

1. 选择题

- 1) 设 $F(x)$ 表示 x 是火车, $G(y)$ 表示 y 是汽车, $H(x,y)$ 表示 x 比 y 快, 则命题“有的汽车比所有的火车快”符号化为下面哪个公式? ()
- A. $\exists y(G(y) \rightarrow \forall x(F(x) \wedge H(x,y)))$ B. $\exists y(G(y) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow H(y,x)))$
 C. $\forall x \exists y(G(y) \rightarrow (F(x) \wedge H(x,y)))$ D. $\exists y(G(y) \rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow H(x,y)))$
- 2) 下面哪个命题公式是永真式? ()
- A. $(p \vee q) \rightarrow \neg r$
 B. $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$
 C. $\neg(\neg p)$
 D. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$
- 3) 下列命题中正确的是哪个? ()
- A. 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$; B. 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$;
 C. 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$; D. 若 $A \subset B$ 且 $C \subset D$, 则 $A \cap C \subset B \cap D$.
- 4) 自然数集合 N 与下述哪个集合不等势? ()
- A. 有理数集合 Q ; B. $\{0,1\}^N$;
 C. $N \times N$; D. $N - \{1,2,3\}$.
- 5) 设 Σ 是由有限多字母组成的集合, 称为字母表. 由 Σ 中的字母组成的有序序列称为 Σ 上的串. 若串中的字母个数为零, 则该串叫做空串. 令 Σ^* 表示 Σ 上所有有限长的串的集合. 在 Σ^* 上定义一个连接运算“*”, 对任意两个串 x, y , $x*y = xy$. 即把串 y 添加到串 x 后面. 则关于 $\langle \Sigma^*, * \rangle$ 以下哪个判断正确? ()
- A. 是代数系统, 但不是半群 B. 是半群, 但不是独异点
 C. 是独异点, 但不是群 D. 不是代数系统

- 6) 设 \mathbf{Z}_{12} 为模 12 整数加群. 以下哪个是子群 $\langle 4 \rangle$ 在 G 中的右陪集? ()
- A. $\{1,4,7,10\}$ B. $\{0,4,8\}$
 C. $\{3,6,9\}$ D. $\{4,8\}$
- 7) Klein 四元群的子群格是以下哪种格? ()
- A. 分配格 B. 有补格
 C. 五角格 D. 布尔代数
- 8) 有向图 $D = \langle V, E \rangle, V = \{a, b, c, d, e, f\}, E = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle f, e \rangle\}$.
 则 D 的连通性与哪种图最接近? ()
- A. 不连通图 B. 弱连通图 C. 单向连通图 D. 强连通图
- 9) 树 T 具有 5 个 4 度顶点, 其余均为 1 度顶点. 则有几非同构的 T ? ()
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 10) 下列图中哪个既是欧拉图又是哈密顿图? ()
- A. K_4 B. K_5 C. $K_{2,3}$ D. $K_{3,3}$

2. 填空题 (共 10 题, 每题 2 分)

- 1) 设 $c_1 = \neg p \vee q \vee r, c_2 = p \vee q \vee \neg s$, 则 $\text{Res}(c_1, c_2) =$ _____.
- 2) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$, 则 $R \upharpoonright \{1, 3\} =$ _____.
- 3) 设 \mathbf{Z}_{18} 为模 18 整数加群, 则元素 14 的阶是_____.
- 4) 在域 \mathbf{Z}_7 中, 方程组 $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$ 的解为 $x =$ _____, $y =$ _____.
- 5) 设 n 是正整数, S_n 为 n 的正因子集, S_n 关于整除关系构成格, 令 $n = 3, 4, 5, 6$,
 则 $n =$ _____ 时 S_n 是布尔代数.
- 6) 轮图 $W_n (n \geq 4)$ 的对偶图为_____.
- 7) 平面图 G 有 16 个连通分支, 128 个顶点, 81 个面, 则 G 有_____条边.
- 8) n 阶无向简单图 G 及其补图 \bar{G} 都有 $n + 21$ 条边, 则 $n =$ _____.
- 9) $K_{2,3}$ 的点色数为_____, 面色数为_____.
- 10) 彼得松图的点连通度是_____.

3. 设 G 是 n 阶 m 条边的简单平面图, $m < 30$, 证明 $\delta(G) \leq 4$ 。

4. (10 分) 某电路中有一个灯泡和三个开关 A, B, C 。已知在且仅在下述四种情况下灯亮:

(1) C 的扳键向上, A, B 的扳键向下。

(2) A 的扳键向上, B, C 的扳键向下。

(3) B, C 的扳键向上, A 的扳键向下。

(4) A, B 的扳键向上, C 的扳键向下。

设 F 为 1 表示灯亮, 命题变元 p, q, r 分别表示 A, B, C 的扳键向上。

(A) 求 F 的主析取范式。

(B) 在联结词完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 上构造 F , 并尽可能地简单。

5. (10 分) 在一阶逻辑中推证下列结论的有效性:

所有爱学习的人都有知识; 每个有知识、爱思考的人都有创造力; 有些爱学习、爱思考的人是科学家. 所以有些爱学习、有创造力的人是科学家.

设个体域是人的集合, $P(x)$: x 爱学习, $R(x)$: x 有知识,

$S(x)$: x 有创造力, $U(x)$: x 是科学家, $V(x)$: x 爱思考.

6. (10 分) 设 N 是自然数集合, 定义 N 上的二元关系 R :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N, y \in N, x+y \text{ 是偶数} \}$$

(1) 证明 R 是一个等价关系;

(2) 求关系 R 的等价类.

7. (10 分) 已知集合 A 和 B , 其中 $A \neq \emptyset$, $\langle B, \leq \rangle$ 是偏序集, $\langle B, \leq \rangle$ 中存在最大元

b . 定义 B^A 上的二元关系 R 如下:

$$fRg \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow (f(x) \leq g(x))).$$

(1) 证明 R 为 B^A 上的偏序关系.

(2) 给出偏序集 $\langle B^A, R \rangle$ 中的最大元.

8. 设 G 为群, \sim 为 G 上等价关系, 且满足 $\forall a, b, c \in G, ab \sim ac \Rightarrow b \sim c$,

证明等价类 $[e] = \{x \mid e \sim x, x \in G\}$ 构成 G 的子群。