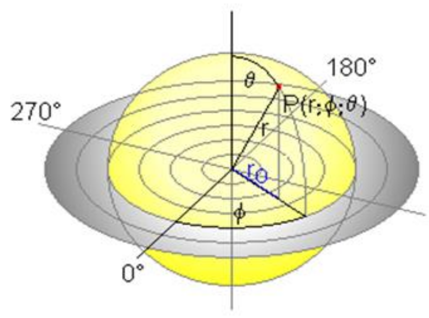
Kartesische Koordinaten



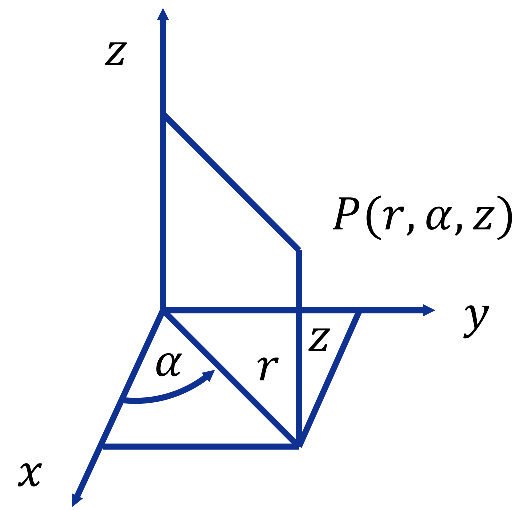


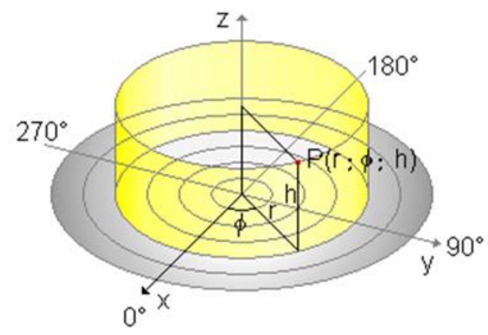
Kugelkoordinaten





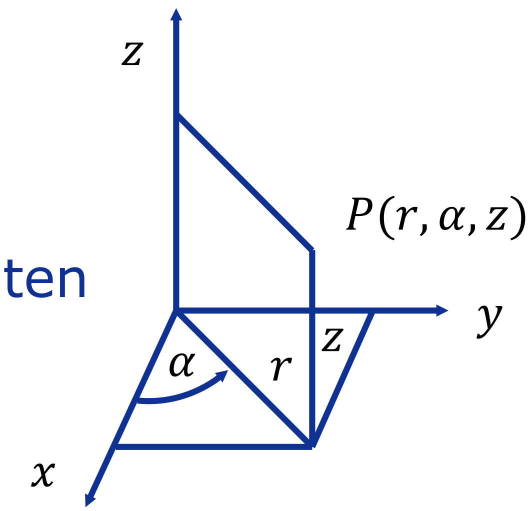
Zylinderkoordinaten





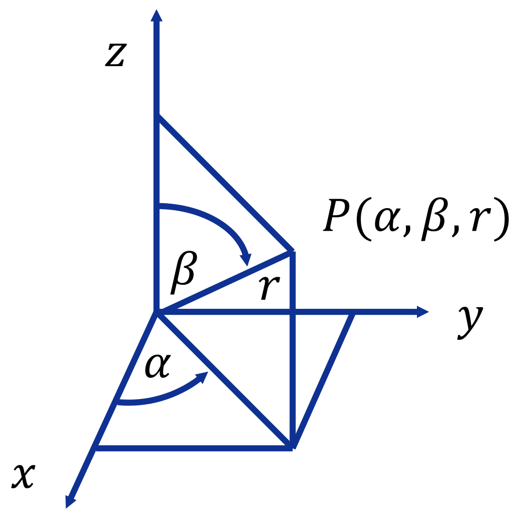
Umrechnung Koordinatensysteme

- Kartesische Koordinaten → Zylinderkoordinaten
  - $(x, y, z) \rightarrow (r, \alpha, z)$
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $\tan \alpha = \frac{y}{x}$
  - $z = z$
- Zylinderkoordinaten → Kartesische Koordinaten
  - $(r, \alpha, z) \rightarrow (y, x, z)$
  - $x = r \cdot \cos \alpha$
  - $y = r \cdot \sin \alpha$
  - $z = z$



