第9周作业　王子赫　1120210446

解1：X_i 可能的取值为 0，1，2

$P(X_1=0, X_2=0) = P(X_1=0)P(X_2=0|X_1=0) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

$P(X_1=0, X_2=1) = P(X_1=0)P(X_2=1|X_1=0) = \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

$P(X_1=0, X_2=2) = P(X_1=0)P(X_2=2|X_1=0) = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{45}$

$P(X_1=1, X_2=0) = P(X_1=1)P(X_2=0|X_1=1) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

$P(X_1=1, X_2=1) = P(X_1=1)P(X_2=1|X_1=1) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

$P(X_1=1, X_2=2) = P(X_1=1)P(X_2=2|X_1=1) = \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

$P(X_1=2, X_2=0) = P(X_1=2)P(X_2=0|X_1=2) = \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{45}$

$P(X_1=2, X_2=1) = P(X_1=2)P(X_2=1|X_1=2) = \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{18}$

$P(X_1=2, X_2=2) = P(X_1=2)P(X_2=2|X_1=2) = 0$

故 $(X_1 X_2)$ 的联合分布律为

X_2 \ X_1	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{45}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{18}$	0

$\Rightarrow P(X_1=0, X_2=0) + P(X_1=1, X_2=1)$

$+ P(X_1=2, X_2=2) = \frac{2}{15} + \frac{2}{9} + 0$

$= \frac{16}{45}$

故两次取到球颜色相同的概率为 $\frac{16}{45}$

解4：(1) 由 X 服从参数为 λ 的泊松分布 ⇒

$P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$　在上车人数为 n 的条件下

$P(Y=m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$

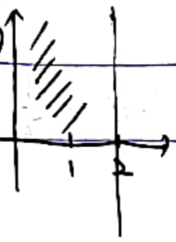
$\Rightarrow P(Y=m | X=n) = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$

(2) $P(X=n, Y=m) = P(X=n)P(Y=m|X=n)$

$= \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m} = \frac{\lambda^n}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}p^m(1-p)^{n-m}$

故 (X,Y) 的联合分布律为 $P(X=n, Y=m) = \frac{\lambda^n}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}p^m(1-p)^{n-m}$

解5：(1)

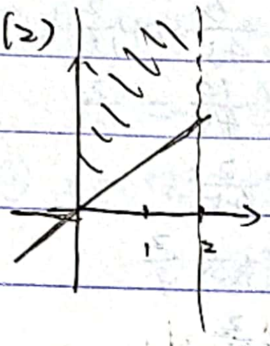


$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{+\infty} Axe^{-y}\,dy\,dx$

$= A\int_0^2 x\,dx \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = A\cdot 2\cdot 1 = 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

故A的值为$\frac{1}{2}$

(2)



$$P(X<Y) = \int_0^2 \int_x^{+\infty} \frac{1}{2} x e^{-y} \, dy \, dx$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{2} x e^{-x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 x \, de^{-x}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x e^{-x} \Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-x} dx \right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(2e^{-2} + e^{-x}\Big|_0^2 \right) = -\frac{1}{2}(2e^{-2} + e^{-2} - 1)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2}$$

故 $P(X<Y) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2}$

解7 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} k e^{-(3x+4y)} \, dx \, dy$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} k e^{-3x} \cdot e^{-4y} \, dx\,dy = k\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx \int_0^{+\infty} e^{-4y} dy$$
$$= k \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{k}{12} = 1 \Rightarrow k = 12$$

故k的值为12

(2) $X=Y$是一条直线 $\Rightarrow P(X=Y) = 0$

(3) $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^x\int_0^y 12 e^{-3x} e^{-4y} \, dy\,dx$

$$= 12 \int_0^x e^{-3x}dx \int_0^y e^{-4y}dy = 12 \cdot \left[-\frac{1}{3}(1-e^{-3x})\right]\left[-\frac{1}{4}(1-e^{-4y})\right]$$
$$= (1-e^{-3x})(1-e^{-4y}) \quad (x>0, y>0)$$

故(X,Y)的联合分布函数 $F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-3x})(1-e^{-4y}) & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(4) $P(0<X<1, 0<Y<2) = F(1,2) - F(1,0) - F(0,2) + F(0,0)$

$$= (1-e^{-3})(1-e^{-8}) - 0 - 0 + 0 = 1 - e^{-3} - e^{-8} + e^{-11}$$

故 $P(0<X<1, 0<Y<2) = 1 - e^{-3} - e^{-8} + e^{-11}$

解8 X, Y可能的取值为 $-1, 1$

$P(X=-1, Y=-1) = P(W\le -1, W\le 1) = P(W\le -1) = \frac{-1-(-2)}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$

$P(X=-1, Y=1) = P(W\le -1, W>1) = 0$

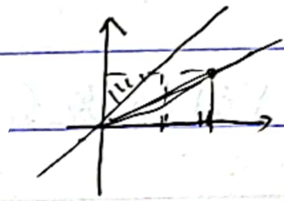
$P(X=1, Y=-1) = P(W>-1, W\le 1) = \frac{1-(-1)}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X=1,Y=1)=P(W>-1,W>1)=P(W>1)=\frac{2-1}{2-(-2)}=\frac{1}{4}$

