第12周作业　王子赫　1120210446

解2：$E(X)=-2$　$E(Y)=2$　$D(X)=1$　$D(Y)=4$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0$.

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2cov(X,Y)=3$

由切比雪夫不等式 $P(|X+Y-E(X+Y)|<6)\geq 1-\frac{D(X+Y)}{36}$

即 $P(|X+Y|<6)\geq \frac{11}{12}$

故 $P(|X+Y|<6)$ 的一个下界为 $\frac{11}{12}$

解4：隔代发病户数设为随机变量X

由切比雪夫不等式 $P(|\frac{X}{500}-E(\frac{X}{500})|<0.05)\geq 1-\frac{D(\frac{X}{500})}{0.05^2}$

X服从二项分布 $B\sim(500,0.1)$ $\Rightarrow D(X)=500\times0.1\times0.9=45$

$\Rightarrow E(\frac{X}{500})=\frac{1}{500}E(X)=\frac{1}{500}\times500\times0.1=0.1$

$D(\frac{X}{500})=\frac{1}{500^2}D(X)=\frac{1}{500^2}\cdot500\cdot0.1\cdot0.9=\frac{0.09}{500}$

$\Rightarrow P(|\frac{X}{500}-0.1|<0.05)\geq 1-\frac{0.09}{500\cdot0.05^2}=1-\frac{9}{125}=\frac{116}{125}$

故概率的下界为 $\frac{116}{125}$

解6：$E(X)=\int_0^1 x\,6x(1-x)dx=6\int_0^1(x^2-x^3)dx=6(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$

由辛钦大数定律：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛到 $\frac{1}{2}$

解9：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(X_i-1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的期望 $E(X)=\lambda$，方差 $D(X)=\lambda^2$

$\Rightarrow E(X^2)=D(X)+E(X)^2=\lambda+\lambda^2$

由辛钦大数定律 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}\lambda+\lambda^2\ (n\to\infty)$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\lambda\quad(n\to\infty)$

$\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\lambda+\lambda^2-\lambda=\lambda^2\quad(n\to\infty)$

故 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(X_i-1)$ 依概率收敛于 $\lambda^2$

证明10：$X_i$ 的概率分布函数为 $F_{X_i}(x)=$

$$= \int_{\alpha}^{x} e^{-(x-\alpha)} dx = e^{-(x-\alpha)} \Big|_{x}^{\alpha} = 1 - e^{-(x-\alpha)} \quad (x>\alpha)$$

$x \le \alpha$ 时, $F_{X_i}(x) = 0$.

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \le x) = 1 - P(Y_n \geq x) = 1 - P(X_1 \geq x, X_2 \geq x \cdots X_n \geq x)$$

$$= 1 - P(X_1 \geq x) P(X_2 \geq x) \cdots P(X_n \geq x)$$

$$= 1 - [1 - P(X_1 \le x)][1 - P(X_2 \le x)] \cdots [1 - P(X_n \le x)]$$

$$= 1 - [1 - P(X_1 \le x)]^n$$

当 $x > \alpha$ 时, $F_{Y_n}(x) = 1 - [1 - (1 - e^{-(x-\alpha)})]^n = 1 - e^{-n(x-\alpha)}$

$x \le \alpha$ 时 $F_{Y_n}(x) = 0$

即 $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-n(x-\alpha)} & x > \alpha \\ 0 & x \le \alpha \end{cases} \Rightarrow f_{Y_n}(x) = \begin{cases} ne^{-n(x-\alpha)} & x > \alpha \\ 0 & x \le \alpha \end{cases}$

故 对 $\forall \varepsilon > 0$, $P(|Y_n - \alpha| < \varepsilon)$

$$= P(\alpha - \varepsilon < Y_n < \alpha + \varepsilon) = \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f_{Y_n}(x)\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} ne^{-n(x-\alpha)} dx = e^{-n(x-\alpha)} \Big|_{\alpha+\varepsilon}^{\alpha} = 1 - e^{-n\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \alpha| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n\varepsilon}) = 1$$

满足依概率收敛定义. 即 $Y_n \xrightarrow{P} \alpha$. 证毕.