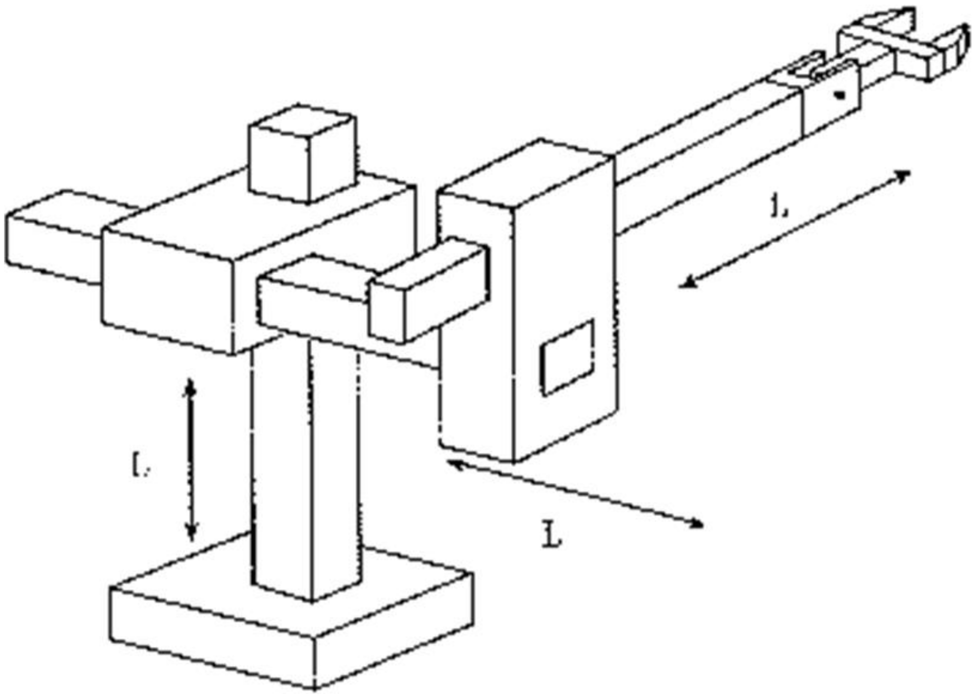
Umrechnung Koordinatensysteme

- Kartesische Koordinaten → Kugelkoordinaten
  - $(x, y, z) \rightarrow (r, \alpha, \beta)$
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - $\cos\beta = \frac{z}{r}$
  - $\tan\alpha = \frac{y}{x}$
- Kugelkoordinaten → Kartesische Koordinaten
  - $(r, \alpha, \beta) \rightarrow (x, y, z)$
  - $x = r \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha$
  - $y = r \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha$
  - $z = r \cdot \cos\beta$



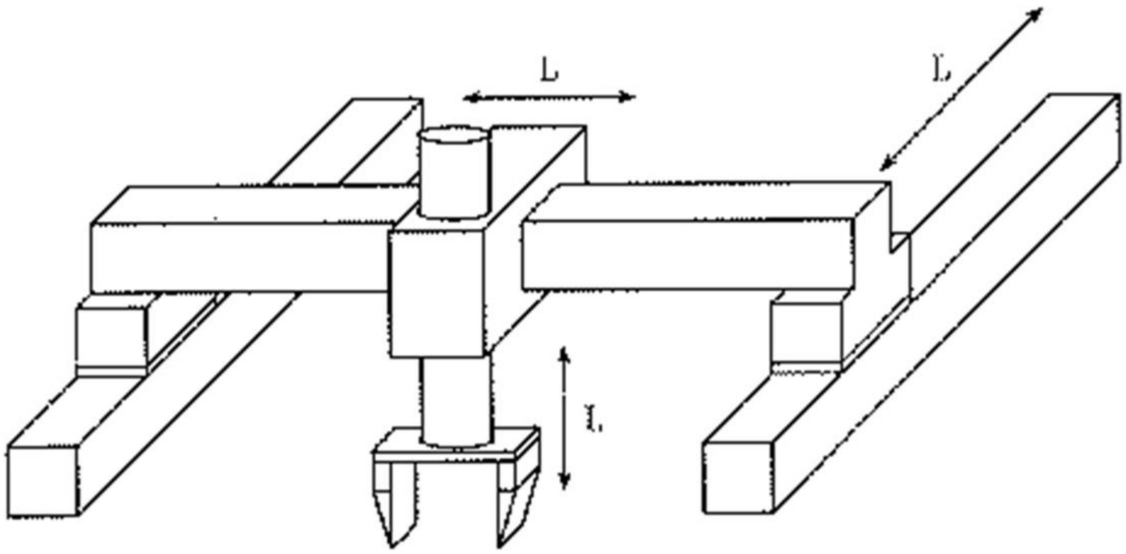
Kartesischer Roboter (Typ: LLL)

- Grundform des Arbeitsraums: Quader [*Siegert, Bocionek96*]



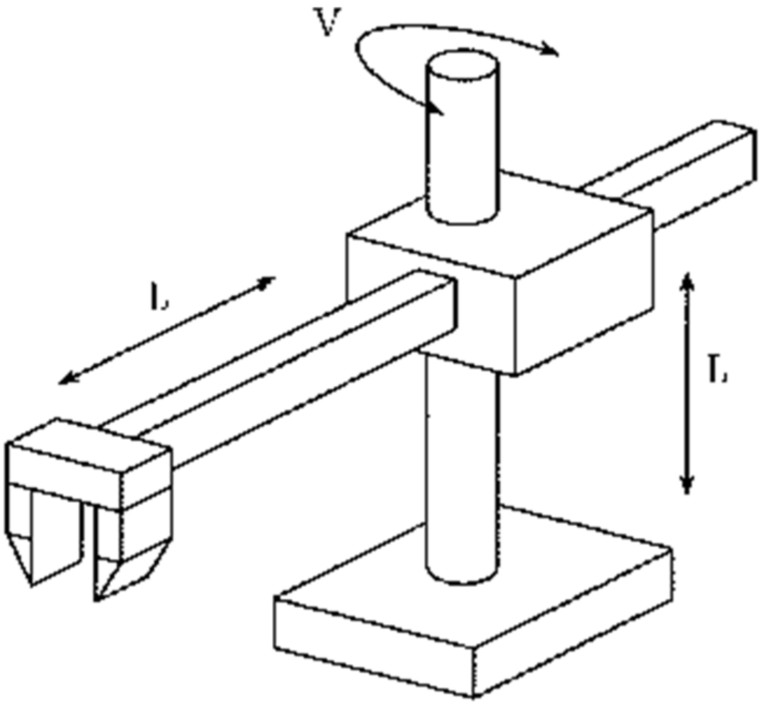
Kartesischer Roboter (Typ: LLL)

- Grundform des Arbeitsraums: Quader
  [*Siegert, Bocionek96*]



Roboterarm (Typ: LVL)

