概率与数理统计试题-1

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页上方填写座号、姓名、学号、班级等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2.33)=0.99$，$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(6.25)=1$，$\Phi(2.5)=0.9938$， $t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.025}(24)=2.0679$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$，$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，$\chi^2_{0.975}(24)=12.401$，$\chi^2_{0.975}(25)=13.120$，$\chi^2_{0.75}(15)=11.037$，$\chi^2_{0.81}(16)=11.037$，$\chi^2_{0.9986}(15)=3.679$，$\chi^2_{0.9994}(16)=3.679$，$\chi^2_{0.0243}(15)=27.5925$，$\chi^2_{0.0353}(16)=27.5925$

一.填空题（共 16 分，每小题 2 分）

1.设 A 和 B 是两个随机事件，$P(A)+P(B)=0.9$, $P(AB)=0.2$, 则 $P(\bar{A}B\cup A\bar{B})=$________。

2.设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 2-a, & -2\le x<2\\ b-a, & x\ge 2\end{cases}$$

已知 $P(X=2)=0.5$, 则 $a=$________, $b=$________。

3.设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，令 $X_k=\begin{cases}0, & Y\le k\\ 1, & Y>k\end{cases}$, $k=1,2$。

则二维随机变量(X_1, X_2)的联合分布律为________。

4.已知随机变量 X、Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,1)$，则 $E(|X-Y|)=$________。

5.设 $X_1, X_2, \dots, X_n,\dots$是独立同分布随机变量序列，它们的数学期望为$\mu$，方差为 σ^2，令 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\bar{X}_n)^2$依概率收敛于________。

6. 已知总体 X 服从正态分布 $N(\mu,4)$，μ未知，$X_1, X_2, \dots, X_{25}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}X_i$ 为样本均值，则 $P\{|\bar{X}-\mu|\le 1\}=$________。

7. 已知总体 X 服从正态分布 $N(\mu,16)$，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，为使μ的置信水平为 0.95 的置信区间的长度不大于 4，则样本容量 n 至少为________。

8. 已知总体X服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中$\mu\in$R和$\sigma^2>0$均未知，$X_1, X_2, \dots, X_{16}$是来自总体X的简单随机样本，对假设检验问题$H_0:\sigma^2=2,\quad H_1:\sigma^2=5$，取拒绝域$W=\{S^2\ge 3.679\}$，则该检验犯第二类错误的概率为________。

二.（12 分）

设甲、乙、丙三个地区爆发了某种流行病，三个地区的总人数比为 2：5：3，而三个地区感染此种流行病的比例分别为 6%、5%、3%. 现从这三个地区任意抽取一个人，问：1. 此人感染此种流行病的概率是多少？2. 如果此人感染此种流行病，此人来自乙地区的概率是多少。

三.（12 分）

设随机变量 X 服从均匀分布 $U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，令 $Y=\tan X$ 。

1.写出 X 的概率密度函数 $f_X(x)$；2.求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；3.求 $P\{Y>1|X>0\}$ 。

四.（14 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令 $Z=\frac{1}{2}(X+Y)$ 。

求：1. X 和 Y 的边缘密度函数；2. $P\{X+Y<2\}$；3. $P\{X<2|Y<1\}$；4. Z 的概率密度函数。

五.（8 分）

已知总体 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，$\sigma>0$ 为未知参数，X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 X 的简单随机样本，求统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 服从的分布。

六.（15 分）

1.已知二维随机变量（X，Y）服从二维正态分布 $N(1, 9, 0, 4, -0.5)$，令 $Z_1=X+Y, Z_2=X-2Y$。（1）求 $E(Z_1)$，$E(Z_2)$，$D(Z_1)$，$D(Z_2)$；（2）求 $Cov(Z_1,Z_2)$，$\rho_{Z_1Z_2}$；（3）问 Z_1 与 Z_2 是否独立？说明理由。

2. 两家商店联营，它们每周售出某种农产品的数量（单位：千克）分别为 X_1 和 X_2。已知 X_1~$N(200,35)$, X_2~$N(260,65)$，X_1 和 X_2 相互独立。商店每周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少存储多少千克该产品？

七.（12 分）

已知总体 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，其中 $\sigma^2>0$ 为未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本观察值。求：1.参数 σ^2 的矩估计；2.参数 σ^2 的最大似然估计；3. $P(X\le 1)$ 的最大似然估计。

八.（11 分）

已知某种元件的寿命 X（单位：小时）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，要求该元件的平均寿命不低于 1000 小时。现从这批元件中随机抽取 25 只进行试验，得其寿命的观察值，计算得平均值为 980 小时，标准差 65 小时。问在显著性水平 α=0.05 下，这批元件是否符合要求?