故(X,Y)的联合分布为：

Y \ X	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

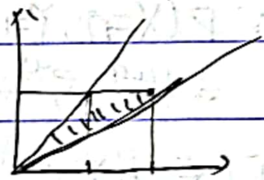
解9：U,V的可能取值为0,1



$P(U=0,V=0)=P(X\le Y,X\le 2Y)$

$=P(X\le Y)=\frac{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1}{1\times2}=\frac{1}{4}$

$P(U=0,V=1)=P(X\le Y,X>2Y)=0$



$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\le 2Y)$

$=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1}{1\times2}=\frac{1}{4}$

$P(U=1,V=1)=P(X>Y,X>2Y)=P(X>2Y)=\frac{\frac{1}{2}\times2\times1}{1\times2}=\frac{1}{2}$

故(U,V)的联合分布

V \ U	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$

解10：当$x\le0$时，$F_X(x)=0$　当$0<x\le1$时，$F_X(x)=F(x,+\infty)$
$=\lim\limits_{y\to+\infty}(2x-x^2)=2x-x^2$　当$x>1$时，$F_X(x)=F(x,+\infty)$
$=\lim\limits_{y\to+\infty}1=1$

当$y\le0$时，$F_Y(y)=0$　当$0<y\le1$时，$F_Y(y)=F(+\infty,y)$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}y^2=y^2$　当$y>1$时　$F_Y(y)=1$

故X的边缘分布函数为　　　　Y的边缘分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le0\\ 2x-x^2 & 0<x\le1\\ 1 & x>1\end{cases}\qquad F_Y(y)\begin{cases}0 & y\le0\\ y^2 & 0<y\le1\\ 1 & y>1\end{cases}$$

解11：(1) $a+0.3+0.1+0.3+0.1+0=1\Rightarrow a=0.2$　故a的值为0.2

(2) $P(X=-1)=0.2+0.3=0.5$; $P(X=0)=0.3+0.1=0.4$

$P(X=2)=0.1+0=0.1$ $P(Y=1)=0.2+0.3+0.1=0.6$

$P(Y=2)=0.3+0.1+0=0.4$

故X的边缘分布律为

X	-1	0	2
P	0.5	0.4	0.1

Y的边缘分布律为

Y	1	2
P	0.6	0.4

解12: $P(X=n,Y=m)=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{e^{-14}}{n!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}(7.14)^m(6.86)^{n-m}$

$=\frac{14^n\cdot e^{-14}}{n!}\cdot C_n^m(0.51)^m(0.49)^{n-m}$

$P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}P(X=n,Y=m)=\sum_{n=0}^{n}\frac{14^n e^{-14}}{n!}C_n^m(0.51)^m(0.49)^{n-m}$

$=\frac{14^n}{n!}e^{-14}\sum_{n=0}^{n}C_n^m(0.51)^m(0.49)^{n-m}=\frac{14^n}{n!}e^{-14}(0.51+0.49)^n$

$=\frac{14^n}{n!}e^{-14}$

$P(Y=m)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=m|X=n)\cdot P(X=n)$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n,Y=m)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-14}}{m!}(7.14)^m\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{e^{-14}}{m!}(7.14)^m\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(6.86)^{n-m}}{(n-m)!}$

$=(7.14)^m\frac{e^{-14}}{m!}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(6.86)^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{e^{-14}}{m!}\cdot e^{6.86}\cdot(7.14)^m$

$=\frac{(7.14)^m}{m!}e^{-7.14}$

故X的边缘分布律为 $P(X=n)=\frac{14^n}{n!}e^{-14}$, $n=0,1,\cdots$

Y的边缘分布律为 $P(Y=m)=\frac{(7.14)^m}{m!}e^{-7.14}$ $m=0,1\cdots$

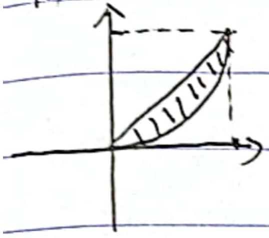
解14: $f_X(x)=0$ $(x\le 0)$, $f_Y(y)=0$ $(y\le 0)$

$x>0$时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$

$y>0$时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}$

故X的边缘密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ Y的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

解16: $x<0$ 时, $f_X(x)=0$, $y<0$ 时, $f_Y(y)=0$.



$1\geq x>0$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{x} 6\,dy$

$= 6(x-x^2)$

$0<y\leq 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx$

$= 6(\sqrt{y}-y)$

$x>1$ 时, $f_X(x)=0$, $y>1$ 时, $f_Y(y)=0$.

