



POLITECNICO DI TORINO

# Fisica I

**Appunti del corso da 10 CFU tratti dal libro  
Fisica – Volume 1 – Mazzoldi Nigro Voci**

**A.A. 2019/20**

**Autore: Marco Smorti**

**Data: Maggio 2020**

## Sommario

Appendice sui vettori .....	3
Cinematica del punto .....	7
Dinamica del punto .....	21
Moti relativi .....	39
Dinamica dei sistemi di punti materiali .....	45
Gravitazione .....	56
Dinamica del corpo rigido .....	66
Proprietà meccaniche dei fluidi .....	80
Oscillazioni e onde .....	86
Primo principio della termodinamica .....	89
Gas ideali .....	97
Secondo principio della termodinamica .....	111

## Appendice sui vettori

### Grandezze scalari e vettori

Le grandezze per la cui rappresentazione basta un solo numero, costante o funzione delle coordinate ed eventualmente anche del tempo, si dicono *grandezze scalari*. Esistono però grandezze che per essere specificate hanno bisogno di un numero, il modulo, che ne dà il valore in assoluto, di una direzione e di un verso. Tale grandezza è detta *vettore* e si rappresenta tramite un segmento orientato la cui lunghezza è pari al modulo del vettore e viene indicato con  $\vec{a}$  oppure  $\mathbf{a}$ .

### Proprietà dei vettori

**Prodotto di un vettore per uno scalare:**  $\vec{b} = m\vec{a}$  il prodotto dello scalare  $m$  per il vettore  $\vec{a}$  ha come risultato un altro vettore con stessa direzione, modulo pari a  $m$  volte quello di  $\vec{a}$  e lo stesso verso se  $m > 0$  oppure opposto se  $m < 0$ . Ponendo  $m = -1$  si ottiene  $\vec{b} = -\vec{a}$  che definisce il *vettore opposto* a un dato vettore.

**Versore:** fissata una direzione orientata  $r$  vi sono infiniti vettori che hanno quella direzione e differiscono solo per modulo e verso, in particolare, esiste il vettore  $\hat{u}$  che è concorde in verso con  $r$  e ha modulo unitario. Tutti gli infiniti vettori possono scriversi  $\vec{a} = a\hat{u}$ . Il vettore unitario  $u$  è detto **versore** della direzione orientata  $r$  e infatti si usa scrivere  $\hat{u}_r$ .

**Somma:** dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  in cui  $\vec{b}$  è applicato nel punto terminale di  $\vec{a}$ , la *somma* è un vettore che si indica con  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  e si ottiene graficamente unendo l'origine del vettore  $\vec{a}$  con l'estremo del vettore  $\vec{b}$ . Un metodo alternativo è quello del *parallelogramma*: si applica all'origine di  $\vec{a}$  anche il vettore  $\vec{b}$  spostandolo parallelamente a se stesso ed il vettore somma  $\vec{c}$  coincide con la diagonale del parallelogramma che ha come lati  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

**Differenza:** tramite il concetto di vettore opposto e la regola della somma, si definisce anche la differenza di due vettori come  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

**Somma di più vettori:** la regola di cui sopra si estende alla somma di più vettori  $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$  disegnando in successione i diversi vettori e ponendo l'origine di uno nel punto in cui termina il precedente costruendo una linea spezzata e il vettore somma  $\vec{R}$  si ottiene congiungendo i due estremi di questa linea. Il risultato non dipende dall'ordine con cui si considerano gli addendi e vale la *proprietà associativa*. In caso di vettori paralleli si ha:  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1\hat{u} + a_2\hat{u} = (a_1 + a_2)\hat{u}$

**Scomposizione di un vettore:** supponendo le tre direzioni degli *assi cartesiani ortogonali di un sistema di riferimento*, è possibile scomporre un vettore  $\vec{v}$  nelle sue componenti tramite i versori come segue:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z$$

Dunque, dati due vettori rappresentati in un certo sistema da

$$\vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z$$

$$\vec{b} = b_x\hat{u}_x + b_y\hat{u}_y + b_z\hat{u}_z$$

La loro somma è data da

$$\vec{a} + \vec{b} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z + b_x\hat{u}_x + b_y\hat{u}_y + b_z\hat{u}_z$$

Ovvero da

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{u}_x + (a_y + b_y)\hat{u}_y + (a_z + b_z)\hat{u}_z$$

Il vettore somma ha come componenti la somma delle componenti dei singoli vettori.

**Proprietà di invarianza:** una grandezza scalare è invariante rispetto al sistema di riferimento e ciò vale anche per un vettore e dunque anche le operazioni di somma e prodotto per uno scalare sono invarianti rispetto alla scelta del sistema. Prendendo ad esempio l'equazione  $\vec{F} = m\vec{a}$  essa non dipende dal sistema di riferimento e in qualsiasi sistema mantiene la stessa struttura.

Quando viene fissato un sistema di riferimento, un vettore è individuato dalle sue componenti e dunque un'equazione tra vettori equivale a tre equazioni nelle componenti ( $\vec{b} = m\vec{a}$  diventa  $b_x = ma_x, b_y = ma_y, b_z = ma_z$ ) dunque è necessario capire come si comportano le componenti quando cambia il sistema di riferimento.

**Traslazione:** in una traslazione le componenti di un vettore restano invariate.

**Rotazione:** in una rotazione le componenti di un vettore cambiano obbedendo alla stessa regola di trasformazione valida per le coordinate. Dunque, il vettore è l'ente individuato da tre numeri, dipendenti dal sistema di riferimento, che si trasformano sotto rotazioni con la stessa legge con cui si trasformano le coordinate. In altre parole quando si scrive un'equazione vettoriale  $\vec{a} = \vec{b}$  e la si considera in un determinato sistema di riferimento, le tre equazioni  $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$  sono valide come struttura in qualsiasi sistema però con valori delle componenti diversi in ciascun sistema. Le componenti stesse, non essendo indipendenti dal sistema, non sono quantità scalari. Uno scalare è invece il modulo che si scrive come:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  e si verifica essere lo stesso in qualsiasi sistema.

**Prodotto scalare:** dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  si definisce *prodotto scalare* la quantità

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

Indicando con  $\theta$  l'angolo formato dai due vettori. Il risultato del prodotto scalare è una quantità scalare data dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso tra a e b. Per il prodotto scalare vale la proprietà *commutativa* e quella *distributiva*. Per calcolare il prodotto scalare in un determinato sistema di riferimento si pone nuovamente  $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$  e  $\vec{b} = b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y + b_z \hat{u}_z$  e si osserva che

$$\begin{aligned} \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x &= \hat{u}_y \cdot \hat{u}_y = \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = 1 \\ \hat{u}_x \cdot \hat{u}_y &= \hat{u}_y \cdot \hat{u}_z = \hat{u}_z \cdot \hat{u}_x = 0 \end{aligned}$$

E dunque il prodotto sarà

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

**Prodotto vettoriale:** dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  si definisce *prodotto vettoriale* il vettore  $\vec{c}$  che si indica con  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  ed ha *direzione* perpendicolare al piano individuato da  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ; *verso* di una normale vite destrorsa, cioè ruotando da  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  nel verso della vite, il verso di  $\vec{c}$  è indicato dalla punta della vite; il *modulo* è

$$c = ab \sin \theta$$

e coincide con l'area del parallelogramma di lati  $a$  e  $b$ . Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa. Infatti, effettuando il prodotto  $b \times a$  si ottiene il vettore  $-\vec{c}$  e dunque  $b \times a = -a \times b$ . Si applica però la proprietà *distributiva*. Per il calcolo delle componenti cartesiane in un dato sistema di riferimento si utilizzano sempre i vettori  $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$  e  $\vec{b} = b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y + b_z \hat{u}_z$  e si osserva che

$$\begin{aligned} \hat{u}_x \times \hat{u}_x &= \hat{u}_y \times \hat{u}_y = \hat{u}_z \times \hat{u}_z = 0 \\ \hat{u}_x \times \hat{u}_y &= \hat{u}_z, \quad \hat{u}_y \times \hat{u}_z = \hat{u}_x, \quad \hat{u}_z \times \hat{u}_x = \hat{u}_y \\ \hat{u}_y \times \hat{u}_x &= -\hat{u}_z, \quad \hat{u}_z \times \hat{u}_y = -\hat{u}_x, \quad \hat{u}_x \times \hat{u}_z = -\hat{u}_y \end{aligned}$$

Applicando la proprietà distributiva si ottiene

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{u}_z$$

Che corrisponde al calcolo del determinante di una matrice. Un'altra rappresentazione utile consiste nello scomporre  $\vec{b}$  secondo un componente  $\vec{b}_T$  parallelo ad  $\vec{a}$  e un componente  $\vec{b}_N$  ortogonale ad  $\vec{a}$  per cui

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_T + \vec{b}_N) = \vec{a} \times \vec{b}_N$$

In quanto  $\vec{a} \times \vec{b}_T = 0$  essendo i due vettori paralleli.

**Momento di un vettore rispetto ad un punto:** sia  $\vec{v}$  un vettore applicato nel punto P e O un altro generico punto. Si definisce *momento del vettore  $\vec{v}$  rispetto al punto O*, chiamato *polo*, il vettore

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{v}$$

Ortogonale al piano individuato da  $\overrightarrow{OP}$  e  $\vec{v}$ . Detto  $\overrightarrow{OH}$  il componente di  $\overrightarrow{OP}$  perpendicolare a  $\vec{v}$  otteniamo

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{v} = \overrightarrow{OH} \times \vec{v}$$

Il modulo di  $M_O$  è dato da

$$M_O = |OP| v \sin \theta = |OH| v = h v$$

Essendo  $h$  la distanza di  $O$  dalla retta  $r$  contenente  $\vec{v}$ , detta *retta di applicazione* di  $\vec{v}$ ;  $h$  prende il nome di *braccio* di  $v$  rispetto a  $O$ .

Se si sceglie un altro polo  $O'$ , il momento di  $\vec{v}$  rispetto a  $O'$  è dato da

$$M_{O'} = \overrightarrow{O'P} \times \vec{v}$$

Poiché  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$  si ha

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{v} = \overrightarrow{OO'} \times \vec{v} + \overrightarrow{O'P} \times \vec{v} = \overrightarrow{OO'} \times \vec{v} + \vec{M}_{O'}$$

Dunque, in generale  $M_O \neq M_{O'}$ : il momento di un vettore dipende dal polo; solo se  $\overrightarrow{OO'}$  è parallelo a  $\vec{v}$ ,  $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'}$ .

**Derivata di un vettore:** anche per i vettori è possibile effettuare l'operazione di derivata. La derivata di un vettore è ancora un vettore definito dal rapporto incrementale (con il limite, definizione classica di derivata). Se però si rappresenta un vettore  $\vec{v}$  con le sue componenti si ottiene

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \hat{u}_z$$

Nell'ipotesi che i versori che caratterizzano il sistema di riferimento siano fissi, ovvero costanti rispetto a  $t$ .

**Derivata di un versore  $\hat{u}(t)$ :** la derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore, di modulo  $\frac{d\theta}{dt}$ , in generale diverso da 1: in altre parole  $\frac{d\hat{u}}{dt}$  non è un versore.

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N$$

**Struttura intrinseca della derivata:** considerando il vettore  $\vec{v} = v\hat{u}$  e calcolando la derivata con la regola di derivazione del prodotto si ottiene

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u} + v\frac{d\hat{u}}{dt}$$

Il primo termine è parallelo a  $\vec{v}$  (dovuto alla variazione del modulo) e il secondo  $v\frac{d\hat{u}}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$  è ortogonale a  $\vec{v}$  dovuto alla variazione della direzione e dunque si ottiene

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u} + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$$

Ed il modulo del vettore derivato è:

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

E si osserva che *il modulo della derivata di  $\vec{v}$  è diverso dalla derivata del modulo di  $\vec{v}$* . Se uno dei due termini è zero si ricade in situazioni particolari:

- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}$  il vettore varia solamente in modulo e mantiene inalterata la direzione, cioè  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ .
- $\frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$  il vettore non varia di modulo ma solo in direzione, cioè compie una rotazione.

Dall'ultimo caso si ricava che *la derivata di un vettore di modulo costante è perpendicolare al vettore stesso*.

**Integrazione vettoriale:** nel caso in cui si consideri la funzione vettoriale  $\vec{a}(t)$  definita in un certo intervallo della variabile  $t$  e se ne voglia calcolare l'integrale, si ottiene:

$$\vec{A} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = \hat{u}_x \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt + \hat{u}_y \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt + \hat{u}_z \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt$$

*L'integrale di un vettore ha come componenti gli integrali delle componenti del vettore.*

**Integrale di linea:**

$$\Gamma(A \rightarrow B \text{ lungo } C) = \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

L'integrale di linea è uno scalare e dati i punti A e B in generale il suo valore dipende dalla curva C che congiunge A e B. Se la curva è chiusa si parla di *circuitazione di  $\vec{a}$  lungo la linea chiusa*.

**Gradiente di una funzione scalare:** data una funzione scalare  $f(x, y, z)$  continua e derivabile, delle coordinate del punto P in una certa regione dello spazio. Nel passaggio dal punto P a P' di coordinate  $x + dx, y + dy, z + dz$  la variazione della funzione è espressa da

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

A partire dalle derivate parziali della funzione  $f$  si costruisce il vettore

$$\nabla f = \text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z$$

Detto *gradiente* della funzione  $f$ . Il gradiente della funzione  $f$  è un vettore che in ogni punto è ortogonale alla superficie  $f = \text{costante}$  passante per quel punto e che con il suo verso indica il verso di massima variazione di  $f$ .

## Cinematica del punto

### 1.1 Introduzione

**Punto materiale** (o particella): corpo privo di dimensioni, ovvero che presenti dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire.

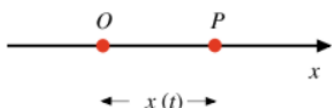
**Sistema di riferimento:** il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato sistema di riferimento, ossia ad esempio le sue coordinate  $x(t), y(t), z(t)$  in un sistema di riferimento cartesiano.

**Traiettoria:** luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento e costituisce una curva continua nello spazio.

**Grandezze fondamentali:** spazio, velocità, accelerazione e temp.

**Quiete:** particolare tipo di moto in cui le coordinate restano costanti e quindi velocità e accelerazione sono nulle.

### 1.2 Moto rettilineo



Il moto rettilineo si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso e perciò il moto del punto è descrivibile tramite una sola coordinata  $x(t)$ . L'origine dei tempi è arbitraria e  $t = 0$  può coincidere con l'inizio dell'osservazione ma non è

assolutamente necessario. Le misure ottenute possono essere rappresentate in un sistema con due assi cartesiani riportando sulle ordinate i valori di  $x$  e sulle ascisse i corrispondenti valori del tempo e tale figura viene detta *diagramma orario*.

