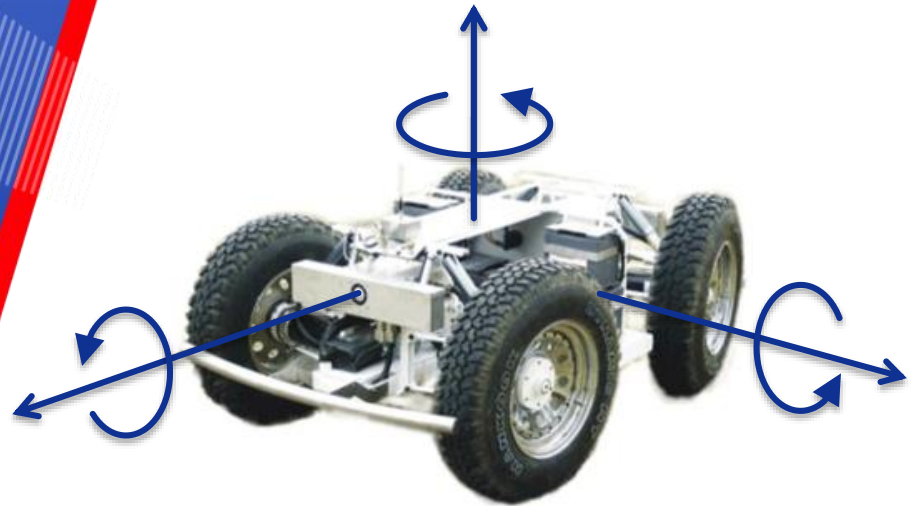


Raumkinematik – Grundlagen II



Prof. Karsten Berns

Robotics Research Lab

Department of Computer Science

University of Kaiserslautern, Germany

Inhalt

- Beschreibung von Objekten und Objektlagen im 3D euklidischen Raum (E_3)
- Orientierungsbeschreibung mit 3×3 Matrizen
- 6-dim. Beschreibungsvektor
- Homogene Koordinaten und Transformationsmatrix
- Verkettete Lagebeschreibungen

Orientierung eines starren Körpers

- Jede Orientierung eines starren Körpers im E_3 ist erreichbar durch 3 Rotationen um die Koordinatenachsen
- Jede Rotation um eine Achse kann durch eine 3×3 Rotationsmatrix dargestellt werden
- Verkettung von Rotationen durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen
- Matrixmultiplikation nicht kommutativ, aber assoziativ
- Interpretation $R_1 \cdot R_2 \cdots R_n$ von links nach rechts
 - Drehung von R_i bezieht sich jeweils auf das durch das linksstehende Matrixprodukt definierte Koordinatensystem
 - R_1 dreht das BKS
- Eulerwinkel: $R_S = R_Z(\alpha) \cdot R_{y'}(\beta) \cdot R_{z''}(\gamma)$

6-dim. Beschreibungsvektor

- Die Lage eines Objektes in E_3 kann durch ein 6-Tupel $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ reeller Zahlen beschrieben werden

$${}^B\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + {}^B_O R(\alpha, \beta, \gamma) {}^O\vec{u}$$

- x, y, z : Koordinaten des Ursprungs des OKS bezogen auf den Ursprung des BKS (Beschreibung des Ortes)
- α, β, γ : Drehwinkel, die sich auf die Drehachsen beziehen (Beschreibung der Orientierung)
- Ortsvektor und Rotationsmatrix sind anschaulich und häufigste Form der Eingabe von Objekt- und Endeffektorlagen
- Nachteil: Vektor- und Matrizenoperation stehen „separat“ und werden getrennt durchgeführt

Homogene Koord. & Transformationsmatrix

- Durch Matrizenoperationen mit homogenen Matrizen sind die in der Robotik üblichen Translationen und Rotationen uniform beschreibbar
 - Übergang von kartesischen zu homogenen Koordinaten
- Sei P der Punkt mit kartesischen Koordinaten (p_x, p_y, p_z) , sei $s \in \mathbb{R}$, dann ist Darstellung von P in homogenen Koordinaten: $P' = (sp_x, sp_y, sp_z, s) \in \mathbb{R}^4$
- Dem Punkt P entsprechen unendl. viele homogene Punkte P'

