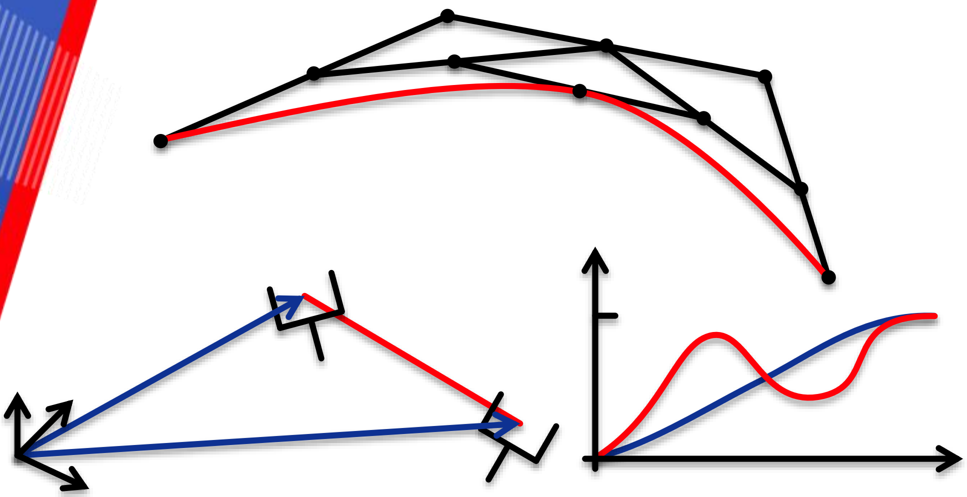
# Bahnsteuerung und Interpolation



**Prof. Karsten Berns**
Robotics Research Lab
Department of Computer Science
University of Kaiserslautern, Germany

# Inhalt

- Grundlagen der Bahnsteuerung
- Planungsarten
- Bahnsteuerung
- Spline-Interpolation

# Grundlagen der Bahnsteuerung

- Roboterbewegungen werden als Zustandsänderungen über die Zeit (Trajektorie) relativ zu einem stationären KS (kartesischer Raum, Gelenkwinkelraum) aufgefasst
- Häufig Berücksichtigung von Gütekriterien, Neben-, Rand- und Zwangsbedingungen
- Gegeben
  - Manipulatorstellung zum Startzeitpunkt (in kartesischen Koordinaten $\vec{y}_{Start}$ oder im Konfigurationsraum $\vec{\theta}_{start}$)
  - Manipulatorstellung zum Zielzeitpunkt ($\vec{y}_{Ziel}$ bzw. $\vec{\theta}_{Ziel}$)
- Gesucht
  - Trajektorie, welche den Manipulator vom Startpunkt zum Zielpunkt überführt

# Planungsarten

- PTP: Point to Point
  - Planung der Bewegung im Konfigurationsraum
  - Zeitoptimale Bahn
  - Kartesischer Bahnverlauf nicht bekannt
  - Anwendung: Punktschweißen, Handhabungsaufgaben, …
- CP: Continuous Path
  - Bahnsteuerung im kartesischen Raum
  - Bahnverlauf kann an gegebene Form angepasst werden
  - Bahnverlauf außerhalb des Arbeitsraums möglich
  - Grenzwertüberschreitung von Gelenkbeschl. möglich
  - Anwendung: Bahnschweißen, Laserschneiden, Lackieren, …

# PTP: Bewegungsphasen der Gelenke

1. Beschleunigung
2. Bewegung mit maximaler oder gewünschter Geschwindigkeit
3. Abbremsung, Ruhestellung ist Zielstellung

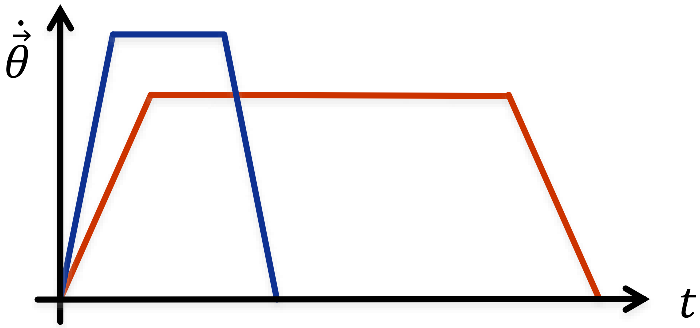
# PTP: Ablauf der Planung

- Änderungsberechnung jeder Stellgröße $\vec{\theta}_{Ziel} - \vec{\theta}_{Start}$
- Bestimmung der Beschleunigungs- und Bremsdauer
- Ermittlung der Zeitspanne, in der das Gelenk mit maximaler Geschwindigkeit bewegt wird
  - Entfällt falls nötige Änderung zu gering um maximale Geschwindigkeit zu erreichen
- Generieren der Trajektorie
- Vorgegebenen Stellgrößen können erhalten werden durch …
  - Teach-In
  - Direkte Vorgabe
  - Ausgabe der inversen Kinematik

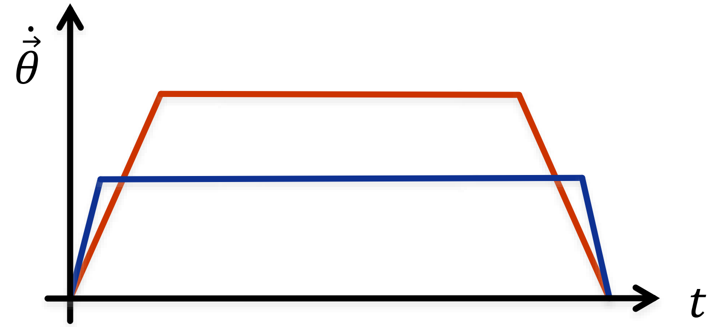
# PTP: Synchronisationsarten

- Asynchron
  - Planung der Achsen unabhängig voneinander
- Synchron
  - Bewegung aller Achsen beginnt und endet gleichzeitig
  - Langsamstes Gelenk als Referenz (Leitachse, Leitgelenk)
  - Vorteil: geringere Belastung der Mechanik
- Vollsynchron
  - Angleichung der Beschleunigungs- und Bremszeiten
  - Vorteil: glattere Bewegungsbahn im kartesischen Raum
  - Nachteil: Beschleunigung muss vorgegeben werden

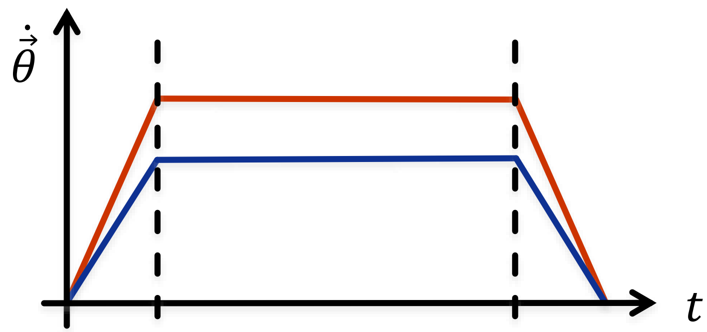
# PTP: Synchronisationsarten




Asynchrone PTP




Synchrone PTP




Vollsynchrone PTP

# PTP: Punkt-zu-Punkt-Steuerung

- Vorteile
  - Einfache Berechnung der Stellgrößentrajektorie
  - Berechnung ohne Probleme mit Singularitäten
  - Einfache Berücksichtigung von roboterspezifischen Besonderheiten wie Gelenkwinkelarbeitsbereiche, max. Gelenkgeschwindigkeiten und Beschleunigungen
  - Zeitoptimale Bewegungsbahn
- Nachteile
  - Exakte kartesische Bahn schwer vorhersehbar

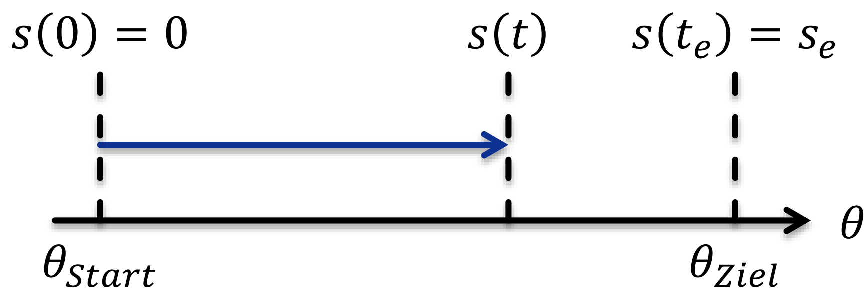
# PTP: Randbedingungen

- Start- und Zielzustand bekannt
  - $\vec{\theta}(t_{Start}) = \vec{\theta}_{Start}$
  - $\vec{\theta}(t_{Ziel}) = \vec{\theta}_{Ziel}$
- Geschwindigkeit zu Beginn und Ende Null
  - $\dot{\vec{\theta}}(t_{Start}) = \vec{0}$
  - $\dot{\vec{\theta}}(t_{Ziel}) = \vec{0}$
- Arbeitsbereich, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Gelenke sind begrenzt