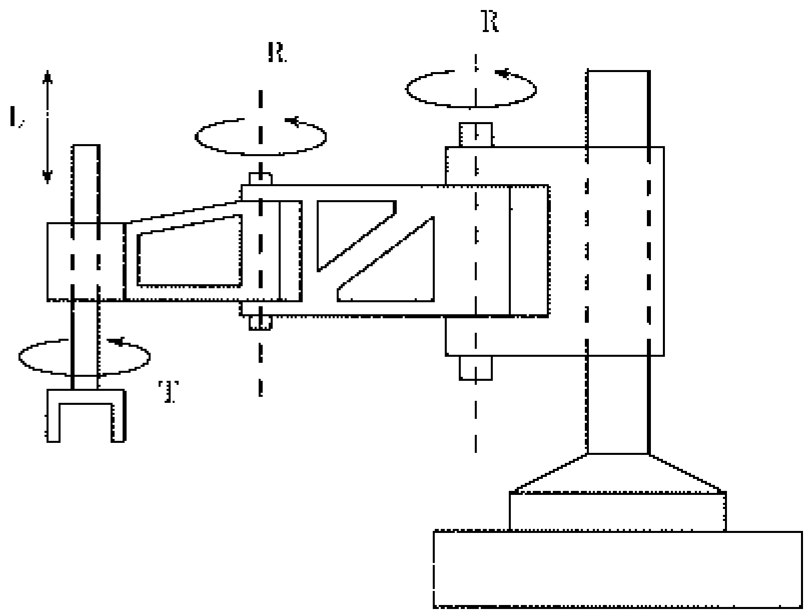
- Grundform des Arbeitsraums: Zylinder
- Andere Typen: TLL, LTL
  [*Siegert, Bocionek96*]



SCARA-Roboter (Typ: RRLT)

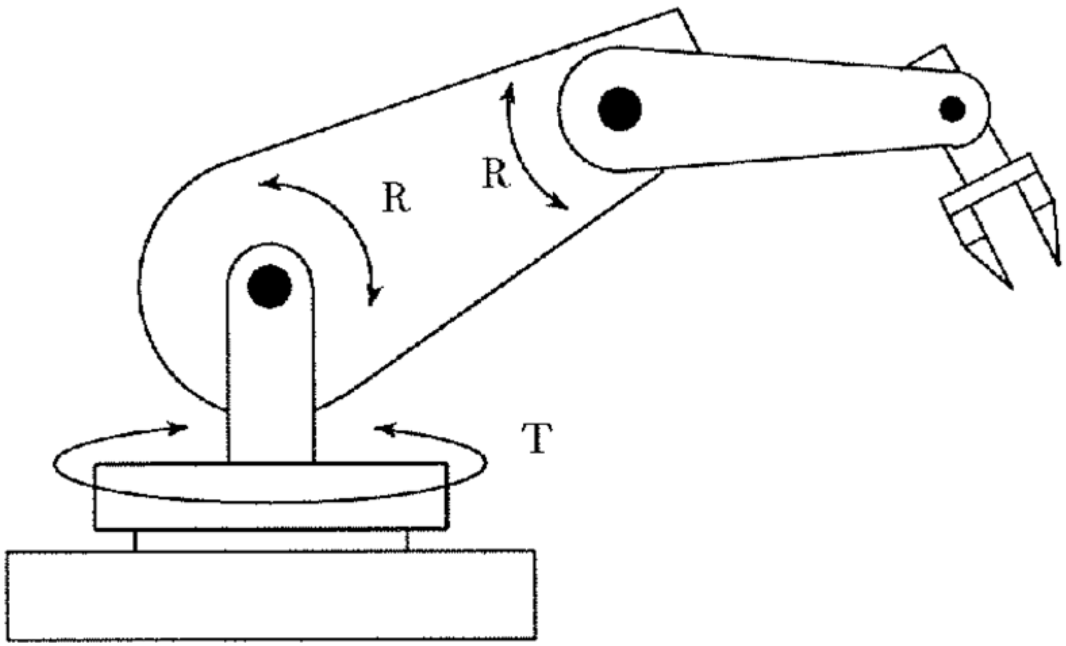
- Selective Compliance Assembly Robot Arm
- Grundform des Arbeitsraums: Zylinder

[*Siegert, Bocionek96*]

