# 概率与数理统计试题-2

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页上方填写座号、姓名、学号、班级等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2.33)=0.99$，$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(2.5)=0.9938$，$\Phi(1.58)=0.9429$，$\Phi(1.68)=0.9535$，$t_{0.05}(8)=1.8595$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$\sqrt{10}=3.16$

**一. 填空题（共 16 分，每小题 2 分）**

1. 已知 $A$、$B$、$C$ 为随机事件，$A$ 与 $C$ 互不相容，$A$ 与 $B$ 相互独立，且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.8$，$P(C)=0.4$，则 $P(AB|\bar{C})=$_________。

2. 已知 $X_1\sim N(2,3)$，其密度函数为 $f_1(x)$，$X_2\sim U(-2,4)$，其密度函数为 $f_2(x)$. 令

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 2 \\ bf_2(x), & x>2 \end{cases}$$

其中 $a$ 和 $b$ 为非负常数，若 $f(x)$ 是某一连续型随机变量的概率密度函数，则 $a$ 和 $b$ 应满足的关系是________。

3. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且都服从参数为 $p$ 的几何分布，则 $X+Y$ 的分布律为_______。

4. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(4)$，则 $D(X^2Y)=$_________。

5. 已知 $X_1, X_2, \ldots, X_n,\ldots$是独立同分布的随机变量序列，且都服从期望为 2 的指数分布，则当 $n\to+\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_________。

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从总体 $X$ 中抽取的样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则 $DS_n^2=$_________。

7. 设某种清漆的干燥时间（以小时计）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。现取 9 个样品，测得其平均干燥时间为 6 小时，标准差为 0.9 小时，则 $\mu$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为_________。

8. 设总体 $X$ 服从泊松分布 $P(\lambda)$，$X_1, X_2, X_3$ 是从总体 $X$ 中抽取的样本。已知检验问题 $H_0:\lambda=1$，$H_1:\lambda=2$的拒绝域为 $W=\{X_1+X_2+X_3\ge 1.5\}$，则该检验犯第二类错误的概率为_________。

**二.（12 分）**

某课程的任课教师根据历年数据统计发现课程出勤率达到 80%以上的学生考试通过率为 99%，出勤率在 50%~80%的学生考试通过率为 70%，出勤率低于 50%的学生考试通过率为 30%。现学期接近尾声，教师统计学生一学期的出勤情况，得知本学期出勤率达到 80%以上

的学生有 80%，出勤率在 50%~80%的学生有 15%，出勤率低于 50%的学生有 5%。1. 预测本学期的学生该课程考试的通过率；2. 若在考试成绩公布后有一学生没有通过考试，求其出勤率低于 50%的概率。

**三.（12 分）**

设连续型随机变量 $X$ 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} cx^2, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

其中 $c>0$ 为常数。令 $Y=X^3$。求

1. 常数 $c$ 的值；2. $P(X>\frac{1}{2}|X<\frac{2}{3})$；3. $X$ 的分布函数 $F_X(x)$；4. 随机变量 $Y$ 的密度函数 $f_Y(y)$。

**四.（14 分）**

设二维随机变量$(X,Y)$的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-\frac{x}{2}}, & x>0,-2<y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

其中 $k>0$ 为常数。

1. 求常数 $k$；2. 求 $X$ 与 $Y$ 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；3. 判断 $X$ 与 $Y$ 是否相互独立，并给出理由；4. $P(\max(X,Y)>1)$。

**五.（8 分）**

设某种盒装水果的净重（单位：千克）是随机变量，其数学期望为 4，标准差为 0.4。利用中心极限定理求 100 盒此种水果的净重之和不小于 390 千克的概率。

**六.（12 分）**

设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，都服从均匀分布 U(0,1)，$U=2X+2Y$，$V=XY$。1. 求 $E(U)$，$E(V)$；2. 求 $D(U)$，$D(V)$；3. 求 $\mathrm{Cov}(U, V)$，$\rho_{UV}$；4. 判断 $U$ 和 $V$ 是否独立？给出理由。

**七.（14 分）**

设总体 $X$ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)} & x>c \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

其中 $c>0$ 为已知常数，$\theta>1$ 为未知参数。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本值。

1. 求$\theta$ 的矩估计量$\hat{\theta}_1$；2. 求$\theta$ 的最大似然估计量$\hat{\theta}_2$；3.求 $P(X>2c)$ 的最大似然估计量。

**八.（12 分）**

某种导线的电阻服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，参数均未知，要求其标准差不得超过 0.005 欧。今在生产的一批导线中取 9 根测试，测得其标准差为 0.007 欧。问在显著性水平$\alpha$=0.05 下，这批导线是否符合要求？