  $\vec{\theta}_{\min} \le \vec{\theta}(t_j) \le \vec{\theta}_{\max} \quad \vec{0} \le \dot{\vec{\theta}}(t_j) \le \dot{\vec{\theta}}_{\max} \quad \ddot{\vec{\theta}}_{\min} \le \ddot{\vec{\theta}}(t_j) \le \ddot{\vec{\theta}}_{\max}$
  - Begrenzungen können auch unabhängig von Mechanik gewählt werden, um z.B. schnelle Beschleunigung bei gleichzeitigem langsamen Abbremsen zu realisieren

# PTP: Ablauf der Steuerung

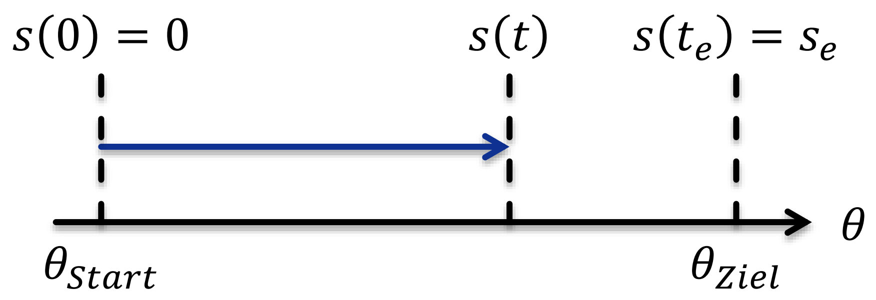
- Bahnparameters $s(t)$: Beschreibt …
  - … zurückzulegende Strecke bei Schubgelenken
  - … zu drehenden Winkel bei Rotationsgelenken
- Vorgaben
  - Verallgemeinerte Größen $s(t), v(t), a(t)$
  - Maximale Geschwindigkeit $v_{max}$ und Beschleunigung $a_{max}$
  - Start- und Endstellung $\theta_{Start}, \theta_{Ziel}$



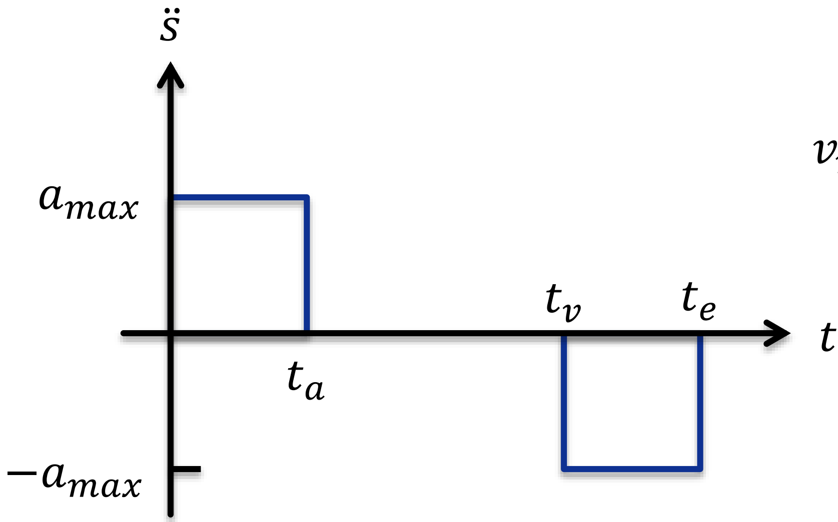

$$s(0) = \dot{s}(0) = v(0) = 0$$
$$\dot{s}(t_e) = v(t_e) = 0$$

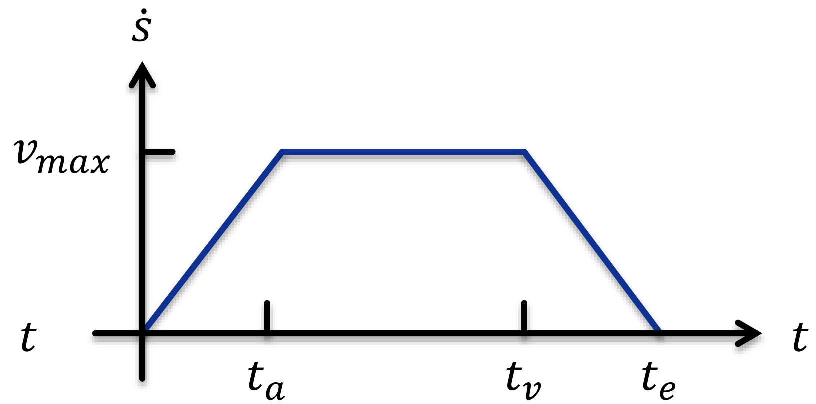
# PTP: Ablauf der Steuerung

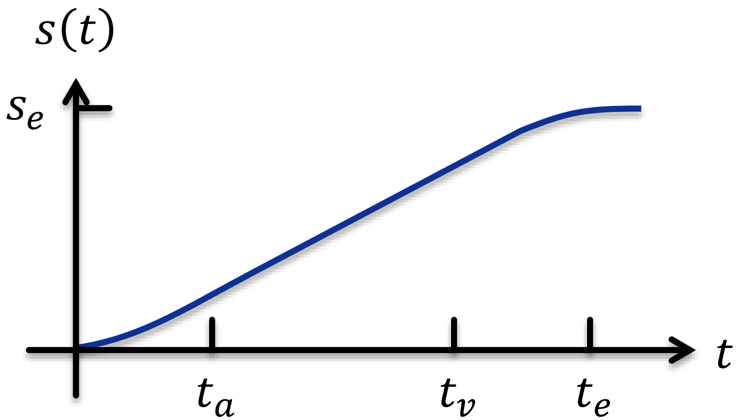
1. Berechnung zu fahrender Strecke $s_e$ für jedes Gelenk
$$s_e = |\theta_{Ziel} - \theta_{Start}|$$
2. Modifikation der Eingaben $v_{max}$ und $a_{max}$ bei synchroner oder vollsynchroner PTP
3. Berechnung der Fahrzeit $t_e$, Beschleunigungszeit $t_a$ und Beginn der Bremszeit $t_v$
4. Interpolation: Berechnung der Zwischenwerte $s(t), \dot{s}(t), \ddot{s}(t)$
5. Ermittlung der Gelenksollwerte $\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$



# PTP: Rampenprofil für Interpolation




$$s_e = |\theta_{Ziel} - \theta_{Start}|$$

$$t_a = \frac{v_{max}}{a_{max}}$$

$$t_e = \frac{s_e}{v_{max}} + t_a$$

$$t_v = t_e - t_a$$

# PTP: Berechnung der Parameter

- Beschleunigungszeit $t_a = \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$
- Integration über die Geschwindigkeit
  $s_e = s(t_e) = v_{\max} \cdot t_a + v_{\max} \cdot (t_v - t_a) = v_{\max} \cdot t_a + v_{\max} \cdot (t_e - 2 \cdot t_a)$
- Berechnung der Fahrzeit

$$t_e = \frac{s_e}{v_{\max}} + t_a = \frac{s_e}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$$

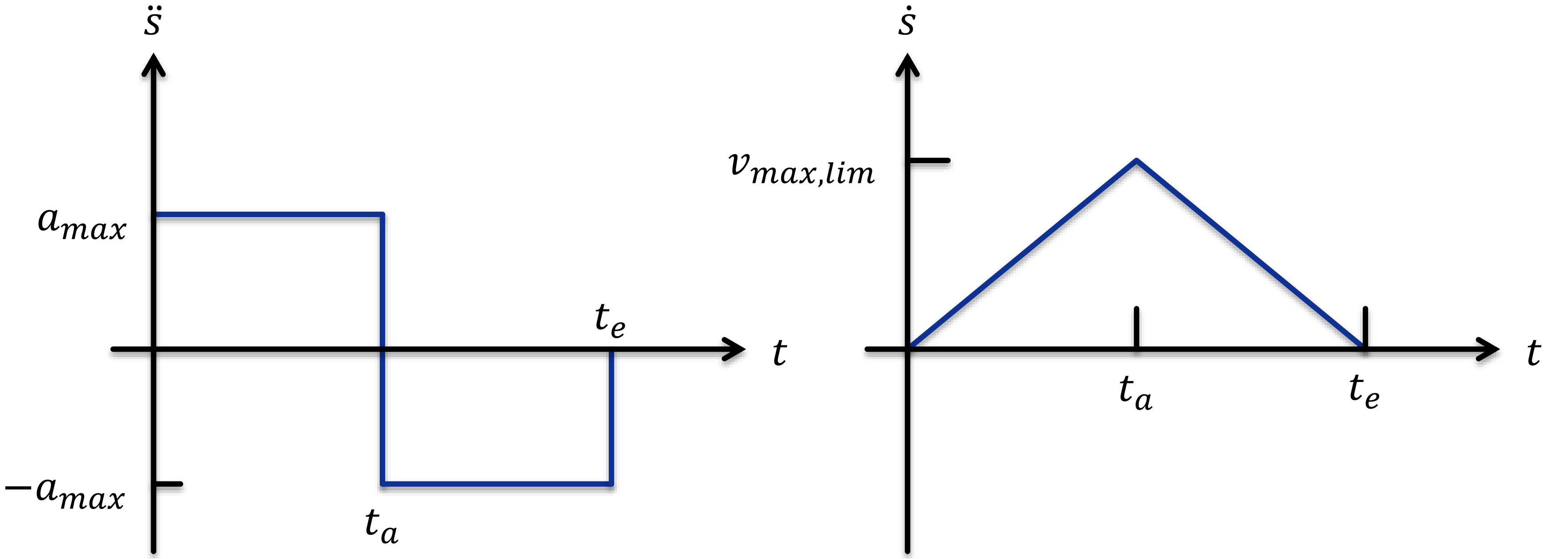
- Parameter für PTP

| | $\ddot{s}(t)$ | $\dot{s}(t)$ | $s(t)$ |
|---|---|---|---|
| $0 \leq t \leq t_a$ | $a_{\max}$ | $a_{\max} \cdot t$ | $\frac{1}{2} \cdot a_{\max} \cdot t^2$ |
| $t_a \leq t \leq t_v$ | $0$ | $v_{\max}$ | $v_{\max} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}$ |
| $t_v \leq t \leq t_e$ | $-a_{\max}$ | $v_{\max} - a_{\max} \cdot (t - t_v)$ | $v_{\max} \cdot (t_e - t_a) - \frac{a_{\max}}{2} \cdot (t_e - t)^2$ |

