(2013-2014)工科数学分析第二学期期末试题(A 卷)解答（2014.6）

一. 1. $2xf_1'+yf_2'+zg'$

2. $\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

3. $3x+y+2z-6=0$

4. $\frac{14}{3}\pi a^3$

5. $-\frac{2}{9\pi}$

二. 两方程两端分别对 x 求导，得

$$\begin{cases} 1=e^u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x} \\ y=e^u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$ ……………….(4 分)

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{e^u+1}$ ……………….(6 分)

$\frac{\partial v}{\partial x}=1-e^u\frac{\partial u}{\partial x}$ ……………….(8 分)

$=\frac{(1-y)e^u+1}{e^u+1}$ ……………….(9 分)

三. $I=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}xydy$ ……………….(4 分)

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}x((x+2)^2-x^4)dxdx$ ……………….(7 分)

$=\frac{45}{8}$ ……………….(9 分)

四. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^2-y \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+y-2$ ……………….(2 分)

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0$ 解得 $x=-1,\ y=1$ 或 $x=2,\ y=4$ ………….(4 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$ ……………….(6 分)

在点 $P_1(-1,1)$， $A=-2 \quad B=-1 \quad C=1$

$AC-B^2=-3<0$ 故 $P_1(-1,1)$ 不是极值点 ……………….(8 分)

在点 $P_2(2,4)$ $A=4 \quad B=-1 \quad C=1$

$AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$

故 $P_2(2,4)$ 是极小值点，极小值 $z\big|_{(2,4)}=-\dfrac{16}{3}$ ……………….(10 分)

五. 由题设，有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$， ……………….(1 分)

$\varphi'(x)-\dfrac{2x}{y^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{y^2} \qquad \varphi'(x)=\dfrac{1}{x}$ ……………….(2 分)

$\varphi(x)=\ln x+C$ ……………….(3 分)

由 $\varphi(1)=0$ 得 $C=0 \qquad \varphi(x)=\ln x$ ……………….(4 分)

$u(x,y)=\int_{(1,1)}^{(x,y)}(\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y})dx+(\ln x-\dfrac{x^2}{y^2})dy$ ……………….(6 分)

$=\int_1^y -\dfrac{1}{y^2}dy+\int_1^x(\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y})dx$ ……………….(8 分)

$=y\ln x+\dfrac{x^2}{y}-1$ ……………….(9 分)

通解为 $y\ln x+\dfrac{x^2}{y}=C$ ……………….(10 分)

六. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1 \qquad R=1$ ……………….(1 分)

$x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$ 收敛， $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，

收敛域为 $(-1,1]$ …………….(3 分)

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ……………….(4 分)

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{1+x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

$$S(x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7\text{ 分})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln(1+x) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9\text{ 分})$$

七. $$|\vec{F}|=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \vec{F}^0=\frac{\{-x,-y,-z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\vec{F}=-k\frac{\{x,y,z\}}{x^2+y^2+z^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$W=-k\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

$$=-k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{1+t^2}dt \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8\text{ 分})$$

$$=-\frac{k}{2}\ln(1+\frac{\pi^2}{4}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9\text{ 分})$$

八. $$\mu=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}dV \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^4 d\rho\int_{\rho-1}^{\sqrt{1-\rho^2}}dz \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

$$=2\pi\int_0^1\rho^4(\sqrt{1-\rho^2}-\rho+1)d\rho \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

$$=2\pi[\int_0^1\rho^4\sqrt{1-\rho^2}d\rho+\int_0^1(\rho^4-\rho^5)d\rho]$$

$$=2\pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 tdt+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{15} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9\text{ 分})$$

九. $f(x)=\frac{1}{2-(x-1)}+\ln(1+(x-1))$ ……………….(1 分)

$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}+\ln(1+(x-1))$ ……………….(3 分)

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{2})^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ ……………….(5 分)

$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n})(x-1)^n$ ……………….(7 分)

收敛域为 $(-1,3)\cap(0,2]=(0,2]$ ……………….(9 分)

十. $I=\oiint_S(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$ ……………….(1 分)

$=\oiint_S(4x^3\cos\alpha+4y^3\cos\beta+4z^3\cos\gamma)dS$ ……………….(2 分)

$=\oiint_S 4x^3dydz+4y^3dzdx+4z^3dxdy$ ……………….(3 分)

$=\iiint_V 12(x^2+y^2+z^2)dV$ ……………….(5 分)

$=12\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}r^4\sin\varphi dr$ ……………….(7 分)

$=24\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{a}r^4dr$

$=\frac{48}{5}\pi a^5$ ……………….(9 分)

十一. 当 $p\le 1$，有 $\frac{\ln n}{n^p}\ge\frac{1}{n^p}$ ……………….(2 分)

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 发散 ……………….(3 分)

当 $p>1$， 令 $\varepsilon=p-1$， 则 $\varepsilon>0,$ $p-\frac{\varepsilon}{2}>1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^p}}{\frac{1}{n^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}=0$ ……………….(6 分)

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 收敛 ……………….(7 分)