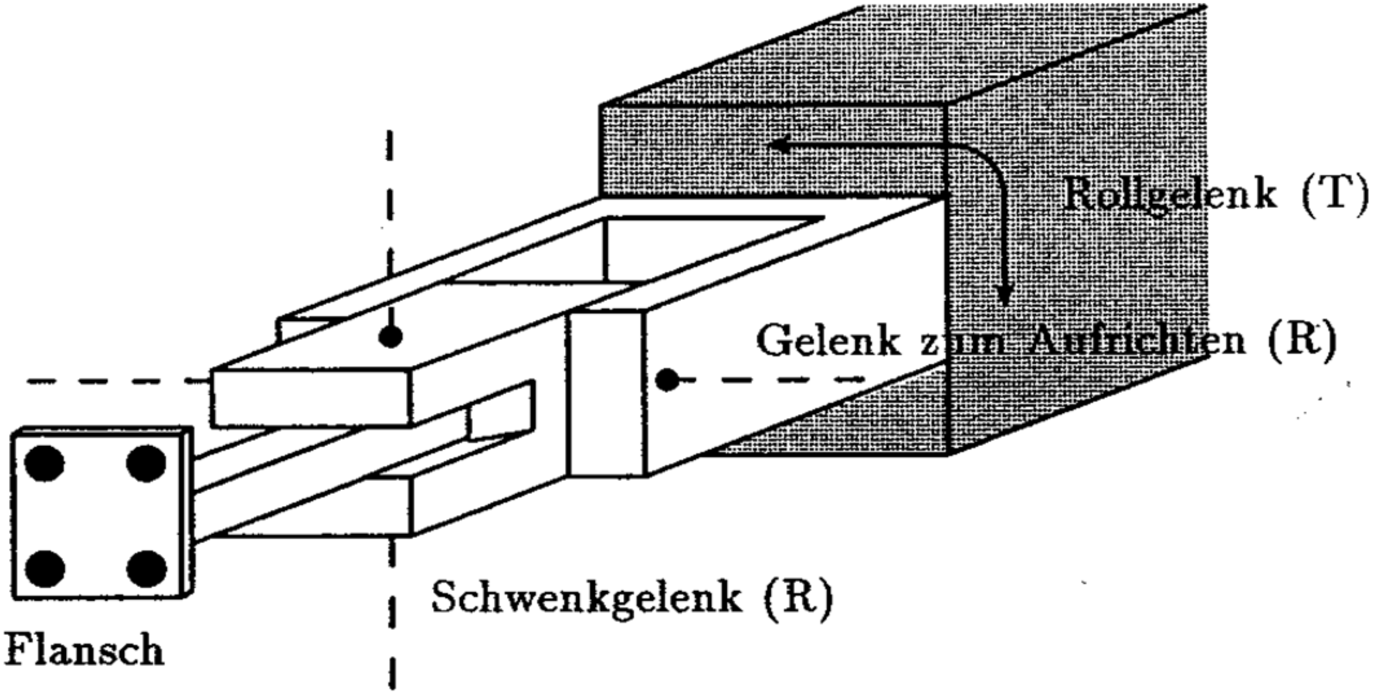


Gelenkarm (Typ: TRR)

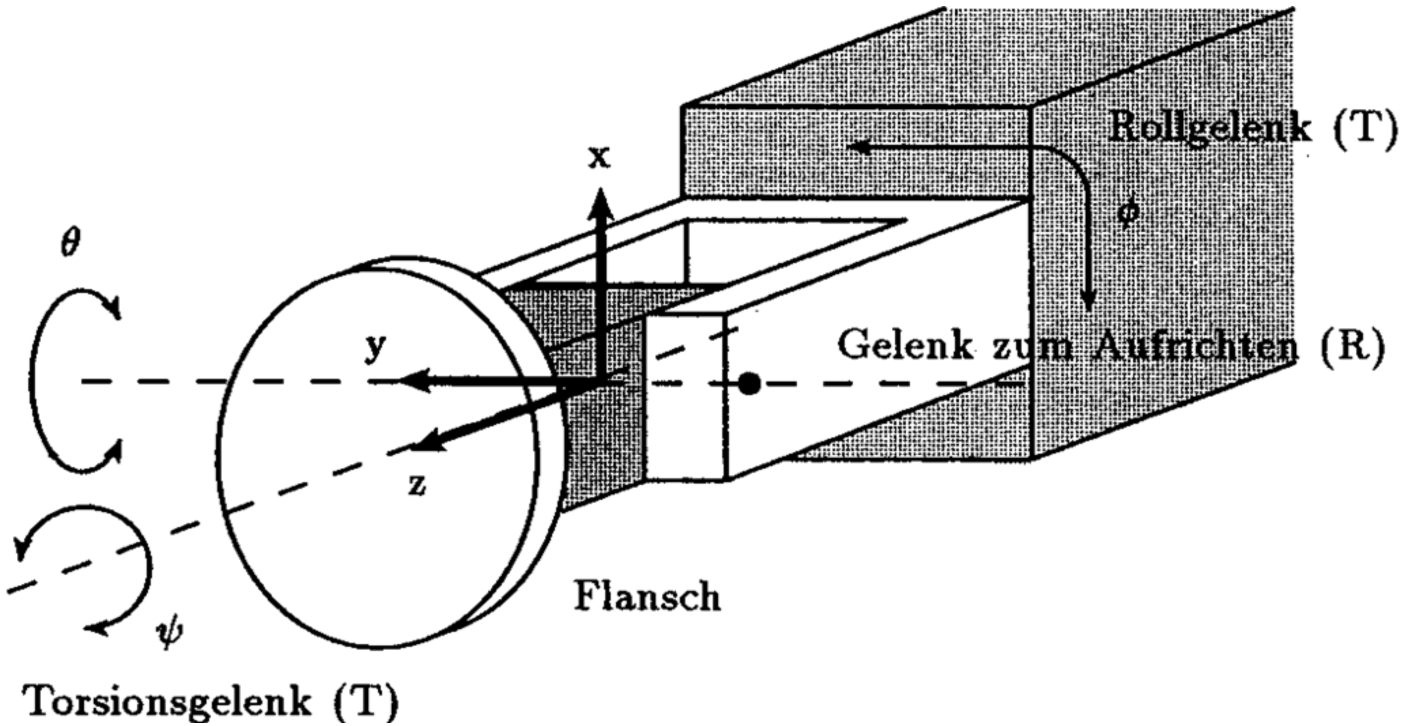
- Grundform des Arbeitsraums: Kugel
- Andere Typen: VVR



