第8周作业，王子赫 1120210446.

解50：由X的分布律可得：

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Y_1	$-\pi$	0	π
Y_2	1	0	-1
Y_3	0	1	0
P	0.25	0.5	0.25

(1) 故Y_1的分布律为：

Y_1	$-\pi$	0	π
P	0.25	0.5	0.25

(2) 故Y_2的分布律为：

Y_2	1	0	-1
P	0.25	0.5	0.25

(3) 故Y_3的分布律为

Y_3	0	1
P	0.5	0.5

解53：$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})}\,dx$

$=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{de^x}{e^{2x}+1}=\frac{2}{\pi}\arctan e^x\Big|_{-\infty}^{0}$

$=\frac{2}{\pi}(\arctan 1-\arctan 0)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(Y=-1)=P(X<0)=\frac{1}{2}$，且 $P(X\geq 0)=1-P(X<0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(Y=1)=P(X\geq 0)=\frac{1}{2}$

故Y的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

解57：由X服从参数为1的指数分布 $\Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

(1) $Y=e^X$　$y>0$时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)$

$\Rightarrow P(X\leq \ln y)=F(\ln y)$

① $y\geq 1$时，$\ln y\geq 0$　$F(\ln y)=1-e^{-\ln y}=1-\frac{1}{y}$

② $0<y<1$时，$\ln y<0$　$F(\ln y)=0$.

③ $y\leq 0$时，由 $Y=e^X>0\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$

故 $F_Y(y)=\begin{cases} 1-\frac{1}{y} & y\geq 1\\ 0 & y<1\end{cases}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2} & y\geq 1\\ 0 & y<1\end{cases}$

(2) $Y=X^2$　当$y\geq 0$时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)$

$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})=F(\sqrt{y})=1-e^{-\sqrt{y}}$

当$y<0$时，由 $Y=X^2\geq 0\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$.

故 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\sqrt{y}} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

(3) $Y=(X-2)^2$　当$y>0$时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P[(X-2)^2\leq y]$

$=P(2-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}+2)=F(\sqrt{y}+2)-F(2-\sqrt{y})$

① $y>4$ 时，$\sqrt{y}>2$，$2-\sqrt{y}<0 \Rightarrow F(2+\sqrt{y})-F(2-\sqrt{y})=F(2+\sqrt{y})=1-e^{-(2+\sqrt{y})}$

② $0<y\le 4$ 时 $0<\sqrt{y}\le 2$ $2-\sqrt{y}\ge 0 \Rightarrow F(2+\sqrt{y})-F(2-\sqrt{y})=1-e^{-(2+\sqrt{y})}$
$-(1-e^{\sqrt{y}-2}) = e^{\sqrt{y}-2}-e^{-2-\sqrt{y}}$

③ $y\le 0$ 时，由 $Y=(X-2)^2\ge 0$ 且当且仅当 $X=2$ 时，$Y=0$

$\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

故 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-(2+\sqrt{y})} & y>4\\ e^{\sqrt{y}-2}-e^{-2-\sqrt{y}} & 0<y\le 4\\ 0 & y\le 0\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-2-\sqrt{y}} & y>4\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}(e^{\sqrt{y}-2}+e^{-\sqrt{y}-2}) & 0<y\le 4\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

(4) $Y=1-e^{-X}$，$1>y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-e^{-X}\le y)$
$=P(e^{-X}\ge 1-y)=P(X\le \ln\frac{1}{1-y})=F(\ln\frac{1}{1-y})=1-e^{\ln(1-y)}=y$

由 $Y=1-e^{-X}$，$X\in(-\infty,+\infty) \Rightarrow Y\in[0,1)$

$\Rightarrow$ 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y\ge 1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

故 $F_Y(y)=\begin{cases}1 & y\ge 1\\ y & 0<y<1\\ 0 & y\le 0\end{cases} \Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

即 Y的密度函数为 $U(0,1)$

解59：由 X服从均匀分布 $U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，即 $X\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow Y\in(0,1]$

$\Rightarrow$ $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

$y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

当 $0<y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\cos X\le y)=P(X\le -\arccos y)$
$+P(X\ge \arccos y)=(\frac{\pi}{2}-\arccos y)/\pi+(\frac{\pi}{2}-\arccos y)/\pi=1-\frac{2}{\pi}\arccos y$

故 $F_Y(y)=\begin{cases}1 & y\ge 1\\ 1-\frac{2}{\pi}\arccos y & 0<y<1\\ 0 & y\le 0\end{cases} \Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$