### 1.3 Velocità nel moto rettilineo

Se al tempo  $t = t_1$  il punto si trova nella posizione  $x = x_1$  e al tempo  $t = t_2$  nella posizione  $x = x_2$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$  rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Si può dunque caratterizzare la rapidità con cui avviene lo spostamento tramite la *velocità media*

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Tale grandezza fornisce un'informazione *complessiva* ma non fornisce quasi nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto. Per individuare la funzione  $x(t)$  e le sue variazioni è sufficiente aumentare il numero di misure nell'intervallo di spazio  $\Delta x$  dividendo tale intervallo in numerosi piccoli intervalli percorsi rispettivamente negli intervalli di tempo. Le corrispondenti velocità medie saranno  $v_i = \frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}$  ed in generale tali velocità  $v_i$  non sono uguali tra loro. Se gli intervalli sono sufficientemente numerosi, è possibile definire la **velocità istantanea** del punto in movimento come il rapporto  $v = \frac{dx}{dt}$ . Il metodo descritto è un modo semplice che matematicamente consiste nel calcolare il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto incrementale  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  e perciò la velocità di un punto nel moto rettilineo è data da:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

La **velocità istantanea** rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante  $t$  considerato. Il segno della velocità indica il verso del moto sull'asse  $x$ : se  $v > 0$  la coordinata  $x$  cresce, mentre se  $v < 0$  il moto avviene in senso opposto.

In generale la velocità può essere funzione del tempo  $v(t)$  ma se  $v = \text{costante}$  allora si parla di *moto rettilineo uniforme*. E' possibile ricavare la legge oraria  $x(t)$  conoscendo la dipendenza dal tempo della velocità:  $dx = v(t)dt$

Lo spostamento complessivo sulla retta in cui si muove il punto, in un intervallo finito di tempo  $\Delta t = t - t_0$  è dato dalla somma di tutti i successivi valori  $dx$ . Basta dunque integrare per svolgere il calcolo

$$\Delta x = \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Il primo integrale è immediato e vale  $x - x_0$ , perciò

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v(t) dt \rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Questa relazione generale permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo, qualunque sia il tipo di moto. Per calcolare dunque  $x(t)$  è necessario conoscere la *condizione iniziale*  $x_0$  del moto.

Si osserva che  $\Delta x$  rappresenta lo spostamento complessivo e non lo spazio percorso (se il punto si spostasse per poi tornare nel punto iniziale,  $\Delta x$  sarebbe nullo).

Ricordando la velocità media  $v_m = \frac{x-x_0}{t-t_0}$  è possibile ricavare la relazione tra velocità media e istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Questa relazione coincide con la definizione di valor medio di una funzione in un dato intervallo; perciò la velocità media è uguale al valor medio della velocità istantanea nell'intervallo di tempo considerato. In questo caso, considerando l'esempio in cui il punto torna nella posizione iniziale, in questo caso la velocità media è nulla mentre la velocità istantanea avrà valori diversi da zero e sicuramente cambierà segno almeno una volta.

### Moto rettilineo uniforme

In questo caso  $v = \text{costante}$  perciò si ottiene

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0) , \quad x(t) = x_0 + vt$$

La seconda espressione è valida quando  $t_0 = 0$ . Da queste due relazioni si nota che lo spazio è una funzione lineare del tempo e perciò in tempi uguali vengono percorsi spazi uguali. La velocità istantanea coincide con la velocità media.

*Esempio 1.1 pag. 10*

### 1.4 Accelerazione nel moto rettilineo

Se la velocità non è più costante, ma in un determinato intervallo  $\Delta t$  essa varia di una quantità  $\Delta v$  si definisce l'*accelerazione media* come  $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  e si può definire anche l'*accelerazione istantanea* cioè la *rapidità di variazione temporale della velocità* come

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Se  $a = 0$  la velocità è costante, se  $a > 0$  la velocità cresce nel tempo mentre per  $a < 0$  la velocità decresce. Solo il segno algebrico della velocità istantanea fornisce il verso del moto (**non** quello dell'accelerazione). Anche in questo caso, conoscendo  $a(t)$  è possibile ricavare  $v(t)$  tramite integrazione:

$$dv = a(t)dt \rightarrow \Delta v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt \rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$$



Supponiamo di essere in una situazione fisica in cui sia nota la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, cioè  $a(x)$ . In tal caso è possibile ricavare il valore della velocità in ogni posizione  $x$ ,  $v(x)$ , utilizzando il concetto matematico di funzione di funzione. Se ad un certo istante  $t$  il punto occupa una determinata posizione  $x$ , con un valore  $v$  della velocità e  $a$  dell'accelerazione, queste si possono pensare come funzioni della posizione oltre che del tempo e si può scrivere  $v(t) = v[x(t)]$  e  $a(t) = a[x(t)]$ . Derivando la prima rispetto al tempo e sfruttando la regola di derivazione di funzione di funzioni:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Dunque, essendo  $v = \frac{dx}{dt}$  si ottiene  $a = v \frac{dv}{dx}$  che si può scrivere come  $adx = vdv$ : se dalla posizione  $x$ , dove il punto possiede velocità  $v$  e accelerazione  $a$ , si ha uno spostamento  $dx$ , il punto subisce una variazione di velocità  $dv$ ;  $dx$  e  $dv$  sono legati dalla relazione data. Integrando ambo i membri:

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = \int_{v_0}^v v dv$$

Esplicitando il secondo integrale si ottiene

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

Dove  $v_0$  è la velocità del punto nella posizione  $x_0$ . La conoscenza della dipendenza dell'accelerazione dalla posizione  $a(x)$  (cioè di come varia l'interazione del punto materiale con l'esterno,  $F(x)$ ), permette il calcolo della variazione della velocità nel passaggio del punto dalla posizione  $x_0$  a  $x$ . Essendo la relazione quadratica non si hanno informazioni sul segno della velocità, ma è ricavabile considerando i segni di  $v_0$  e di  $a$ .

### Unità di misura

$$v = \frac{\text{metro}}{\text{secondo}} = \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\frac{\text{metro}}{\text{secondo}}}{\text{secondo}} = \frac{m}{s^2}$$

$$1 \frac{km}{h} = \frac{10^3}{3.6 \cdot 10^3} \frac{m}{s} = 0.278 \frac{m}{s} \rightarrow 1 \frac{m}{s} = 3.6 \frac{km}{h}$$

### Moto rettilineo uniformemente accelerato

Il moto rettilineo più generale è *vario*, intendendo che l'accelerazione non è costante. Se invece l'accelerazione è costante durante il moto, questo si dice *uniformemente accelerato*. Si ottiene dunque:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0), \quad v(t) = v_0 + at$$

Per calcolare la posizione  $x$  è sufficiente ricordare che  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$  e dunque:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt$$

Ottenendo quindi:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

$$\text{Se } t_0 = 0: x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Perciò nel moto rettilineo uniforme si nota che la velocità è funzione lineare del tempo, mentre lo spazio è funzione quadratica del tempo.

Se  $a$  è costante, si ottiene anche (dalla relazione dell'accelerazione dipendente dalla posizione  $x$ ):

$$a \int_{x_0}^x dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \rightarrow a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Esempio 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 pag 13

### 1.5 Moto verticale di un corpo

Trascurando l'attrito con l'aria, un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con una accelerazione costante che vale in modulo  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  e il moto è dunque rettilineo uniformemente accelerato. Prendendo un sistema di riferimento con origine al suolo e asse  $x$  rivolto verso l'alto, il sistema possiede  $a = -g = -9.8 \text{ ms}^{-2}$  ed è chiaro perché il corpo per arrivare al suolo si muove lungo il verso negativo dell'asse  $x$  per cui la velocità è negativa e negativa deve essere l'accelerazione, in quanto la velocità nel tempo diventa sempre più negativa.

Supponendo una caduta da un'altezza  $h$  con velocità iniziale nulla si ha  $x_0 = h$  e  $v_0 = 0$  per  $t = t_0 = 0$ . Con  $a = -g$  e utilizzando le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato si ha:

$$v(t) = -gt, \quad v(x) = \sqrt{2g(h - x)}$$

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad t(x) = \sqrt{\frac{2(h - x)}{g}}$$

In particolare, si nota che il tempo di caduta e la velocità al suolo sono:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v_c = \sqrt{2gh}$$

Se invece il punto è lanciato verso il basso (c.i.  $x_0 = h$  e  $v_0 = -v_1$ ) si trovano le seguenti espressioni:

$$v(t) = -v_1 - gt, \quad v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(h - x)}$$

$$x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad t(x) = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h - x)}{g}}$$

$$t_c = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}, \quad v_c = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

Supponiamo adesso di lanciare il punto verso l'alto con velocità  $v_2$  ma partendo dal suolo (c.i.  $x_0 = 0$  e  $v_0 = v_2 > 0$  per  $t = 0$ ). Questa volta si avrà:

$$v(t) = v_2 - gt, \quad x(t) = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il punto sale inizialmente verso l'alto con velocità che decresce progressivamente ( $v > 0$  ma  $a < 0$ ): esso si ferma, cioè ha velocità nulla all'istante  $t_M = \frac{v_2}{g}$  e nella posizione  $x_M = x(t_M) = \frac{v_2^2}{2g}$ . Per  $t \geq t_M$  si torna alla situazione del primo esempio in cui un punto cade da un'altezza  $x_M$  e con velocità iniziale nulla. Risulta  $t_c =$

$$\sqrt{\frac{2x_M}{g}} = t_M \text{ e la durata complessiva del moto è dunque } 2t_M = \frac{2v_2}{g}.$$

Se si ricava  $t(x)$  dalla legge oraria e  $v(x)$  dalla relazione  $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$  si ottiene:

$$t(x) = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}}, \quad v(x) = \pm \sqrt{v_2^2 - 2gx}$$

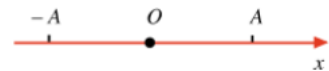
Il doppio segno è legato al fatto che il punto passa due volte nella stessa posizione, una volta salendo (segno negativo per il tempo, segno positivo per la velocità) e una volta scendendo (segni opposti). In particolare  $x = 0$  è occupato alla partenza ( $t = 0, v = v_2$ ) e all'arrivo ( $t = 2t_M, v = -v_2$ ).

## 1.6 Moto armonico semplice

Il moto armonico semplice lungo un asse rettilineo è un moto *vario* la cui legge oraria è definita dalla relazione

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Dove  $A, \omega, \phi$  sono grandezze costanti:  $A$  è l'*ampiezza del moto*,  $\omega t + \phi$  *fase del moto*,  $\phi$  *fase iniziale*,  $\omega$  *pulsazione*. La funzione assume come estremi i valori  $-1$  e  $+1$  perciò il punto percorre un segmento di ampiezza  $2A$  con centro nell'origine. Al tempo  $t = 0$  il punto occupa la posizione  $x(0) = A \sin \phi$  perciò note le costanti  $A, \phi$  è possibile determinare la posizione iniziale del punto. Il moto armonico, essendo composto da una funzione seno periodica, è anch'esso *periodico* e viene detto  $T$  il periodo del moto armonico. Per determinarlo, si considerano due tempi  $t'$  e  $t$  con  $t' - t = T$ ; per definizione  $x(t') = x(t)$  e quindi dalla formula sopra si nota che le due fasi differiranno di  $2\pi$  e quindi si avrà  $\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$  e dunque ne segue che  $T = t' - t$  vale:



$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ ovvero } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Si definisce *frequenza*  $\nu$  il numero di oscillazioni in un secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Si osserva che *il periodo e la frequenza di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto*. La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando  $x(t)$ :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

Con una ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione del punto:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

La velocità assume valore massimo nel centro di oscillazione dove vale  $\omega A$  e si annulla agli estremi, mentre l'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione ed è massimo in modulo agli estremi ed è anche *proporzionale ed opposta allo spostamento dal centro di oscillazione*.

Le costanti  $A$  e  $\phi$  individuano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \sin \phi, \quad v(0) = v_0 = \omega A \cos \phi$$

Viceversa, note le condizioni iniziali  $x_0$  e  $v_0$  è possibile calcolare  $A$  e  $\phi$ :

$$tg\phi = \frac{\omega x_0}{v_0} , \quad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

E' possibile calcolare la dipendenza della velocità dalla posizione,  $v(x)$  ricordando la formula

$\int_{x_0}^x a(x)dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$  e sostituendo l'accelerazione trovata prima:

$$\int_{x_0}^x a(x)dx = -\omega^2 \int_{x_0}^x xdx = \frac{1}{2}\omega^2(x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

E dunque  $v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$ . Con riferimento al centro, dove  $x_0 = 0$  e  $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)$$

Nel centro dunque si ha  $v = \omega A$  oppure  $v = -\omega A$  a seconda del verso di passaggio.

La condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ed è detta *equazione differenziale del moto armonico*. Se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza  $f$  che obbedisce a un'equazione con la stessa struttura di cui sopra  $\frac{d^2f}{dz^2} + k^2 f = 0$  la soluzione sarà sempre  $f(z) = A \sin(kz + \phi)$  cioè  $f$  descrive un'oscillazione rispetto alla variabile  $z$ , il cui periodo dipende da  $k$ .

### 1.7 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Questo è un altro esempio di moto *vario*, in cui l'accelerazione soddisfa la condizione  $a = -kv$  con  $k$  costante positiva (che si misura in  $s^{-1}$ ). In questo caso l'accelerazione è sempre contraria alla velocità che perciò deve necessariamente diminuire e varia con la stessa legge con cui varia la velocità. Ciò si traduce in:

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

Dove, *separando le variabili*, è possibile integrare:

$$\frac{dv}{v} = -kdt \rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt \rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

$v_0$  è la velocità del punto nell'istante iniziale  $t = 0$ . Passando agli esponenziali si ha:

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

Si nota che la velocità decresce esponenzialmente nel tempo e quindi il punto alla fine si ferma. Si può calcolare anche in questo caso come varia la velocità con la posizione:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -kv \rightarrow \frac{dv}{dx} = -k , \quad dv = -kdx$$

Integrando

$$\int_{v_0}^v dv = -k \int_0^x dx \rightarrow v(x) = v_0 - kx$$

Si nota che l'andamento della velocità con la posizione è lineare decrescente e la velocità si annulla per  $x = \frac{v_0}{k}$  e dunque in questa posizione il punto si ferma. La legge oraria si ricava integrando  $v(t)$  ricordando che  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} [e^{-kt}]_0^t = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

Il punto tende asintoticamente alla posizione  $\frac{v_0}{k}$ . Posto  $\tau = \frac{1}{k}$  in un intervallo di tempo pari a  $\tau$  la funzione si riduce di un fattore  $e = 2.72$ .