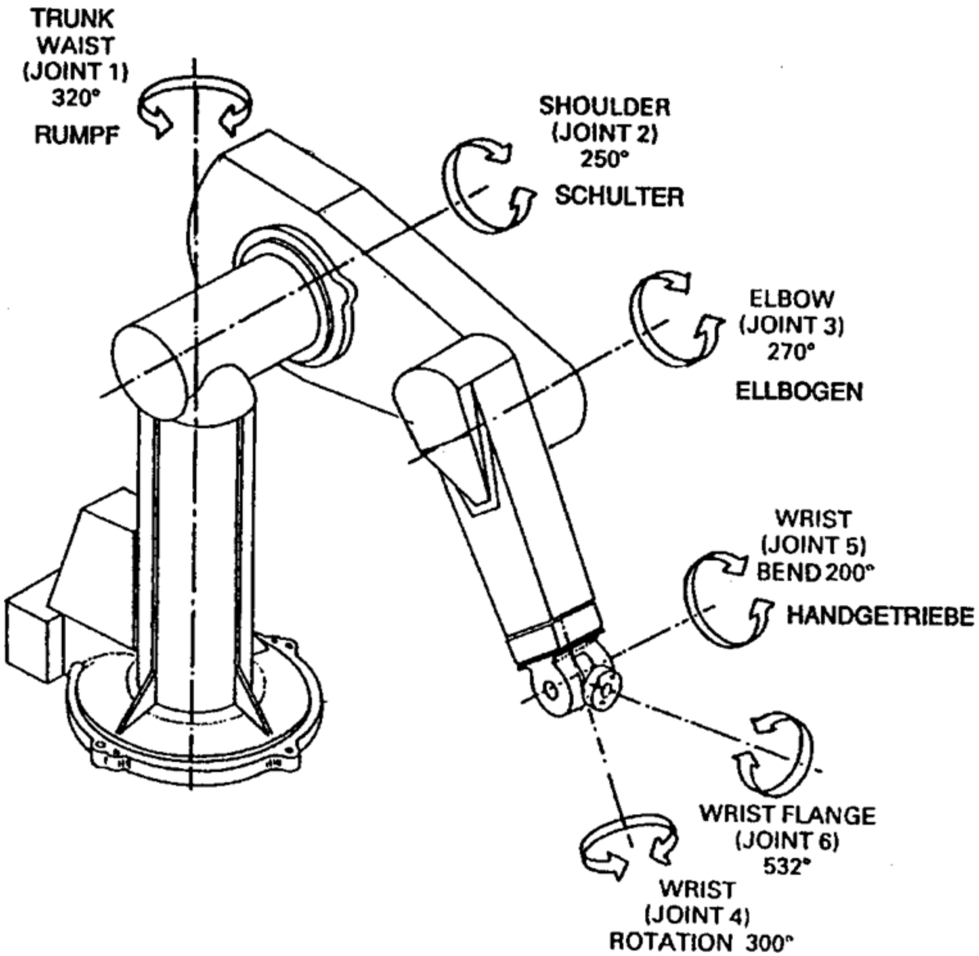
Handgelenk-Grundform (Typ: TRR)



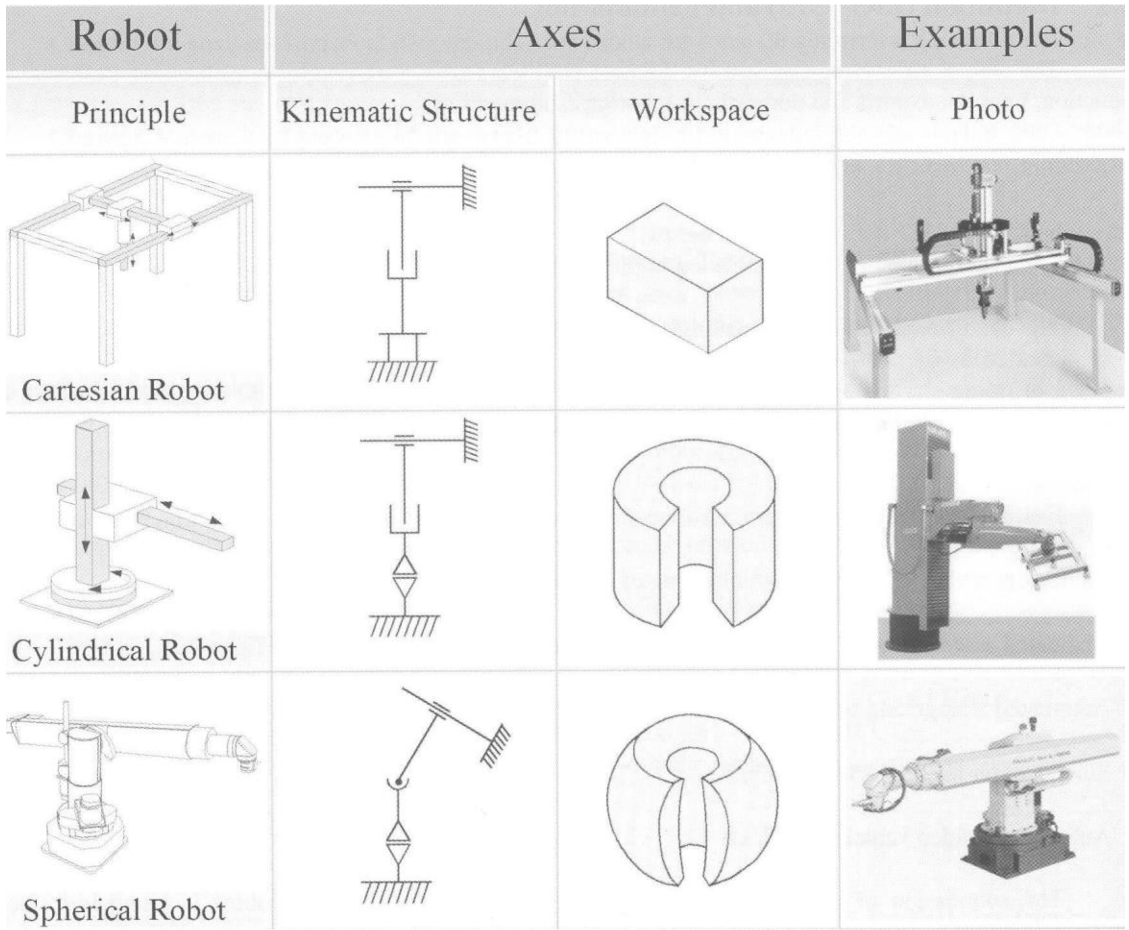
Handgelenk-Grundform (Typ: TRT)