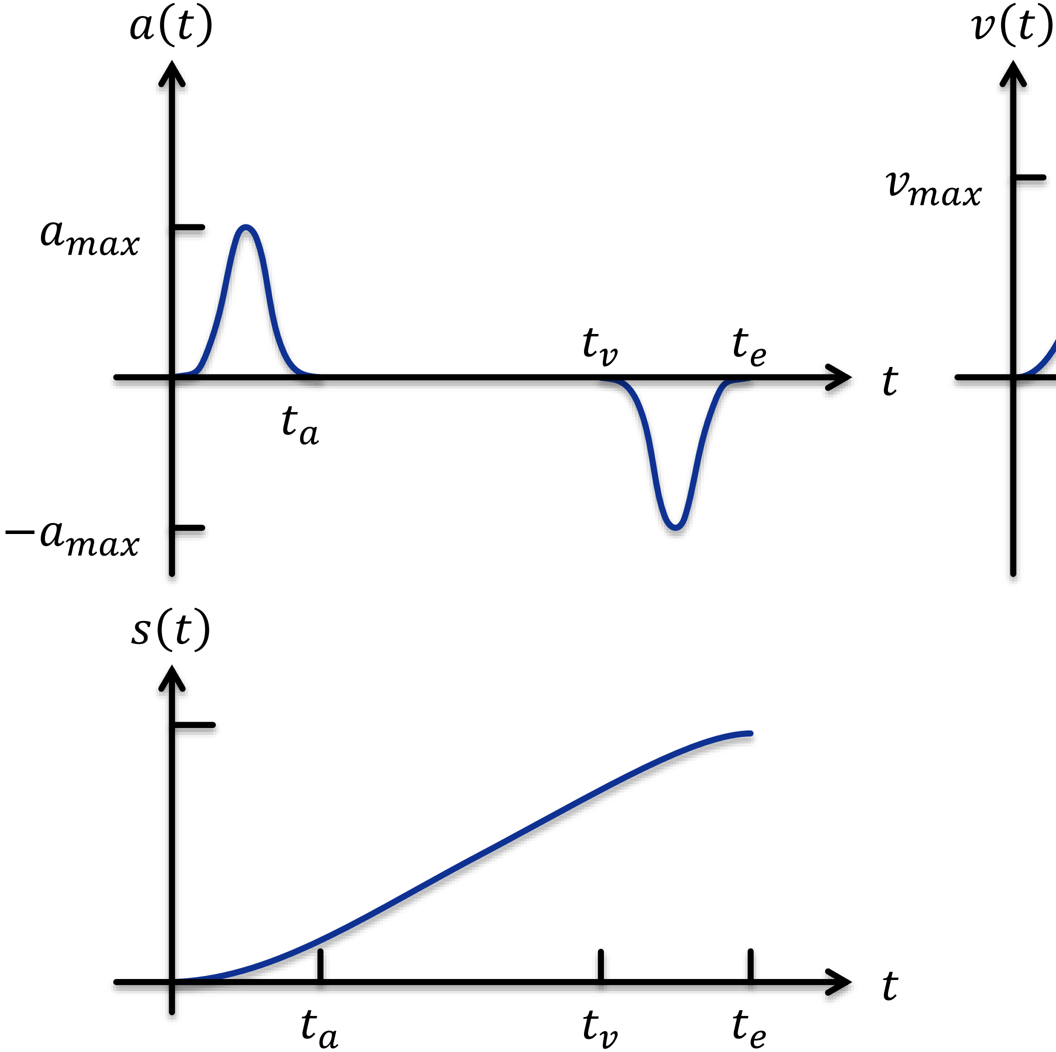
# PTP: Zeitoptimale Bahn

- Falls $v_{max}$ zu groß in Bezug auf Beschleunigung und Bahnlänge, Bestimmung einer zeitoptimalen Bahn mit

$$s_e = t_a \cdot v_{max,lim} = \frac{v_{max,lim}^2}{a_{max}} \Rightarrow \sqrt{a_{max} \cdot s_e} \leq v_{max}$$



# PTP: Sinoidenprofil für PTP-Steuerung




$$s_e = |\theta_{Ziel} - \theta_{Start}|$$

$$t_a = \frac{2 \cdot v_{max}}{a_{max}}$$

$$t_e = \frac{s_e}{v_{max}} + t_a$$

$$t_v = t_e - t_a$$

# PTP: Sinoidenprofil für PTP-Steuerung

$$\ddot{s}(t) = a_{\max} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{t_a} \cdot t\right) \tag{1}$$

- Durch Integration von (1) nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeit

$$\dot{s}(t) = a_{\max} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t - \frac{t_a}{4 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{t_a} \cdot t\right)\right) \tag{2}$$

- Für $t = t_a$ muss sich $v_{max}$ ergeben und man erhält aus (2)

$$t_a = \frac{2 \cdot v_{\max}}{a_{\max}} \tag{3}$$

# PTP: Sinoidenprofil für PTP-Steuerung

- Zurückgelegter Weg bzw. Winkel während der Beschleunigungsphase berechnet sich durch Integration von (2) …

$$s(t) = a_{\max} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot t^2 + \frac{t_a^2}{8 \cdot \pi} \cdot \left( \cos\left( \frac{2 \cdot \pi}{t_a} \cdot t \right) - 1 \right) \right) \tag{4}$$

- … über die insgesamt zurückzulegende Weg- bzw. Winkelstrecke

$$\begin{aligned} s_e &= 2 \cdot s(t_a) + v_{\max} \cdot (t_e - 2 \cdot t_a) \\ s(t_a) &= \frac{1}{4} \cdot a_{\max} \cdot t_a^2 = \frac{v_{\max}^2}{a} \\ t_e &= \frac{s_e}{v_{\max}} + \frac{2 \cdot v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{s_e}{v_{\max}} + t_a \end{aligned} \tag{5}$$

# PTP: Sinoidenprofil für PTP-Steuerung

- In der Phase der gleichförmigen Geschwindigkeit

$$\dot{s}(t) = v_{\max}$$

$$s(t) = s(t_a) + v_{\max} \cdot (t - t_a) = v_{\max} \cdot \left(t - \frac{1}{2} \cdot t_a\right) \tag{6}$$

- Geschwindigkeit und Strecke in der Bremsphase

$$\dot{s}(t) = v_{\max} - \int_{t-t_v}^{t} a(\tau - t_v) \cdot d\tau$$

$$= v_{max} - a_{max} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (t - t_v) - \frac{t_a}{4 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{t_a} \cdot (t - t_v)\right)\right)$$

$$s(t) = s(t_v) + \int_{t-t_v}^{t} \dot{s}(\tau - t_v) \cdot d\tau \tag{7}$$

$$= \frac{a_{\max}}{2} \cdot \left[t_e \cdot (t + t_a) - \frac{t^2 + t_e^2 + 2 \cdot t_a^2}{2} + \frac{t_a^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{t_a} \cdot (t - t_v)\right)\right)\right]$$

# Synchrone PTP: Vorgehensweise

1. Bestimme Bahnlänge $s_{e,i}$ für jedes Gelenk $i$
2. Bestimme PTP-Parameter $v_{max,i}, a_{max,i}$
3. Berechne daraus Fahrzeit $t_{e,i}$
4. Bestimme Achse mit max. Fahrzeit $t_e = t_{e,max} = \max(t_{e,i})$
   - Bestimmte Achse wird Leitachse
5. Setze $t_{e,i} = t_e$ für alle Gelenke
6. Bestimme neue Geschwindigkeit für alle Gelenke

# Synchrone PTP

- Umformung der Fahrzeit $t_e$ und Berechnung der neuen Geschwindigkeiten
- Rampenprofil

$$t_e = \frac{s_{e,i}}{v_{\max,i}} + \frac{v_{\max,i}}{a_{\max,i}}$$

  - Nach Umformung $v_{\max,i}^2 - v_{\max,i} \cdot a_{\max,i} \cdot t_e + s_{e,i} \cdot a_{\max,i} = 0$
  - Lösung ist kleinerer Wert, da sonst $2 \cdot t_{a,i} > t_e$ wäre $v_{\max,i} = \frac{a_{\max,i} \cdot t_e}{2} - \sqrt{\frac{a_{\max,i}^2 \cdot t_e^2}{4} - s_{e,i} \cdot a_{\max,i}}$
- Sinoidenbahn

$$v_{\max,i} = \frac{a_{\max,i} \cdot t_e}{4} - \sqrt{\frac{a_{\max,i}^2 \cdot t_e^2 - 8 \cdot s_{e,i} \cdot a_{\max,i}}{16}}$$