故X的边缘密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases} 6(x-x^2) & 0<x\leq 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

Y的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y) & 0<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

解17: $x<0$ 或 $x>1$, $0<y$ 或 $y>1$ 时, $f_{1X}(x)=0$, $f_{1Y}(y)=0$

$0<x<1$ 时, $f_{1X}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = x+\frac{1}{2}$

$0<y<1$ 时, $f_{1Y}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = y+\frac{1}{2}$

$0<x$ 或 $x>1$, $y<0$ 或 $y>1$ 时, $f_{2X}(x)=0$, $f_{2Y}(y)=0$

$0<x<1$ 时, $f_{2X}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (0.5+x)(0.5+y)\,dy = x+\frac{1}{2}$

$0<y<1$ 时, $f_{2Y}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (0.5+x)(0.5+y)\,dx = y+\frac{1}{2}$

故 $f_{1X}(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$ $f_{2X}(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$f_{1Y}(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2} & 0<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$ $f_{2Y}(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2} & 0<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

故他们具有相同的边缘密度函数. 证毕.

解19:(1):由 (X,Y) 联合分布律得:

$\begin{cases} A+0.2=0.4 \\ 0.3+A+0.1+0.1+0.2+B=1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=0.2 \\ B=0.1 \end{cases}$ 故 A, B 的值为 0.2、0.1

(2). (X,Y)的联合分布与边缘分布如下所示：

Y \ X	-1	0	2	Y
1	0.3	0.2	0.1	0.6
2	0.1	0.2	0.1	0.4
X	0.4	0.4	0.2	

$P(X=-1, Y=1) = 0.3 \neq P(X=-1)P(Y=1) = 0.4\times0.6 = 0.24$

故 X与Y 不独立

解22：$x<0$ 时，$F_X(x)=0$，$y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

$x\geq0$ 时，$F_X(x) = F(x,+\infty) = \lim\limits_{y\to+\infty} 1-e^{-\alpha x} = 1-e^{-\alpha x}$

$0\leq y\leq1$ 时，$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-\alpha x})y = y$

$y>1$ 时，$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-\alpha x} = 1$

故 $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha x} & x\geq0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ y & 0\leq y\leq1 \\ 1 & y>1 \end{cases}$

故 $x\geq0, 0\leq y\leq1$ 时，$F_X(x)\cdot F_Y(y) = y(1-e^{-\alpha x}) = F(x,y)$

$x\geq0$，$y>1$ 时，$F_X(x)\cdot F_Y(y) = (1-e^{-\alpha x})\cdot1 = 1-e^{-\alpha x} = F(x,y)$

其他时，$F_X(x)\cdot F_Y(y) = 0 = F(x,y)$

故 X与Y相互独立. 证毕

解23(1)：由 $X\sim U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0\leq x\leq1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

由 $Y\sim E(1) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y\geq0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

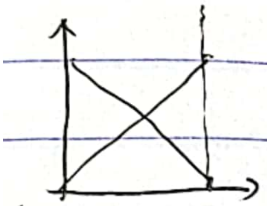
由X与Y的独立性：$x<0$ 或 $y<0$ 时，或 $x>1$ 时，$f(x,y)=0$

$0\leq x\leq1$，$y\geq0$ 时，$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-y}$

故 (X,Y) 联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x\le 1,\ y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

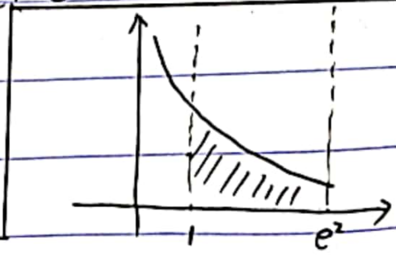
(2) $P(Y<X)=\int_0^1\int_0^x e^{-y}\,dy\,dx=\int_0^1(1-e^{-x})\,dx=e^{-1}$

(3) $P(X+Y<1)=\int_0^1\int_0^{1-x} e^{-y}\,dy\,dx=\int_0^1(1-e^{x-1})\,dx=e^{-1}$



故 (2) $P(Y<X)=e^{-1}$

(3) $P(X+Y<1)=e^{-1}$



解24:(1) $S=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dx=\ln|_1^{e^2}=2$

$\Rightarrow$ (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2} & x,y\in G \\ 0 & 其他 \end{cases}$

(2) $x<1$ 或 $x>e^2$ 时, $f_X(x)=0$.

$1\le x\le e^2$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2x}$

$y<0$ 或 $y>1$ 时, $f_Y(y)=0$.

$0<y<\frac{1}{e^2}$ 时, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_1^{e^2}\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}(e^2-1)$

$\frac{1}{e^2}<y<1$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_1^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$

故 $f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2x} & 1\le x\le e^2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(e^2-1) & 0<y<\frac{1}{e^2} \\ \frac{1}{2y}-\frac{1}{2} & \frac{1}{e^2}\le y\le 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

(3) 当 $1\le x\le e^2,\ 0<y<\frac{1}{e^2}$ 时, $f(x,y)=\frac{1}{2}$

而 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2}(e^2-1)=\frac{1}{4x}(e^2-1)\neq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ X与Y不相互独立