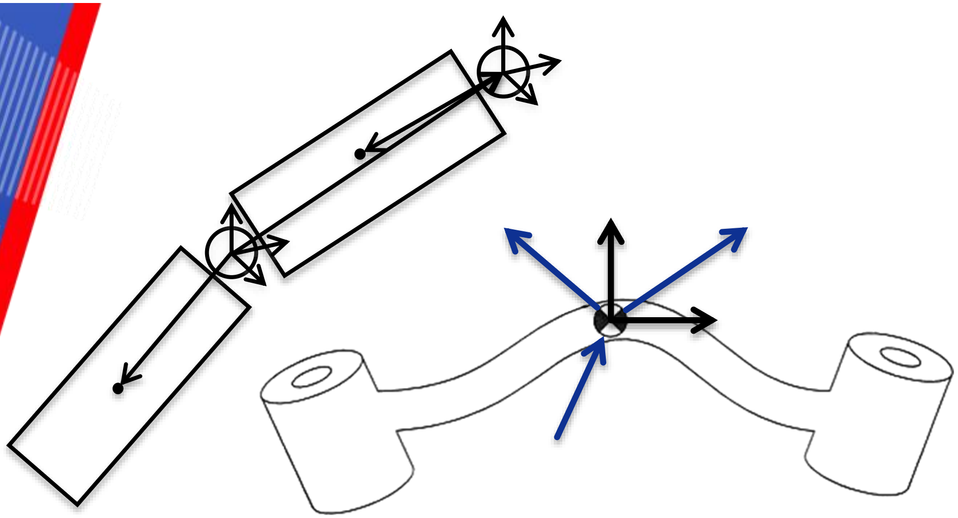
Robotermodellierung IV



Prof. Karsten Berns
Robotics Research Lab
Department of Computer Science
University of Kaiserslautern, Germany

Inhalt

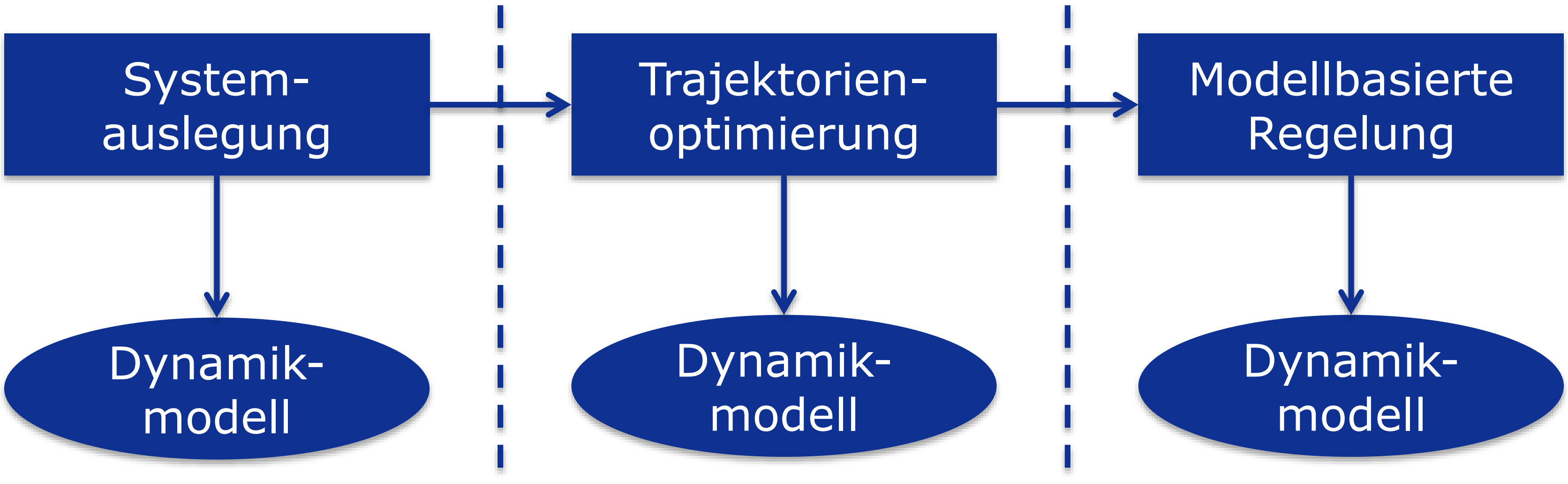
- Verwendung des dynamischen Modells
- Beschleunigung und Winkelbeschleunigung
- Massenträgheitsmoment
- Dynamikberechnung nach Newton-Euler
- Dynamikberechnung nach Lagrange
- Vergleich der Ansätze

Dynamische Modellierung

- Berechnet Zusammenhang von Kräften, Momenten und Bewegungen, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem auftreten
- Nutzen
  - Analyse der Dynamik
  - Synthese mechanischer Strukturen
  - Modellierung elastischer Strukturen
  - Reglerentwurf

Dynamische Modellierung: Anwendung

- Phasen von Roboter-Entwicklung und –Betrieb



- Modellierung in unterschiedlichen Phasen
- Hoher Zeitaufwand; Fehler u. Inkonsistenzen wahrscheinlich
- Wiederverwendbarkeit von Dynamikmodell-Code schwierig bei Änderungen (kinemat. Struktur, Gelenktypen, Antriebe)

Dynamische Modellierung: Bewegungsgleichung

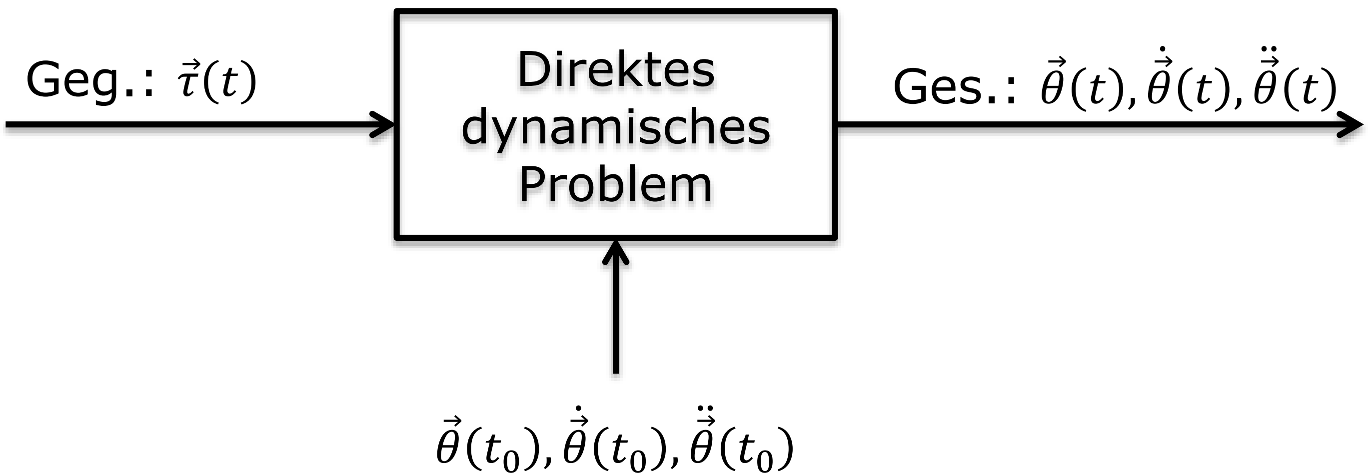
- Beziehungen zwischen Kräften/Momenten, Lagen, Geschw. und Beschleunigungen der n Armelemente

$$\vec{\tau} = M(\vec{\theta}) \cdot \ddot{\vec{\theta}} + n\left(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta}\right) + g(\vec{\theta}) + R \cdot \dot{\vec{\theta}} \tag{8.1}$$