# Vollsynchrone PTP

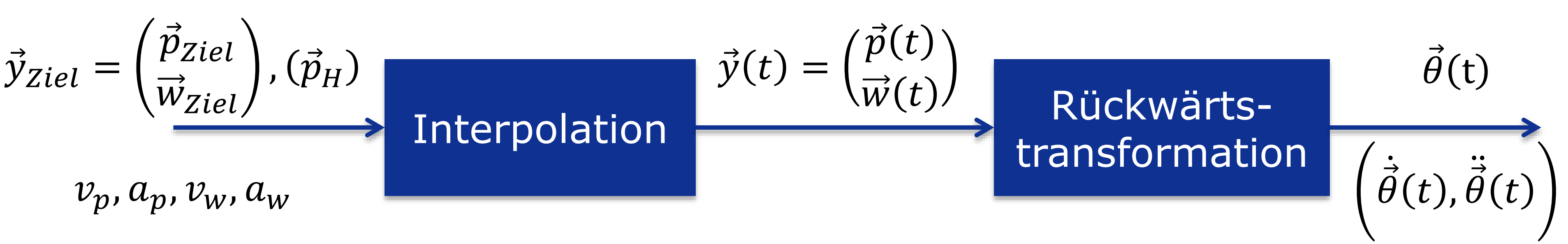
- Berücksichtigung der Beschleunigungs- und Bremszeit
- Bestimmung der Leitachse mit $t_e$ und $t_a \rightarrow t_v = t_e - t_a$
- Bestimmung der Geschwindigkeit und Beschleunigung der anderen Achsen mit $v_{max,i} = \frac{s_{e,i}}{t_v}$ und $a_{max,i} = \frac{v_{max,i}}{t_a}$

# Bahnsteuerung im kartesischen Raum (CP)

- Angabe d. Trajektorie erfolgt als Funktion der Lage des TCPs
  - z.B. mit TCP-Beschreibungsvektor: $\vec{y}_{TCP}(t),\ \dot{\vec{y}}_{TCP}(t), \ddot{\vec{y}}_{TCP}(t)$
- Funktion z.B. lineare Bahnen, Polynombahnen, Splines
- Vorteile
  - Definition des Trajektorienverlaufs explizit im kartes. Raum
  - Planung unabhängig von Roboterkinematik
- Nachteile
  - Berechnung der Gelenkwinkelrücktransformation für jeden Trajektorienpunkt
  - Geplante Trajektorie nicht immer ausführbar (Begrenzung des Arbeitsraumes, Singularitäten des Roboters)
  - Achsbezogene Grenzwerte können nicht berücksichtigt werden

# Bahnsteuerung im kartesischen Raum (CP)

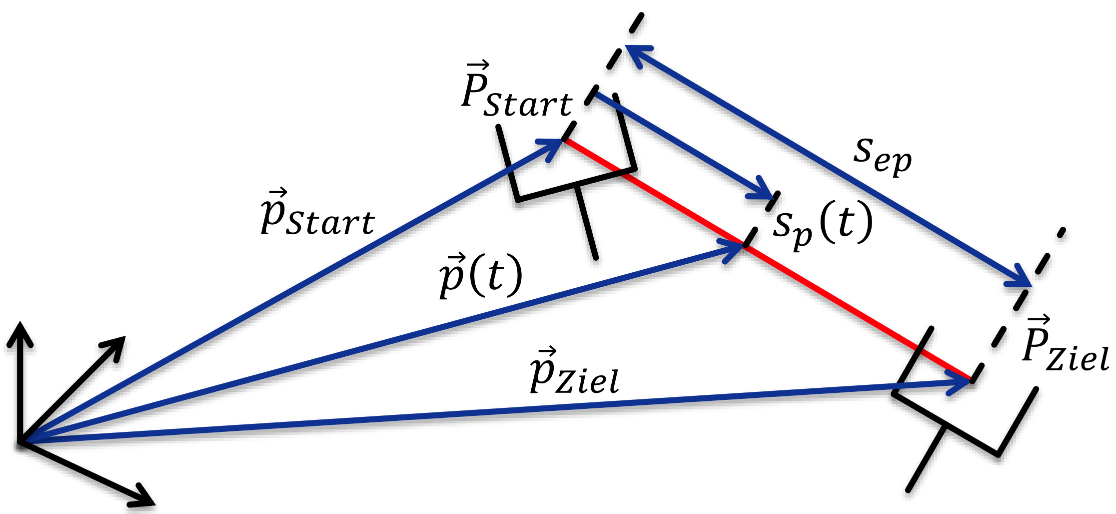
- Vorgaben
  - Vektor zum Zielpunkt $\vec{p}_{Ziel} = (x_{Ziel}, y_{Ziel}, z_{Ziel})^T$
  - Zielorientierung (Euler-Winkel) $\vec{w}_{Ziel} = (\alpha_{Ziel}, \beta_{Ziel}, \gamma_{Ziel})^T$
  - Hilfspunkt (optional) $\vec{p}_H = (x_H, y_H, z_H)^T$
  - Lineargeschwindigkeit und –beschleunigung $v_p, a_p$
  - Rotationsgeschwindigkeit und –beschleunigung $v_w, a_w$
- Randbedingungen
  - Maximalgeschw. und -beschleunigungen der Gelenke



# CP: Linearinterpolation

- Bahnparameter $s_p(t)$ beschreibt zurückgelegte Wegstrecke zum Zeitpunkt $t$
- Gesamte Wegstrecke

$$
\begin{aligned}
s_{ep} &= |\vec{p}_{Ziel} - \vec{p}_{Start}| \\
&= \sqrt{(x_{Ziel} - x_{Start})^2 + (y_{Ziel} - y_{Start})^2 + (z_{Ziel} - z_{Start})^2}
\end{aligned}
$$



# CP: Linearinterpolation

- Randbedingungen

$$s_p(0) = \dot{s}_p(0) = v_p(0) = 0$$
$$\dot{s}_p(t_e) = v_p(t_e) = 0$$

- Mit

$$v_{\max} = v_p \quad a_{\max} = a_p$$
$$t_e = t_{ep} \quad t_a = t_{ap} \quad t_v = t_{vp}$$
$$s_e = s_{ep} \quad s = s_p$$

kann $s_p(t)$ durch die bekannten Gleichungen der PTP, mit eines Sinoiden- oder Rampenprofils berechnet werden

- Position des TCPs zum Zeitpunkt $t$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{Start} + s_p(t) \cdot \frac{(\vec{p}_{Ziel} - \vec{p}_{Start})}{s_{ep}}$$

# CP: Linearinterpolation

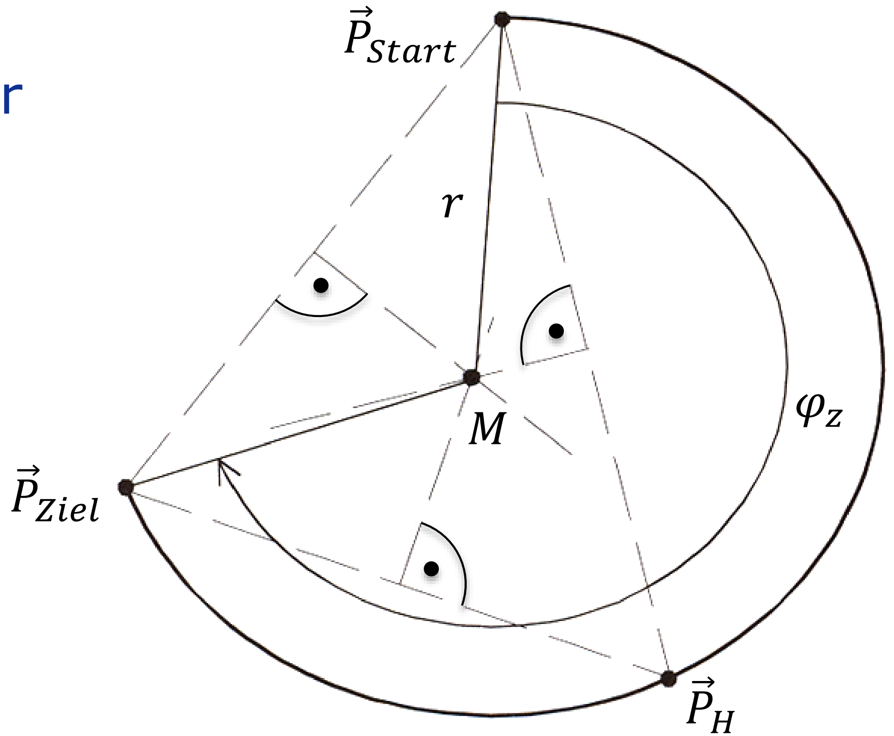
- Berechnung der Orientierungsänderung analog zur Vorgehensweise der Berechnung der Positionsänderung
- Gesamte Orientierungsänderung

$$s_{ew} = |\vec{w}_{Ziel} - \vec{w}_{Start}|$$
$$= \sqrt{(\alpha_{Ziel} - \alpha_{Start})^2 + (\beta_{Ziel} - \beta_{Start})^2 + (\gamma_{Ziel} - \gamma_{Start})^2}$$