## 1.9 Moto nel piano. Posizione e velocità

Nel piano, la posizione del punto viene individuata da due coordinate. Esse possono essere, con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali,  $x(t)$  e  $y(t)$  oppure, in termini di coordinate polari nel piano,  $r(t)$  e  $\theta(t)$ . Le relazioni tra questi due sistemi di riferimento sono le seguenti:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

La posizione del punto P può essere anche individuata per mezzo del raggio vettore

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$

La posizione del punto lungo la traiettoria può anche essere data da una coordinata curvilinea  $s$  misurata a partire da un'origine arbitraria. Il valore di  $s$  esprime la lunghezza della traiettoria e varia nel tempo durante il moto:  $\frac{ds}{dt}$  indica la variazione temporale della posizione lungo la traiettoria, cioè la *velocità istantanea* del punto, come definita nel moto rettilineo. Se si dà forma della traiettoria e la velocità con cui essa viene percorsa si è descritto il moto del punto e ciò si riassume nella grandezza *velocità vettoriale*.

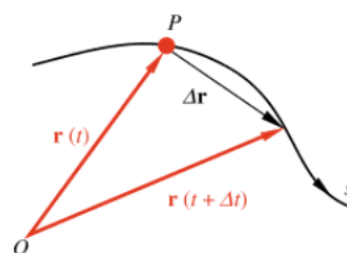
La velocità vettoriale è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

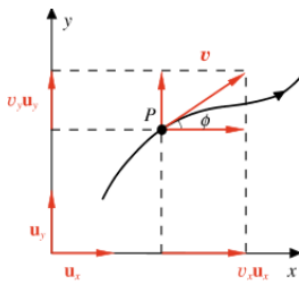
Si osserva che al limite l'incremento  $d\vec{r}$  del raggio vettore risulta in direzione tangente alla traiettoria del punto P e in modulo uguale allo spostamento infinitesimo  $ds$  lungo la traiettoria, perciò si può scrivere  $d\vec{r} = ds\hat{u}_T$  dove  $\hat{u}_T$  è il versore della tangente alla curva, variabile nel tempo man mano che il punto avanza lungo la traiettoria. Dunque, la relazione di prima diventa più esplicita:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v \hat{u}_T$$

Si nota che la velocità, scritta come  $v\hat{u}_T$ , è una caratteristica *intrinseca* e non dipende quindi dalla scelta del sistema di riferimento. Anche se si sposta l'origine O, cambia  $\vec{r}$  ma non  $\Delta\vec{r}$  e quindi  $d\vec{r}$  (questo perché comunque il punto, anche nel nuovo sistema di riferimento, possiede la stessa velocità, direzione e verso di prima).



## Componenti cartesiane



Poiché  $\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$ , si ottiene

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y$$

Dunque la velocità ha come componenti cartesiane le velocità  $v_x$  e  $v_y$  dei due moti rettilinei descritti dai punti proiezione di P sugli assi. Dunque,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  e, detto  $\phi$  l'angolo tra il vettore  $\vec{v}$  e l'asse  $x$ ,  $\tan\phi = \frac{v_y}{v_x}$ : date le componenti è possibile ricostruire il vettore. Si ricorda che ruotando gli assi

cambiano  $v_x$  e  $v_y$ .

## Componenti polari

Si introducono i vettori  $\hat{u}_r$  e  $\hat{u}_\theta$ , rispettivamente versore della direzione di  $r$  e versore ortogonale alla stessa, come in figura. Si noti che questi versori cambiano direzione (ruotano) durante il moto. Il raggio vettore  $\vec{r}$  può essere espresso come  $r\hat{u}_r$  e dunque

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} \rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

Dove si è utilizzato  $d\hat{u}_r = d\theta\hat{u}_\theta$  cioè la derivata di un versore.

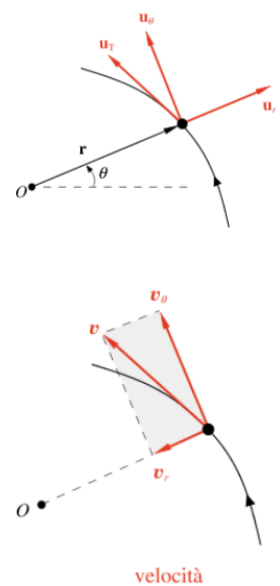
La velocità tangente alla traiettoria si scompone dunque in due componenti: *velocità radiale*  $\vec{v}_r$  diretta lungo  $\vec{r}$  e di modulo  $\frac{dr}{dt}$  e la *velocità trasversa*  $\vec{v}_\theta$ , ortogonale a  $\vec{r}$  e di modulo  $r\frac{d\theta}{dt}$ . Dunque,  $\vec{v}_r$  dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore, mentre  $\vec{v}_\theta$  è collegata alle variazioni di direzione dello stesso. Il modulo della velocità è:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

Tutto ciò serve per determinare la velocità se è nota la posizione, in coordinate polari o cartesiane. Analogamente a quanto fatto per il moto rettilineo, per il problema inverso la soluzione si ottiene integrando:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

La cui integrazione esplicita può essere effettuata ricorrendo alle componenti.



## 1.10 Accelerazione nel moto piano

Anche nel moto piano l'accelerazione si definisce come derivata della velocità rispetto al tempo ed è una grandezza vettoriale:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Ricordando che  $\vec{v} = v\hat{u}_T$  si può scrivere:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$$

La prima componente, parallela alla velocità esprime la variazione del modulo della velocità mentre la seconda, dipendente dalla variazione di direzione della velocità, è ortogonale a questa. Per esprimere in maniera più significativa la componente normale, nella figura si mostra il moto durante un istante  $dt$ . Nel limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  le rette normali alla traiettoria si incontrano nel punto C che coincide col centro della circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P e si chiama anche *centro di curvatura* della traiettoria nel punto P. L'arco di traiettoria  $ds$  è pari a  $Rd\phi$  dove  $R = CP$  raggio di curvatura. Al variare di P lungo la traiettoria variano anche R e C che può passare da una parte all'altra della curva e andare all'infinito in tratti rettilinei. Pertanto:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

E sostituendo all'espressione dell'accelerazione di prima:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\text{In modulo: } a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Le due componenti sono dette *accelerazione tangenziale* e *accelerazione normale o centripeta* (perché diretta sempre verso il centro della curvatura).

### Componenti cartesiane

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva:

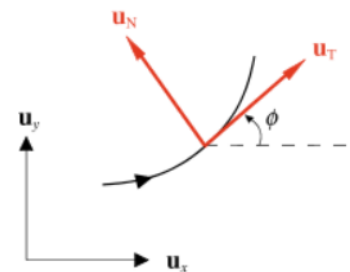
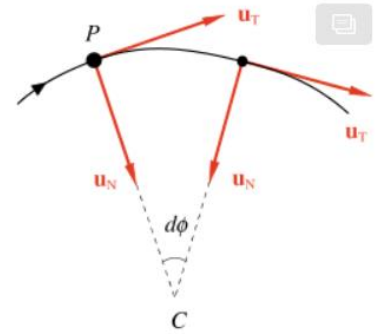
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y$$

Se  $\phi$  è l'angolo che  $\vec{u}_T$  forma con  $\hat{u}_x$  si deduce che:

$$a_x = u_T \cos \phi - u_N \sin \phi = \frac{dv}{dt} \cos \phi - \frac{v^2}{R} \sin \phi$$

$$a_y = u_T \sin \phi + u_N \cos \phi = \frac{dv}{dt} \sin \phi + \frac{v^2}{R} \cos \phi$$

Nel caso di  $a_x$  le due componenti  $x$  di  $u_N$  e  $u_T$  hanno verso discorde, mentre nel caso  $a_y$  il verso è concorde e dunque compare un segno "+".



## Componenti polari

Ricordando le componenti polari della velocità, si può scrivere

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right)$$

Ed effettuando il prodotto delle derivate:

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \hat{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

Considerando che  $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$  e che  $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r$  si ha

$$\vec{a} = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_r + \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \hat{u}_\theta$$

Da cui

$$a = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \hat{u}_\theta$$

Il primo termine rappresenta l'*accelerazione radiale* e il secondo l'*accelerazione trasversa*. La presenza di una delle componenti dell'accelerazione implica l'esistenza di una forza, agente sul punto materiale, con componente non nulla e parallela a quella dell'accelerazione.

Nota l'accelerazione e il valore della velocità all'istante  $t_0$ , la velocità in un istante  $t$  è data da

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

### 1.11 Moto circolare

Si definisce *moto circolare* un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Considerando che la velocità varia continuamente in direzione, l'*accelerazione centripeta* è sempre diversa da zero (e dunque agisce una forza detta *centripeta*, diretta verso il centro della circonferenza). Nel moto circolare uniforme la velocità è costante in modulo e dunque

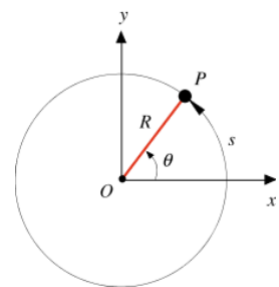
l'accelerazione tangente è nulla perché  $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T = 0$  per cui  $\vec{a} = \vec{a}_N$ . Se

invece il modulo della velocità cambia nel tempo il moto circolare non è uniforme e  $\vec{a}_T$  è diversa da zero (in questo caso la direzione dell'accelerazione non passa per il centro della circonferenza). Il moto circolare può essere descritto utilizzando l'angolo  $\theta(t)$

sotteso dall'arco  $s(t)$  con

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Siamo dunque in un sistema di coordinate polari in cui:  $x(t) = R \cos \theta(t)$  e  $y(t) = R \sin \theta(t)$ . Essendo interessati alle variazioni dell'angolo nel tempo, si definisce *velocità angolare* la derivata dell'angolo rispetto al tempo:





$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

Risulta che la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza. Ricordando che  $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$  si nota che la velocità radiale è nulla perché il raggio vettore è costante e dunque la velocità trasversale coincide con la velocità  $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$ . Dunque ritroviamo che  $v = R\omega$  (solo se l'origine coincide col centro della circonferenza).

Il moto circolare più semplice è quello uniforme:  $v$  e  $\omega$  sono costanti e le leggi orarie, si scrivono:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + vt & s &= s_0 \text{ per } t = 0 \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega t & \theta &= \theta_0 \text{ per } t = 0 \end{aligned}$$

Il termine *uniforme* indica esclusivamente costanza del modulo della velocità: *il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria.*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Si tratta anche di un moto periodico con periodo  $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ , corrispondente al tempo necessario per compiere un giro completo.

Nel caso di moto circolare **non uniforme** bisogna considerare anche l'accelerazione tangenziale  $a_T = \frac{dv}{dt}$ . Siccome è variabile anche  $\omega$  si definisce l'*accelerazione angolare*

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

Dove si è semplicemente derivata la velocità angolare. Se invece è nota  $\alpha(t)$  si può integrare, ottenendo:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \\ \theta(t) &= \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt \end{aligned}$$

Se invece, è nota  $\alpha(\theta)$  è possibile calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza dell'incremento angolare  $\theta - \theta_0$ . Infatti:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2$$

Un caso particolare di moto circolare non uniforme è il moto circolare uniformemente accelerato in cui  $\alpha = \text{costante}$  ovvero  $\alpha_T = \text{costante}$ . Ponendo  $t_0 = 0$  dalle formule di integrazione precedente, si ottiene:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

E l'accelerazione centripeta vale  $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$

## Notazione vettoriale

Si definisce velocità angolare il vettore  $\vec{\omega}$  che ha queste proprietà: modulo  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ; direzione perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza; verso tale che dall'estremo del vettore  $\vec{\omega}$  il moto appaia antiorario. Dunque:

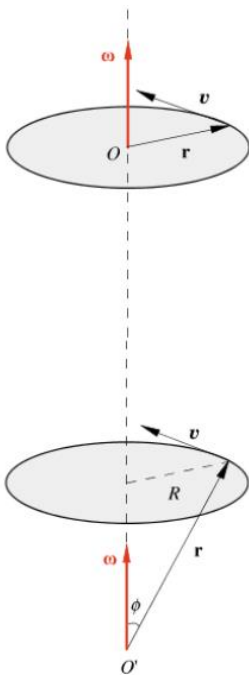
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

La notazione è valida se  $\vec{\omega}$  è applicata in qualsiasi punto dell'asse di rotazione. Infatti direzione e verso di  $\vec{v}$  restano uguali e il modulo vale ancora  $v = \omega r \sin\phi = \omega R$ . Da  $\vec{\omega}$  per derivazione rispetto al tempo si ottiene il vettore accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$  che risulta parallelo a  $\vec{\omega}$  dato che questa ha direzione costante e il verso è determinato dalla variazione del modulo di  $\omega$  e modulo  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ .

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \alpha = \alpha \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Il primo termine  $\alpha \times \vec{r}$  è l'accelerazione tangenziale  $\vec{\alpha}_T$  di modulo  $\alpha R$  e il secondo  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  è l'accelerazione centripeta  $\alpha_N$  di modulo  $\omega^2 R$ .

Nel moto circolare uniforme  $\vec{\omega}$  è un vettore costante anche in modulo,  $\vec{\alpha}$  è nulla e  $\vec{a} = \vec{\alpha}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}$ .

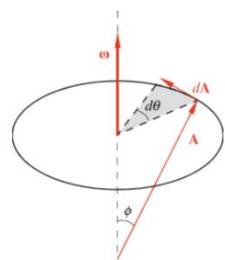
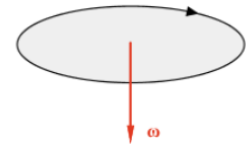
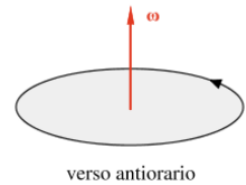


Dalla figura si nota una proprietà importante: il vettore  $\vec{r}$  applicato in  $O'$  ha modulo costante e descrive un moto rotatorio attorno all'asse di rotazione, ovvero alla direzione di  $\vec{\omega}$ , formando un angolo  $\phi$  costante con l'asse stesso. La derivata  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Anche il vettore  $\vec{v}$ , che nel moto circolare ha modulo costante, descrive una rotazione attorno  $\vec{\omega}$  e con cui forma un angolo  $\phi = \frac{\pi}{2}$  e la derivata  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ . Il moto che prevede la rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso, con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune viene detto *moto di precessione*.

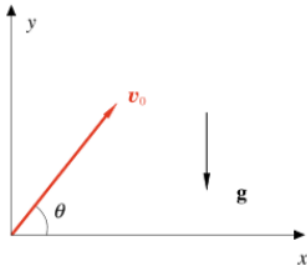
Dato dunque un vettore di modulo costante  $\vec{A}$  che descrive un moto di precessione con velocità angolare  $\vec{\omega}$ , la sua derivata temporale può essere scritta:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Si nota anche che in modulo:  $dA = A \sin\phi d\theta$  e  $\frac{dA}{dt} = A \sin\phi \frac{d\theta}{dt} = \omega A \sin\phi = |\vec{\omega} \times \vec{A}|$



## 1.12 Moto parabolico dei corpi



Si vuole studiare il moto di un punto  $P$  lanciato dall'origine  $O$  con velocità iniziale  $\vec{v}_0$  formante un angolo  $\theta$  con l'asse delle ascisse. In particolare, si vuole calcolare la traiettoria, la massima altezza raggiunta e la posizione  $G$  in cui il punto ricade sull'asse  $x$ , ovvero la gittata  $OG$ . Il moto è caratterizzato da accelerazione costante  $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{u}_y$  e le condizioni iniziali sono:  $\vec{r} = 0$  e  $\vec{v} = \vec{v}_0$  al tempo  $t = 0$ , istante di lancio.