- $\vec{\tau}$: $n \times 1$ Vektor der allgemeinen Stellkräfte und -momente
- $M(\vec{\theta})$: $n \times n$ Massenträgheitsmatrix
- $n\left(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta}\right)$: $n \times 1$ Vektor mit Zentrifugal- und Corioliskomponenten
- $g(\vec{\theta})$: $n \times 1$ Vektor mit Gravitationskomponenten
- R: $n \times n$ Diagonalmatrix zur Beschreibung der Reibungskräfte
- $\vec{\theta}$: $n \times 1$ Stellgrößen des Manipulators

Direktes dynamisches Problem

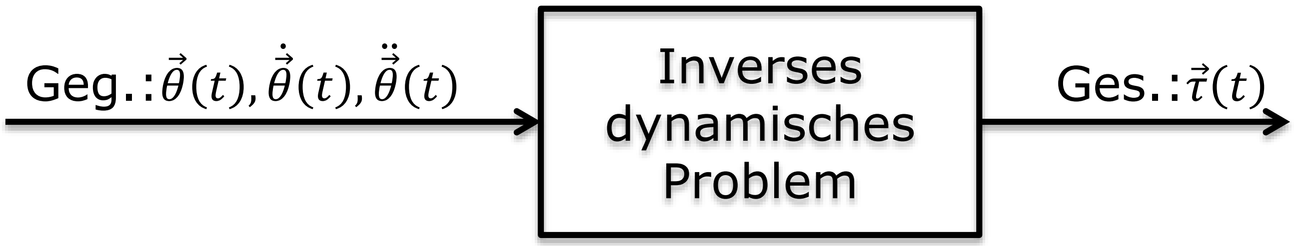
- Aus Masse, äußeren Kräften und Momenten, sowie Lage, Anfangsgeschwindigkeit und -beschleunigung werden die sich ergebenden Bewegungsänderungen berechnet



- Gleichung (8.1) auflösen nach: $\vec{\theta}(t), \dot{\vec{\theta}}(t), \ddot{\vec{\theta}}(t)$

Inverses dynamisches Problem

- Aus gewünschten Bewegungs- und kinematischen Parametern die erforderlichen Stellkräfte und –momente ermitteln



- Gleichung (8.1) ausrechnen

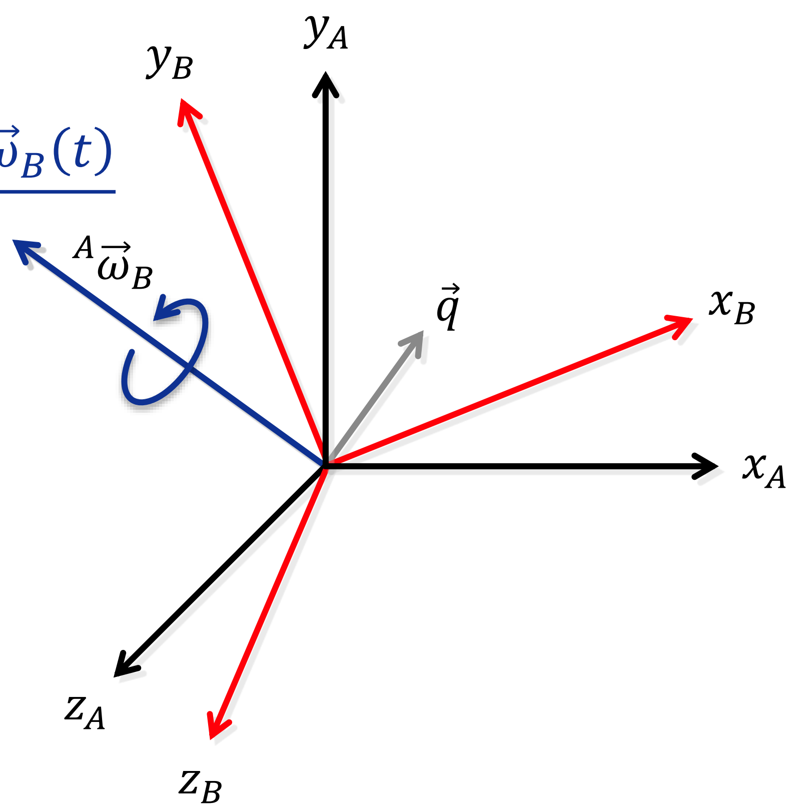
Beschleunigung bei starren Körpern

- Linearbeschleunigung

$${}^{B}\dot{\vec{v}}_q = \frac{d}{dt}\,{}^{B}\vec{v}_q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{B}\vec{v}_q(t+\Delta t) - {}^{B}\vec{v}_q(t)}{\Delta t}$$

- Winkelbeschleunigung

$${}^{A}\dot{\vec{\omega}}_B = \frac{d}{dt}\,{}^{A}\vec{\omega}_B = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}\vec{\omega}_B(t+\Delta t) - {}^{A}\vec{\omega}_B(t)}{\Delta t}$$



Linearbeschleunigung

- Linearbeschleunigung ausgehend von Geschwindigkeit
$$ {}^{A}\vec{v}_q = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q + {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} \qquad \text{Vgl. } (7.1) $$
- Da Ursprünge von Frame A und B zusammenfallen gilt
$$ \frac{d}{dt}\left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q}\right) = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q + {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} \qquad (8.2) $$
- Ableitung der Geschwindigkeit: Linearbeschleunigung
$$ {}^{A}\dot{\vec{v}}_q = \frac{d}{dt}\left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q\right) + {}^{A}\dot{\vec{\omega}}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} + {}^{A}\vec{\omega}_B \times \frac{d}{dt}\left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q}\right) \qquad (8.3) $$
- Einsetzen von (8.2) in (8.3)
$$ {}^{A}\dot{\vec{v}}_q = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\dot{\vec{v}}_q + {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q + {}^{A}\dot{\vec{\omega}}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} $$
$$ + {}^{A}\vec{\omega}_B \times \left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q + {}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q}\right) $$

Linearbeschleunigung

- Zusammenfassung

$$^{A}\dot{\vec{v}}_q = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\dot{\vec{v}}_q + 2 \cdot \left({}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q \right)$$
$$+ {}^{A}\dot{\vec{\omega}}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} + {}^{A}\vec{\omega}_B \times \left({}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} \right)$$

- Allgemeiner Fall (Frames A, B ohne geteilte Ursprünge)