Homogene Koordinaten

- Umgekehrt sind die kartesischen Koordinaten des homogenen Punktes $P(x, y, z, s)$ gleich $(x/s, y/s, z/s)$.
- Allgemein: Die Verwendung von homogenen Koordinaten in E_3 erlaubt die Entwicklung von 4×4 Transformationsmatrizen, die Rotation, Translation, Skalierung und perspektivische Transformationen enthalten
- Bei homogenen Koordinaten werden Transformationen von n -dimensionalen physikalischen Vektoren in einen $n + 1$ -dim. Raum durchgeführt.
- In der Robotik wird $s = 1$ gesetzt.

Lage eines Objekts in homogenen Koordinaten

- Skalierungsfaktor s
- Perspektiventransformation P
 - In dieser Vorlesung $(0,0,0)^T$
- Translationsvektor $u = (u_x, u_y, u_z)$
 - Ort: Ursprung des OKS bezüglich des BKS
- Rotationen $R = (n_x, n_y, n_z), (o_x, o_y, o_z), (a_x, a_y, a_z)$
 - Orientierung: 3 Einheitsvektoren in x -, y - und z -Richtung des OKS

$$A = \begin{bmatrix} R & \vec{u} \\ \vec{P} & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & u_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & u_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & u_z \\ P_1 & P_2 & P_3 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & u_x \\ n_y & o_y & a_y & u_y \\ n_z & o_z & a_z & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogene Translationsmatrix T

- Seien p, p' Ortsvektoren in homogenen Koordinaten
- Sei a homogener Translationsvektor mit $a = (a_x, a_y, a_z, 1)^T$
- Die kartesische Translation $p = a + p'$ wird mit Hilfe der homogenen Translationsmatrix T wie folgt dargestellt

$$p = T(a_x, a_y, a_z)p' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 1 & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(a_x, a_y, a_z)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & 0 & -a_y \\ 0 & 0 & 1 & -a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lokale und globale Skalierung

- Lokale (anisotrope) Skalierung

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}$$

- Globale (isotrope) Skalierung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ \frac{x}{s} \\ y \\ \frac{y}{s} \\ z \\ \frac{z}{s} \\ s \end{bmatrix}$$

- $s > 1$ verkleinern
- $s < 1$ vergrößern

Rotationsmatrizen in homogener Darstellung

- $R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inverse homogene Rotationsmatrix R^{-1}

Sei R_3 eine 3×3 Rotationsmatrix.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse homogeneous Matrix A

$$A = T(a_x, a_y, a_z)R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & a_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & a_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