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt = \vec{v}_0 - gt\hat{u}_y$$

Ed essendo  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{u}_x + v_0 \sin \theta \hat{u}_y$  si ottiene:

$$v(t) = v_0 \cos \theta \hat{u}_x + (v_0 \sin \theta - gt) \hat{u}_y$$

Dunque le velocità dei moti proiettati sugli assi sono  $v_x = v_0 \cos \theta$ , costante, e  $v_y = v_0 \sin \theta - gt$ . Le leggi orarie dei moti proiettati sono

$$x = v_0 \cos \theta t, \quad y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si nota che sull'asse  $x$  il moto è uniforme, mentre sull'asse  $y$  il moto è uniformemente accelerato.

Per ricavare la *traiettoria* si elimina il tempo tra  $x(t)$  e  $y(t)$ :  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$  e si ricava  $y(x)$

$$y(x) = v_0 \sin \theta \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \rightarrow y(x) = xtg\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

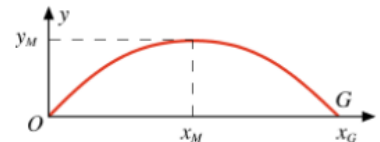
Che risulta essere l'equazione di una parabola.

La direzione del moto può essere caratterizzata dall'angolo  $\phi$  che il vettore velocità forma con l'asse orizzontale:

$$tg\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \theta - gt}{v_0 \cos \theta} = tg\theta - \frac{gt}{v_0 \cos \theta} = tg\theta - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

Per calcolare la *gittata*  $OG$  si impone  $y(x) = 0$  e si ottengono due soluzioni: una  $x = 0$  e l'altra:

$$x_G = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta tg\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} = 2x_M$$



Dove  $x_M = \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}$  è la coordinata del punto di mezzo del segmento  $OG$  e, per la simmetria della parabola, è l'ascissa del punto di altezza massima. L'altezza massima raggiunta è:

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

L'angolo di lancio per cui si ha la gittata massima si ottiene con la condizione  $\frac{dx_G}{d\theta} = 0$  cioè  $\frac{2v_0^2}{g}(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0$  ottenendo  $\theta = 45^\circ$  e  $(x_g)_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

Il tempo totale di volo  $t_G$  è pari al tempo impiegato a percorrere  $OG$  con velocità costante  $v_x = v_0 \cos \theta$ :

$$t_G = \frac{2x_M}{v_0 \cos \theta} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = 2t_M$$

Si nota dunque che coincide col tempo necessario per salire all'altezza  $y_M$  e per ritornare al suolo. Nella posizione G, infine, la velocità è la stessa in modulo che alla partenza, ma posta simmetricamente rispetto all'asse  $x$ :

$$v_x(t_G) = v_0 \cos \theta, \quad v_y(t_G) = -v_0 \sin(\theta), \quad tg \phi = -tg \theta$$

## Dinamica del punto

### 2.1 Principio d'inerzia. Introduzione al concetto di forza

Questo capitolo spiega *perché* avviene il moto e quali sono le cause fisiche per cui un corpo entra in movimento e descrive un certo tipo di moto rispetto ad un altro.

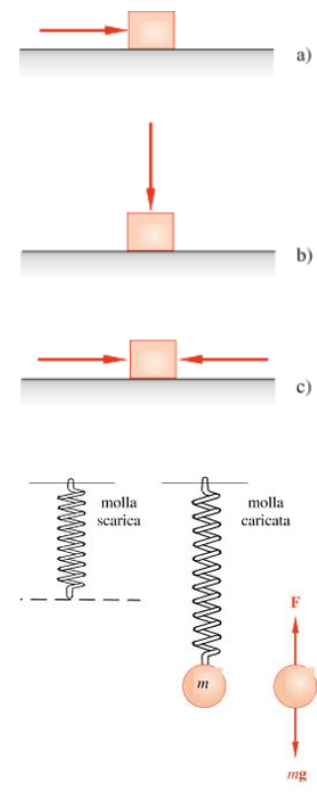
La variazione dello stato di moto di un punto è determinata dall'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa dal concetto di forza.

**Principio d'inerzia:** *un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in uno stato di quiete se era in quiete ( $\vec{v} = 0$ ) oppure si muove di moto rettilineo uniforme ( $\vec{v}$  costante non nullo).* L'assenza di forza non implica velocità nulla ma comporta che la velocità non vari.

Dato che il principio d'inerzia richiede, in caso di moto, che questo sia rettilineo uniforme, un moto accelerato segnala la presenza di una forza agente.

La *forza* non è solo quella legata alla sensazione di sforzo muscolare ma lo è anche quella che avviene attraverso un'interazione a distanza per le forze di attrazione gravitazionale. La *forza* è dunque la *grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici*. L'effetto di una forza cambia con la direzione, come visualizzato nel disegno. Nel caso a) vi è un moto, in b) non vi è moto ma solo la deformazione del corpo e del supporto, mentre nel caso c) non si manifesta alcun moto.

Il caso c) introduce l'eguaglianza di due forze e di *equilibrio*, mentre nel caso b) si intuisce che il piano orizzontale deformandosi produca una forza che fa equilibrio a quella applicata dall'esterno e ciò viene detto *reazione vincolare*. La forza si può misurare attraverso un *dinamometro* supponendo di appendere all'estremità di una molla un corpo di massa  $m$  che risente della forza di attrazione della terra  $m\vec{g}$ . In condizioni di equilibrio la forza  $\vec{F}$  sviluppata dalla molla eguaglia quella esercitata dalla terra. E' possibile misurare la forza esercitata misurando l'allungamento  $x_c$  della molla, che è proporzionale alla forza.



### 2.2 Leggi di Newton

La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla *legge di Newton*

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza  $\vec{F}$ , determina l'accelerazione del punto ovvero la variazione della sua velocità nel tempo;  $m$  rappresenta la massa inerziale del punto.

**Massa inerziale:** esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la velocità.

**Punto materiale:** per descrivere il comportamento dinamico del punto occorre conoscere la sua massa; si può cioè semplificare al massimo concependo un corpo privo di struttura, ma non si può rinunciare alla massa che è un concetto dinamico fondamentale per qualsiasi corpo.

In assenza di interazioni la forza è nulla e dunque  $\vec{a} = 0$  e  $\vec{v} = \text{costante}$ . Dunque la legge di Newton contiene come caso particolare, il principio di inerzia. La legge di prima si può anche scrivere

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Si nota come dalle caratteristiche della forza è possibile risalire a quelle del moto. Questa legge è sperimentale ed è dedotta dall'analisi del moto di un punto soggetto ad una determinata forza. Sempre l'esperienza conferma che la legge è una *legge vettoriale*. Dal punto di vista matematico si nota che la legge è un'equazione differenziale tra  $\vec{F}$  e  $\vec{v}$  o tra  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$ . La legge di Newton è da intendere anche come vera definizione della grandezza forza, poiché seguendola, viene definito forza tutto ciò che causa una variazione dello stato di moto di un corpo.

Limiti della legge di Newton:

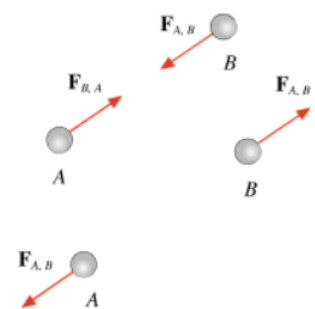
- Valida solo se il moto è studiato in una particolare classe di sistemi di riferimento detti *sistemi di riferimento inerziali*. Viceversa, bisogna aggiungere dei termini correttivi.
- La legge di Newton è applicabile, anche in un sistema di riferimento inerziale, solo se la velocità dei punti considerati è molto minore della velocità della luce.

### Terza legge di Newton

Se un corpo A esercita una forza  $\vec{F}_{A,B}$  su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza  $\vec{F}_{B,A}$  sul corpo A. Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto, esse cioè sono uguali e contrarie.

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

Inoltre, esse hanno la stessa retta d'azione, come mostrato in figura nei due casi possibili di forze attrattive e repulsive. Tale legge viene anche detta *principio di azione e reazione*.



### 2.3 Quantità di moto. Impulso

Si definisce *quantità di moto* di un punto materiale il vettore

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

E se la massa è costante allora è possibile scrivere

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Questa relazione è la forma più generale della legge di Newton, utilizzabile anche se la massa non è costante. Questa relazione spiega che lo stato dinamico del punto è individuato dalla quantità di moto, in cui compaiono massa e velocità; l'azione di una forza determina la variazione nel tempo della quantità di moto, ovvero di qualcuna o tutte le quantità: massa, direzione, verso, modulo della velocità.

Un punto materiale in senso stretto, cioè privo di struttura, ha massa costante, qualunque sia la sua velocità. Se invece con un punto si approssima un sistema materiale esteso, la massa può variare durante il moto.

Dalla formula di cui sopra si ottiene

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

E si nota che l'azione di una forza durante un tempo  $dt$  provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. Si ha dunque

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$$

Il termine  $\vec{J}$ , integrale della forza nel tempo, è chiamato *impulso della forza* e la relazione esprime il *teorema dell'impulso*: l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto; con  $m$  costante si ha:

$$\vec{J} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = m\Delta\vec{v}$$

La formula del teorema dell'impulso è la *forma integrale della seconda legge di Newton* e ci dice qual è l'effetto complessivo in un intervallo di tempo finito (a differenza della legge di Newton iniziale che vale in ciascun istante in cui si considera l'applicazione della forza).

Si è dunque trovato il legame tra forza e variazione di velocità. Se la forza è costante diventa semplicemente

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \frac{\vec{F}t}{m}$$

Il teorema dell'impulso è utilizzabile per calcolare  $\Delta\vec{p}$  solo se si conosce la funzione  $\vec{F}(t)$ , in particolare se  $\vec{F}$  è costante. Se invece si misura  $\Delta\vec{p}$ , applicando il teorema della media all'integrale  $\int_0^t \vec{F} dt$  si può sempre calcolare il valore medio  $\vec{F}_m$  della forza agente nell'intervallo di tempo  $t$ :  $\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{t}$ .

Quando  $\vec{F}$  è nulla,  $\Delta\vec{p} = 0$  e pertanto  $\vec{p} = \text{costante}$ : in assenza di forza applicata la quantità di moto di un punto materiale rimane costante, cioè la quantità di moto si conserva.

## 2.4 Risultante delle forze. Equilibrio. Reazioni vincolari

La forza è una grandezza vettoriale e verifica di tale affermazione si ha quando su un punto materiale agiscono contemporaneamente più forze: si nota che il moto del punto ha luogo come se agisse una sola forza detta *risultante vettoriale delle forze* applicate al punto:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i$$

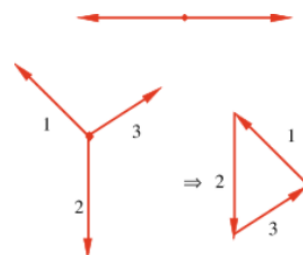
L'accelerazione del punto è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che il punto avrebbe se agisse ciascuna forza da sola:

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_i \vec{a}_i$$

Questo fa notare che in presenza di più forze ciascuna agisce indipendentemente dalle altre, comunicando sempre al punto l'accelerazione  $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$  e si parla di *indipendenza delle azioni simultanee*. D'altra parte, studiando il moto di un punto materiale si ottengono informazioni solo sulla risultante delle forze agenti sul punto stesso e non sulle singole forze. Dunque, affermare che  $\vec{R} = 0$  non implica che sul punto non agiscono forze, ma indica che la somma di esse è nulla. Se  $\vec{R} = 0$  il punto ha inizialmente velocità nulla e dunque è in quiete: sono realizzate le condizioni di *equilibrio statico* del punto. Devono dunque essere nulle le componenti stesse della risultante, ovvero (con riferimento a un sistema di assi cartesiani):

$$\begin{aligned} R = \sum_i \vec{F}_i = 0 &\rightarrow R_x = R_y = R_z = 0 \\ \rightarrow \sum_i F_{ix} = 0 &\quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad \sum_i F_{iz} = 0 \end{aligned}$$

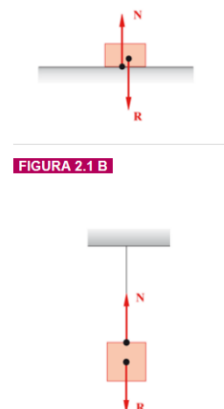
La condizione di equilibrio statico tra due forze si ha quando esse sono uguali ed opposte, mentre con tre forze devono essere complanari e disposte



secondo i lati di un triangolo. Se le forze sono di numero superiore a tre, esse devono poter essere disposte in modo da formare una poligonale chiusa.

### Reazioni vincolari

Se un corpo, soggetto all'azione di una o più forze rimane fermo, bisogna dedurre che l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante chiamata *reazione vincolare* che si esprime tramite una forza uguale e contraria alla forza (o risultante) agente. Un esempio è un corpo poggiato su di un piano che è soggetto all'azione di attrazione della terra, perpendicolarmente al piano. Per effetto dell'attrazione terrestre, il corpo preme sulla superficie del tavolo deformandola. Dunque il tavolo deve produrre, viste le condizioni di quiete del corpo, una forza uguale e contraria alla forza di attrazione terrestre che viene chiamata *reazione vincolare*  $\vec{N}$ . Se si applicano altre forze al corpo bisogna sempre avere  $\vec{R} + \vec{N} = 0$ .



## 2.5 Classificazione delle forze

Fisica classica:

- *Interazione gravitazionale*
- *Interazione elettromagnetica*

Fisica nucleare:

- *Interazione forte e interazione debole*

## 2.6 Azione dinamica delle forze

Nel caso del moto rettilineo uniforme ( $\vec{v} = \text{costante}$ ,  $\vec{a} = 0$ ) si ha  $\vec{F} = 0$  (anche se agiscono varie forze, purché la risultante sia nulla).

Se il moto è uniformemente accelerato ( $\vec{a} = \text{costante}$ ) la forza agente è vettorialmente costante (cioè in direzione, modulo e verso). Più in generale, se agisce una forza  $\vec{F} = \text{costante}$  la componente del moto nella direzione parallela alla forza è uniformemente accelerata con  $a = \frac{F}{m}$ . Lungo le altre due direzioni (ortogonali tra loro e alla forza) non c'è moto se le relative velocità iniziali sono nulle, oppure si ha un moto rettilineo uniforme se le velocità iniziali lungo tali direzioni sono diverse da zero.