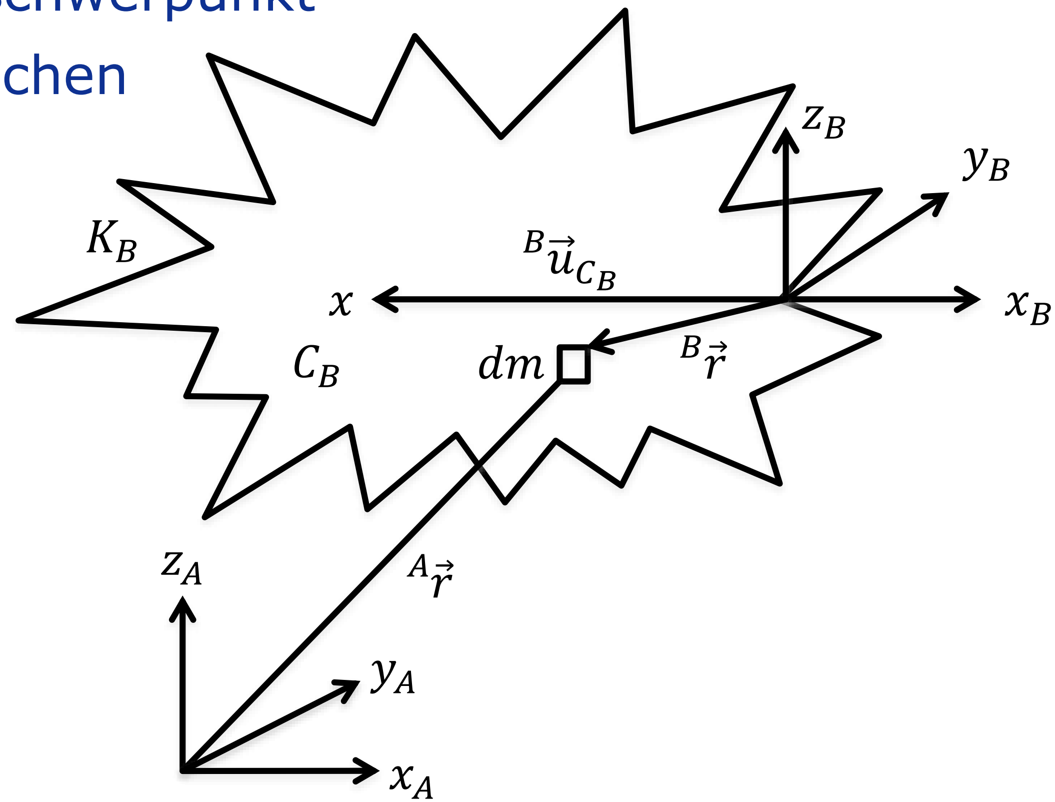
$$^{A}\dot{\vec{v}}_q = {}^{A}\dot{\vec{v}}_{OB} + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\dot{\vec{v}}_q + 2 \cdot \left({}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{v}_q \right)$$
$$+ {}^{A}\dot{\vec{\omega}}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} + {}^{A}\vec{\omega}_B \times \left({}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} \right)$$

- Unter Berücksichtigung das ${}^{B}\vec{q}$ sich nicht bewegt

$${}^{B}\vec{v}_q = {}^{B}\dot{\vec{v}}_q = \vec{0}$$
$$\Rightarrow {}^{A}\dot{\vec{v}}_q = {}^{A}\dot{\vec{v}}_{OB} + {}^{A}\dot{\vec{\omega}}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} + {}^{A}\vec{\omega}_B \times \left({}^{A}\vec{\omega}_B \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\vec{q} \right)$$

Massenverteilung: Geometr. Vorbetrachtung

- dm: Massenteilchen
- C_B: Massenschwerpunkt des Körpers K_B
- $\vec{u}_{C_B}$: Vektor zu Massenschwerpunkt
- $\vec{r}$: Vektor zu Massenteilchen



Massenverteilung: Massenträgheitstensor

- Massenträgheitstensor in Bezug auf Frame A, der die Trägheit des Körpers bzgl. Drehungen angibt

$$^{A}I = \begin{bmatrix} {}^{A}i_{xx} & -{}^{A}i_{xy} & -{}^{A}i_{xz} \\ -{}^{A}i_{xy} & {}^{A}i_{yy} & -{}^{A}i_{yz} \\ -{}^{A}i_{xz} & -{}^{A}i_{yz} & {}^{A}i_{zz} \end{bmatrix}$$

- Skalare Elemente des Massenträgheitstensors (Berechnung durch Integration über Masseverteilung M)
  - Axiale Trägheitsmomente (Massenträgheitsmoment)

$$^{A}i_{xx} = \iiint_M (y_A^2 + z_A^2)\,dm \quad {}^{A}i_{yy} = \iiint_M \left(x_A^2 + z_A^2\right)dm \quad {}^{A}i_{zz} = \iiint_M \left(x_A^2 + y_A^2\right)dm$$

  - Massenträgheitsprodukt

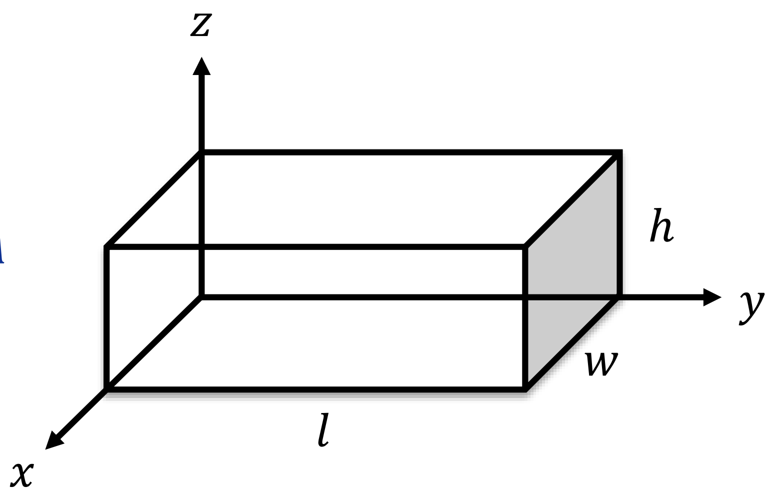
$$^{A}i_{xy} = \iiint_M x_A y_A\,dm \quad {}^{A}i_{xz} = \iiint_M x_A z_A\,dm \quad {}^{A}i_{yz} = \iiint_M y_A z_A\,dm$$

- Für eine Punktmasse ist der Trägheitstensor eine Nullmatrix

Massenverteilung: Beispiel Quader

- Trägheitssensorbestimmung von Quader mit uniformer Dichte ρ
- Mit $dm = \rho dxdydz$ folgt

$$
\begin{aligned}
{}^{A}i_{xx} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y_A^2 + z_A^2)\rho dx_A dy_A dz_A \\
&= \int_0^h \int_0^l (y_A^2 + z_A^2) w\rho dy_A dz_A \\
&= \int_0^h \left(\frac{l^3}{3} + z_A^2 l\right) w\rho dz_A \\
&= \left(\frac{hl^3w}{3} + \frac{h^3lw}{3}\right)\rho \\
&= \frac{m}{3}(l^2 + h^2) \quad \text{(mit Gesamtmasse } m\text{)}
\end{aligned}
$$