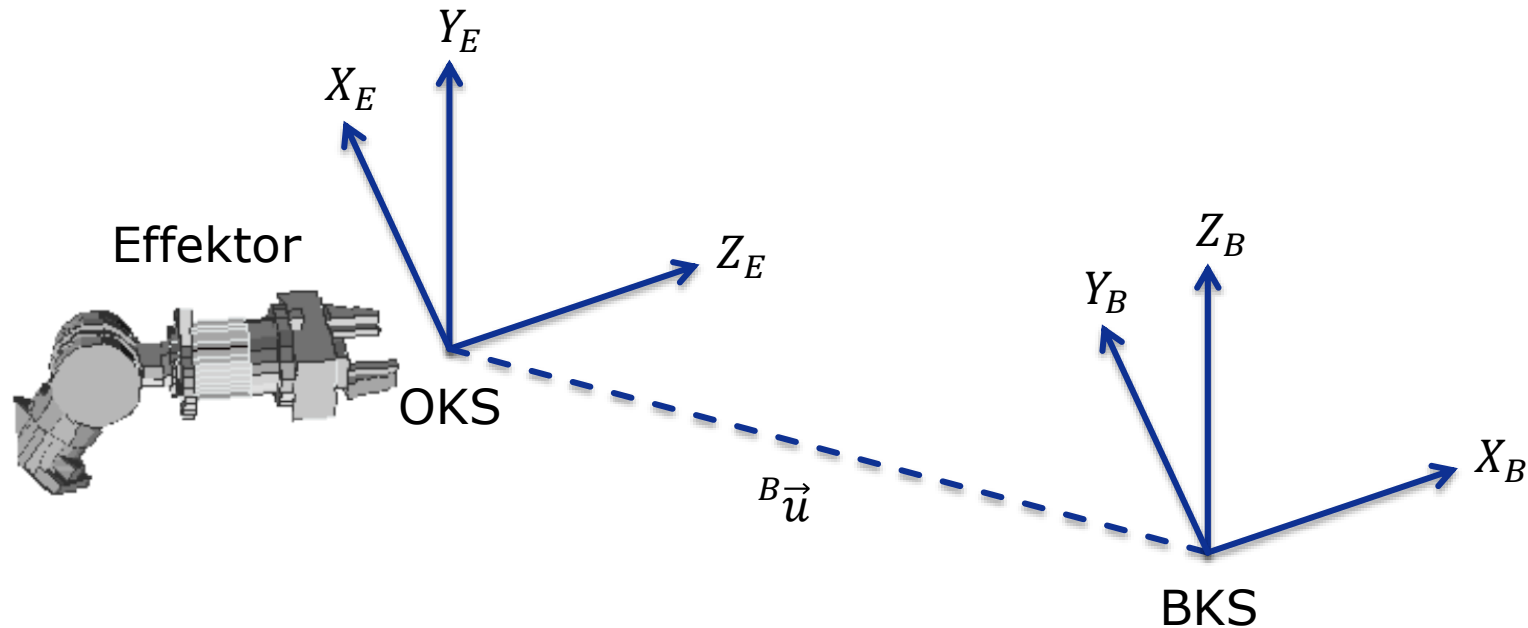
$$\Rightarrow A^{-1} = R^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & 0 & -a_y \\ 0 & 0 & 1 & -a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -r_{11}a_x - r_{21}a_y - r_{31}a_z \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -r_{12}a_x - r_{22}a_y - r_{32}a_z \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -r_{13}a_x - r_{23}a_y - r_{33}a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften homogener Matrizen

- Eine homogene 4×4 Matrix enthält 12 $(\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}, \vec{u})$ nichttriviale Kenngrößen im Gegensatz zu 6 $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ notwendigen
- Redundanz durch Orthogonalität