Quando  $\vec{F}$  è variabile si ha un moto vario. Visto che l'accelerazione presenta due componenti, si ha:

$$\vec{F} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N = m \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + m \frac{v^2}{R} \hat{u}_N$$

Dunque, la risultante delle forze agenti sul punto materiale deve avere una componente ortogonale alla traiettoria,  $\vec{F}_N$ , per provocare la variazione della direzione della velocità.  $\vec{F}_N$  è detta *forza centripeta* ed è sempre diversa da zero in un moto curvilineo.

## 2.7 Forza peso

Tutti i corpi, qualunque sia la massa inerziale, assumono se lasciati liberi la stessa *accelerazione*, detta di *gravità*, diretta verticalmente verso il suolo il cui modulo vale in media  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ . Tale accelerazione è conseguenza della forza di attrazione terrestre. Se dunque agisce solo la forza peso  $\vec{P}$  si ha  $\vec{P} = m\vec{a} = m\vec{g}$  visto che  $\vec{a} = \vec{g}$ . Pertanto, la forza peso risulta proporzionale alla massa e si scrive sempre

$$\vec{P} = m\vec{g}$$



Si tratta di una forza costante e in assenza di altre forze il moto ha una componente uniformemente accelerata nella direzione parallela a  $\vec{g}$ . Se invece agiscono altre forze in generale si ha  $a \neq g$ . In particolare un corpo che cade nell'aria presenta un'accelerazione minore di quella di gravità a causa dell'attrito con l'aria.

### La sensazione di peso

Un corpo di massa  $m$  poggiato sul pavimento e in equilibrio statico, esercita una forza sul pavimento e risente di una reazione  $\vec{N}$  che in modulo vale  $m\vec{g}$ . Questa reazione ci dà la sensazione di peso.

Considerando adesso un corpo poggiato su una piattaforma che può muoversi verticalmente con una accelerazione  $\vec{a}$ , si nota che finché il corpo resta sulla piattaforma la sua accelerazione è  $\vec{a}$  e si scrive

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a} \rightarrow \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

In quanto al corpo sono applicate sia la forza peso che la reazione dovuta al contatto con la piattaforma. Tale reazione è incognita e vale in modulo  $m\vec{g}$  solo se  $\vec{a} = 0$ . Risolvendo si trova:

$$\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g})$$

E vi sono quattro casi da esaminare. Come asse di riferimento si sceglie un asse  $z$  verticale orientato verso l'alto, per cui  $\vec{g} = -g\hat{u}_z$ .

- 1)  $\vec{a}$  discorde a  $\vec{g}$ , piattaforma che accelera verso l'alto (o perché sale accelerando o perché scende frenando):

$$\vec{N} = m[a\hat{u}_z - (-g\hat{u}_z)] = m(a + g)\hat{u}_z \rightarrow N > mg$$

Si ha dunque una sensazione di aumento di peso.

- 2)  $\vec{a}$  concorde a  $\vec{g}$  ma minore in modulo:

$$\vec{N} = m[-a\hat{u}_z - (-g\hat{u}_z)] = m(g - a)\hat{u}_z \rightarrow N < mg$$

la sensazione è una diminuzione di peso

- 3)  $\vec{a} = \vec{g} \rightarrow \vec{N} = 0$

non c'è reazione e dunque non vi è sensazione di peso (si realizzerebbe con la piattaforma in caduta libera)

- 4)  $\vec{a}$  concorde a  $\vec{g}$  ma maggiore in modulo: si ha il distacco del corpo dalla piattaforma; infatti la soluzione darebbe  $\vec{N}$  discorde dall'asse  $z$ , la reazione dovrebbe attirare il corpo verso la piattaforma, il che è privo di senso.

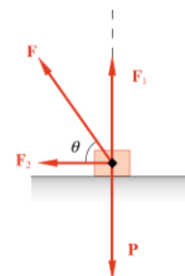
### 2.8 Forza di attrito radente

Applichiamo una forza  $\vec{F}$  ad un corpo appoggiato su un tavolo, in modo da avere una componente  $\vec{F}_1$  normale al piano di appoggio ed una componente  $\vec{F}_2$  parallela al piano. Si osserva sperimentalmente che il corpo non entra in movimento, per effetto della componente  $\vec{F}_2$ , finché il modulo di tale componente non superi il valore  $\mu_s N$  dove  $\mu_s$  è il *coefficiente di attrito statico* ed  $N$  è il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare. La condizione per mettere in moto il corpo è dunque  $F_2 > \mu_s N$ .

Supponiamo che la forza  $\vec{F}$  formi un angolo  $\theta$  con il piano di appoggio e perciò si ha che  $F_1 = F \sin \theta$  e  $F_2 = F \cos \theta$ . La reazione  $\vec{R}$  del piano, in condizioni di equilibrio statico del corpo, è

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = 0$$

Proiettando l'equazione sulle direzioni ortogonali tra loro, e chiamando  $N$  e  $F_{as}$  le corrispondenti componenti di  $\vec{R}$  si ha:



$$N - P + F_1 = 0 \rightarrow N = P - F_1 = P - F \sin \theta$$

$$F_2 + F_{as} = 0 \rightarrow F_{as} = -F_2 = -F \cos \theta$$

La condizione di appoggio del corpo è data da  $N > 0$  cioè  $P > F \sin \theta$ . Se questa è soddisfatta (cioè la forza non solleva il corpo) la componente parallela al piano di appoggio della reazione vincolare controbilancia, quando il corpo è in quiete, la componente orizzontale della forza applicata. Dovendo essere  $F_2 \leq \mu_s N$  la condizione in quiete si scrive

$$F \cos \theta \leq \mu_s (P - F \sin \theta) \rightarrow F \leq \frac{\mu_s mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

In particolare se  $\theta = 0$  si ha  $F_1 = 0$  e  $F_2 = F$  e le componenti di  $R$  sono:

$$N = P = mg, \quad F_{as} = -F_2 = -F$$

La condizione di quiete si scrive

$$F \leq \mu_s N = \mu_s mg$$

In altre parole, a causa della forza che preme il corpo contro il piano, si sviluppa una forza di attrito statico  $F_{as}$  che è capace di equilibrare la forza orizzontale applicata  $F_2$ .  $F_{as}$  non ha un valore prefissato, ma è uguale a  $F_2$  per valori di questa compresi tra 0 e  $\mu_s N$ . Quando  $F_2$  supera  $\mu_s N$  il corpo entra in movimento lungo il piano e si osserva che si oppone al moto la *forza di attrito radente dinamico*  $F_{ad} = \mu_d$  dove  $\mu_d$  rappresenta il *coefficiente di attrito dinamico*; risulta sempre  $\mu_d < \mu_s$ . L'equazione del moto è dunque

$$F \cos \theta - \mu_d N = ma$$

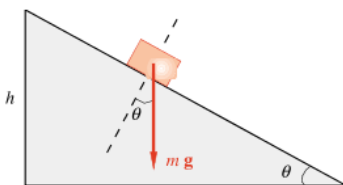
La componente normale della reazione  $N$  è sempre data da  $P - F \sin \theta$  in quanto ortogonalmente al piano non c'è moto, non c'è accelerazione e la risultante delle forze è nulla.

La forza di attrito dinamico non dipende dalla velocità del corpo rispetto al piano di appoggio ed ha verso contrario alla direzione del moto e quindi al versore della velocità  $\hat{u}_v$ . Vettorialmente

$$F_{ad} = -\mu_d N \hat{u}_v$$

Le forze di attrito radente si originano dalle *forze di coesione* tra due materiali: il valore del coefficiente di attrito dipende dallo stato delle superficie a contatto e dalla loro composizione chimica. Per semplificare i calcoli negli esercizi e per porre dunque la forza di attrito a zero, si dirà che la superficie di scorrimento è *liscia*.

## 2.9 Piano inclinato



Consideriamo un corpo, assimilabile ad un punto materiale di massa  $m$ , che possa muoversi sotto l'azione del suo peso e di eventuali altre forze (compresa la forza di attrito radente), su una superficie inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto al piano orizzontale.

Se agisce solo la forza peso  $\vec{P}$  (in assenza dunque di attriti), si ha:

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Dove  $R$  ha un'unica componente normale al piano stesso (*vincolo liscio*). Scomponendo lungo le direzioni si ha

$$mg \cos \theta - N = 0, \quad mg \sin \theta = m\vec{a}$$

dato che il corpo è vincolato a muoversi lungo il piano inclinato. Dalla prima condizione si ricava che  $N = mg \cos \theta$  mentre dalla seconda si ha  $a = g \sin \theta < g$ . Il corpo scende con moto uniformemente accelerato e l'accelerazione è inferiore a quella di gravità.

Se invece esiste un attrito radente tra il piano inclinato e il corpo, il moto lungo il piano non può iniziare se  $mg\sin\theta \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$ . La componente normale di  $\vec{R}$  vale ancora  $N = mg\cos\theta$  però adesso compare anche la componente parallela al piano inclinato, che in equilibrio statico vale  $-mg\sin\theta$ . Dunque la condizione per l'equilibrio statico è  $tg\theta \leq \mu_s$ .

Per avere moto occorre aumentare l'angolo di inclinazione  $\theta$  in modo da non soddisfare la condizione:

$$mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta = ma$$

$$a = (\sin\theta - \mu_d \cos\theta)g$$

Dovendo essere il termine tra parentesi positivo, si ha per il coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d < tg\theta$  e in particolare se  $\mu_d = tg\theta$  ottengo  $a = 0$ .

Riassumendo, se il corpo è fermo sul piano inclinato esso resta fermo per tutti gli angoli di inclinazione compresi tra 0 e  $\theta_s$  tale che  $tg\theta_s = \mu_s$ . Per  $\theta > \theta_s$  il corpo non può rimanere fermo e scende lungo il piano inclinato. Però una volta che il corpo si è messo in moto, poiché la forza di coesione di queste condizioni è minore di quella in quiete (cioè  $\mu_d < \mu_s$ ), si può avere moto anche per angoli minori di  $\theta_s$  precisamente compresi tra  $\theta_s$  e  $\theta_d < \theta_s$  tale che  $tg\theta_d = \mu_d$ .

Se invece il corpo all'istante iniziale sta scendendo lungo il piano con velocità  $v_0$  esso si ferma se  $mg\sin\theta < \mu_d mg\cos\theta$  cioè se  $tg\theta < \mu_d$ , si muove di moto uniformemente accelerato se  $tg\theta > \mu_d$  e prosegue con velocità  $v_0$  se  $tg\theta = \mu_d$ .

L'unica differenza rispetto alla partenza da fermo è che si può avere moto anche se  $tg\theta < \mu_d$  proprio perché c'è una velocità iniziale.

La misura degli angoli  $\theta_s$  a cui un corpo comincia a scivolare, e  $\theta_d$ , per cui il moto è uniforme, è utile per determinare i coefficienti  $\mu_s$  e  $\mu_d$ .

## 2.10 Forza elastica

Una forza elastica è una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre ad un punto O (centro) e con modulo proporzionale alla distanza da tale centro. Se si assume come asse  $x$  la direzione della forza e come origine il centro è possibile scrivere:

$$\vec{F} = -kx\hat{u}_x$$

Dove  $k$  è una costante positiva detta *costante elastica*, e  $\hat{u}_x$  è il versore dell'asse  $x$ . Il moto risultante per effetto di una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla o diretta come  $\hat{u}_x$ .

L'accelerazione vale

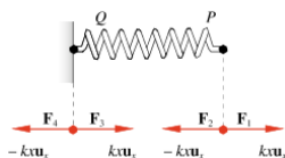
$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

E quindi si tratta di un *moto armonico semplice* con pulsazione  $\omega$  e periodo  $T$  determinati come segue:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Una forza elastica viene, nella pratica, applicata tramite una molla. Essa presenta una lunghezza a riposo, cioè quando non si trova in condizioni di compressione o estensione, di valore finito  $l_0$ . Se la molla viene estesa assumendo lunghezza  $l > l_0$  essa sviluppa una forza  $\vec{F}$  che tende a riportarla nella condizione di riposo

$$F = -k(l - l_0) = -kx$$



Dove  $x > 0$  rappresenta la deformazione. Nel caso in cui la molla è compressa l'espressione è identica ma semplicemente  $x < 0$ . Il modulo di questa *forza di richiamo* è proporzionale alla deformazione fino a che non si supera il limite di elasticità della molla.

Se si vuole mantenere la molla deformata con una determinata lunghezza  $l$  bisogna applicare alla molla una forza uguale ed opposta alla forza esercitata

dalla molla.

Supponiamo dunque di avere una molla deformata con  $l - l_0 = x > 0$  dove da un lato è fissata al muro e dall'altro viene esercitata una forza esterna  $\vec{F}_1$ . Tale forza deve bilanciare quella dovuta alla deformazione della molla  $\vec{F}_2$  e dunque sarà  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . Nel punto Q la situazione è analoga ma la forza elastica  $\vec{F}_3$  è bilanciata dalla reazione vincolare che si sviluppa nel punto di aggancio  $\vec{F}_4 = -\vec{F}_3$ . Considerando che la molla nel suo insieme è ferma, deve essere nulla la risultante delle forze applicate alla molla e dunque deve essere  $F_1 = -F_4$  e  $F_2 = -F_3$ .

Da questo risultato si deduce che se si ha una molla libera ad entrambi gli estremi e la si vuole deformare di una quantità  $x$  bisogna applicare agli estremi due forze uguali e contrarie di modulo  $kx$ .

Supponiamo ora di avere la molla bloccata all'estremo Q, deformata di  $x_0$ , e che in P sia fissato alla molla un punto materiale di massa  $m$ . Se all'istante  $t = 0$  il punto viene lasciato libero con velocità nulla (c.i.  $x = x_0$  e  $v = 0$  per  $t = 0$ ), esso si muove di moto armonico per effetto della forza elastica agente su di esso. La soluzione dell'equazione del moto

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

È quella nota,  $x = A \sin(\omega t + \phi)$  con  $\omega$  dato dalla formula precedente. I valori delle costanti  $A$  e  $\phi$  si calcolano dalle condizioni iniziali

$$x_0 = A \sin \phi, \quad 0 = \omega A \cos \phi$$

Dato che  $v = \omega A \cos(\omega t + \phi)$ . Per  $\phi$  compreso tra  $0$  e  $2\pi$  sono possibili le due soluzioni  $A = x_0, \phi = \frac{\pi}{2}$  e  $A = -x_0, \phi = \frac{3\pi}{2}$ . In ogni caso si hanno per la legge oraria e per la velocità le espressioni:

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad v = -\omega x_0 \sin \omega t$$

Se le condizioni iniziali sono diverse si ottiene sempre un moto armonico con la medesima  $\omega$ , però il valore dell'ampiezza è in generale diverso da  $x_0$ . Per esempio con  $x = x_0$  e  $v = v_0$  per  $t = 0$  si ottiene

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan \phi = \omega \frac{x_0}{v_0}$$

$A$  risulta maggiore di  $x_0$  a causa della velocità iniziale diversa da zero.