解 17: (1) 设每次误差为 $X_i$ 且 $E(X_i) = 0$ $D(X_i) = \frac{1}{12}$

设 $S(x) = \sum_{i=1}^{1200} X_i \Rightarrow E(S(x)) = 0$ $D(S(x)) = 100$

由中心极限定理, $S(x)$ 近似服从分布 $N(0, 100)$.

$$\Rightarrow P(|S(x)| > 15) = P(S(x) < -15) + P(S(x) > 15)$$

$$= \phi\left(\frac{-15}{10}\right) + 1 - \phi\left(\frac{15}{10}\right) = 1 - \phi\left(\frac{15}{10}\right) + 1 - \phi\left(\frac{15}{10}\right)$$

$$= 2\left[1 - \phi\left(\frac{3}{2}\right)\right] = 0.13362$$

(2) $S(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $E(S(x)) = 0$ $D(S(x)) = \frac{1}{12}n$

$$P(|S(x)| < 10) = P(-10 < S(x) < 10) = \phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - \phi\left(\frac{-10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)$$

$$= 2\phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{1}{12}n}}\right) - 1 \geq 0.9 \Rightarrow \phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \geq 0.95$$

$\Rightarrow \quad \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq 1.64 \quad \Rightarrow n \leq 447$

故 (1) 概率是 0.13362 (2) $n$ 至多为 447

解18: (1) 设 $X_i$ 为每位顾客消费. $E(X) = 10\times0.2+12\times0.3+15\times0.4+18\times0.1$

$= 13.4$, $E(X^2) = 100\times0.2+12^2\times0.3+15^2\times0.4+18^2\times0.1 = 185.6$

$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 185.6 - 13.4^2 = 6.04$

设 $S(x) = \sum_{i=1}^{600} X_i$ 由中心极限定理 $S(x) \sim N(13.4\times600, 6.04\times600)$

$P(S(x) \geq 8000) = 1-\phi\left(\frac{8000-13.4\times600}{\sqrt{6.04\times600}}\right) = 1-\phi\left(\frac{-40}{\sqrt{3624}}\right) = 1-\phi(0.664)$

$= \phi(0.664) \approx 0.7454$

(2) 设买C试的顾客数为随机变量 $Y_i$ $Y_i$ 服从 $(0,1)$ 分布, 参数 0.4

$S(Y) = \sum_{i=1}^{600} Y_i$ 由中心极限定理. $S(Y) \sim N(0.4\times600, 0.4\times0.6\times600)$

$P(S(Y) \geq 260) = 1-\phi\left(\frac{260-0.4\times600}{\sqrt{0.4\times0.6\times600}}\right) = 1-\phi\left(\frac{20}{12}\right) = 1-\phi(1.67)$

$= 1-0.95254 = 0.04746$

故 (1) 超过8000元概率为 0.7454. (2) 多于260份概率为 0.04746

解21: 设元件的使用寿命为 $X_i$ $E(X_i) = 100$ $D(X_i) = 900$

$S(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 由中心极限定理 $\Rightarrow S(x) \sim N(100n, 900n)$

$P(S(x) > 2000) = 1-\phi\left(\frac{2000-100n}{\sqrt{900n}}\right) = 1-\phi\left(\frac{200-10n}{3\sqrt{n}}\right) > 0.95$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{10n-200}{3\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad \Rightarrow \frac{10n-200}{3\sqrt{n}} \geq 1.64 \quad \Rightarrow n \geq 23$

故应该至少准备 23个.

解01: 总体: 北京地区2020年毕业的统计学专业本科生实习期满后的月薪

样本: 被调查的200名北京地区2020年毕业的统计学本科生毕业实习期满的月薪. 容量: 200

解2: 总体: 全校学生的心理健康情况

样本: 被调查的100名学生的心理健康情况. 样本容量: 100

解3 (1) $P(X_1=x_1, X_2=x_2 \cdots X_n=x_n) = (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)} p^n$ $x_i = 1,2\cdots$ $i=1,2\cdots n$

(2) $f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i} & x_i > 0 \quad i=1,2\cdots n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ $(\lambda > 0)$

(3) $f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$ $i=1,2\cdots n$ $(\lambda > 0)$