Puma-Roboter (Typ: TVRRRT)

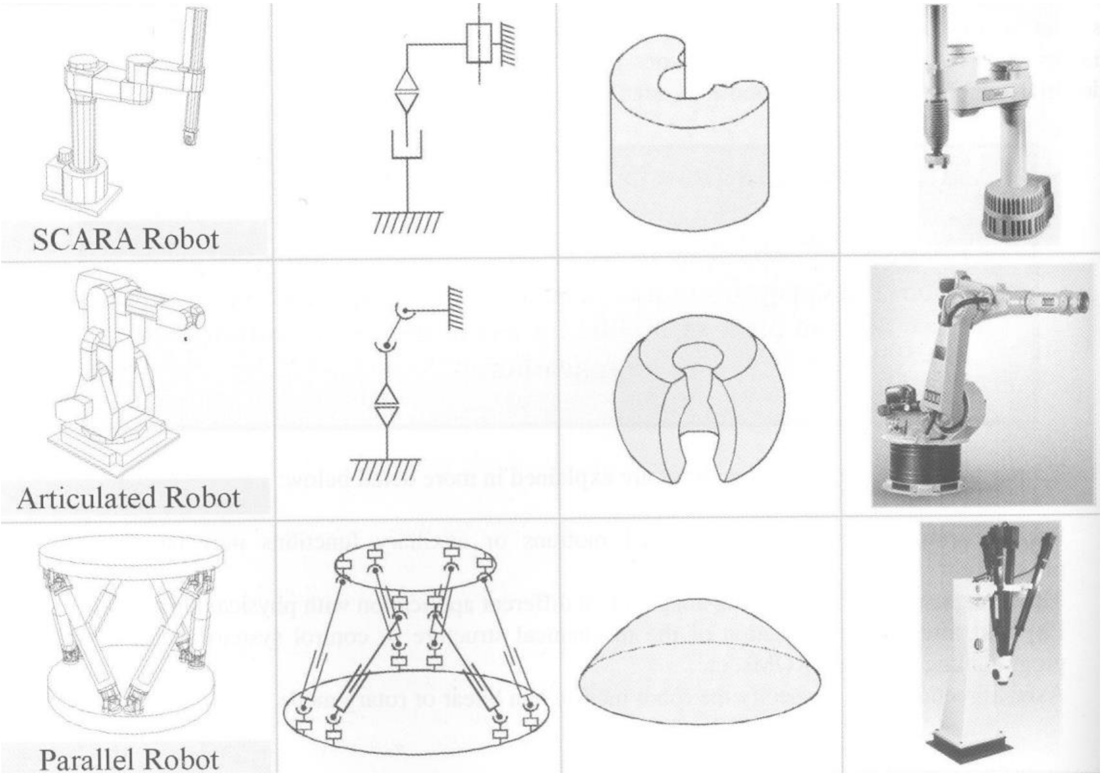


Roboterkinematiken



[*World Robotics 2003*]

Roboterkinematik



[*World Robotics 2003*]

Antriebe

- Fluidische Antriebe (pneumatisch/hydraulisch)
  - Lineargetriebe
  - Rotatorische Antriebe
  - Muskelartiger Antrieb
- Elektrische Antriebe
  - Lineargetriebe (hohes Baugewicht, geringe Vorschubgeschwindigkeit)
  - Rotatorische Antriebe
  - Gleichstromservomotoren (bürstenlos, bürstenbehaftet)
  - Wechselstromservomotoren
  - Schrittmotoren

Pneumatischer Antrieb

- Stellenergie: Komprimierte Luft, kein Getriebe
- Vorteile
  - Kostengünstig, einfacher Aufbau, geringe Reaktionszeit
  - Nutzbar in „ungünstiger" Umgebung
- Nachteile
  - Laut
  - Aufwändige Steuerung
  - Meist nur Punkt-zu-Punkt-Betrieb
  - Schlechte Positioniergenauigkeit (da Luft kompressibel)
- Einsatz
  - Kleinere Roboter mit schnellen Arbeitszyklen und wenig Kraft, z.B. Palettierung kleinerer Werkstücke