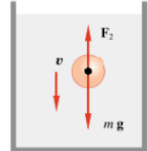
## 2.11 Forza di attrito viscoso

La *forza di attrito viscoso* è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza:

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

L'accelerazione risulta  $\vec{a} = -\frac{b}{m}\vec{v}$ . Forze di questo tipo sono esercitate in alcune condizioni su un corpo che si muove in un fluido (liquido o gas). Consideriamo ad esempio un punto materiale di massa  $m$  lasciato cadere in un fluido e si assuma che le uniche forze agenti siano la forza peso  $\vec{F}_1 = m\vec{g}$  e la forza di attrito viscoso  $\vec{F}_2 = -mk\vec{v}$  (supponendo  $b = mk$ ). Le condizioni iniziali del moto sono  $x = 0$  e  $v = 0$  per  $t = 0$ . Applicando Newton si ha:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{g} - mk\vec{v} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

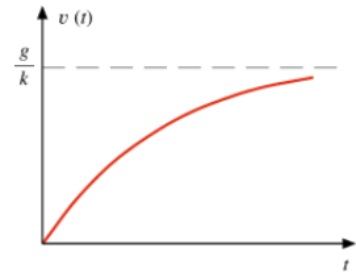


Ed essendo la velocità iniziale nulla, il moto ha solo direzione lungo l'asse verticale  $z$  (orientato verso il basso). Proiettando su  $z$  l'equazione del moto si ha

$$\frac{dv}{dt} = g - kv \rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt$$

Separando le variabili e risolvendo l'integrale si ottiene

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \rightarrow -\frac{1}{k} [\ln(g - kv)]_0^v = t \\ \rightarrow \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt \rightarrow v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$



Dunque, partendo da zero la velocità cresce, però sempre più lentamente e per  $t \gg \frac{1}{k}$ ,  $v$  assume il valore costante  $\frac{g}{k}$ .

Dunque, sotto l'azione della sola forza peso il moto sarebbe uniformemente accelerato e la forza di attrito si oppone all'aumento di velocità, rendendolo *al limite un moto uniforme*.

Quando  $v$  assume il valore  $\frac{g}{k}$  si ha equilibrio dinamico tra le due forze e la loro risultante si annulla: di conseguenza la velocità non può più cambiare e si instaura un moto uniforme.

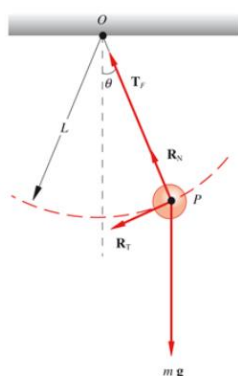
## 2.12 Forze centripete

Si supponga che la risultante  $\vec{R}$  delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente  $F_N$  ortogonale alla traiettoria, che risulta pertanto curvilinea.  $F_N$  determina l'accelerazione centripeta secondo la relazione  $F_N = ma_N = m\frac{v^2}{r}$ . In generale  $R$  ha anche una componente tangenziale che è responsabile della variazione del modulo della velocità. Se  $F_T = 0$  il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è  $a_N$ .

Equilibrio dinamico: particolare caso in cui *in presenza di forze il moto avviene con velocità costante in modulo*. Se il moto è curvilineo basta che sia nulla  $F_T$ , se rettilineo è possibile solo se la risultante delle forze è nulla.

Esempi pag. 61

## 2.13 Pendolo semplice



Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo ed il filo teso. La forza esercitata sul filo (detta anche *tensione del filo*) vale in modulo  $T_F = mg$ .

Se si sposta il punto dalla verticale, esso inizia ad oscillare lungo un arco di circonferenza di raggio  $L$ , pari alla lunghezza del filo.

Le forze agenti sul punto  $P$  sono il peso  $m\vec{g}$  e la tensione del filo  $\vec{T}_F$  perciò il moto è regolato da:  $m\vec{g} + \vec{T}_F = m\vec{a}$ . Scomponendo le forze lungo la traiettoria, si ottiene

$$R_T = -mg\sin\theta = ma_T, \quad R_N = T_F - mg\cos\theta = ma_N$$

Il segno negativo della componente lungo la traiettoria è dovuto al fatto che la forza ha segno opposto rispetto a quello della coordinata  $s$  sulla traiettoria.  $R_T$  è una forza che tende a riportare il punto verso la verticale, anche se non è di direzione costante (dipende quindi dalla posizione del punto rispetto alla verticale).

Ricordando le formule per l'accelerazione angolare, si ha:

$$a_T = L \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad a_N = \frac{v^2}{L}$$

E sostituendo alle formule precedenti si ottiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta, \quad m \frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\theta$$

La prima è l'*equazione differenziale del moto del pendolo*, la cui soluzione fornisce la legge oraria del moto  $\theta(t)$  però per  $\theta$  qualsiasi la soluzione è complicata.

Convien dunque considerare piccoli valori di  $\theta$  e sviluppando in serie  $\sin\theta$  si può approssimare quest'ultimo con  $\theta$  (per  $\theta < 0.122\text{rad}$ ) commettendo un errore molto piccolo. Perciò, per *piccole oscillazioni* l'equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Ed essa coincide a quella del moto armonico semplice, posto  $\omega^2 = \frac{g}{L}$ . Dunque, si può concludere che per piccole oscillazioni il moto del pendolo è oscillatorio armonico. La legge oraria del moto è

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Dove  $\theta_0$  è l'ampiezza dell'oscillazione e  $\phi$  la fase iniziale e dipendono dalle condizioni iniziali del moto. Il periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è data da

$$s = L\theta = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Mentre la velocità angolare e la velocità lineare hanno le espressioni

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Si nota che la velocità è massima quando passa per la verticale  $\theta = 0$  ed è nulla agli estremi  $\theta = \theta_0$  dove il verso del moto si inverte.

Quando invece l'ampiezza delle oscillazioni non è piccola, il moto è ancora periodico ma **non** è armonico, ed il periodo  $T'$  dipende dall'ampiezza. Risolto il problema del moto, e note quindi  $\theta(t)$  e  $v(t)$  è possibile ritornare all'equazione del moto proiettata sulla normale alla traiettoria e calcolare la *tensione del filo*

$$T_F = m \left[ g \cos \theta(t) + \frac{v^2(t)}{L} \right]$$

La tensione è massima nella posizione verticale (dove sia  $\theta(t)$  che  $v(t)$  assumono valore massimo) ed è minima nei punti di inversioni.

## 2.14 Tensione dei fili

Nel pendolo, il filo di sostegno serve per applicare una certa forza al punto in movimento: il filo risulta teso e la forza con direzione lungo il filo teso viene detta *tensione del filo*. Si supporrà sempre che il filo sia *inestensibile*, cioè che la sua lunghezza sia costante, e di *massa trascurabile* rispetto alle altre masse. L'ipotesi che il filo sia inestensibile comporta che tutti i punti del filo, compresi gli estremi, abbiano la stessa accelerazione. Perciò due corpi in movimento collegati da un filo teso devono avere la **stessa** accelerazione. L'ipotesi che la massa sia trascurabile fa sì che il prodotto  $ma$  risulti nullo per il filo. Inoltre, non è necessario che il filo sia completamente rettilineo. Esso può scorrere attorno ad un perno o essere parzialmente avvolto attorno ad un disco mobile (carrucola), allo scopo di *modificare la direzione della forza*.

## 2.15 Lavoro. Potenza. Energia cinetica

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una generica traiettoria curvilinea e sia  $\vec{F}$  la risultante delle forze agenti sul punto. Si definisce *lavoro della forza  $\vec{F}$*  compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A alla posizione B, la quantità scalare

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos \theta \, ds = \int_A^B F_T \, ds$$

Il lavoro è l'*integrale di linea della forza*, cioè è dato dalla somma di infiniti contributi infinitesimi  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_T ds$ . In generale lungo la traiettoria sia  $\vec{F}$  che  $\theta$  sono variabili. I casi possibili sono tre:

- $\theta < \frac{\pi}{2}$  l'accelerazione tangente è concorde con la velocità e la fa aumentare:  $dW$  è positivo e viene chiamato **lavoro motore**.
- $\theta > \frac{\pi}{2}$  il punto viene frenato e  $dW$  risulta negativo e viene detto **lavoro resistente**.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$  ed  $\vec{F}$  è ortogonale alla traiettoria, dunque il lavoro è nullo.  $\vec{F}$  ha azione puramente centripeta e non fa variare il modulo della velocità.

Quando  $\vec{F}$  è la somma di  $n$  forze  $F_1, F_2, \dots, F_n$  per ciascuna si può calcolare il corrispondente lavoro  $W_i$  e risulta  $W = \sum_i W_i$ :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \dots + \int_A^B \vec{F}_n \cdot d\vec{s} = W_1 + \dots + W_n$$

Il lavoro è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

### Potenza

La potenza corrisponde al *lavoro per unità di tempo*:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_T v$$

Questa è la **potenza istantanea** che in generale è variabile durante il moto, e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro. La **potenza media** è invece il rapporto  $\frac{W}{t}$  cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante cui il lavoro è stato svolto.

### Energia cinetica

Riprendendo la relazione relativa al lavoro infinitesimo associato ad uno spostamento  $ds$ , si ottiene:

$$dW = F_T ds = ma_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv dv$$

In questo modo si trova il legame esplicito tra il lavoro infinitesimo e la variazione infinitesima del modulo della velocità. Per un percorso finito da A a B si avrà:

$$W = \int_A^B mv dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

La formula prende il nome di **teorema dell'energia cinetica** ed essendo ricavata dalla legge di Newton ha validità generale, qualunque sia la forza che agisce. Se  $W > 0$  l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale, mentre se  $W < 0$  l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale. Se  $W = 0$  l'energia cinetica resta costante, e ciò si verifica ad esempio nel moto circolare uniforme: il lavoro della forza centripeta, unica forza agente, è nullo e quindi la velocità rimane costante in modulo.

Riprendendo le definizioni di energia cinetica e di quantità di moto

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

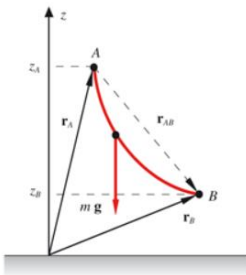
Si nota che tra energia cinetica e modulo della quantità di moto sussistono le relazioni

$$E_k = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \sqrt{2mE_k}$$

Tutte le leggi con cui vengono definite le varie forme di energia contengono sempre la *variazione di energia* e pertanto tali quantità possono essere definite a meno di una costante. Questo perché ad esempio l'energia cinetica andrebbe scritta come  $\frac{1}{2}mv^2 + c$  ma nella differenza la costante scompare.



## 2.16 Lavoro della forza peso



Viene ora calcolato il lavoro della forza peso per uno spostamento generico dalla posizione A a quella B (come in figura). L'asse  $z$  è orientato dal suo verso l'alto ed ha verso opposto a quello di  $\vec{g}$ . Si ha:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB}$$

Questo perché  $\vec{F}$  è costante e l'integrale vale  $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_{AB}$ . Visto che il peso ha una sola componente diversa da zero, cioè quella secondo l'asse  $z$  che vale  $-mg$ , e la componente di  $r_{AB}$  lungo l'asse  $z$  è  $z_B - z_A$ , il prodotto scalare si scrive semplicemente  $(mg)_z(r_{AB})_z = -mg(z_B - z_A)$  e pertanto il lavoro della forza peso vale

$$W = -(mgz_B - mgz_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

*Il lavoro è uguale all'opposto della variazione di questa funzione durante lo spostamento da A a B e pertanto non dipende dalla particolare traiettoria che collega A e B. La funzione  $E_p$  si chiama energia potenziale della forza peso.*

### Lavoro di una forza costante

La trattazione della forza peso può essere estesa a qualsiasi altra forza costante  $F$  prendendo come asse  $z$  un asse parallelo e discorde a  $F$ , il lavoro di  $F$  per uno spostamento tra due punti, le cui coordinate  $z$  sono  $z_A$  e  $z_B$ , vale

$$W = -(Fz_B - Fz_A) = -\Delta E_p$$

Dove ora  $E_p = Fz$ . Se invece si scegliesse l'asse  $z$  concorde a  $\vec{F}$ , sarebbe sempre  $W = -\Delta E_p$ , con  $E_p = -Fz$  ( $= -mgz$  nel caso del peso)

## 2.17 Lavoro di una forza elastica

Il lavoro della forza elastica  $\vec{F} = -kx\hat{u}_x$  per uno spostamento lungo l'asse  $x$  vale

$$W = \int_A^B -kx\hat{u}_x \cdot dx \hat{u}_x = -k \int_A^B x dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\Delta E_p$$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$  funzione solo della posizione è l'**energia potenziale elastica**.

Se la coordinata iniziale è maggiore di quella finale, cioè se il punto si muove verso il centro della forza, il lavoro compiuto dalla forza elastica è positivo,  $E_p$  diminuisce. Nel caso contrario di allontanamento dal centro  $W < 0$ ,  $E_p$  aumenta: per eseguire tale spostamento il punto deve possedere una velocità iniziale oppure si deve applicare una forza opportuna.

Esempio pag. 73

## 2.18 Lavoro di una forza di attrito radente

Ricordando che  $\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \hat{u}_v$  e che il vettore  $\hat{u}_v$  è parallelo e concorde allo spostamento  $d\vec{s}$ , il lavoro corrispondente si scrive

$$W = \int_A^B \vec{F}_{ad} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d N \hat{u}_v \cdot d\vec{s} = -\mu_d N \int_A^B ds$$

Dove l'integrale scalare  $\int_A^B ds$  è la lunghezza del percorso da A a B, misurata lungo *la traiettoria effettiva del punto materiale*. Pertanto, a parità di fattori  $\mu_d$  ed  $N$ , si ha un lavoro diverso a seconda della forma della traiettoria: il lavoro della forza di attrito radente dipende dal percorso e non è esprimibile come differenza di valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B. Inoltre, il lavoro della forza di attrito radente è sempre negativo, cioè è lavoro resistente.

Esempi pag. 74

## 2.19 Forze conservative. Energia potenziale

Come si è notato dagli ultimi paragrafi, i primi due casi analizzati non dipendevano dal percorso, mentre l'ultimo dipende dalla traiettoria effettiva. Le forze del primo tipo, cioè per cui il lavoro non dipende dal percorso, si chiamano *forze conservative*. Per il calcolo del lavoro è possibile utilizzare un qualsiasi lavoro che colleghi A a B:

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})$$

Il lavoro è dunque esprimibile come differenza dei valori che una funzione delle coordinate assume in A e in B. Ciò comporta che se si inverte il senso di percorrenza, cioè si va da B ad A, cambia solo il segno del lavoro.