Bestimmung d. homog. Transformationsmatrix

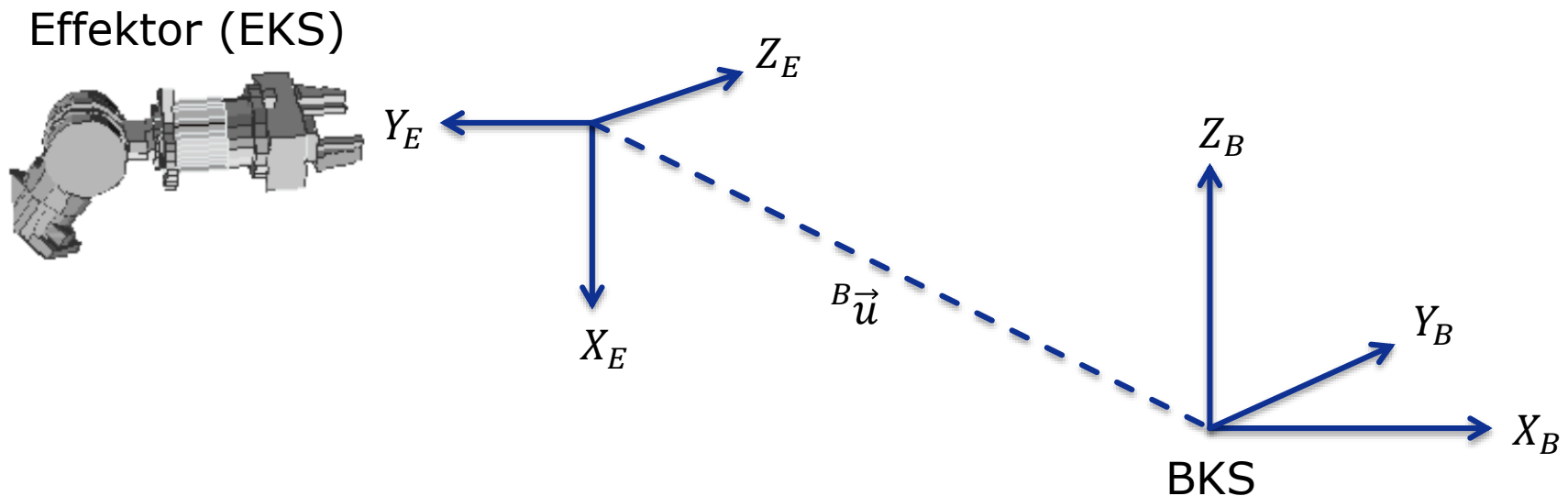


$$\left({}^E x, {}^E y, {}^E z, R \right) = \begin{array}{c|c} \text{Orientierung} & \text{Ort} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^B u_x \\ {}^B u_y \\ {}^B u_z \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bestimmung d. homog. Transformationsmatrix

Gegeben: Beschreibungsvektor: $(-7, 0, 8, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$, Roll-Pitch-Yaw

Gesucht: Homogene Darstellung der Lage mit Matrix A



Bestimmung d. homog. Transformationsmatrix

- Berechnung von $R = R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)R_x(0^\circ)$

- $R_z(90) = \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $R_y(90) = \begin{bmatrix} \cos 90 & 0 & \sin 90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90 & 0 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $R_x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & -\sin 0 \\ 0 & \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bestimmung d. homog. Transformationsmatrix

$$\begin{aligned}
 R &= R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)R_x(0^\circ) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestimmung des Beschreibungsvektors

Aus einer homogenen Matrix A soll der Beschreibungsvektor $\vec{v} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ ermittelt werden

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Ort: $x = -7, y = 0, z = 8$
- Orientierung: Bestimmung aus der Matrixgleichung
 - $R_s = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$
 - 3×3 -Orientierungsanteil der homogenen Matrix
 - Produkt von Rotationsmatrizen je nach Drehachsensdefinition (Euler, Roll-Pitch-Yaw)

Umformung der Matrixgleichung

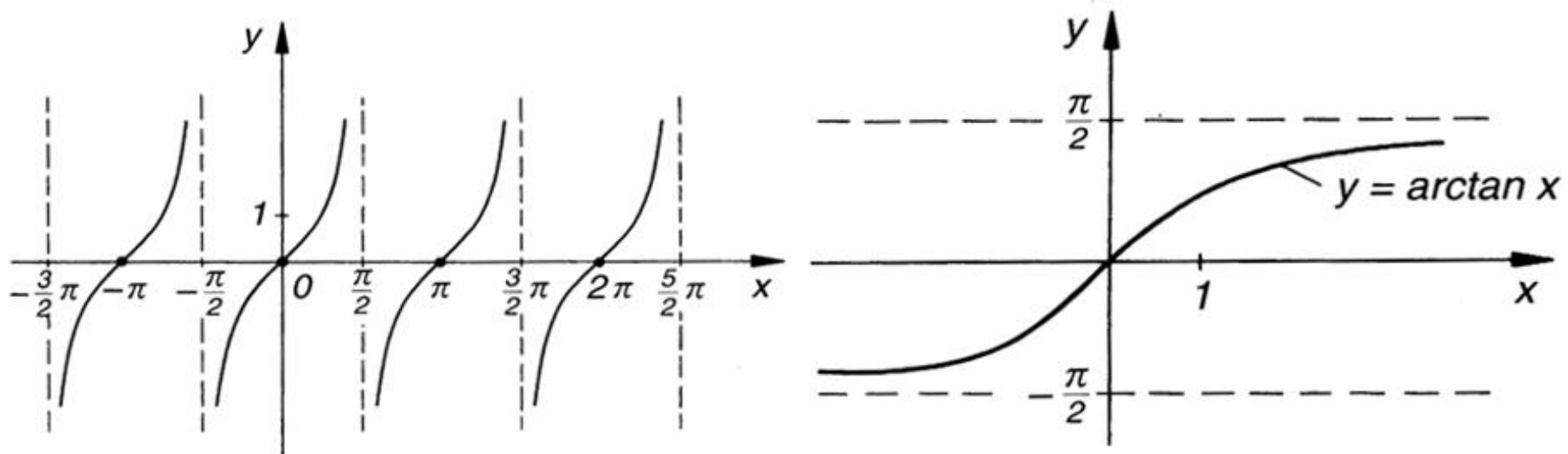
- Matrixgleichung zerfällt in ein Gleichungssystem von 16 Einzelgleichungen, hiervon sind 12 nicht-trivial
- Lösung der Matrixgleichung durch Multiplikation mit der inversen Matrix R_1^{-1} bzw. R_3^{-1}
 - $R_1^{-1} \cdot R_s = R_2 \cdot R_3$
 - $R_s \cdot R_3^{-1} = R_1 \cdot R_2$