- Für ${}^{A}i_{yy}$ und ${}^{A}i_{zz}$ ergibt sich analog

$$
{}^{A}i_{yy} = \frac{m}{3}(w^2 + h^2)
$$

$$
{}^{A}i_{zz} = \frac{m}{3}(l^2 + w^2)
$$

Massenverteilung: Beispiel Quader

- Berechnung von

$$^{A}i_{xy} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w x_A y_A \rho dx_A dy_A dz_A$$

$$= \int_0^h \int_0^l \frac{w^2}{2} y_A \rho dy_A dz_A = \int_0^h \frac{w^2 l^2}{4} \rho dz_A = \frac{m}{4} wl$$

- Entsprechende Berechnung von $^{A}i_{xz} = \frac{m}{4} hw$, $^{A}i_{yz} = \frac{m}{4} hl$
- Trägheitstensor

$$^{A}I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(l^2 + h^2) & -\frac{m}{4} wl & -\frac{m}{4} hw \\ -\frac{m}{4} wl & \frac{m}{3}(w^2 + h^2) & -\frac{m}{4} hl \\ -\frac{m}{4} hw & -\frac{m}{4} hl & \frac{m}{3}(l^2 + w^2) \end{bmatrix}$$

Satz von Steiner

- Für parallele Achsen durch den Schwerpunkt
- Sei Frame A beliebig und Frame C im Massenschwerpunkt mit parallelen Achsen zu Frame A, dann gilt
  - ${}^{A}i_{zz} = {}^{C}i_{zz} + m \cdot \left({}^{A}u_{C_x}^2 + {}^{A}u_{C_y}^2 \right)$
  - ${}^{A}i_{xy} = {}^{C}i_{xy} - m \cdot {}^{A}u_{C_x} \cdot {}^{A}u_{C_y}$
- Mit Ortsvektor ${}^{A}\vec{u}_C = \left({}^{A}u_{C_x}, {}^{A}u_{C_y}, {}^{A}u_{C_z} \right)^T$
- Restliche Skalare ergeben sich entsprechend

Massenverteilung: Beispiel Quader

- Satz von Steiner in Matrixschreibweise

$$ {}^{A}I = {}^{C}I + m \cdot \left[{}^{A}\vec{u}_C^T \cdot {}^{A}\vec{u}_C \cdot E_3 - {}^{A}\vec{u}_C^T \cdot {}^{A}\vec{u}_C \right] $$

  - Mit $E_3 = 3 \times 3$ Einheitsmatrix
- Angewandt auf Quaderbeispiel

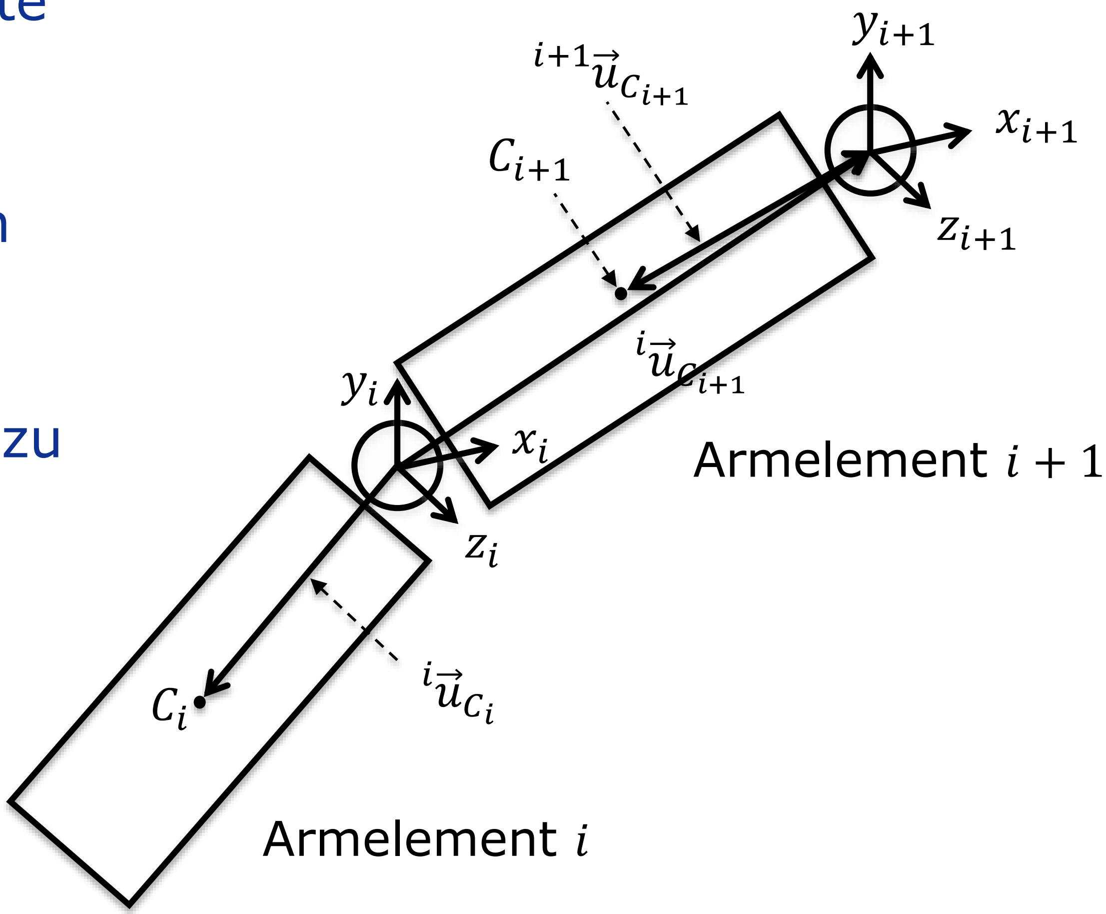
$$ {}^{A}\vec{u}_C = \begin{pmatrix} {}^{A}u_{C_x} \\ {}^{A}u_{C_y} \\ {}^{A}u_{C_z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w \\ l \\ h \end{pmatrix} \qquad {}^{C}i_{zz} = \frac{m}{12} \cdot (w^2 + l^2) \qquad {}^{C}i_{xy} = 0 $$

- Aus symmetrischen Betrachtungen ergeben sich die anderen Elemente. Resultierender Trägheitstensor: ${}^{C}I =$

$$ \begin{bmatrix} \frac{m}{12} \cdot (h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} \cdot (w^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} \cdot (l^2 + w^2) \end{bmatrix} $$

Geometr. Beschreibung benachbarter Armteile

- C_i: Massenschwerpunkte des Armelements i
- ${}^{i}\vec{u}_{c_i}$: Vektor zum Massenmittelpunkt von Armteil i in KS i
- ${}^{i}\vec{u}_{i+1}$: Vektor von Koordinatenursprung i zu $i+1$ in KS i