- Positions- und Orientierungsänderungen sollten zum gleichen Zeitpunkt abgeschlossen werden
  - Fahrzeiten an die maximale anpassen
  - Entsprechende Reduzierung der Geschwindigkeiten
  - $t_e = \max(t_{ep}, t_{ew})$
- Zur Robotersteuerung müssen zu jedem Abtastzeitpunkt die berechneten kartesischen Lagen in Gelenksollwerte rücktransformiert werden

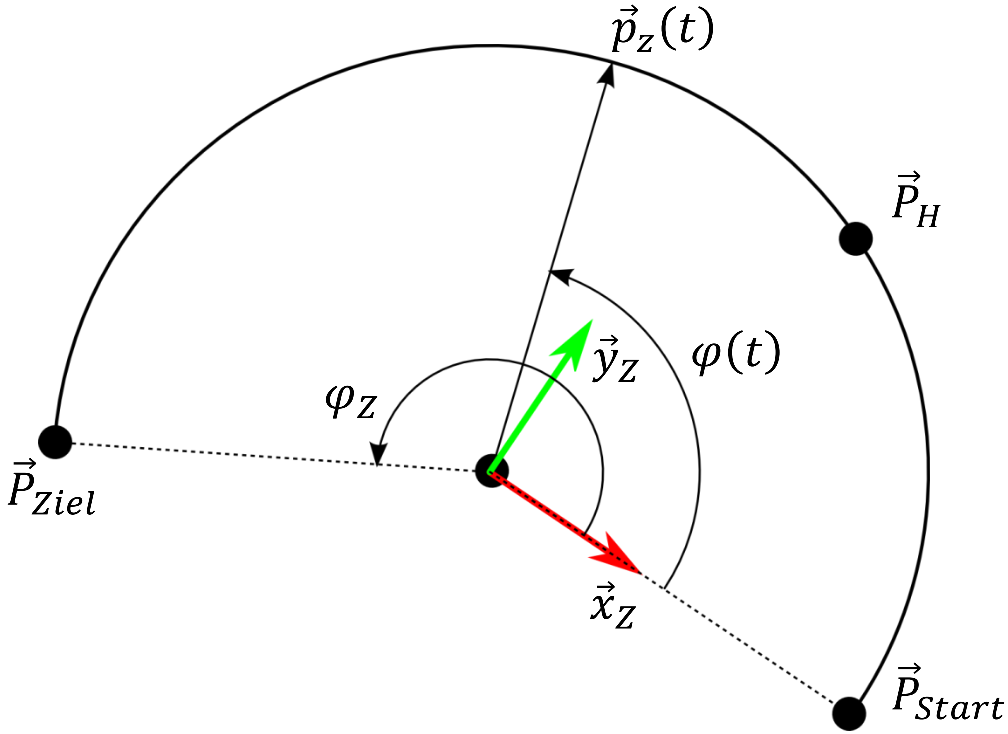
# CP: Zirkularinterpolation

- Neben Geraden werden oft Kreisbögen zur Modellierung von Werkstückkonturen benötigt
- Einfachste Modellierung eines Kreisbogens durch Anfangspunkt $\vec{P}_{Start}$, Endpunkt $\vec{P}_{Ziel}$ und Hilfspunkt $\vec{P}_H$
- Durch Schnittpunkt der Mittelsenkrechten bestimmbar
  - Kreismittelpunkt $M$
  - Radius $r$
  - Winkel $\varphi_z$



# CP: Zirkularinterpolation

- Bahnparameter $s(t)$ beschreibt zurückgelegten Winkel $\varphi(t)$
- Berechenbar wie bei lin. CP durch Gleichungen der PTP
- Zur Berechnung der kartesischen Position wird Hilfskoordinatensystem $XYZ_Z$ eingeführt



# CP: Zirkularinterpolation

- Position $\vec{p}_Z(t)$ auf dem Kreisbogen in $XYZ_Z$ lässt sich mit $r$ und $\varphi(t)$ berechnen

$$\vec{p}_z(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\big(\phi(t)\big) \\ r \cdot \sin\big(\phi(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\vec{\mathrm{p}}_Z(t)$ mit homogener Transformation ins BKS transformierbar
- Interpolation der Orientierung erfolgt auf gleiche Weise wie bei der Linearinterpolation
- Zur Robotersteuerung müssen zu jedem Abtastzeitpunkt die berechneten kartesischen Lagen in Gelenksollwerte rücktransformiert werden

# CP: Segmentweise Interpolation

- Bewegungsbahn wird durch abschnittsweise definierte Polynome, sogenannte Splines, beschrieben
- Gängiger Fall: Kubische Splines
$$\vec{p}(t) = \vec{a}_3 \cdot t^3 + \vec{a}_2 \cdot t^2 + \vec{a}_1 \cdot t + \vec{a}_0$$
- $\vec{p}(t)$: Bahn zwischen den Ortsvektoren $\vec{p}_{Start}$ und $\vec{p}_{Ziel}$, wobei die Bewegung Zeitspanne $t_e$ dauern soll
- Es werden $4$ Bedingungen benötigt, um Parameter $\vec{a}_j$ eines Splines $\vec{p}(t)$ eindeutig bestimmen zu können
- Zwei Bedingungen können dadurch gewonnen werden, dass der Spline die Stützstellen interpolieren muss
$$\vec{p}(t = 0) = \vec{p}_{Start}$$
$$\vec{p}(t = t_e) = \vec{p}_{Ziel}$$

# CP: Segmentweise Interpolation

- Die beiden noch benötigten Bedingungen können mit Hilfe der gewünschten Geschwindigkeitsvektoren gewählt werden

$$\dot{\vec{p}}(t = 0) = \dot{\vec{p}}_{Start}$$

$$\dot{\vec{p}}(t = t_e) = \dot{\vec{p}}_{Ziel}$$

- Die vier Parameter berechnen sich ausgehend von den gewählten Bedingungen

$$\vec{a}_0 = \vec{p}_{Start}$$

$$\vec{a}_1 = \dot{\vec{p}}_{Start}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{3}{t_e^2}\left(\vec{p}_{Ziel} - \vec{p}_{Start}\right) - \frac{1}{t_e}\left(\dot{\vec{p}}_{Ziel} + 2\dot{\vec{p}}_{Start}\right)$$

$$\vec{a}_3 = -\frac{2}{t_e^3}\left(\vec{p}_{Ziel} - \vec{p}_{Start}\right) + \frac{1}{t_e^2}\left(\dot{\vec{p}}_{Ziel} + \dot{\vec{p}}_{Start}\right)$$

# CP: Segmentweise Interpolation – Beispiel

- Gegeben

  $\vec{p}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{p}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{p}_{III} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{p}_{IV} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \dot{\vec{p}}_I = \cdots = \dot{\vec{p}}_{IV} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t_e = 1$

- Lösung: Parameter für das erste Polynom; Andere analog

$$\vec{a}_0 = \vec{p}_I \qquad \vec{a}_2 = \frac{3}{1}(\vec{p}_{II} - \vec{p}_I) - \frac{1}{1}(\dot{\vec{p}}_{II} + 2\dot{\vec{p}}_I)$$

