

## 工科数学分析期末试题(A 卷)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共 6 页, 九个大题)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
签名										

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 已知  $A(1,1,0), B(1,-1,2), C(2,3,1)$ , 则  $\triangle ABC$  的面积  $S =$  \_\_\_\_\_,  $\angle ABC =$  \_\_\_\_\_。2. 已知圆的方程  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10z \\ x + 2y + 2z = 19 \end{cases}$ , 则圆心坐标为 \_\_\_\_\_, 圆的半径为  $r =$  \_\_\_\_\_。3. 设  $f(x, y)$  具有一阶连续偏导数,  $f(x_0, y_0) = 0$ , 又在  $(x_0, y_0)$  处  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ , 且  $f'_y = \sqrt{5}$ , 则  $f'_x =$  \_\_\_\_\_, 曲线  $f(x, y) = 0$  在  $(x_0, y_0)$  处指向  $x$  增大方向的单位法向量  $\vec{n} =$  \_\_\_\_\_。4.  $\frac{1}{x+3}$  与  $\ln(x+3)$  关于  $x-1$  泰勒级数展开式分别为:  
 $\frac{1}{x+3} =$  \_\_\_\_\_,  $\ln(x+3) =$  \_\_\_\_\_。5. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$  ( $z \leq 0$ ) 所确定的隐函数, 则 $dz(1,0) =$  \_\_\_\_\_,  $gradz(1,0) =$  \_\_\_\_\_。6. 设  $f(x, y) = x^y$ , 则  $f'_y =$  \_\_\_\_\_,  $\int_0^1 \frac{x^3 - x^2}{\ln x} dx =$  \_\_\_\_\_。7. 设  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  是  $f(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \leq x \leq \pi \\ x-1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$  在  $[-\pi, \pi]$  上的傅里叶级数展开式, 此级数的和函数为  $S(x)$ , 则  $a_2 =$  \_\_\_\_\_,  $b_3 =$  \_\_\_\_\_,  $S(\pi) =$  \_\_\_\_\_,  $S(\frac{5\pi}{2}) =$  \_\_\_\_\_。

二. (9 分) 设  $L: y = \ln x$  ( $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$ ) 的线密度为常数  $\mu$ , 求  $L$  关于  $y$  轴的转动惯量。

三. (9 分) 设区域  $V: |x| + |y| + |z| \leq 1$ , 计算积分  $I = \iiint_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2 + x^2 y^2 \sin z^3) dV$ 。

四. (9 分) 求函数  $z = x^2 + 2y^2 - y + 5$  在区域  $D: x^2 + y^2 \leq 1$  上的最大值和最小值。

五. (9 分) 已知当  $x > 0, y > 0$  时,  $\frac{3y-x}{(x+y)^\lambda} dx + \frac{y-3x}{(x+y)^\lambda} dy$  是二元函数  $u(x, y)$  的全微分,

求  $\lambda$  的值, 并求  $u(x, y)$  的函数表达式。

六. (9 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{3}\right)^{n+1}$  的收敛域及和函数。

七. (9 分) 曲面  $z = 4 - x^2 - y^2$  将球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$  分成两部分, 求这两部分体积之比。

八. (9 分) 设  $I = \iint_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS$ , 其中  $S: z = -\sqrt{x^2 + y^2} \quad (-1 \leq z \leq 0)$ ,

且  $\cos \gamma > 0$ 。(1) 将  $I$  化成第二类曲面积分; (2) 利用高斯公式计算  $I$  的值。

九. (9 分) 设函数  $f(x)$  满足条件  $a \leq f(x) \leq b$ , 且对  $\forall x, y \in [a, b]$ , 有

$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ , 其中  $k$  是常数, 且  $0 < k < 1$ 。取  $x_0 \in [a, b]$ , 令  $u_1 = f(x_0)$ ,

$u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ 。证明: (1) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$  绝对收敛; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  存在。