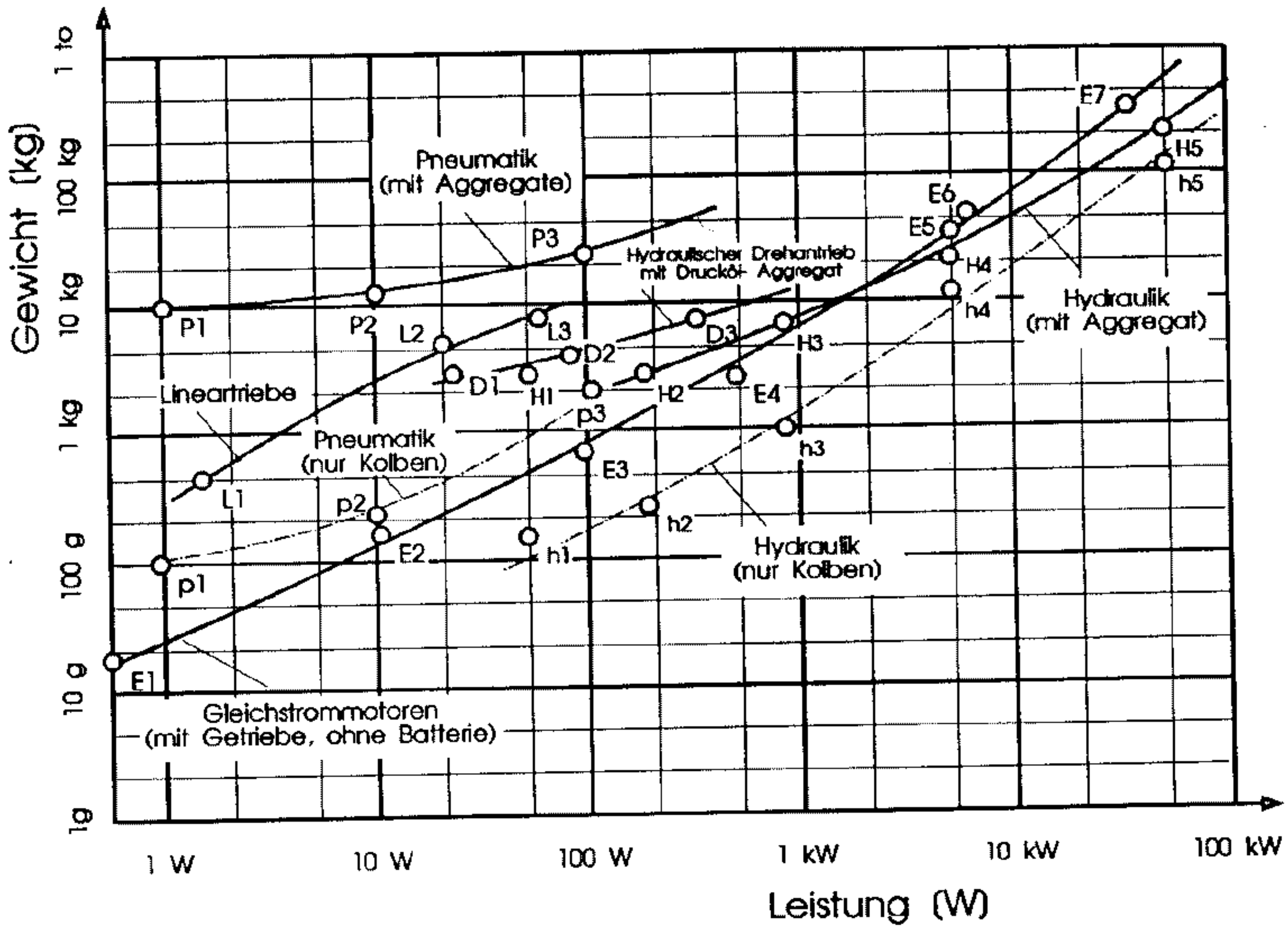
Hydraulischer Antrieb

- Stellenergie: Öldruckpumpe und steuerbare Ventile
- Vorteile
  - Sehr große Kräfte
  - Mittlere Geschwindigkeit
- Nachteile
  - Laut
  - Zusätzlicher Platz für Hydraulik
  - Ölverlust führt zu Verunreinigung
  - Ölviskosität erlaubt keine guten Reaktionszeiten und keine hohen Positionier- und Wiederholgenauigkeit
- Einsatz
  - Große Roboter

Elektrischer Antrieb

- Stellenergie: Elektrische Energie
- Vorteile
  - Kompakt/Geringer Platzbedarf
  - Gute Regelbarkeit von Drehzahlmoment
  - Hohe Positionier- und Wiederholgenauigkeit (ermöglicht präzises Abfahren von Flächen und gekrümmten Bahnen)
- Nachteile
  - Geringe Kraft
- Einsatz:
  - Kleinere Roboter für Präzisionsarbeiten, z.B. zur Leiterplattenbestückung