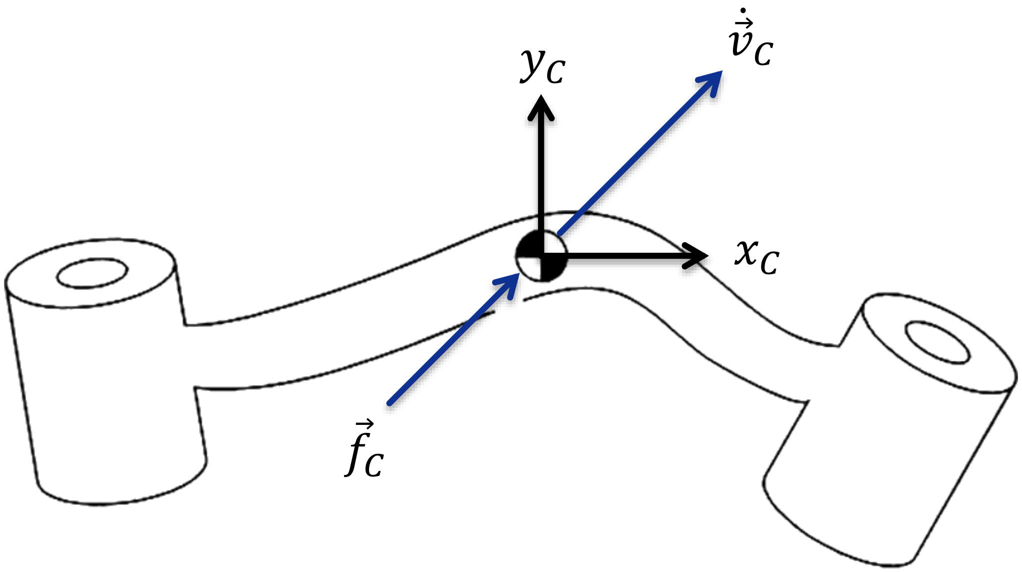


Herleitung der Bewegungsgleichungen

- Synthetische Methode (Newton-Euler):
  Freikörperbild (Freischneiden)
  - Impuls- und Drallsatz
  - Zwangskräfteelimination führ zu Bewegungsgleichungen
- Analytische Methoden (Lagrange):
  Anwendung von Extremalprinzipien
  - Arbeits- oder Energiebetrachtungen
  - Formales Ableiten ergibt die Bewegungsgleichungen

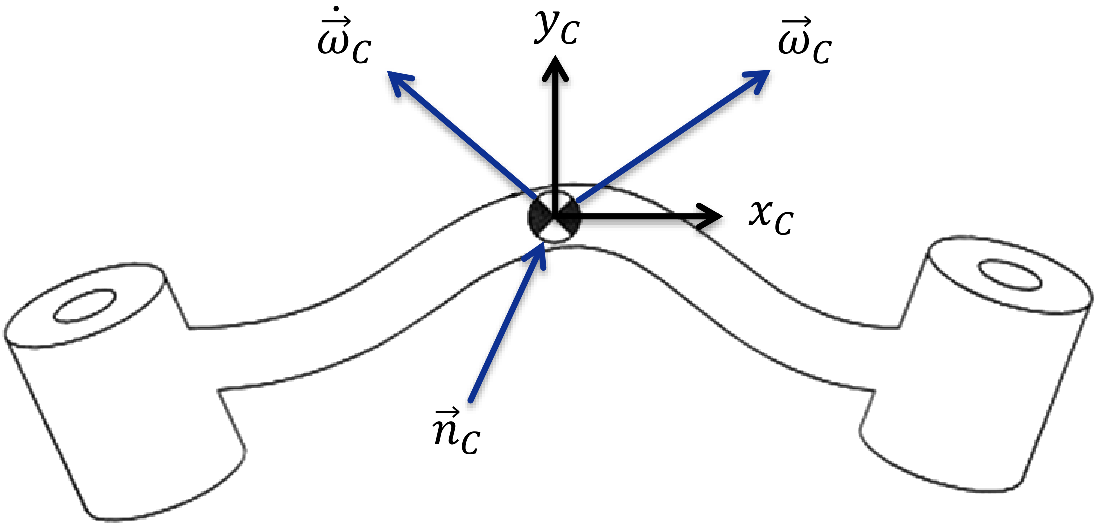
Methode nach Newton-Euler: Grundgleichungen

- Gleichung nach Newton: $\vec{f}_C = m \cdot \dot{\vec{v}}_C$
  - m: Gesamtmasse des Körpers
  - $\dot{\vec{v}}_C$: Beschleunigung im Massezentrum C
  - $\vec{f}_C$: Kraft, die im Zentrum wirkt



Methode nach Newton-Euler: Grundgleichungen

- Gleichung nach Euler: $\vec{n}_C = {}^C I \cdot \dot{\vec{\omega}}_C + \vec{\omega}_C \times {}^C I \cdot \vec{\omega}_C$
  - $\vec{\omega}_C$: Winkelgeschwindigkeit des Körpers
  - ${}^C I$: Trägheitstensor in Frame C
  - $\vec{n}_C$: Moment im Zentrum, das die Drehung verursacht



Methode nach Newton-Euler

- Iterative Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbestimmung zur Berechnung der Massenkräfte der Segmente
- Rotationsgeschwindigkeit von Element $i+1$

$$ {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\vec{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \right) $$

$$ {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i}\vec{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} $$

Methode nach Newton-Euler

Rotationsmatrix ${}_{i+1}^{i}R$ von $\vec{\theta}$ abhängig und somit zeitabhängig

- Für die Winkelbeschleunigung gilt

$$\frac{d}{dt}\left({}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1}\right) = \frac{d}{dt}\left({}^{i}\vec{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}\right)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\,{}_{i+1}^{i}R\right) \cdot {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} + {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} = {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$$ Mit (8.2) folgt

$$\dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \times {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} + {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} = {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$$

$${}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} = {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} - \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \times {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1}$$

$${}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} = {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$$

$${}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \cdot \left({}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} + \left({}^{i}\vec{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}\right) \times \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}\right)$$

$$\boxed{{}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \cdot \left({}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} + {}^{i}\vec{\omega}_i \times \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}\right)}$$

- Vereinfachung für ein Schubgelenk: ${}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \cdot {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i$

Methode nach Newton-Euler

- Lineargeschwindigkeit von Element $i+1$

$$^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}R \cdot \left({}^{i}\vec{v}_i + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} + \dot{d}_{i+1}\ {}^{i}\vec{e}_{z_i} \right)$$

- Linearbeschleunigung im Segment-Ursprung

$$^{i+1}\dot{\vec{v}}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}R \cdot \Big({}^{i}\dot{\vec{v}}_i + \ddot{d}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1}$$

$$+ {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} \right) + 2\ {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i}\vec{e}_{z_i} \dot{d}_{i+1} \right) \Big)$$

- Vereinfachung für ein Rotationsgelenk

$$^{i+1}\dot{\vec{v}}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}R \cdot \Big({}^{i}\dot{\vec{v}}_i + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} \right) \Big)$$

- Linearbeschleunigung im Massenzentrum

$$^{i}\dot{\vec{v}}_{C_i} = {}^{i}\dot{\vec{v}}_i + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^{i}\vec{u}_{C_i} + {}^{i}\vec{\omega}_i \times \left({}^{i}\vec{\omega}_i \times {}^{i}\vec{u}_{C_i} \right)$$

