

1. 选择题

1). B 2). B 3). C 4). B 5). C 6). B 7). B 8). B 9). B 10). B

2. 填空题

1) $q \vee r \vee \neg s$

2) $\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$

3) 9

4) 4, 2

5) 3, 5, 6

6) W_n

7) 192

8) 12

9) 2, 3

10) 3

3.

答：若 $n \leq 5$ ，结论显然为真。下面就 $n \geq 6$ 进行讨论，用反证法证明。假设不然，

$\delta(G) \geq 5$ ，则由握手定理和定理 17.10 的推论得

$$\begin{cases} 2m \geq 5n \\ m \leq 3n - 6 \end{cases}$$

解得 $m \geq 30$ ，这与已知 $m < 30$ 相矛盾。

4. (10 分)

答: (A) $F \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \quad (8 \text{ 分})$$

(B) $F \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

$$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \wedge r) \wedge \neg(p \wedge \neg r)) \quad (2 \text{ 分})$$

5. (10 分)

符号化:

$$\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \forall x(R(x) \wedge V(x) \rightarrow S(x)), \exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x))$$

结论: $\exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$

证明:

1) $\exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x))$	前提引入
2) $P(a) \wedge V(a) \wedge U(a)$	1) ES
3) $P(a)$	2) 化简
4) $V(a)$	2) 化简
5) $U(a)$	2) 化简
6) $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	前提引入
7) $P(a) \rightarrow R(a)$	6) US
8) $R(a)$	7) 化简
9) $R(a) \wedge V(a)$	8)4) 合取引入
10) $\forall x(R(x) \wedge V(x) \rightarrow S(x))$	前提引入
11) $R(a) \wedge V(a) \rightarrow S(a)$	10) US
12) $S(a)$	9)11) 假言推理
13) $P(a) \wedge S(a) \wedge U(a)$	3)12)5) 合取引入
14) $\exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$	13) EG

6. (10分)

解、(1) $\forall x \in \mathbb{N}, x+x$ 是偶数, 有 xRx , R 自反.

若 $\langle x, y \rangle \in R$, 即 $x+y$ 是偶数, 则 $y+x$ 是偶数, 有 $\langle y, x \rangle \in R$, R 对称.

若 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 即 $x+y$ 是偶数, $y+z$ 是偶数, $x+z=(x+y)+(y+z)-2y$ 是偶数, 有 $\langle x, z \rangle \in R$, R 满足传递性.

因此, R 是一个等价关系.

(2) 关系 R 的等价类有: $[1]_R = \{1, 3, 5, \dots\}$, $[0]_R = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

7. (10分)

(1) 证明:

任取 $f \in B^A$, 对于任意的 $x \in A$, 有 $f(x) \in B$, 由函数的定义知, $f(x)=f(x)$, 即 fRf , 所以 R 具有自反性.

任取 $f, g \in B^A$, 若 fRg 且 gRf , 则对于任意的 $x \in A$, 都有 $f(x) \in B$, $g(x) \in B$, 且 $f(x) \leq g(x)$, $g(x) \leq f(x)$. 因为 $\langle B, \leq \rangle$ 是偏序集, 所以 \leq 具有反对称性, 因此有 $f(x)=g(x)$. 根据函数的定义知 $f=g$. 所以 R 是反对称的.

任取 $f, g, h \in B^A$, 若 fRg 且 gRh , 则对于任意的 $x \in A$, 都有 $f(x), g(x), h(x) \in B$, 且有 $f(x) \leq g(x)$, $g(x) \leq h(x)$. 因为 $\langle B, \leq \rangle$ 是偏序集, 所以 \leq 具有传递性, 因此有 $f(x) \leq h(x)$, 即 fRh . 所以 R 是传递的.

因此 R 为 B^A 上的偏序关系.

(2) 偏序集 $\langle B^A, R \rangle$ 中的最大元为: $f(x)=b$.

8. 答:

$e \sim e$, $[e]$ 非空. 任取 $a, b \in [e]$, $e \sim a$, $e \sim b$,
 $e \sim b \Rightarrow a^{-1}a \sim (a^{-1}a)b \Rightarrow a^{-1}a \sim a^{-1}(ab)$

$$\Rightarrow a \sim ab \Rightarrow e \sim ab (e \sim a, a \sim ab, \text{传递性})$$

从而有 $ab \in [e]$. 利用对称性可得

$$e \sim a \Rightarrow a \sim e \Rightarrow ae \sim aa^{-1} \Rightarrow e \sim a^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in [e]$$

根据子群判定定理, 有 $[e] \leq G$.