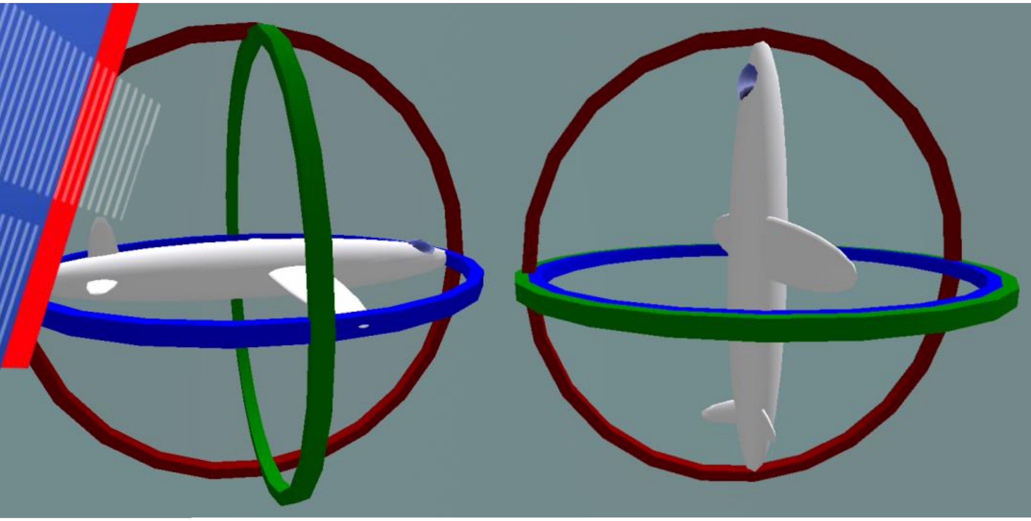
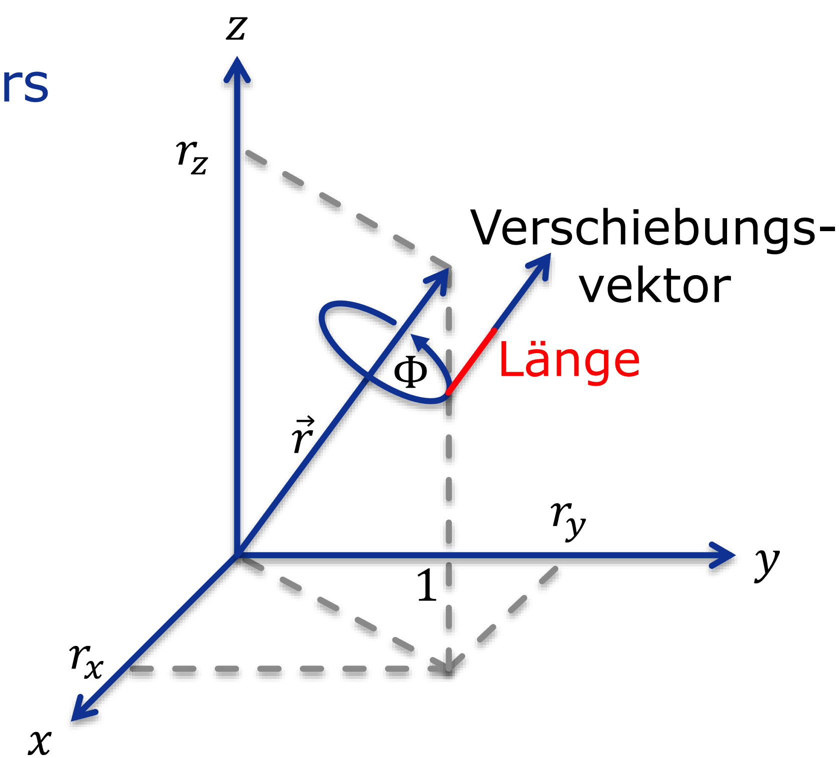
Raumkinematik – Quaternionen



Prof. Karsten Berns
Robotics Research Lab
Department of Computer Science
University of Kaiserslautern, Germany

Quaternionen

- Probleme von (homogenen) Rotationsmatrizen
  - Hohe Redundanz
  - Viele Rechenoperationen bei Verkettung
  - Singularitäten
- Orientierung eines starren Körpers
  - Quaternion: Rotationsachse (3 dim. Vektor $\vec{r}$) und Winkel ϕ ausreichend
  - Verringerung des benötigten Rechenaufwandes