Methode nach Newton-Euler

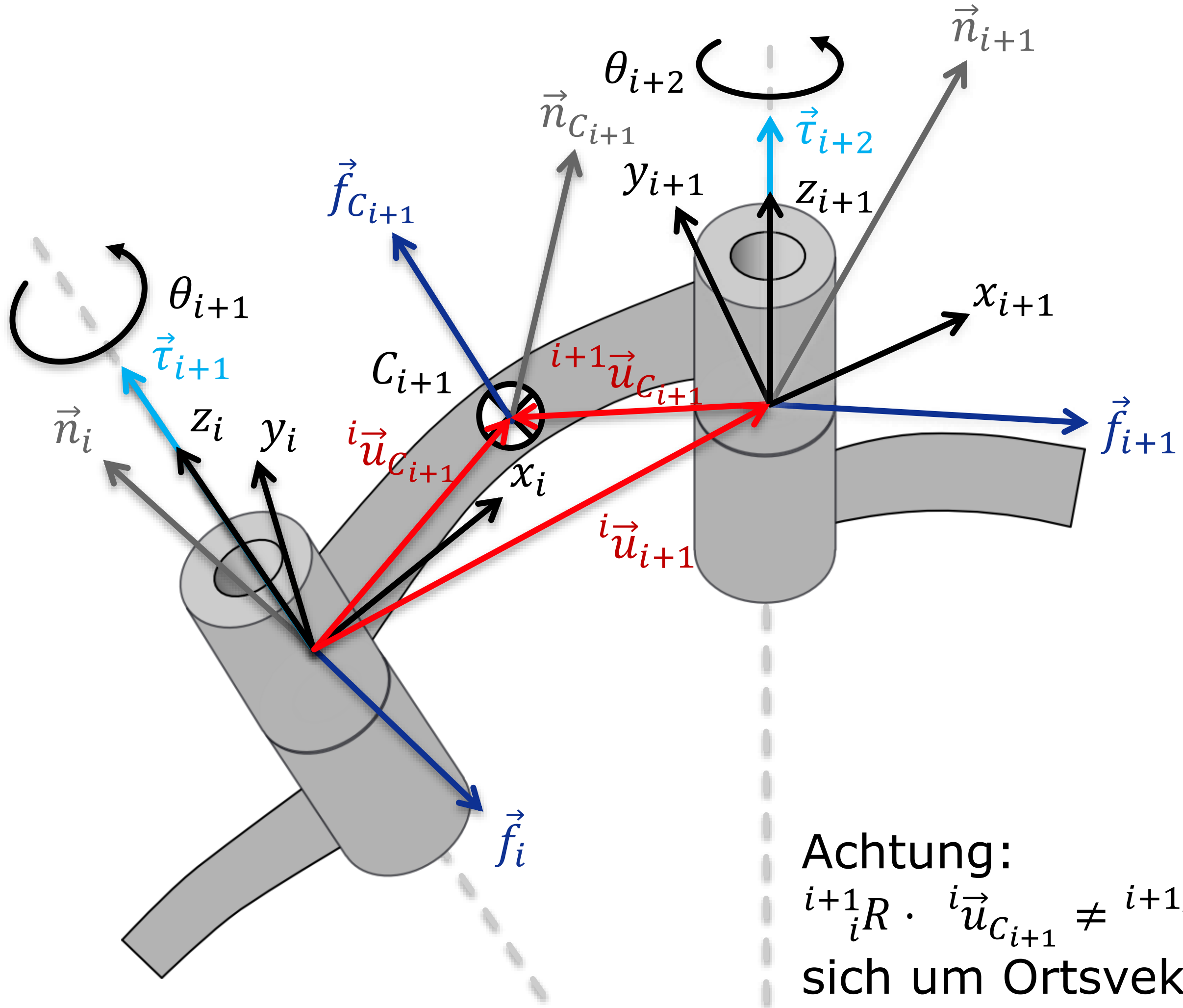
- Berechnung des ersten Segments: ${}^{0}\vec{\omega}_0 = {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{0}$
- Mit Linear– und Winkelbeschleunigungen in den Massenzentren ergeben sich Kräfte und Momente

$$\vec{f}_{C_i} = m_i \cdot \dot{\vec{v}}_{C_i}$$

$$\vec{n}_{C_i} = {}^{C_i}I \cdot \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times {}^{C_i}I \cdot \vec{\omega}_i$$

- Kraft- und Momentenausgleich für jedes Segment
  - Betrachtung von eigener Massenkraft und –Trägheit
  - Berücksichtigung der von Nachbarsegmenten wirkenden Kräfte und Momente
- $\vec{f}_i$: Von Segment $i+1$ auf Segment i ausgeübte Kraft
- $\vec{n}_i$: Von Segment $i+1$ auf Segment i ausgeübtes Moment

Koordinatensysteme und Bezeichner



Achtung:

${}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\vec{u}_{C_{i+1}} \neq {}^{i+1}\vec{u}_{C_{i+1}}$ da es sich um Ortsvektoren handelt

Methode nach Newton-Euler

- Kraftausgleich in Gelenk i
$$ {}^{i}\vec{f}_i = {}^{i}\vec{f}_{C_i+1} + {}_{i+1}^{\;\;i}R \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} $$
- Momentenausgleich
$$ {}^{i}\vec{n}_i = {}^{i}\vec{n}_{C_{i+1}} + {}_{i+1}^{\;\;i}R \cdot {}^{i+1}\vec{n}_{i+1} + {}^{i}\vec{u}_{C_{i+1}} \times {}^{i}\vec{f}_{C_{i+1}} + {}^{i}\vec{u}_{i+1} \times {}_{i+1}^{\;\;i}R $$
- Berechnung muss vom letzten Gelenk zur Basis erfolgen („Rückwärts“)

Methode nach Newton-Euler

- Zur Berechnung der in einem Gelenk i benötigten Kräfte wird nur die z-Komponente verwendet
$$\tau_{i+1} = {}^{i}\vec{n}_i^{T} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$$
- Lineare Kraft bei Schubgelenken
$$\tau_{i+1} = {}^{i}\vec{f}_i^{T} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i}$$
- Im freien Raum werden die Anfangskräfte und -momente auf Null gesetzt, d.h.
$$\vec{f}_N = \vec{n}_N = \vec{0}$$
(bei Kontakt mit der Umgebung oder Belastung ungleich Null)

Newton-Euler: Algo. zur Momentenberechnung

1. Iterative Berechnung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausgehend vom ersten Segment (äußere Iteration)