Di conseguenza, *lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo*:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Questa proprietà si può assumere come definizione di forza conservativa.

La funzione delle coordinate non è altro che l'*energia potenziale* e per tutte le forze conservative vale la relazione:

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

*Non esiste una formula generale per l'energia potenziale, ma l'espressione esplicita dipende dalla particolare forza conservativa cui essa si riferisce.*

Le forze per le quali non è possibile esprimere il lavoro come differenza di valori di una funzione delle coordinate vengono dette **forze non conservative** e per esse **non** si può introdurre l'energia potenziale. Il lavoro di una forza non conservativa si calcola tramite la definizione di lavoro ed è sempre uguale, come per qualsiasi forza, alla variazione di energia cinetica.

## 2.20 Conservazione dell'energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative, valgono:

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} , \quad W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Eguagliando le due relazioni si ha

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$

*La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva. Tale somma si chiama energia meccanica e vale pertanto, in presenza di forze conservative, il principio di conservazione dell'energia meccanica*

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante}$$

Durante il moto avviene una trasformazione da una forma di energia all'altra, per tramite di lavoro compiuto e assorbito, ma il contenuto energetico totale, dato dall'energia meccanica, non cambia.

Quando agiscono sia forze conservative che non conservative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative  $W_c$  e di quello delle forze non conservative  $W_{nc}$  e, secondo il teorema dell'energia cinetica,

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Ed esprimendo  $W_c$  con la formula dell'energia potenziale, si ha

$$E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$W_{nc} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A}$$

*In presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non conservative.*

Esempi pag. 78

## 2.21 Relazione tra energia potenziale e forza

Ricordando che a livello infinitesimale si ha:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

Dove  $F_x, F_y, F_z$  sono le componenti della forza conservativa  $\vec{F}$ . Per un percorso chiuso si ha inoltre:

$$\oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

Si dimostra che la validità di questa proprietà per una qualsiasi linea chiusa è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione delle coordinate tale che

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} , \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} , \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

In modo compatto si scrivono come

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -\nabla E_p$$

La forza è l'opposto del gradiente dell'energia potenziale ed è perciò diretta secondo il verso di massima diminuzione di  $E_p$ .

Il luogo dei punti nello spazio nei quali l'energia potenziale assume lo stesso valore si chiama *superficie equipotenziale*. Per uno spostamento lungo una tale superficie il lavoro è nullo, e pertanto la forza associata all'energia potenziale è normale, in ogni punto, alla superficie equipotenziale passante per quel punto, ed indica con il suo verso, quello di diminuzione di  $E_p$ .

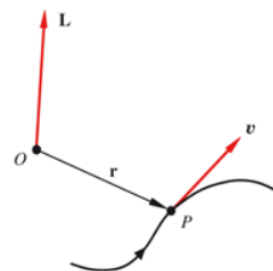
## 2.22 Momento angolare. Momento della forza

Si definisce come *momento angolare* il **momento del vettore quantità di moto**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Il punto O è il polo rispetto a cui è calcolato  $\vec{L}$  e, in caso si cambi polo vale la relazione

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{O'O} \times m\vec{v}$$



In generale il momento angolare è una funzione del tempo  $\vec{L}(t)$ . Nel moto curvilineo è possibile esprimere la velocità tramite le sue componenti radiale e trasversa, perciò:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

Poiché  $r$  e  $v_r$  sono paralleli e dunque il prodotto vettoriale è nullo. Se il polo  $O$  sta nel piano del moto,  $L$  risulta ortogonale a tale piano e vale in modulo

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Ed in particolare, se il moto è circolare  $L = mr^2\omega$  con riferimento al centro della circonferenza.

Il *momento della forza* è definito come  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  e se si cambia polo

$$M_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

Quando ad un punto sono applicate più forze, il momento complessivo è uguale al **momento della forza risultante**.

### Teorema del momento angolare

Calcolando la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale  $P$  in movimento abbiamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dove  $\vec{r}$  è il raggio vettore che congiunge  $P$  al polo  $O$ . Supponendo che il polo  $O$  sia fermo (nel sistema di riferimento da cui osserviamo il moto) allora  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  coincide con la velocità di  $P$ , che è la stessa sia rispetto all'origine che a qualsiasi altro punto fermo, e il primo prodotto vettoriale si annulla. Nel secondo termine,  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$  e coincide con la forza  $\vec{F}$  applicata al punto  $P$  purché il sistema di riferimento sia inerziale e perciò  $\vec{r} \times \vec{F}$  è il momento della forza rispetto allo stesso polo  $O$ . In conclusione

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Questa formula rappresenta il *teorema del momento angolare per un punto materiale*: la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo *fisso in un sistema di riferimento inerziale*.

Il momento della forza può essere nullo quando la forza  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$  sono paralleli oppure quando la forza è nulla e dunque

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

E dunque  $L = \text{costante}$

Questo implica che il *momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo*. Dal teorema si ha:

$$\vec{M}dt = d\vec{L} \rightarrow \int_0^t \vec{M}dt = \Delta\vec{L} = \vec{L}_{fin} - \vec{L}_{in}$$

Questo implica che per produrre una variazione del momento angolare di un punto materiale è necessaria l'azione, per un certo tempo, del momento di una forza. Se la forza viene applicata al punto per un periodo molto breve  $\vec{r}$  è praticamente costante e si ottiene

$$\int_0^t \vec{M}dt = \int_0^t \vec{r} \times \vec{F}dt = \vec{r} \times \int_0^t \vec{F}dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}$$

Che viene detto **teorema del momento dell'impulso**: la variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto.

Infine, si osserva che il lavoro può essere espresso tramite il modulo del momento della forza

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r F_T d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M d\theta$$

Avendo ricordato che  $ds = r d\theta$  e che la componente normale della forza ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza.

## 2.23 Forze centrali

Si definisce **forza centrale** una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà: in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto **centro della forza**, ed il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso.

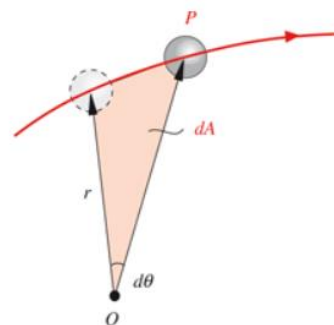
Se  $\hat{u}_r$  è il vettore della direzione  $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ ,  $\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$  con  $F(r) > 0$  se la forza è repulsiva e  $F(r) < 0$  se è attrattiva.

La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce ciò che si chiama **campo di forza**.

In un campo di forze centrali il **momento della forza rispetto al centro è ovunque nullo**, dato che i vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  sono paralleli. Perciò

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{costante (in direzione, verso e modulo)}$$

Per definizione  $\vec{L}$  è sempre ortogonale al piano contenente  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  e se quest'ultimo è costante in direzione, tale piano è fisso, cioè  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  devono stare sempre nello stesso piano. Per tali motivi il moto di P è un moto che avviene in un piano fisso contenente O e determinato dai valori iniziali di  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ . La costanza del verso di  $\vec{L}$  fissa un verso di percorrenza sulla traiettoria.



Dato che il moto è piano il modulo di L è dato da  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$  (è costante in generale il prodotto, e non r e v separatamente). In un tempo dt il raggio vettore congiungente O e P spazza l'area infinitesima come in figura che è approssimabile a un triangolo con base  $r d\theta$  e altezza r e quindi di area  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ . La quantità

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Viene detta **velocità areale** ed esprime la rapidità con cui viene spazzata l'area dal vettore  $\vec{r}$ . Sapendo che  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$  si può scrivere

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

E la costanza di L comporta la costanza della velocità areale.

In altre parole, *la traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante.*

Keplero stabilì sperimentalmente che i pianeti descrivono le loro orbite attorno al sole con velocità areale costante. Da tale risultato, Newton dedusse che la forza gravitazionale è una forza centrale.

Se la traiettoria è chiusa (come per i pianeti) la costanza della velocità areale,  $\frac{dA}{dt} = C$ , implica che la costante C sia uguale a  $\frac{A}{T}$  dove A è l'area totale racchiusa dalla traiettoria e T il tempo totale impiegato a percorrerla, cioè il periodo. Dunque

$$\frac{A}{T} = \frac{L}{2m} \rightarrow T = \frac{2m}{L} A$$

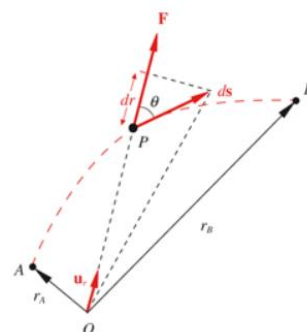
Le forze centrali sono anche **conservative**. Il modulo di una forza centrale dipende solo dalla distanza  $\vec{r}$  dal centro,  $\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$ . Il lavoro di questa forza è

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)\hat{u}_r \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto scalare  $\hat{u}_r \cdot d\vec{s}$  vale  $ds \cos\theta$  e dalla figura si vede che  $ds \cos\theta$  è pari a  $dr$ , variazione del modulo di  $\vec{r}$  durante lo spostamento  $d\vec{s}$ . Quindi

$$W = \int_A^B F(r) dr = f(r_B) - f(r_A)$$

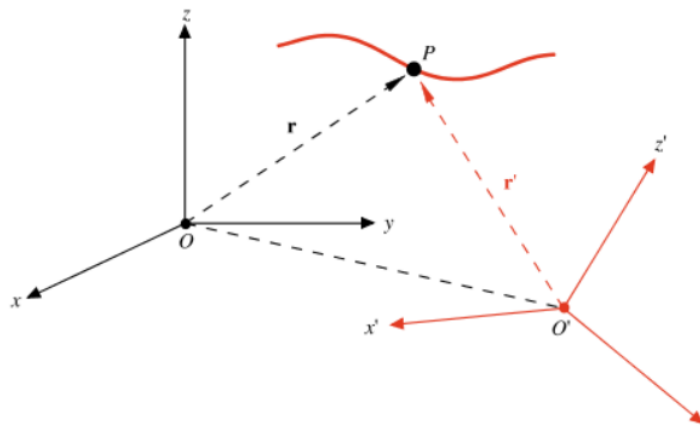
Dunque la forza è conservativa.



## Moti relativi

### 3.1 Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative

#### Teorema delle velocità relative



Viene rappresentato in figura un punto P in movimento lungo una generica traiettoria. Il moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O chiamato *sistema fisso* e da una terna cartesiana con centro O' che viene detto *sistema mobile*. Si vuole ricavare una relazione tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con

il sistema mobile.

La relazione tra le posizioni del punto P, misurate rispetto ai due sistemi di riferimento è:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OO'} + \mathbf{r'}$$

Con

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z, \quad \vec{r'} = x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}, \quad \mathbf{OO'} = x_{O'}\hat{u}_x + y_{O'}\hat{u}_y + z_{O'}\hat{u}_z$$

In accordo con la convenzione che il primo sistema sia fisso, i versori  $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$  sono indipendenti dal tempo (ma non lo sono quelli del sistema mobile). La velocità del punto P rispetto al sistema fisso, detta *velocità assoluta* è data da

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$$

Mentre quella osservata dal sistema mobile è detta *velocità relativa* ed è data da

$$\vec{v'} = \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}$$

La velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata dal sistema fisso è data da

$$\vec{v}_{O'} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z$$

La derivata rispetto al tempo della relazione che unisce i due sistemi di riferimento è:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{OO'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r'}}{dt} = \underbrace{\frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z}_{\text{derivata di } \mathbf{OO'}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}}_{\text{primo pezzo della derivata di } \mathbf{r'}} + \\ &\quad + \underbrace{x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}}_{\text{derivata secondo pezzo perché i versori sono dipendenti dal tempo}} \end{aligned}$$

Ovvero

$$\vec{v} = v_{O'} + v' + x' \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

La derivata di un versore  $\hat{u}$  si può scrivere come  $\vec{\omega} \times \hat{u}$  e pertanto, dalle tre derivate dei versori si ottengono le **formule di Poisson**:

$$\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}_{x'}, \quad \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}_{y'}, \quad \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}_{z'}$$

I tre versori sono rigidamente legati l'uno dall'altro, cioè alla rotazione di uno con velocità angolare  $\omega$  variano anche gli altri due con la stessa velocità angolare. Perciò si può scrivere

$$x'(\vec{\omega} \times \hat{u}_{x'}) + y'(\vec{\omega} \times \hat{u}_{y'}) + z'(\vec{\omega} \times \hat{u}_{z'}) = \vec{\omega} \times (x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}) = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

E sostituendo alla formula di partenza si ottiene

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Questa formula esprime il **teorema delle velocità relative** che mostra che le misure di velocità compiute nei due sistemi sono diverse ma non scorrelate. La differenza  $\vec{v}_t$  tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento è detta **velocità di trascinamento**

$$\vec{v}_t = \vec{v} - \vec{v}' = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Se P fosse fermo rispetto al sistema mobile, la velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento. Se invece il punto P si muove rispetto al sistema mobile, il teorema delle velocità relative ci dice che la velocità assoluta è la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento.

### Teorema delle accelerazioni relative

Consideriamo ora la relazione tra le accelerazioni del punto P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento.

L'*accelerazione assoluta* è data da

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{u}_z$$

Mentre l'*accelerazione relativa* è

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \hat{u}_{z'}$$

L'accelerazione dell'origine del sistema mobile  $O'$  rispetto al sistema fisso  $O$  è data da

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}$$

E derivando il teorema delle velocità relative rispetto al tempo si ha:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Si calcola ora  $\frac{d\vec{v}'}{dt}$



$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dx'}{dt} \hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \hat{u}_{z'} \right) \\ &= \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \hat{u}_{z'} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'\end{aligned}$$

Ricordando che  $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$  si ha che

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Perciò

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Che è detto **teorema delle accelerazioni relative**.

Per valutare l'accelerazione di trascinamento bisogna valutare quella del punto solidale col sistema mobile, cioè quando  $\vec{a}'$  e  $\vec{v}'$  sono nulle

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

Pertanto il teorema si può riscrivere come:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Dove  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  è detta **accelerazione complementare o di Coriolis**.

### Velocità e accelerazione di un punto rispetto ad un altro

Per poter capire la velocità e l'accelerazione percepita da un punto rispetto a un altro punto, si suppone di avere due punti che si muovono in un sistema  $O$  con posizione, velocità e accelerazione date da

$$\begin{aligned}\text{punto } P_1: \quad \vec{r}_1 &= \overrightarrow{OP_1} \quad \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad \vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \\ \text{punto } P_2: \quad \vec{r}_2 &= \overrightarrow{OP_2} \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad \vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt}\end{aligned}$$

La posizione relativa di  $P_2$  rispetto a  $P_1$  è data dal raggio vettore

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{1,2}$$

Per calcolare la velocità di  $P_2$  relativa a  $P_1$  si immagina un secondo sistema di riferimento  $O'$  con origine in  $P_1$  e gli assi che non ruotano rispetto a  $O$  e dunque  $\vec{\omega} = 0$ .