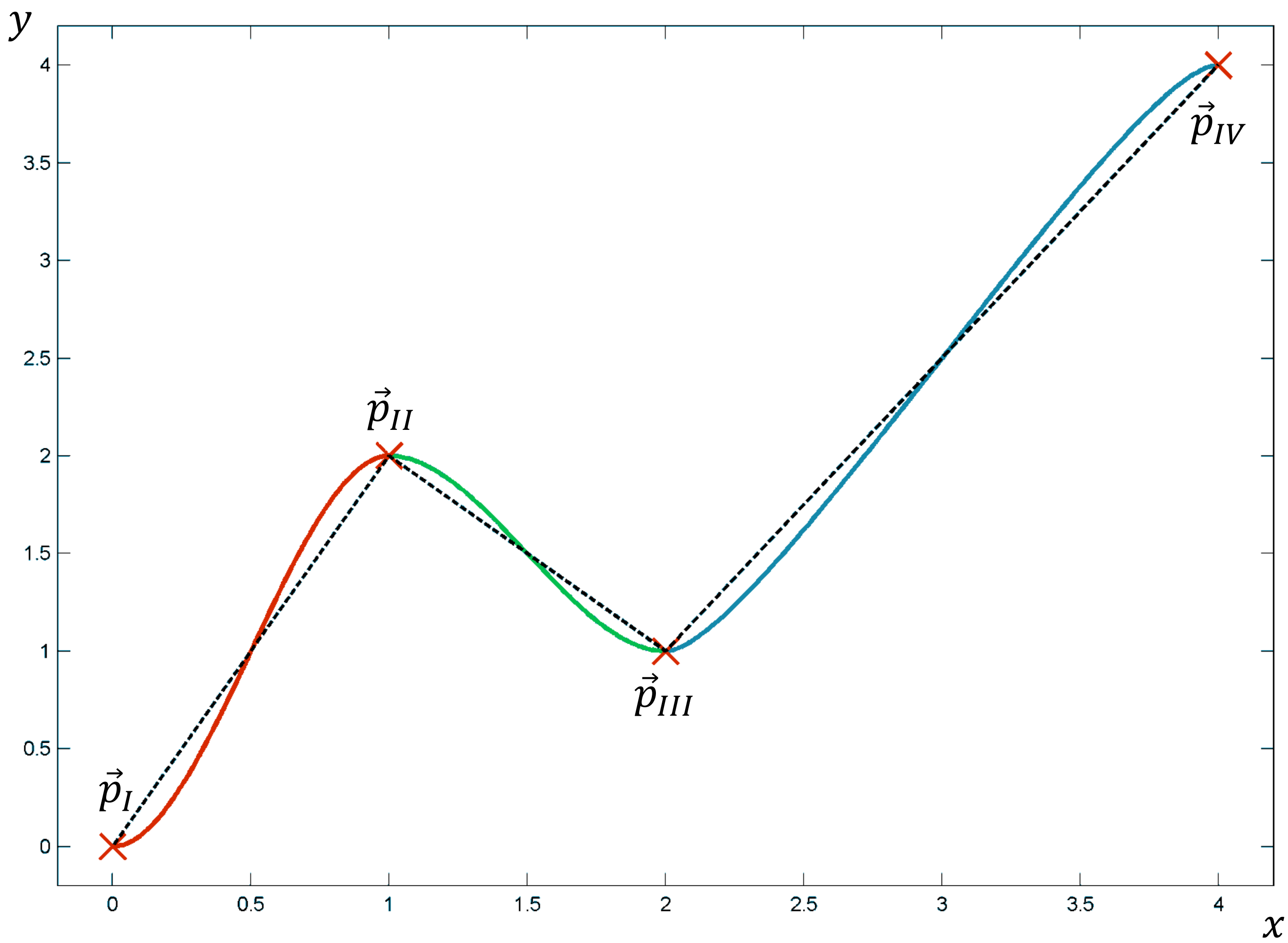
$$\vec{a}_1 = \dot{\vec{p}}_I \qquad \vec{a}_3 = -\frac{2}{1}(\vec{p}_{II} - \vec{p}_I) + \frac{1}{1}(\dot{\vec{p}}_{II} + \dot{\vec{p}}_I)$$

$$\vec{p}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot t^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

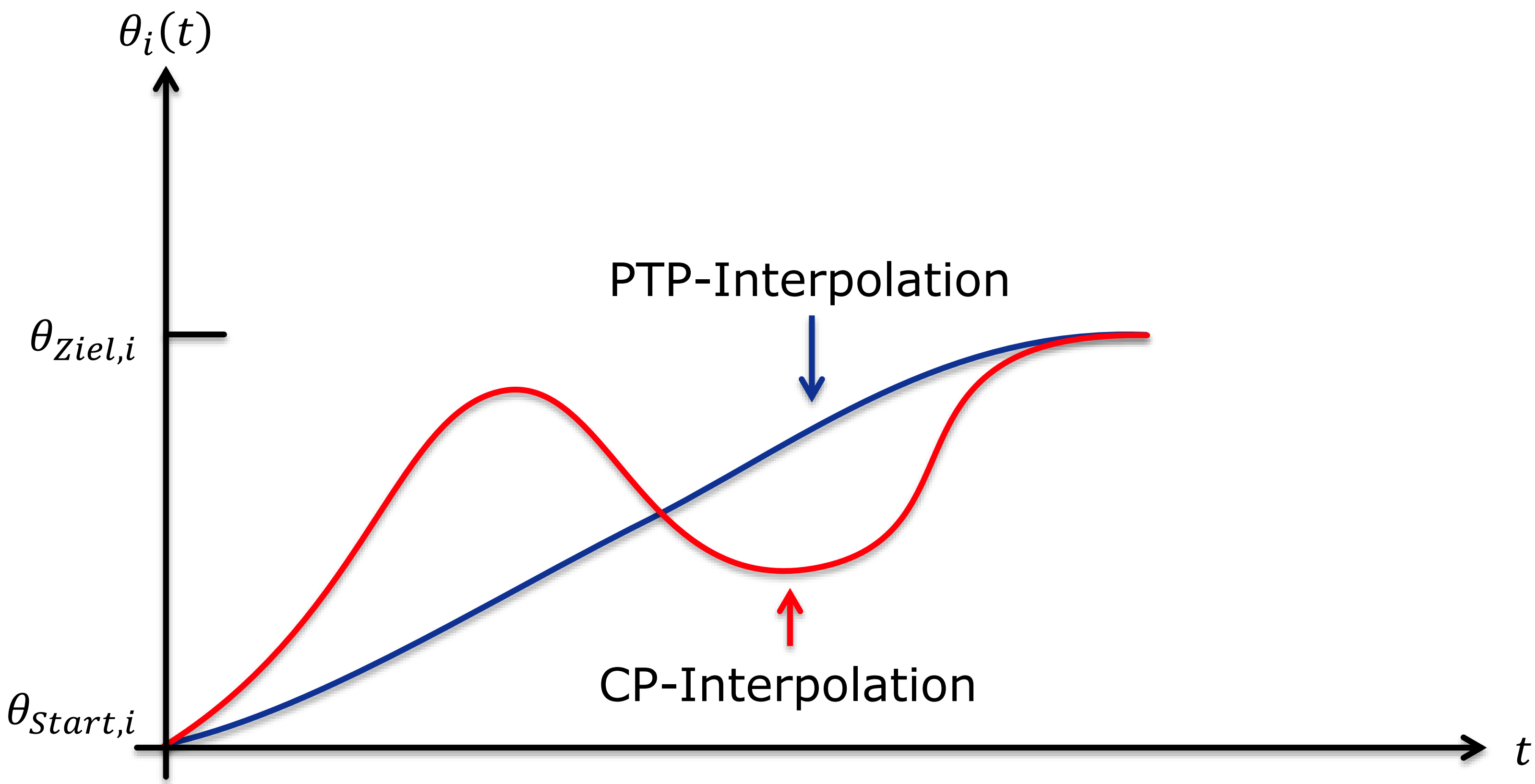
$$\vec{p}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_3(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot t^3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

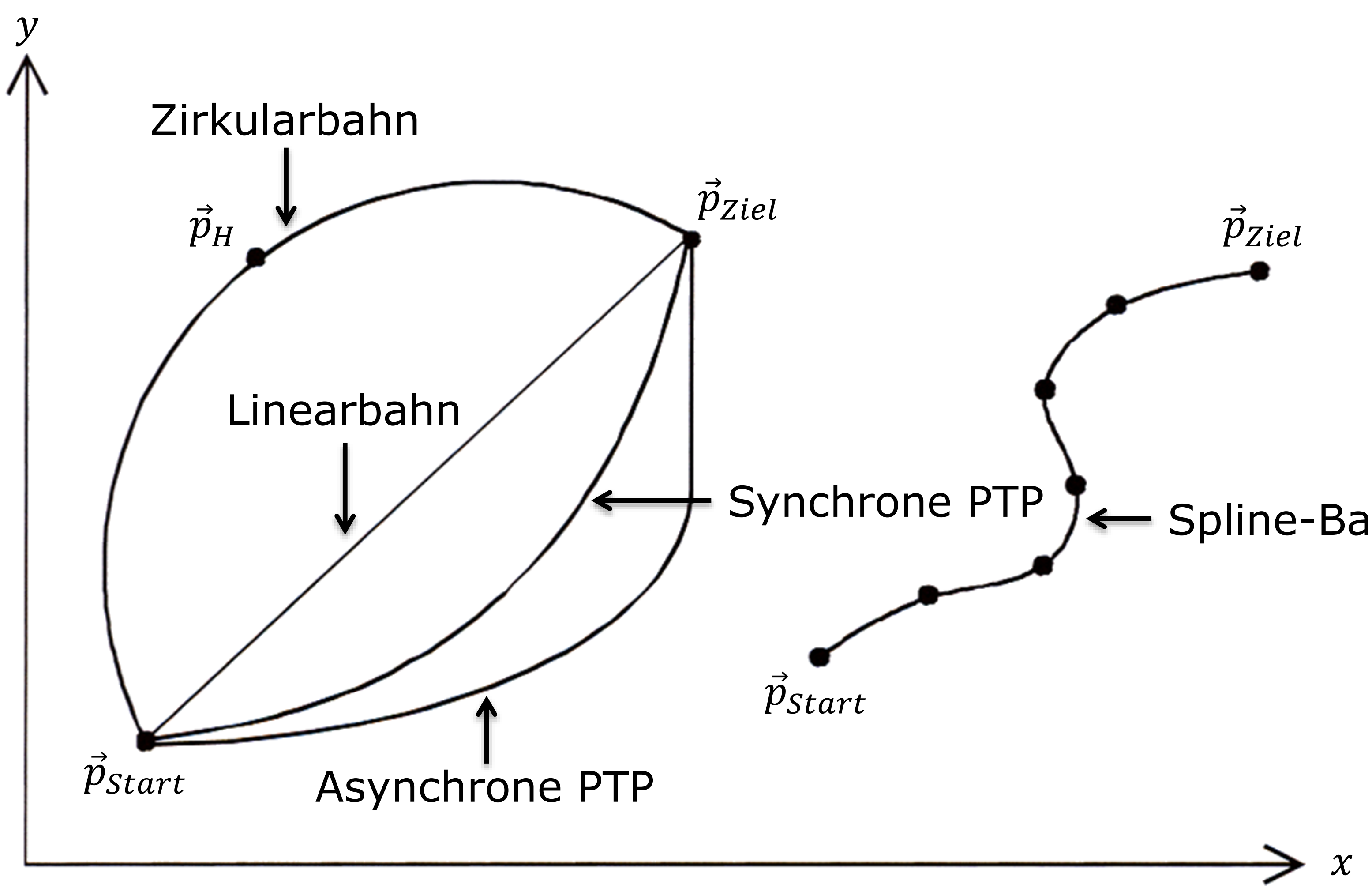
# CP: Segmentweise Interpolation – Beispiel