Reelle Quaternionen

- Reelles Quaternion $Q = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ mit $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$
- Häufig Darstellung als linearer Vektorraum über $\mathbb{R}$
  - $Q = r_1 + i \cdot r_2 + j \cdot r_3 + k \cdot r_4$ (Erweiterung von $\mathbb{C}$)
- Für Basiselemente $1, i, j, k$ gilt folgende multiplikative Verknüpfungstabelle (nicht kommutativ):

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Reelle Quaternionen

- Skalarteil: r_1 (Drehwinkel)
- Vektorteil: $i \cdot r_2 + j \cdot r_3 + k \cdot r_4$ (Drehachse)
- Damit können durch Quaternionen alle Drehungen dargestellt werden, bei denen die Drehachse durch den Ursprung des Bezugssystems geht
  - Konjugierte: $\bar{Q} = r_1 - i \cdot r_2 - j \cdot r_3 - k \cdot r_4$
  - Betrag: $|Q| = \sqrt{Q \cdot \bar{Q}}$
  - Inverse: $Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{|Q|^2} \rightarrow Q \cdot Q^{-1} = Q^{-1} \cdot Q = 1$

Reelle Quaternionen: Beispiel

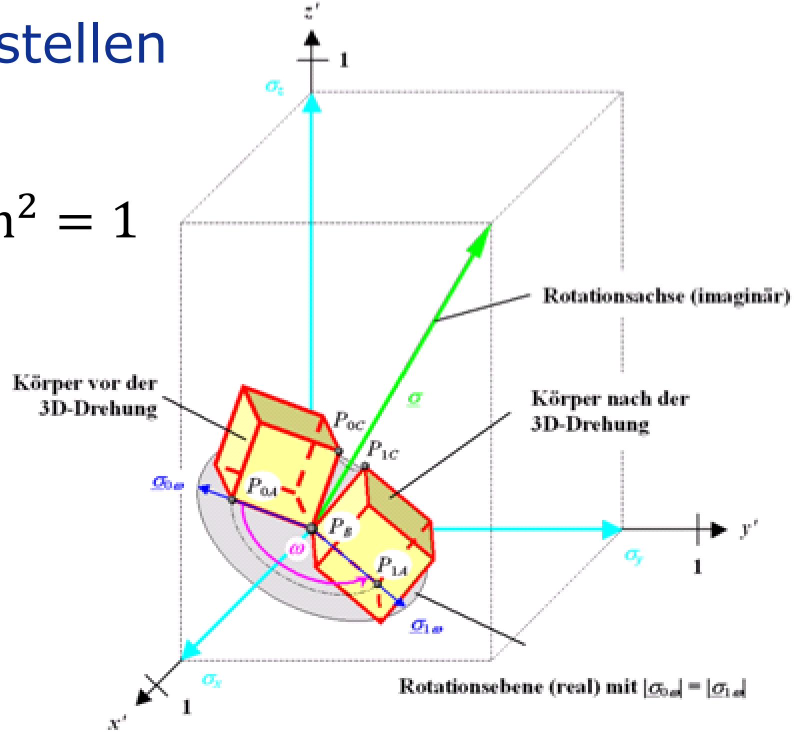
- Seien $Q_1 = (3,2,-4,1)$ und $Q_2 = (4,-3,1,-5)$
- Dann gilt …
  - $Q_1 + Q_2 = (7,-1,-3,-4)$
  - $Q_1 \cdot Q_2 = (27,18,-6,-21)$
  - $Q_2 \cdot Q_1 = (27,-20,-20,-1)$
  - $Q_1^{-1} = \frac{(3-2i+4j-k)}{30}$

Rotation von Punkt mittels Quaternionen

Einheitsquaternion: $|Q| = 1 \Rightarrow Q^{-1} = \bar{Q}$,
da $|Q|^2 = 1 \rightarrow$ Einfache Vor-/Rückwärtsrechnung

Rotation eines Punktes $\vec{p}$ um Achse $\vec{v}$ mit Winkel ϕ

1. Einheitsquaternion aus v und ϕ erstellen
   (1) Normierung von $\vec{v}$ auf 1
   (2) $Q = \left[\cos\frac{\phi}{2}, \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{v}\right]$, da $\cos^2 + \sin^2 = 1$
2. Punkt $\vec{p}$ als Quaternion darstellen: $P = [0, \vec{p}]$
3. Abschließendes Drehen: $P' = Q \cdot P \cdot Q^{-1} = Q \cdot P \cdot \bar{Q}$