Form der Bestimmungsgleichungen

- Nach dieser Umformung existiert für α, β, γ je ...
 - (1) eine Bestimmungsgleichung der Form $b \cdot \sin \alpha - a \cdot \cos \alpha = 0$
 - (2) oder ein Paar von Bestimmungsgleichungen der Form
$$\sin \alpha = a, \cos \alpha = b$$
- Lösungsweg zur Bestimmung der Winkel
 - Der unbekannte Winkel darf nicht über \sin oder \cos berechnet werden wegen Mehrdeutigkeiten
 - Lösungsidee: Verwendung von \arctan (Arkustangens) und Abbildung der Winkel auf den richtigen Quadranten

Lösung der Bestimmungsgleichungen

- Aus (1) oder (2) lässt sich α berechnen, denn sowohl aus (1), als auch aus (2) folgt $\alpha = \arctan \frac{a}{b}$
- Problem: $\arctan x$ ist mehrdeutig
 - Bei Beschränkung auf Hauptwert nur Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$



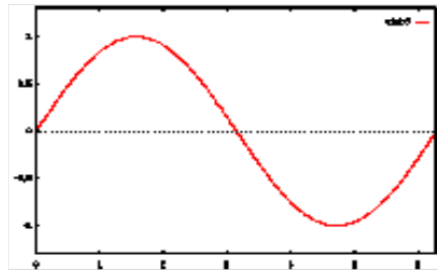
ATAN2

- Für die Berechnung von α wird statt der Funktion \arctan die erweiterte Arcus-Tangensfunktion ATAN2 verwendet
- Ausgangspunkt: Gleichungen der Form $\sin \alpha = a, \cos \alpha = b$
- Diese Gleichungen sind nur auflösbar nach α , falls $a^2 + b^2 = 1$, denn $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- Insbesondere können also a und b nicht gleichzeitig Null sein

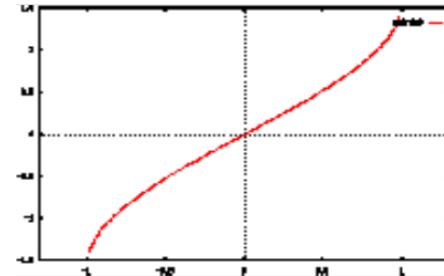
Arcus-Funktion des Sinus und Cosinus

(3) $\arcsin a = \alpha$ mit $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin x$

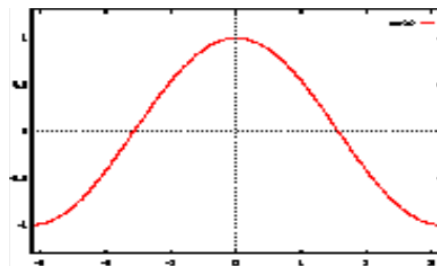


$\arcsin x$

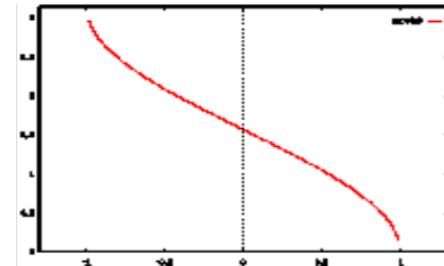


(4) $\arccos b = \alpha$ mit $\alpha \in [0, \pi]$

$\cos x$



$\arccos x$



(5) Tangens $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Definition ATAN2