# Vergleich CP & PTP: Konfigurationsraum

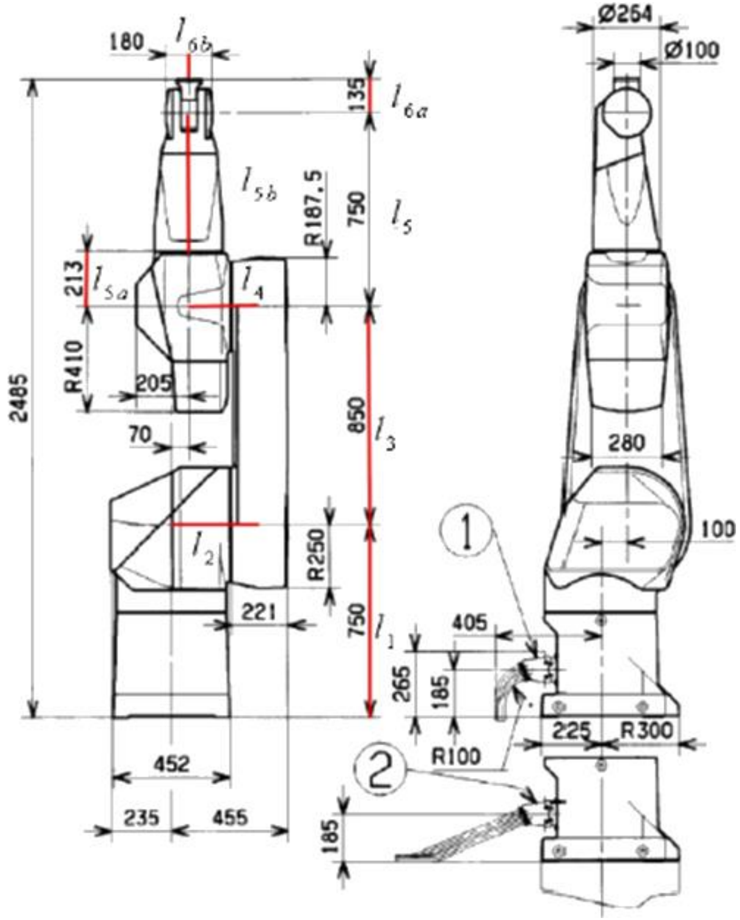


# Vergleich CP & PTP: Kartesischer Raum



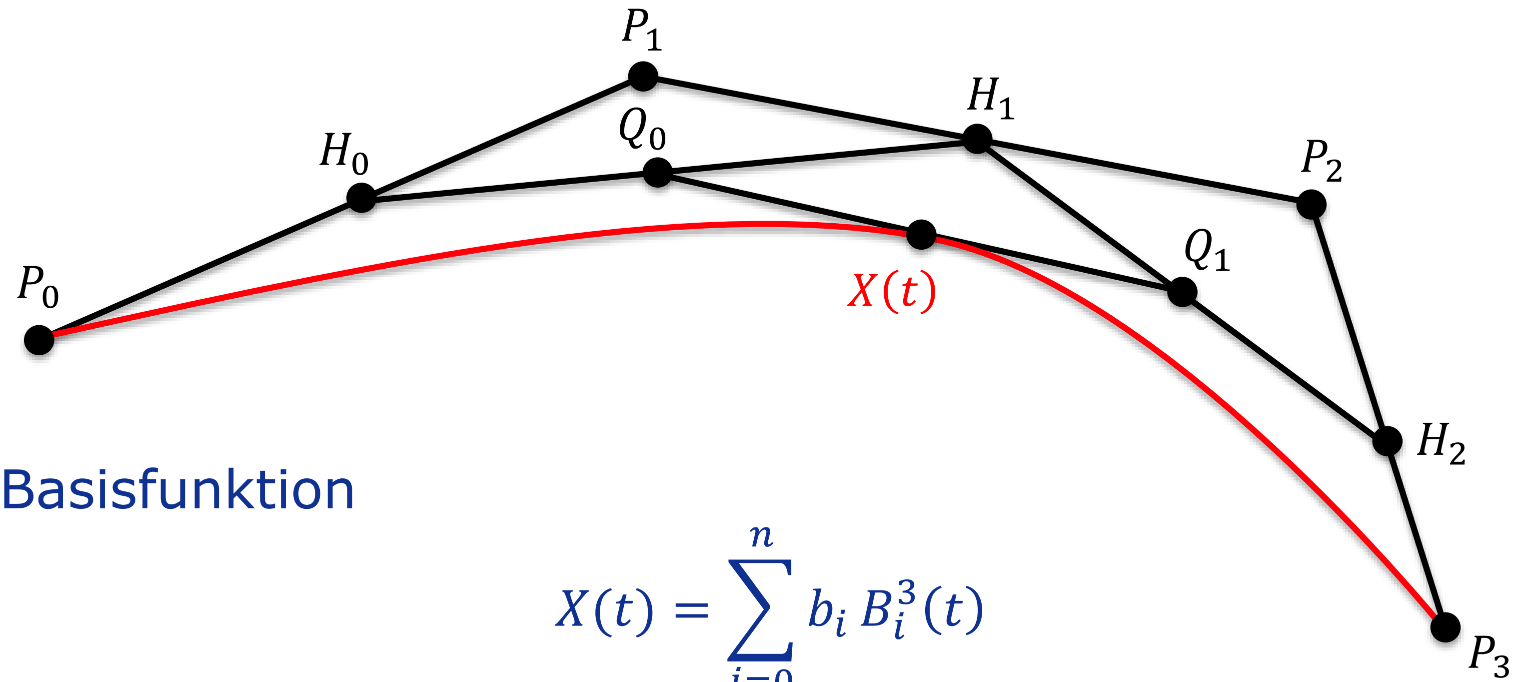
# Spline-Interpolation: Bernsteinpolynome

Bestimmung einer geeigneten Bahn für Stäubli RX 170




# Spline-Interpolation: Bernsteinpolynome

- Konstruktionsprinzip




- Basisfunktion

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_i^3(t)$$

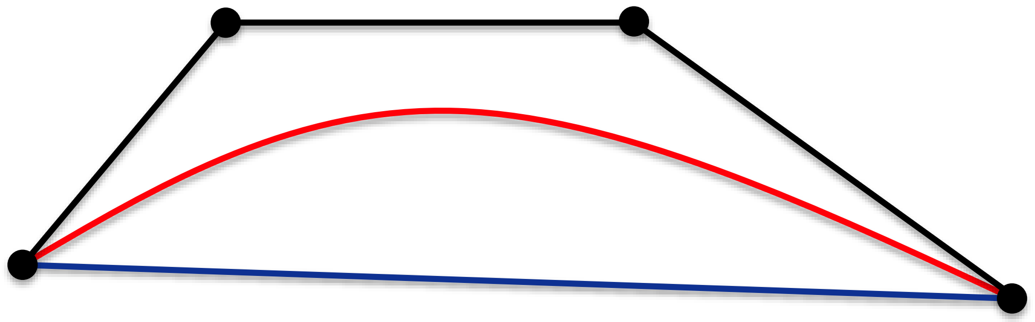
# Spline-Interpolation: Zwischenstellungen