Konvertierung Quaternion/Rotationsmatrix

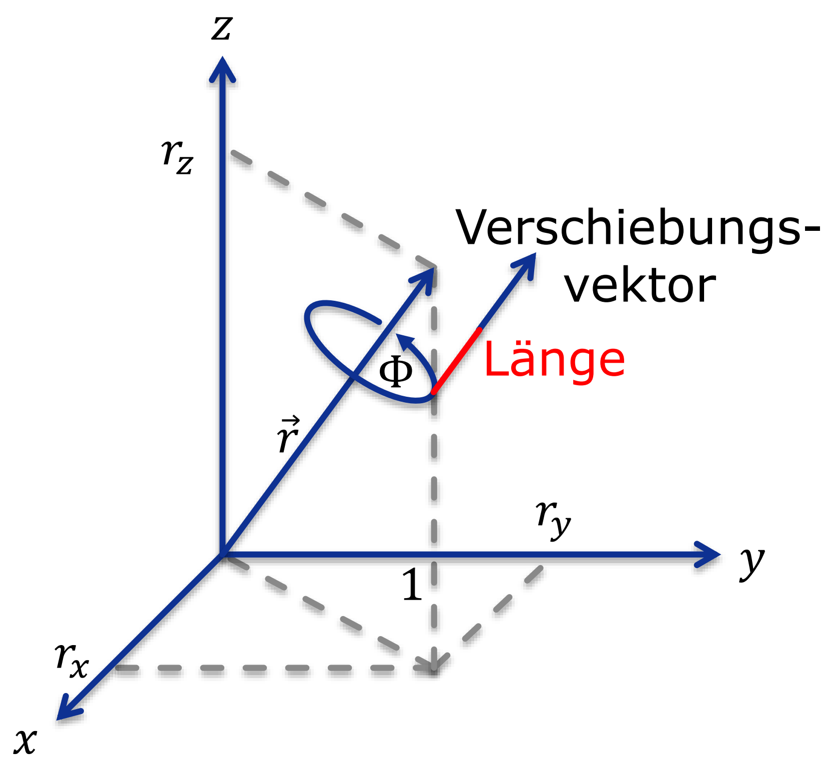
- Rotationsquaternion $Q = \left(s, (x, y, z)\right)$
- Aus Rotation mittels Einheitsquaternion $|Q| = 1 \Rightarrow Q^{-1} = \bar{Q}$ folgt die Rotationsmatrix R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & 2xy - 2sz & 2sy + 2xz \\ 2xy + 2sz & 1 - 2(x^2 + z^2) & -2sx + 2yz \\ -2sy + 2xz & 2sx - 2yz & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

- Aus R mit den Einträgen $r_{ij}, i, j \in \{1,2,3\}$ berechnet sich der entsprechende Rotationsquaternion $Q = \left(s, (x, y, z)\right)$ wie folgt:
  - $s = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$
  - $x = \frac{r_{32} - r_{23}}{4s}$
  - $y = \frac{r_{13} - r_{31}}{4s}$
  - $z = \frac{r_{21} - r_{12}}{4s}$

Duale Quaternionen

- Reelle Quaternionen eignen sich für die Beschreibung der Orientierung, nicht aber der Lage eines Objektes
- Um neben der Orientierung auch die Lage mit Quaternionen ausdrücken zu können, werden die 4 reellen Werte durch Dualzahlen ersetzt
  - $D_q = (d_1, d_2, d_3, d_4)$
  - $d_i = dp_i + \varepsilon \cdot ds_i$
  - $\varepsilon^2 = 0$
  - d_1: Winkelwert und Verschiebungslänge
  - d_2, d_3, d_4: Beschreibung einer gerichteten Gerade im Raum, bzgl. der die Rotation und Translation erfolgt



Eigenschaften Dualer Quaternionen

- Duale Quaternionen zur Lagebeschreibung geeignet
- Operationen auf Dualen Quaternionen erlauben alle benötigten Transformationen
- Geringe Redundanz, da nur 8 Kenndaten
- Gimbal lock nicht vorhanden
- Schwächen
  - Schwierigkeit für den Anwender, eine Lage durch Angabe einer Dualquaternion zu beschreiben
  - Komplexe Verarbeitungsvorschriften (z.B. Multiplikation)