- $\text{ATAN2}(a, b)$ mit $a = \sin$ und $b = \cos$ wegen (5)
- $$\text{ATAN2}(a, b) = \begin{cases} \arccos b, & \text{wenn } a \geq 0 \\ -\arccos b, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

Wegen (3) und (4)
- Auch mit $\text{ATAN2}(a, b) = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right)$ berechenbar
 - Über die Vorzeichen von a und b Quadrant wählen
 - Beispiel: $\text{ATAN2}(-2, -2) = -135^\circ$ (Dritter Quadrant)
 - Beispiel: $\text{ATAN2}(2, 2) = -45^\circ$ (Erster Quadrant)

Winkelberechnung mit ATAN2

- $\sin \theta = a \Rightarrow \theta = \pm \text{ATAN2}(\sqrt{1 - a^2}, a)$
- $\cos \theta = b \Rightarrow \theta = \pm \text{ATAN2}(b, \pm \sqrt{1 - b^2})$
- $a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta = 0$ hat zwei Lösungen
 - $\theta = \text{ATAN2}(a, -b)$
 - $\theta = \text{ATAN2}(-a, b)$
- $a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta = c \Rightarrow \theta = \text{ATAN2}(b, a) \pm \text{ATAN2}(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, c)$
- $a \cdot \cos \theta - b \cdot \sin \theta = c$ und $a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \theta = d$
 $\Rightarrow \theta = \text{ATAN2}(ad - bc, ac + bd)$

Bestimmung von Eulerwinkeln

Berechnung von Eulerwinkel zu gegebener allgemeiner Orientierungsmatrix

- Matrixgleichung $R = R_z(\alpha) \cdot R_{y'}(\beta) \cdot R_{z''}(\gamma) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$
- Multiplizieren mit $R_z(\alpha)^{-1}$ liefert

$$R_z(\alpha)^{-1} \cdot R_z(\alpha) \cdot R_{y'}(\beta) \cdot R_{z''}(\gamma) = R_z(\alpha)^{-1} \cdot R$$
- Da für orthogonale Matrizen $A^{-1} = A^T$ ist, gilt

$$R_{y'}(\beta) \cdot R_{z''}(\gamma) = R_z(\alpha)^{-1} \cdot R = R_z(\alpha)^T \cdot R$$

$$\begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -C\beta \cdot S\gamma & S\beta \\ S\gamma & C\gamma & 0 \\ -S\beta \cdot C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & C\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha n_x + S\alpha n_y & C\alpha o_x + S\alpha o_y & C\alpha a_x + S\alpha a_y \\ -S\alpha n_x + C\alpha n_y & -S\alpha o_x + C\alpha o_y & -S\alpha a_x + C\alpha a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

Bestimmung von Eulerwinkeln: Beispiel

Beispielrechnung ergibt folgende Einzelgleichungen:

(Zeile.Spalte)

$$(1.1) \quad C\beta \cdot C\gamma = C\alpha \cdot n_x + S\alpha \cdot n_y$$

$$(1.2) \quad -C\beta \cdot S\gamma = C\alpha \cdot o_x + S\alpha \cdot o_y$$

$$(1.3) \quad S\beta = C\alpha \cdot a_x + S\alpha \cdot a_y$$

$$(2.1) \quad S\gamma = -S\alpha \cdot n_x + C\alpha \cdot n_y$$

$$(2.2) \quad C\gamma = -S\alpha \cdot o_x + C\alpha \cdot o_y$$

$$(2.3) \quad 0 = -S\alpha \cdot a_x + C\alpha \cdot a_y$$

$$(3.1) \quad -S\beta \cdot C\gamma = n_z$$

$$(3.2) \quad S\beta \cdot S\gamma = o_z$$

$$(3.3) \quad C\beta = a_z$$

Bestimmung von Eulerwinkeln: Beispiel

- Winkel α : Aus (2.3) folgt ...
 - $S\alpha \cdot a_x = C\alpha \cdot a_y \Leftrightarrow \frac{S\alpha}{C\alpha} = \tan\alpha = \frac{a_y}{a_x}$
 - Somit $\alpha = \text{ATAN2}(a_y, a_x)$
- Winkel β : Aus (1.3), (3.3) folgt ...
 - $\beta = \text{ATAN2}(C\alpha a_x + S\alpha a_y, a_z)$
- Winkel γ : Aus (2.1), (2.2) folgt ...
 - $\gamma = \text{ATAN2}(C\alpha n_x + S\alpha n_y, -S\alpha o_x + C\alpha o_y)$
- Beachte: α tritt in den Lösungen für β, γ auf

