

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散.)

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 十一 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 得分 | | | | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | | | | |

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的夹角 $\varphi =$ _____.

2. 设 $L: y = \frac{1}{2}x^2$ ($0 \leq x \leq 1$), 则 $\int_L x dl =$ _____.

3. 设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 曲线 $f(x, y) = 0$ 在其上点 (x_0, y_0) 处的切线斜率 $\frac{dy}{dx} = 2$, 又

$f'_y(x_0, y_0) = 3$, 则 $f'_x(x_0, y_0) =$ _____.

4. 函数 $f(x) = x - 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的以 2π 为周期的余弦级数的系数 $a_5 =$ _____.

5. 设 S^+ 是曲面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ($z \geq 1$) 的上侧, L 是 S 的边界曲线, 从 z 轴正向看去 L 是逆时针方向, 则 $\oint_L x^2 y dx + xy dy + y^2 dz = \iint_{S^+}$ _____.

二. (8 分) 设方程组 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

三. (9 分) 将 $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$ 化成极坐标系中的累次积分, 并计算积分的值.

四. (10 分) 求函数 $z = x^3 + 3xy^2 - 12x$ 的极值点和极值.

五. (9 分) 求正数 λ 的值, 使得曲面 $xyz = \lambda$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在某一点相切.

六. (9 分) 设 V 是曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体, 其上任一点的密度等于此点到原点的距离, 求 V 关于 z 轴的转动惯量.

七. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

八. (10 分) 已知 $\vec{A} = (6y + x^2 y^2) y^3 f(x) \vec{i} + (8x + x^3 y) y^3 f(x) \vec{j}$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 其中 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1) = 1$, 求 $f(x)$, 并求 $u(x, y)$.

九. (9 分) 把 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展成 $x-1$ 的幂级数, 并指出收敛域.

十. (9 分) 设 S 是曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ ($0 \leq z \leq 2$) 绕 z 轴旋转一周而成的曲面的上侧. (1) 求 S 的方

程; (2) 利用高斯公式计算曲面积分 $I = \iint_S xy^2 dydz + x^2 y dzdx + (z-1) dx dy$.

十一. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛, 证明

$$f'(0) = 0.$$