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{\;\;i}R \cdot \left({}^{i}\vec{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \right) \\
{}^{i+1}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{\;\;i}R \cdot \left({}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{i} + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} + {}^{i}\vec{\omega}_{i} \times \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \right) \\
{}^{i+1}\dot{\vec{v}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{\;\;i}R \cdot \left({}^{i}\dot{\vec{v}}_{i} + \ddot{d}_{i+1} \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} \right. \\
&\quad \left. + {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times {}^{i}\vec{u}_{i+1} \right) + 2\, {}^{i}\vec{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i}\vec{e}_{z_i} \dot{d}_{i+1} \right) \right) \\
{}^{i}\dot{\vec{v}}_{C_i} &= {}^{i}\dot{\vec{v}}_{i} + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{i} \times {}^{i}\vec{u}_{C_i} + {}^{i}\vec{\omega}_{i} \times \left({}^{i}\vec{\omega}_{i} \times {}^{i}\vec{u}_{C_i} \right) \\
{}^{i}\vec{f}_{C_i} &= m_i \cdot {}^{i}\dot{\vec{v}}_{C_i} \\
{}^{i}\vec{n}_{C_i} &= {}^{C_i}I \cdot {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_{i} + {}^{i}\vec{\omega}_{i} \times {}^{C_i}I \cdot {}^{i}\vec{\omega}_{i}
\end{aligned}
$$

Newton-Euler: Algo. zur Momentenberechnung

- Bei Betrachtung der Gravitation gilt

$$ {}^{0}\dot{\vec{v}}_0 = \vec{g}' $$

  - g' entgegengesetzt zu Gravitationsvektor
  - Entspricht Beschleunigung der Roboterbasis $1g$ nach oben

2. Rückwärtsberechnung der Kräfte und Momente ausgehend vom letzten Segment zurück zur Basis (innere Iteration)

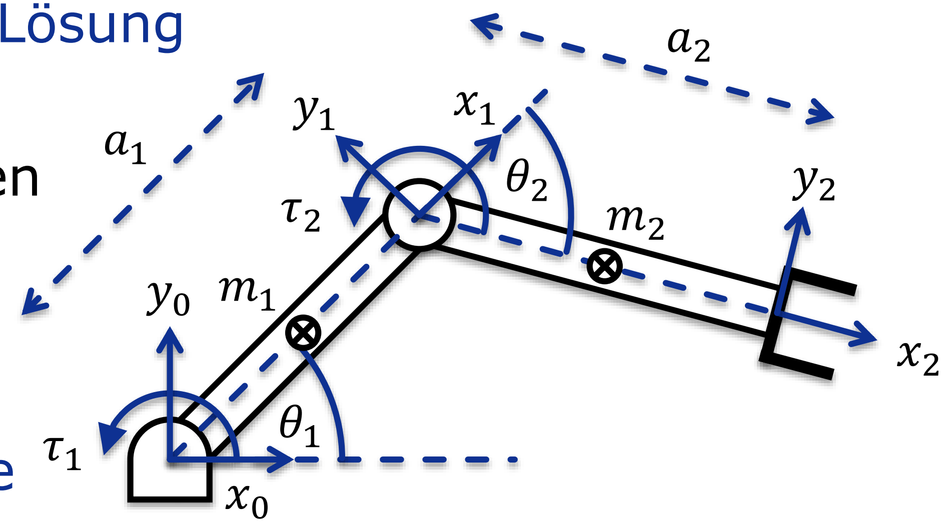
$$ {}^{i}\vec{f}_i = {}^{i}\vec{f}_{C_{i+1}} + {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} $$

$$ {}^{i}\vec{n}_i = {}^{i}\vec{n}_{C_{i+1}} + {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\vec{n}_{i+1} + {}^{i}\vec{u}_{C_{i+1}} \times {}^{i}\vec{f}_{C_{i+1}} + {}^{i}\vec{u}_{i+1} \times {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} $$

$$ \tau_{i+1} = {}^{i}\vec{n}_i^T \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} \text{ bzw. } \tau_{i+1} = {}^{i}\vec{f}_i^T \cdot {}^{i}\vec{e}_{z_i} $$

Methode nach Newton-Euler: Beispiel

- Beispiel einer geschlossenen Lösung
  - Zwei-Gelenk-Roboter
  - Vereinfachung: Punktmassen m_1, m_2 in den Gelenk-Mitten



Vorgehensweise

- Bestimmung bekannter Werte
- Bestimmung der Rotationsmatrizen zwischen Gelenk-Frames
- Äußere Iteration (Geschw., Beschl.)
  - Für Gelenk 1, 2
- Innere Iteration (Kräfte, Momente)
  - Für Gelenk 2, 1

Methode nach Newton-Euler: Beispiel

1. Bestimmung der bekannten Werte
   - Vektoren zu den Massezentren

$$ {}^{1}\vec{u}_{C_1} = -\frac{a_1}{2} \cdot {}^{1}\vec{e}_{x_1}, \quad {}^{2}\vec{u}_{C_2} = -\frac{a_2}{2} \cdot {}^{2}\vec{e}_{x_2} $$

   - Trägheitstensor (wg. Punktmasse)

$$ {}^{C_1}I_1 = {}^{C_2}I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

   - Keine wirkenden Kräfte auf TCP: $\vec{f}_2 = \vec{0}$, $\vec{n}_2 = \vec{0}$
   - Keine Bewegung der Roboterbasis: $\vec{\omega}_0 = \vec{0}$, $\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{0}$
   - Berücksichtigung der Gravitation: ${}^{0}\dot{\vec{v}}_0 = g \cdot {}^{0}\vec{e}_{y_0}$

Methode nach Newton-Euler: Beispiel

- Vektor zum nächsten Koordinatensystem

$$ {}^{0}\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} c_1 a_1 \\ s_1 a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; {}^{1}\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} c_2 a_2 \\ s_2 a_2 \\ 0 \end{pmatrix} $$

2. Rotationsmatrizen zwischen Gelenk-Frames (siehe Kap. VII)

$$ {}^{i}_{i+1}R = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i+1}) & -\sin(\theta_{i+1}) & 0 \\ \sin(\theta_{i+1}) & \cos(\theta_{i+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i+1}_{i}R = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i+1}) & \sin(\theta_{i+1}) & 0 \\ -\sin(\theta_{i+1}) & \cos(\theta_{i+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Methode nach Newton-Euler: Beispiel

- Äußere Iteration (1. Schritt)

$$ {}^{1}\vec{\omega}_1 = {}^{1}_{0}R \cdot \left({}^{0}\vec{\omega}_0 + \dot{\theta}_1 \cdot {}^{0}\vec{e}_{z_0} \right) = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_1 = {}^{1}_{0}R \cdot \left({}^{0}\dot{\vec{\omega}}_0 + \ddot{\theta}_1 \cdot {}^{0}\vec{e}_{z_0} + {}^{0}\vec{\omega}_0 \times \dot{\theta}_1 \cdot {}^{0}\vec{e}_{z_0} \right) = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \vec{0} $$

$$ {}^{1}\dot{\vec{v}}_1 = {}^{1}_{0}R \cdot \left({}^{0}\dot{\vec{v}}_0 + {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_1 \times {}^{0}\vec{u}_1 + {}^{0}\vec{\omega}_1 \times \left({}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{0}\vec{u}_1 \right) \right) $$

$$ = \begin{pmatrix} s_1 g \\ c_1 g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \cdot a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \cdot a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 g - \dot{\theta}_1^2 \cdot a_1 \\ c_1 g + \ddot{\theta}_1 \cdot a_1 \\ 0 \end{pmatrix} $$

