(2014-2015-2)工科数`学分析期末试题(A 卷)解答（2015.7）

一. **1.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. $\frac{31}{10}$

3. I_2, I_4

4. $-\frac{\pi^2}{2}-\frac{3}{2}$

5. $\frac{2(\pi-2)}{5\pi}$

二.

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy \qquad \text{……………….(3 分)}$$

$$=\int_0^1\frac{\sin x}{x}y\Big|_{x^2}^{x}dx$$

$$=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx \qquad \text{……………….(6 分)}$$

$$=1-\sin 1 \qquad \text{……………….(8 分)}$$

三.

$$f_x'=2x(2+y^2) \qquad f_y'=2x^2y+\ln y+1 \qquad \text{……………….(2 分)}$$

令 $f_x'=0$ $f_y'=0$ 得 $x=0$ $y=\frac{1}{e}$ ……………….(3 分)

$$f_{x^2}''=2(2+y^2) \qquad f_{xy}''=4xy \qquad f_{y^2}''=2x^2+\frac{1}{y} \qquad \text{……………….(5 分)}$$

在点 $(0,\frac{1}{e})$ $A=2(2+\frac{1}{e^2})$ $B=0$ $C=e$

$$AC-B^2=2e(2+\frac{1}{e^2})>0 \quad 且 A>0$$

故 $(0,\frac{1}{e})$ 是极小值点，极小值为 $f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$ ……………….(8 分)

四. 两方程两端分别对 x 求导，得

$$\begin{cases} 1+\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx} \\ yz+xz\dfrac{dy}{dx}+xy\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$ ……………….(2 分)

将点 P 代入得 $\begin{cases} 1+\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dx} \\ 3+\dfrac{dy}{dx}+3\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$ ……………….(3 分)

解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{9}{5}$ $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{2}{5}$ ……………….(5 分)

$$\vec{s}=\{1,-\frac{9}{5},-\frac{2}{5}\}$$ ……………….(6 分)

切线 $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-3}{-9}=\dfrac{z-1}{-2}$ ……………….(8 分)

五. $$I=\iint_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$ ……………….(3 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho$$ ……………….(6 分)

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$ ……………….(7 分)

$$=\frac{3}{2}\pi$$ ……………….(9 分)

六. (1) $\vec{n}=\{-x,-2y,-1\}\big|_P=\{-2,-2,-1\}$ ……………….(2 分)

切平面为 $2(x-2)+2(y-1)+(z+4)=0$

即 $2x+2y+z=2$ ……………….(4 分)

（2） $I=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{2-2x-2y}dz$ ……………….(7 分)

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(2-2x-2y)dy$$ ……………….(8 分)

$$=\int_0^1 x(1-x)^2dx$$ ……………….(10 分)

$$=\frac{1}{12}$$ ……………….(11 分)

七. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = 1 \qquad R = 1$ ……………….(1 分)

$x = \pm 1$时，级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$收敛， 收敛域为$x \in [-1,1]$ …….(3 分)

令 $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ……………….(4 分)

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}$$ ……………….(5 分)

$$= \frac{x^2}{1+x^2}$$ ……………….(6 分)

$$S(x) = \int_0^x \frac{x^2}{1+x^2}dx = x - \arctan x$$ ……………….(8 分)

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n-1} = x^2 - x\arctan x$$ ……………….(9 分)

八. $\oint_{L+\overline{AO}}(e^{-x}\cos y - 2y^3)dx + (e^{-x}\sin y - xy^2)dy = \iint\limits_D 5y^2 dxdy$ ………….(2 分)

$$= 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\sin^2\theta d\rho$$ ……………….(4 分)

$$= 20\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta$$ ……………….(5 分)

$$= \frac{25}{8}\pi$$ ……………….(6 分)

$\int_{\overline{AO}}(e^{-x}\cos y - 2y^3)dx + (e^{-x}\sin y - xy^2)dy = -\int_{\overline{OA}}(e^{-x}\sin y - xy^2)dy$ ……….(7 分)

$$= -\int_0^2 \sin y\, dy$$ ……………….(8 分)

$$= \cos 2 - 1$$ ……………….(9 分)

$$I = \oint_{L+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}}(e^{-x}\cos y - 2y^3)dx + (e^{-x}\sin y - xy^2)dy$$

$$= \frac{25}{8}\pi + 1 - \cos 2$$ ……………….(10 分)

九. $f(x)=(-1+(x+1))\ln(1+(x+1))$ ………………(2 分)

$$=(-1+(x+1))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n$$ ………………(4 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^{n+1}$$ ………………(6 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}(x+1)^n$$ ………………(7 分)

$$=-(x+1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)(x+1)^n$$ …………(8 分)

收敛域为 $-2<x\le 0$ ………………(9 分)

十. $$\frac{\partial Y}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y=\frac{\partial X}{\partial y}$$

故所给方程是全微分方程 ………………(2 分)

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$ …….(4 分)

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$ ………………(6 分)

$$=y^2\cos x+x^2\cos y$$ ………………(8 分)

通解为 $y^2\cos x+x^2\cos y=C$ ………………(9 分)

十一. $$I=\oiint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^3dxdy$$ ………………(1 分)

$$=-\iiint_V(2x+2y+3z^2)dxdydz$$ ………………(3 分)

$$=-\iiint_V 3z^2dxdydz$$ ………………(4 分)

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}3r^4\cos^2\varphi\sin\varphi dr$$ ……………(6 分)

$$=-\frac{6\pi}{5}2^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi$$ ………………(8 分)

$$=-\frac{24\pi}{5}$$ ………………(9 分)