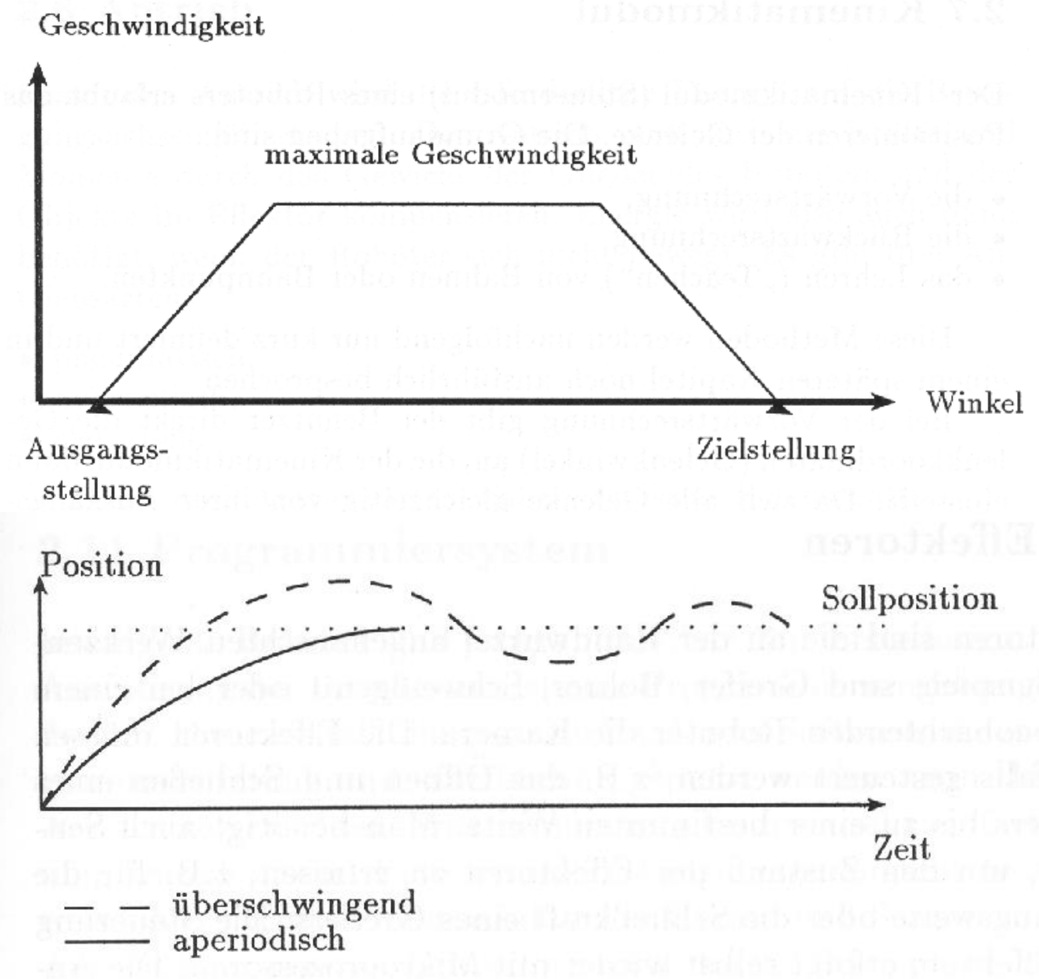
Vergleich von Antrieben



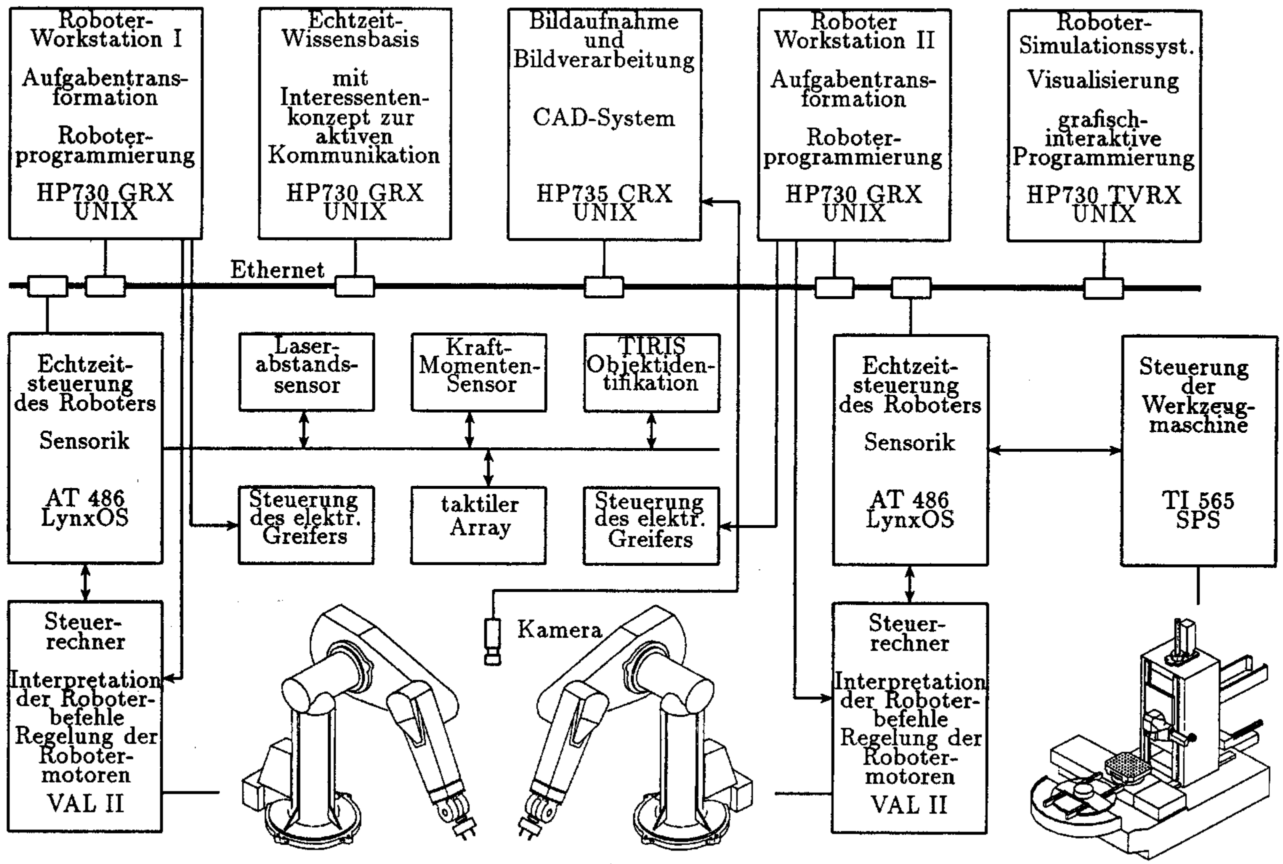
Sensoren

- Interne Messgrößen
  - Stellung der Gelenke
  - Geschwindigkeit, mit der sich Gelenke bewegen
  - Kräfte und Momente, die auf die Gelenke einwirken
- Externe Messgrößen
  - Entfernungen
  - Lage von Positioniermarken und Objekten
  - Kontur von Objekten
  - Pixelbilder der Umwelt (CCD-Kamera)

Gelenkregelung



Steuerungsmodule für eine Roboterzelle



Literatur

- [Siegert, Bocionek 96] Siegert, H.-J. and Bocionek, S. (1996) Robotik: Programmierung intelligenter Roboter. Springer Verlag
- [World Robotics 2003] International Federation of Robotics, United Nation, New York and Geneva, 2003

Nächste Vorlesung ...

Grundlagen der Raumkinematik

- Beschreibung von Objekten und Objektlagen
- Orientierungsbeschreibung