Bestimmung von Roll-Pitch-Yaw-Winkeln

- Multiplizieren von rechts mit $R_x(\alpha)^{-1}$ liefert
$$R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \cdot R_x(\alpha)^{-1} = R \cdot R_x(\alpha)^{-1}$$
- Vereinfacht zu $R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) = R \cdot R_x(\alpha)^T$
- → Übung

Roll-Pitch-Yaw-Winkel: Beispiel

Matrix aus Folien 16-17 ergibt folgende Einzelgleichungen:

$$(1.1) \quad C\beta = 0$$

$$(1.2) \quad 0 = 0$$

$$(1.3) \quad S\beta = 1$$

$$(2.1) \quad S\beta \cdot S\alpha = C\gamma$$

$$(2.2) \quad C\alpha = S\gamma$$

$$(2.3) \quad -S\alpha \cdot C\beta = 0$$

$$(3.1) \quad -C\alpha \cdot S\beta = -S\gamma$$

$$(3.2) \quad S\alpha = C\gamma$$

$$(3.3) \quad C\alpha \cdot C\beta = 0$$

Roll-Pitch-Yaw-Winkel: Beispiel

- Winkel β : Aus (1.1), (1.3) folgt $\beta = 90^\circ$
- Winkel α und γ : Aus (2.2), (3.2) folgt $\gamma = 90^\circ - \alpha$
- Mit $\beta = 90^\circ$ werden (2.1), (2.3), (3.1), (3.3) zu (2.2) bzw. (3.2) reduziert
- Keine Bestimmungsgleichung für α oder γ
 - α oder γ frei wählbar
- Wähle $\alpha = 0^\circ \rightarrow$ Lösungen $(0^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$

Verkettete Lagebeschreibung

- Lagebeschreibung häufig nicht in Bezug auf BKS, sondern bzgl. eines geeigneter erscheinenden KS (relative Definition)
- Umrechnung von Koordinaten auf verschiedene Bezugssysteme (u.a. BKS notwendig)
- Vorteile der relativen Lagedefinition
 - Verringerung des Nachführaufwandes bei Objektbewegungen
 - Einzelne Koordinatenangaben beschränken sich auf kürzere Distanzen

Rotation/Translation von Lagebeschreibungen

- Sei ${}^{BKS}_A H_{obj} = (4 \times 4)$ Lagebeschreibung eines Objekts dargestellt in Frame A bzgl. BKS
- Sei ${}^A_B H_{obj} = (4 \times 4)$ Lagebeschreibung eines Objekts dargestellt in Frame B bzgl. OKS von A
- Sei ${}^{BKS}_B H_{obj} = (4 \times 4)$ Lagebeschreibung eines Objekts dargestellt in Frame B bzgl. BKS
 - Es gilt ${}^{BKS}_B H_{obj} = {}^{BKS}_A H_{obj} \cdot {}^A_B H_{obj}$
- Im Vergleich zur kartesischen Darstellung kompaktere Schreibweise:

$$\begin{aligned} {}^{BKS}R + {}^{BKS}\vec{v} &= {}^{BKS}_A R_1 \cdot ({}^A_B R_2 + {}^A\vec{v}_B) + {}^{BKS}\vec{v}_A \\ &= {}^{BKS}_A R_1 \cdot {}^A_B R_2 + ({}^{BKS}_A R_1 \cdot {}^A\vec{v}_B) \end{aligned}$$