- Berechnung beliebiger Zwischenstellungen
- Bernsteinpolynom für kubischen Fall

$$B_i^n = \binom{3}{i} t(1-t)^{3-i}$$

$$\vec{x}(t) = P_0(1-t)^3 + P_1 \cdot 3(1-t)^2 t + P_2(1-t)t^2 + P_3 t^3$$

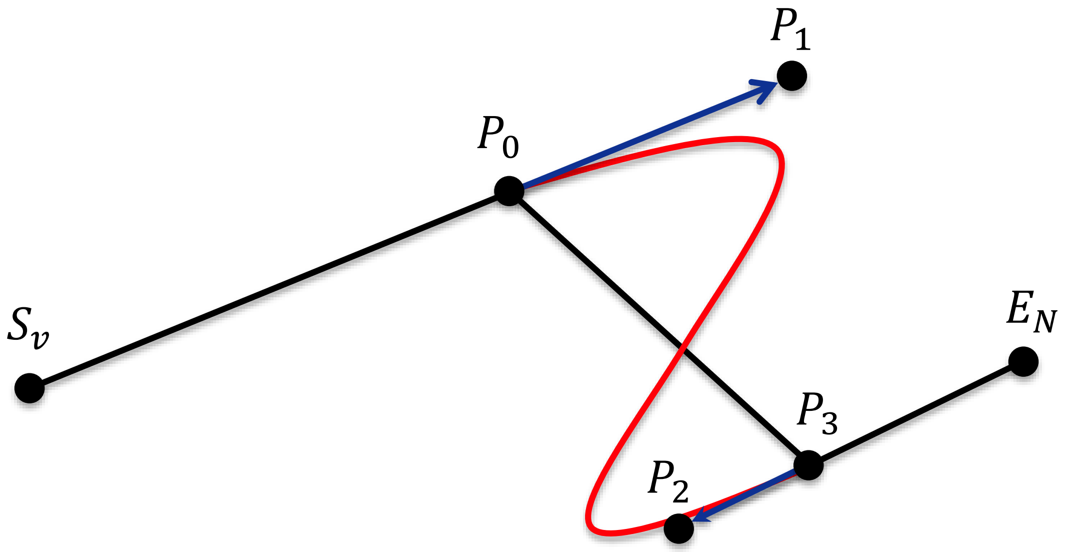
- Annähern von unten an Stützstellen
- Keine beliebige Form



# Spline-Interpolation: Stützstellen

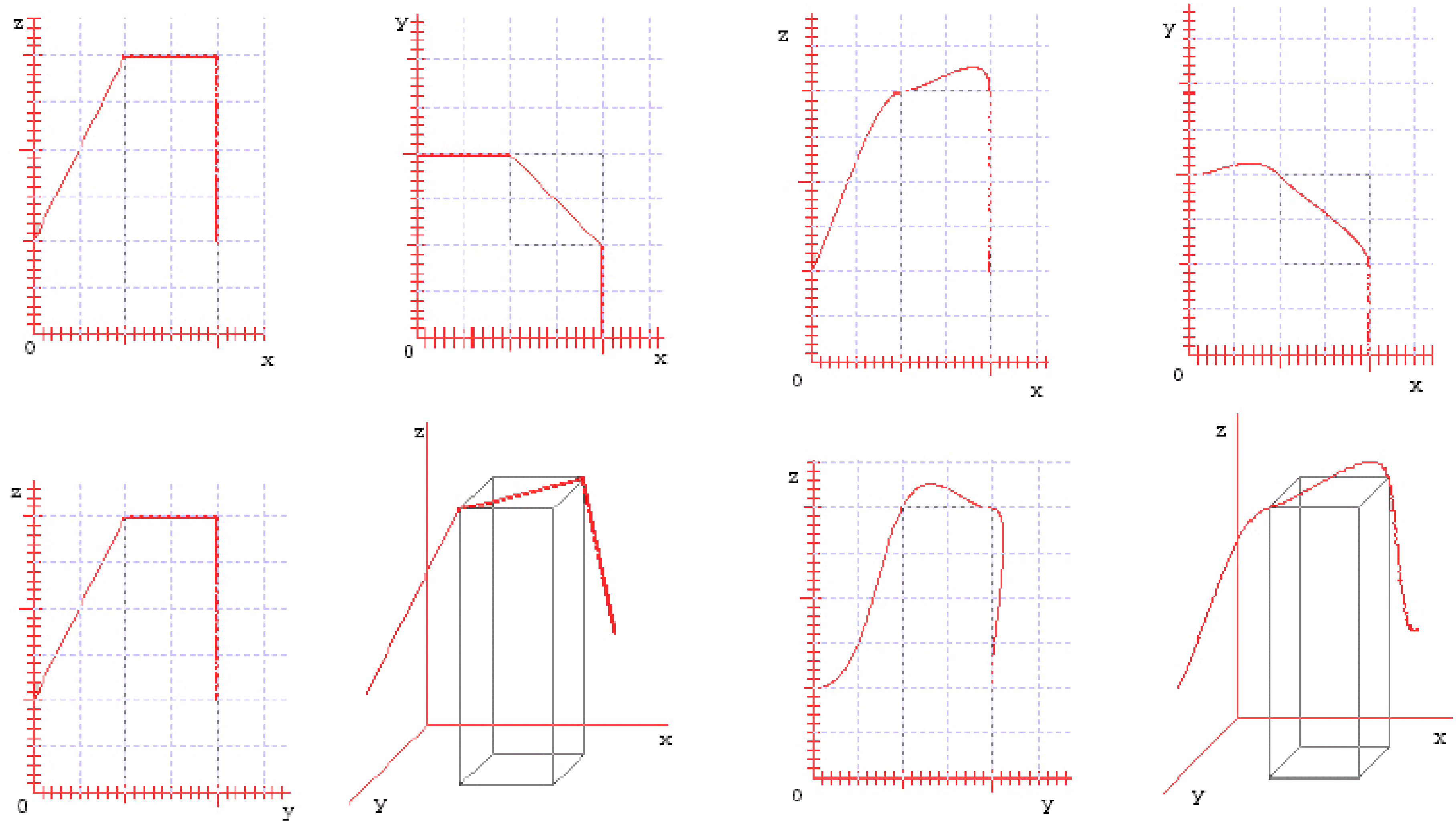
Berechnung der Stützstellen für 2-dimensionalen Fall.

$$x(t) = P_{0x}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) + P_{1x}(3t^3 - 6t^2 + 3t) + P_{2x}(-3t^3 + 3t^2) + P_{3x}t^3$$
$$y(t) = P_{0y}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) + P_{1y}(3t^3 - 6t^2 + 3t) + P_{2y}(-3t^3 + 3t^2) + P_{3y}t^3$$

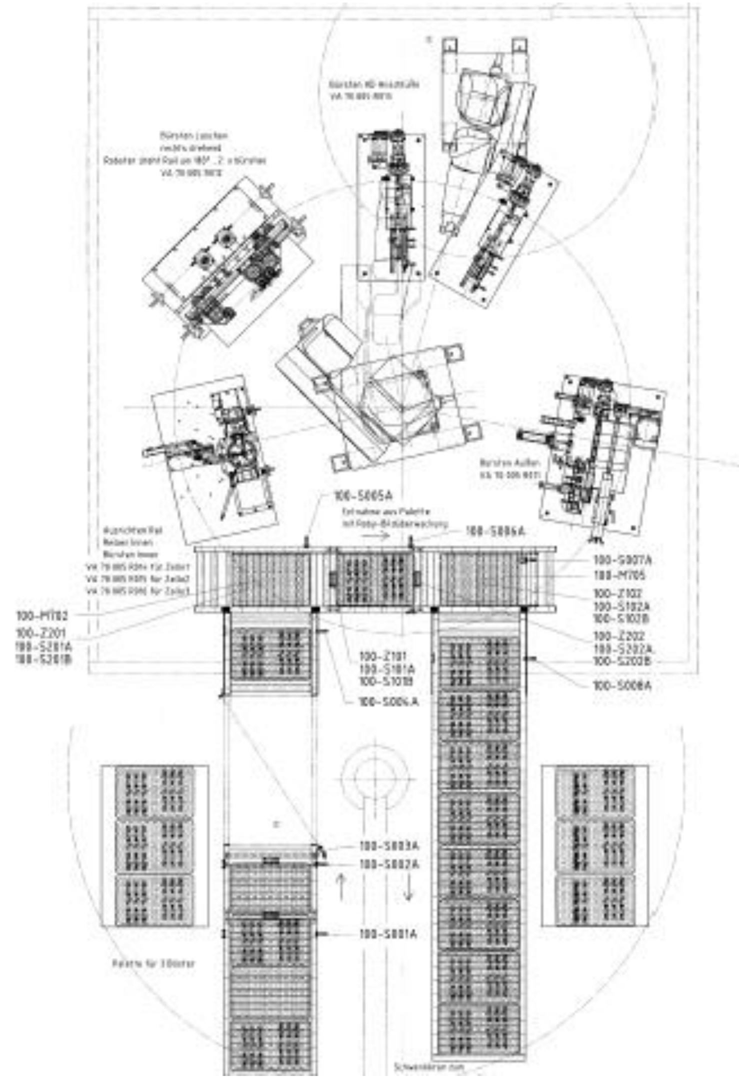



$$P_{1,x} = P_{0,x} + \tau\left(P_{0,x} - S_v\right)$$
$$P_{2,x} = P_{3,x} + \tau\left(P_{3,x} - E_n\right)$$
$$P_{1,y} = P_{0,y} + \tau\left(P_{3,y} - P_{0,y}\right)$$
$$P_{2,y} = P_{3,y} + \tau\left(P_{0,y} - P_{3,y}\right)$$

# Beispiel: Spline mit 3 Segmenten $\tau = 1, \tau = 1.3$



# Beispiel: Arbeitszelle Bosch Homburg



# Literatur


- Weber, W. (2002),
  Industrieroboter – Methoden der Steuerung und Regelung,
  Fachbuchverlag Leipzig
- Stark, G. (2009),
  Robotik mit MATLAB,
  Fachbuchverlag Leipzig

# Nächste Vorlesung

Greifplanung

- Griffhierarchie
- Greifplanungssysteme
- Umgreifoperationen
- Szenenstabilität