第15周作业　王子赫　1120210446

解6：(1) $n=4$ 时 若 H_0 成立，则 $\bar{X}\sim(0,\frac{1}{4})$

$P(\bar{X}\geq 0.98)=P(\frac{\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\geq\frac{0.98-0}{\sqrt{\frac{1}{4}}})=P(\frac{\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\geq 1.96)$

又 $\frac{\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\sim N(0,1)\Rightarrow P(\frac{\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\geq 1.96)=0.025$

故犯第一类错误的概率为 0.025.

若 H_1 成立 $\Rightarrow\bar{X}\sim(1,\frac{1}{4})\Rightarrow\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\sim N(0,1)$

$\Rightarrow P(\bar{X}\geq 0.98)=P(\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\geq\frac{0.98-1}{\sqrt{\frac{1}{4}}})=P(\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\geq -0.04)$

$=1-P(\frac{\bar{X}-1}{\frac{1}{4}}\leq -0.04)=1-\phi(-0.04)=\phi(0.04)=0.516$

$\Rightarrow\beta=1-0.5160=0.4840$

(2) 若 H_0 成立，$\Rightarrow\bar{X}\sim(0,\frac{1}{n})\Rightarrow\frac{\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\sim(0,1)$

$\Rightarrow P(\bar{X}\geq 0.98)=P(\frac{\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\geq\frac{0.98-0}{\sqrt{\frac{1}{n}}})=P(\frac{\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\geq 0.98\sqrt{n})$

≤ 0.01 取 $0.98\sqrt{n}\geq Z_{0.01}$ 即可

查表，$Z_{0.01}=2.33\Rightarrow n\geq(\frac{2.33}{0.98})^2=5.65$

n 取整数，得 $n\geq 6$.

故(1) 犯第一类错误概率为 0.025，犯第二类错误概率为 0.484

(2) n 至少取 6.

解7：若 H_0 成立 $\Rightarrow P(X>\frac{2}{3})=\int_{\frac{2}{3}}^{1}dx=\frac{1}{3}$，即 $\alpha=\frac{1}{3}$

若 H_1 成立 $P(X<\frac{2}{3})=\int_0^{\frac{2}{3}}2x\,dx=x^2\Big|_0^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}$

故犯第一类错误的概率为 $\frac{1}{3}$

犯第二类错误的概率为 $\frac{4}{9}$

解1：设 H_0：$u=26$ H_1：$u\neq 26$

检验统计量为 $\frac{\bar{x}-u_0}{6/\sqrt{n}}$

查表得，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$.

拒绝域为：$W=\{(x_1\ x_2 \cdots x_n)：\frac{|\bar{x}-u_0|}{6/\sqrt{n}} \geq 1.96\}$

计算得 $\left|\frac{\bar{x}-u_0}{6/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{27.56-26}{5.2/\sqrt{10}}\right| = 1.2 < 1.96$.

不能拒绝原假设

故能认为总体均值 $u=26$.

解2：H_0：$u=54$ H_1：$u\neq 54$

计算得 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{10} x_i = 54.46$

检验统计量为 $\frac{\bar{x}-u_0}{6/\sqrt{n}}$

查表得 $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$.

拒绝域为 $W=\{(x_1, x_2 \cdots x_{10})：\frac{|\bar{x}-u_0|}{6/\sqrt{n}} \geq 1.96\}$.

计算得 $\left|\frac{\bar{x}-u_0}{6/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{54.46-54}{0.75/\sqrt{10}}\right| = 1.94 < 1.96$.

故不能拒绝原假设.

故较正常情况没有显著差异.

解8：设 $H_0: \sigma^2 = 2500$ $H_1: \sigma^2 \neq 2500$

检验统计量为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

查表得 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(25) = 40.646$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(25) = 13.120$

拒绝域为：$W = \{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq 13.12$ 或 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq 40.646 \}$

计算得 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{25 \cdot 4600}{2500} = 46 > 40.646$，

故电视机寿命的波动性较以往有显著变化

解11：(1) 检验统计量为：$\frac{\bar{X} - u_0}{S/\sqrt{n}}$.

查表得 $t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(9) = 1.8331$

拒绝域为 $W = \{ (x_1, x_2 \cdots x_{10}) : \frac{\bar{X} - u_0}{S/\sqrt{n}} < -1.8331 \}$

计算得 $\frac{\bar{X} - u_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{0.452\% - 0.5\%}{0.037\% / \sqrt{10}} = -4.1024$

由 $-4.1024 < -1.8331$，拒绝原假设，即认为 H_1 成立、

(2) 检验统计量为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

查表得 $\chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0.95}(9) = 3.325$

拒绝域为 $W = \{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < 3.325 \}$

计算得 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \times (0.037\%)^2}{(0.04\%)^2} = 7.7006$

由于 $7.0006 > 3.325$，不能拒绝原假设，H_0 成立.

故 (1) 认为 $H_1: u < 0.5\%$ 成立. (2) 认为 $H_0: \sigma \geq 0.04\%$ 成立.