Verkettete Lagebeschreibung: Beispiel

- Objektlage dargestellt in Frame 1 bzgl. BKS: ${}^{BKS}_1 H_{obj}$
- Objektlage dargestellt in Frame 2 bzgl. Frame 1: ${}^1_2 H_{obj}$
- Objektlage dargestellt in Frame 3 bzgl. Frame 2: ${}^2_3 H_{obj}$
- Objektlage dargestellt in Frame 3 bzgl. BKS: ${}^{BKS}_3 H_{obj}$
 - ${}^{BKS}_3 H_{obj} = {}^{BKS}_1 H_{obj} \cdot {}^1_2 H_{obj} \cdot {}^2_3 H_{obj}$
- Bei verketteter Stellungsbeschreibung durch ein Produkt von Matrizen muss jede Matrix sich auf die durch die jeweils linksstehende Matrix definierte Stellung beziehen
 - $\prod_{i=1}^n {}^{i-1}_i H$ mit $1 \leq i \leq n$ und ${}^0 H = \text{BKS}$

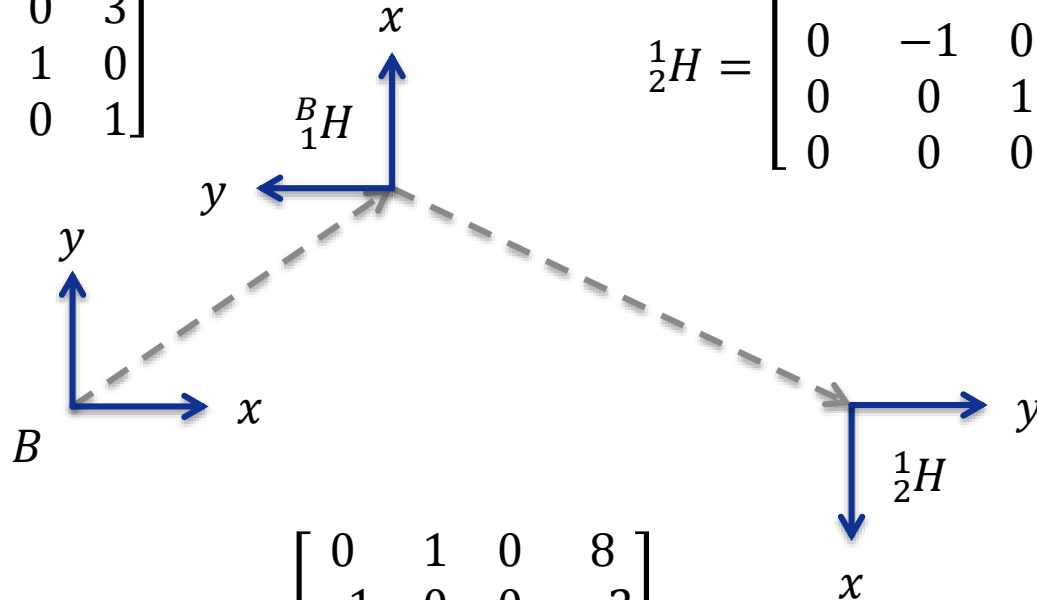
Verkettete Lagebeschreibung: Beispiel

- Objektsystem H_1 , entstanden durch eine Transformation $((3,3,0)^T, R_z(90^\circ))$ aus einem beliebigen Bezugssystem B : B_1H
- Objektsystem H_2 , entstanden durch eine Transformation $((-5,-5,0)^T, R_z(-180^\circ))$ aus dem System des Objekts H_1 : 1_2H

Verkettete Lagebeschreibung: Beispiel

$${}^{BKS}_1H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{\frac{1}{2}H}H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^{BKS}_2H = {}^{BKS}_1H \cdot {}^{\frac{1}{2}H}H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Anhang: Quaternionen

- Orientierungsbeschreibung mittels Quaternionen
- Eigenschaften reeller Quaternionen
- Rotation mittels Quaternionen
- Duale Quaternionen
- Konvertierung zwischen Quaternion und Rotationsmatrix
- Lagebeschreibung mittels dualer Quaternionen

Nächste Vorlesung

Robotermodellierung

- Freiheitsgrade
- Geometrisches Modell
- Direktes kinematisches Modell