Methode nach Newton-Euler: Beispiel

- Äußere Iteration (1. Schritt)

$$ {}^1\dot{\vec{v}}_{C_1} = {}^1\dot{\vec{v}}_1 + {}^1\dot{\vec{\omega}}_1 \times {}^1\vec{u}_{C_1} + {}^1\vec{\omega}_1 \times \left({}^1\vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{u}_{C_1} \right) $$

$$ = \begin{pmatrix} s_1 g - \dot{\theta}_1^2 \cdot a_1 \\ c_1 g + \ddot{\theta}_1 \cdot a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \cdot \frac{a_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^2 \cdot \frac{a_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 g - \dot{\theta}_1^2 \cdot \frac{a_1}{2} \\ c_1 g + \ddot{\theta}_1 \cdot \frac{a_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1\vec{f}_{C_1} = m_1 \cdot {}^1\dot{\vec{v}}_{C_1} $$

$$ \vec{n}_{C_1} = {}^{C_1}I \cdot \dot{\vec{\omega}}_{C_1} + \vec{\omega}_{C_1} \times {}^{C_1}I \cdot \vec{\omega}_{C_1} = \vec{0} + \vec{0} $$

Methode nach Newton-Euler

☺ Beliebige Anzahl von Gelenken

☺ Belastungen der Armelemente werden berechnet

☺ Geringer Aufwand $O(n)$
(n = Anzahl der Gelenke)

☹ Rekursion

Methode nach Lagrange

- Bewegungsgleichung nach Lagrange

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\delta l}{\delta \dot{\theta}_i} - \frac{\delta l}{\delta \theta_i}$$

  - θ_i: Drehwinkel oder Translationsweg
  - $\dot{\theta}_i$: Gelenkgeschwindigkeiten
  - τ_i: Kraft-/Momentenvektor in Gelenken
- Lagrange Funktion: $l = e_{kin} - e_{pot}$ (bezogen auf Basis)
  - Beschreibt Unterschied von kinetischer und potentieller Energie eines mechanischen Systems

Methode nach Lagrange: Kinetische Energie

- Kinetische Energie $e_{kin,i}$ von Gelenk i

$$e_{kin,i} = \underbrace{\frac{1}{2} m_i \cdot \vec{v}_{C_i}^T \cdot \vec{v}_{C_i}}_{\text{Linearer Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2} \, {}^i\vec{\omega}_i^T \cdot {}^{C_i}I_i \cdot {}^i\vec{\omega}_i}_{\text{Rotat. Anteil}}$$

- $\vec{v}_{C_i}$ und ${}^i\vec{\omega}_i$ abhängig von Position und Geschw. der Gelenke
- Gesamte kinetische Energie

$$e_{kin} = \sum_{i=1}^{n} e_{kin,i}$$

Methode nach Lagrange: Kinetische Energie

- Kinetische Energie kann abhängig von Position und Geschwindigkeit beschrieben werden

$$e_{kin}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{\theta}}^T \cdot M(\vec{\theta}) \cdot \dot{\vec{\theta}}$$

  - $M(\vec{\theta})$: Hier eine $n \times n$ Massenmatrix, in der jedes Element eine komplexe Funktion abhängig von $\vec{\theta}$ ist
  - $M(\vec{\theta})$: Positiv-definite Matrix, d.h. $\dot{\vec{\theta}}^T \cdot M(\vec{\theta}) \cdot \dot{\vec{\theta}}$ liefert immer einen positiven Skalar
- Diese Gleichung entspricht dem gängigen Ausdruck für die kinetische Energie einer Punktmasse

$$e_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Methode nach Lagrange: Potentielle Energie

- Potentielle Energie u_i von Gelenk i

$$e_{pot,i} = -m_i \cdot {}^0\vec{g}^T \cdot {}^0\vec{u}_{C_i} + e_{pot,ref_i}$$

  - ${}^0\vec{g}$: 3×1 Gravitationsvektor, bezogen auf Ursprungsframe 0
  - ${}^0\vec{u}_{C_i}$: 3×1 Vektor, der das Massenzentrum von i beschreibt (abhängig von den Gelenkstellungen)
  - e_{pot,ref_i}: Konstante, so dass $e_{pot,i} \geq 0$ gilt
- Die gesamte potentielle Energie e_{pot} ergibt sich durch

$$e_{pot} = \sum_{i=1}^{n} e_{pot,i}$$

- Die potentielle Energie kann ebenfalls als Funktion $e_{pot}(\vec{\theta})$ in Abhängigkeit von den Gelenkwinkeln beschrieben werden

Methode nach Lagrange

- Für die Lagrange-Funktion gilt demnach

$$l\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right) = e_{kin}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right) - e_{pot}(\vec{\theta})$$

- Für die Bewegungsgleichung mit Drehmoment-Vektor Q gilt

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\frac{\delta l}{\delta\dot{\vec{\theta}}} - \frac{\delta l}{\delta\vec{\theta}}$$

- Für einen Manipulator gilt

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\frac{\delta e_{kin}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right)}{\delta\dot{\vec{\theta}}} - \frac{\delta e_{kin}\left(\vec{\theta},\dot{\vec{\theta}}\right)}{\delta\vec{\theta}} + \frac{\delta e_{pot}(\vec{\theta})}{\delta\vec{\theta}}$$

Methode nach Lagrange

- ☺ Einfaches Aufstellen der Gleichungen
- ☺ Geschlossenes Modell
- ☺ Analytisch auswertbar
- ☹ Berechnung sehr umfangreich $O(n^4)$
  (n = Anzahl der Gelenke)
- ☹ Nur Antriebsmomente werden berechnet

Effizienz der Ansätze

- Verfahren nach Newton-Euler
  - Multiplikationen: $126n - 99$
  - Additionen: $106n - 92$
- Verfahren nach Lagrange
  - Multiplikationen: $32n^4 + 86n^3 + 171n^2 + 53n - 128$
  - Additionen: $25n^4 + 66n^3 + 129n^2 + 42n - 96$
- Für typische Roboter ($n = 6$ Gelenke) ist das Newton-Euler-Verfahren $100 \times$ effizienter
- Bei beiden Verfahren sind Optimierungen möglich

Anforderungen an Manipulatoren

- Zuverlässiges Positionieren: Genauigkeit (Wiederholgenauigkeit)
- Vermeidung von Kollisionen
- Bewegungsausführung: Fließend und mit angemessenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen
- Anpassung an veränderlichen Bedingungen

Grundsätzliche Fragestellungen

- Direkte Kinematik
  - Gegeben seien alle Gelenkstellungen. Wo ist der TCP?
- Inverse Kinematik
  - TCP-Stellung gegeben. Mit welchen Gelenkstellungen kann Stellung erreicht werden?
- Dynamik
  - Welche Kräfte/Momente müssen die einzelnen Gelenkantriebe aufbringen, um den TCP mit einer bestimmten Beschleunigung zu bewegen?
- Bahn-Planung
  - Wie sieht eine „gute" Trajektorie aus,
    die alle Kollision vermeidet?

Nächste Vorlesung ...

Bahnsteuerung

- Grundlagen
- Interpolationsarten
- Spline-Interpolation