La velocità di  $P_2$  vista da  $O'$  è appunto la velocità di  $P_2$  rispetto a  $P_1$  indicata con  $\vec{v}_{2,1}$  e dunque:

Velocità assoluta:  $\vec{v} = \vec{v}_2$

Velocità relativa:  $\vec{v}' = \vec{v}_{2,1}$

Velocità di trascinamento:  $\vec{v}_t = \vec{v}_{O'} = \vec{v}_1$

Perciò

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2,1} + \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_{2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Allo stesso modo si dimostra che l'accelerazione di  $P_2$  rispetto a  $P_1$  è

$$\vec{a}_{2,1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

### 3.2 Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana

**Sistema di riferimento inerziale:** si definisce *sistema di riferimento inerziale* un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto *non soggetto a forze* lanciato con velocità arbitrari in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

Consideriamo dunque un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Si ha dunque

$$\vec{v}_{O'} = \text{costante}, \quad \vec{a}_{O'} = 0, \quad \vec{\omega} = 0$$

Utilizzando il teorema delle accelerazioni relative si ricava che  $\vec{a} = \vec{a}'$ : le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono uguali. Se  $\vec{a} = 0$  allora anche  $\vec{a}' = 0$  e dunque anche il secondo sistema è inerziale.

*Definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali.*

Per tali motivi, anche la legge di Newton in questi sistemi si scrive allo stesso modo, cioè con gli stessi valori di  $\vec{F}$  e  $\vec{a}$ . Essendo però la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. In altre parole, non ha senso il concetto di moto assoluto. Questa situazione viene descritta col termine **relatività galileiana**.

Tale definizione non è più valida nel caso in cui il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, sia che  $a_{O'} \neq 0$ , sia che  $\omega \neq 0$ . Infatti, riutilizzando il teorema delle accelerazioni relative  $a = a' + a_t + a_c$  e moltiplicando tutto per  $m$  si ottiene

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_t + m\vec{a}_c \rightarrow \vec{F} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = m\vec{a}'$$

#### Forze apparenti o forze di inerzia

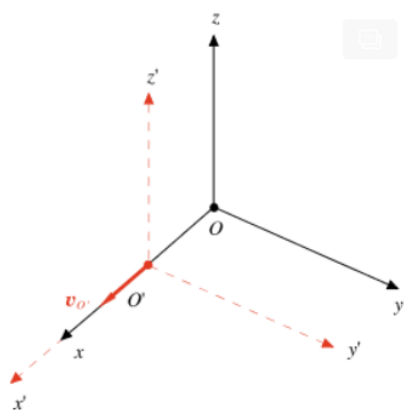
La formula sopra rappresenta una forma modificata della legge di Newton. In un sistema non inerziale il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione misurata in quel sistema è uguale alla *forza vera* agente sul punto più le *forze apparenti*. Queste ultime forze, che sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono dette **forze di inerzia**, appaiono agenti solo nel sistema non inerziale.

*Le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema di riferimento inerziale.*

In un sistema accelerato vediamo dal teorema dell'accelerazione relativa che  $\vec{F} = 0$  non implica che  $\vec{a}' = 0$  e dunque l'osservazione di un moto rettilineo uniforme. Questo risultato giustifica il nome di sistema **non inerziale** per un sistema accelerato.

Analogamente, una traiettoria curva non presuppone necessariamente l'azione di una forza (vera), ma può essere un effetto **apparente**, dovuto al moto accelerato del sistema in cui si trova l'osservatore e così via. Ciò non significa una errata descrizione per uno dei due sistemi, ma entrambi i sistemi (note le condizioni iniziali) forniscono una previsione corretta per il moto di un punto. Semplicemente nel sistema non inerziale è necessario aggiungere dei termini correttivi non provenienti dalle interazioni fondamentali.

### 3.3 Moto di trascinamento rettilineo uniforme



Supponiamo di avere due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Gli assi dei due sistemi sono paralleli ed il sistema di origine  $O'$  si sposta con velocità costante  $\vec{v}_0$  parallela all'asse  $x$ . Inoltre, in  $t = 0$  le origini coincidono così che  $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}_0 \cdot t$ . Ricordato che  $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}' \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{OO'}$  otteniamo

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 t, \quad \vec{y}' = \vec{y}, \quad \vec{z}' = \vec{z}$$

Analogamente per la velocità, utilizzando il teorema delle velocità relative, si ha  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$  e dunque

$$\vec{v}'_x = \vec{v}_x - \vec{v}_0, \quad \vec{v}'_y = \vec{v}_y, \quad \vec{v}'_z = \vec{v}_z$$

Infine, per le accelerazioni si ha che  $a' = a$  poiché ambedue i sistemi sono inerziali.

La relazione di cui sopra permettono di calcolare le coordinate del punto in un sistema inerziale note quelle dell'altro sistema inerziale, ed esprime una **trasformazione galileiana** tra i due sistemi. Stessa cosa vale per la relazione che lega le velocità.

Esempi pag. 97

### 3.4 Moto di trascinamento rettilineo accelerato

Assumendo la stessa condizione geometrica di prima, supponiamo ora che  $O'$  abbia una accelerazione costante  $\vec{a}_{O'} = \vec{a}_t$  e una velocità iniziale  $\vec{v}_{in}$ , ambedue parallele e concordi all'asse  $x \equiv x'$ . La posizione e la velocità di  $O'$  sono quindi

$$x'_{O'} = v_{in}t + \frac{1}{2}a_t t^2, \quad v_{O'} = v_{in} + a_t t$$

Le formule di trasformazione diventano

$$\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{OO'} \quad x' = x - v_{in}t - \frac{1}{2}a_t t^2, \quad y' = y, \quad z' = z$$

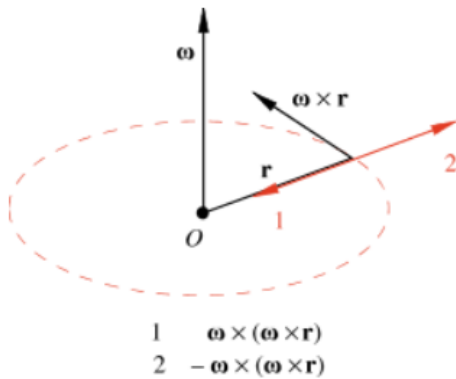
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'}, \quad v'_x = v_x - v_{in} - a_t t, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 \quad a'_x = a_x - a_t, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z$$

Caratteristica distintiva è la diversità delle accelerazioni nei due sistemi,  $O$  inerziale e  $O'$  non inerziale, e quindi la diversità delle forze agenti, con conseguente comparsa delle forze d'inerzia.

Esempi pag. 99

### 3.5 Moto di trascinamento rotatorio uniforme



Supponiamo ora che il moto di trascinamento sia solo rotatorio uniforme e per comodità prendiamo coincidenti le origini dei due sistemi ( $r = r'$ ). Si ha  $v_O = 0$ ,  $a_{O'} = 0$  e  $\omega = \text{costante}$  e le relazioni diventano

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Si può quindi riscrivere anche la relazione

$$\vec{F} + \vec{F}_{centr} + \vec{F}_{Cor} = m\vec{a}'$$

**Forza centrifuga:**  $\vec{F}_{centr} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

**Forza di Coriolis:**  $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Si può assumere gli assi  $x'$  e  $y'$  solidali ad un disco posto nel piano  $x, y$  che ruota rispetto ad un asse passante per il suo centro e ortogonale al piano  $x, y$ . Per l'osservatore  $O$  il punto è in quiete, mentre per quello ruotante  $O'$  il punto descrive un moto circolare uniforme. Infatti, nei due sistemi il moto ha del punto ha queste caratteristiche:

sistema  $O$   $v = 0$ ,  $a = 0$

Sistema  $O'$   $\vec{v}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}$ ,  $\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Pertanto, nel sistema  $O'$  accelerato il punto descrive una circonferenza in verso contrario al moto del disco, con velocità costante in modulo e pari a  $\omega r$  e con accelerazione puramente centripeta di valore  $\omega^2 r$ .

### 3.8 Teoria della relatività. Trasformazioni di Lorentz

Dagli esperimenti di meccanica compiuti in sistemi inerziali non è possibile mettere in evidenza se il sistema di riferimento è in moto o in quiete. La soluzione a ciò venne proposta da Einstein che estese il principio di relatività, assumendo che tutte le leggi della Fisica siano invarianti quando considerate in diversi sistemi di riferimento inerziali e che quindi con nessun esperimento sia possibile mettere in evidenza il moto del sistema di riferimento. Egli affermò che la trasformazione di coordinate tra due sistemi inerziali non può essere quella già vista prima, ma deve essere (indicando con  $v_0$  la velocità costante di trascinamento):

$$x' = \gamma_0(x - v_0 t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma_0 \left( t - \frac{v_0}{c^2} x \right)$$

Dove  $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$  e dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto.

Il fatto più notevole sta nella quarta relazione: fino ad ora si assumeva implicitamente che  $t = t'$ , cioè che il tempo fosse assoluto, ma invece adesso **anche il tempo ha un valore relativo al sistema di riferimento**.

Le formule di cui sopra costituiscono le **trasformazioni di Lorentz**.

## Dinamica dei sistemi di punti materiali

### 4.1 Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne

Consideriamo un sistema di  $n$  punti materiali, con  $n$  maggiore di 1, interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

La forza  $\vec{F}_i$  agente sull' $i$ -esimo punto si può pensare come risultante delle *forze esterne* agenti sul punto, dette  $\vec{F}_i^{(E)}$  e delle forze esercitate dagli altri  $n - 1$  punti, *forze interne* al sistema,  $\vec{F}_i^{(I)}$ :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

La distinzione tra forze interne ed esterne dipende da come viene definito il sistema di punti, ed è molto utile solo concettualmente. Alle forze interne si applica la *terza legge di Newton*.

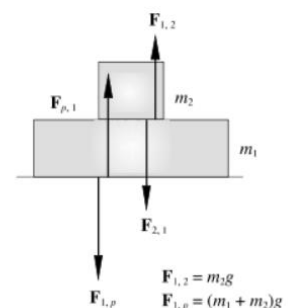
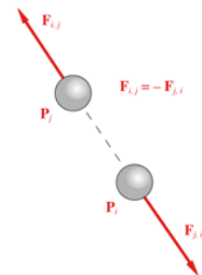
In generale la risultante  $\vec{F}_i^{(I)}$  delle forze interne agenti sull' $i$ -esimo punto è diversa da zero, però la risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla, perché in base al principio di azione e reazione esse sono a due a due uguali ed opposte

$$\vec{R}^{(I)} = \sum_i \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i,j} \vec{F}_{i,j} = 0$$

Nella determinazione del moto ogni corpo viene esaminato separatamente e per esso si scrive l'equazione del moto. Prendendo ad esempio due corpi  $m_1$  ed  $m_2$  in moto, l'uno rispetto all'altro, con una forza di attrito radente alla superficie di contatto si ha che il moto complessivo (verso destra) è dovuto alla forza esterna  $\vec{F}$  e le due equazioni del moto sono:

$$F - \mu_d N = m_1 a_1 \quad \mu_d N = m_2 a_2$$

Si nota che il termine di attrito compare per un corpo come forza resistente e per l'altro come forza motrice, eguale in modulo ma di verso opposto alla precedente: infatti l'attrito è opposto al verso del moto relativo (rispetto a  $m_1$ ,  $m_2$  si sposta verso sinistra). Oltre a queste forze interne esistono anche le forze normali, poiché la terra attira  $m_2$  con una forza  $m_2 g$  la cui reazione è applicata al centro della terra e dunque  $m_2$  preme su  $m_1$ , deformandolo. La reazione di  $m_1$  è  $F_{1,2} = m_2 g$ . Analogamente lo stesso avviene per l'interazione  $m_1$ -piano come in figura.



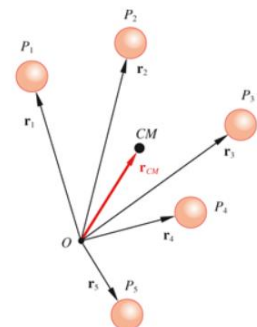
### 4.2 Centro di massa di un sistema di punti. Teorema del moto del centro di massa

Si definisce **centro di massa di un sistema** di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Le componenti di  $\vec{r}_{CM}$  ovvero le coordinate del centro di massa di un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O sono

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

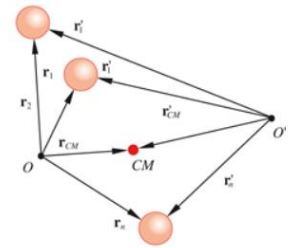


Prendendo l'esempio in figura, si mostra un sistema di  $n$  punti e i centri dei due sistemi di riferimento  $O$  e  $O'$ : le posizioni dei punti  $P_i$  sono individuati dai raggi  $\vec{r}_i$  ed  $\vec{r}'_i$  con

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \overrightarrow{OO'} \quad \text{ovvero} \quad \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}$$

La posizione del centro di massa rispetto ad  $O$  è data dalla formula precedente, mentre rispetto ad  $O'$  è data da

$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i + \overrightarrow{O'O})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \overrightarrow{O'O} = \vec{r}_{CM} + \overrightarrow{O'O}$$

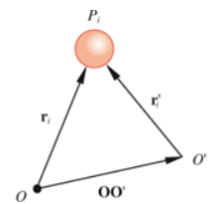


Se gli  $n$  punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; si può quindi calcolare la velocità del centro di massa:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{m}$$

**$\vec{P}$  coincide con la quantità di moto  $m\vec{v}_{CM}$  del centro di massa, considerato come un punto materiale che abbia la posizione  $\vec{r}_{CM}$ , la velocità  $\vec{v}_{CM}$  e massa pari alla massa totale  $m$  del sistema.**

Analogamente si può calcolare l'accelerazione del centro di massa:



$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m}$$

Dove  $m$  è la massa totale del sistema.

Se il sistema di riferimento è inerziale si può dunque scrivere:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = F_i^{(E)} + F_i^{(I)}$$

Si ha dunque

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (F_i^{(E)} + F_i^{(I)}) = R^{(E)} + R^{(I)} = R^{(E)}$$

Visto che la risultante delle forze interne è nulla. La relazione

$$R^{(E)} = m\vec{a}_{CM}$$

Esprime il **teorema del moto del centro di massa**. Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne. Si ha inoltre

$$R^{(E)} = m\vec{a}_{CM} = m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

La risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema. Il moto del centro di massa è determinato dunque solo dalle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa; invece il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne e interne agenti su di esse.

### 4.3 Conservazione della quantità di moto

**Principio di conservazione della quantità di moto per un sistema di punti materiali:** quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

Questo accade perché  $R^{(E)} = 0$ , ma in generale le quantità di moto dei vari punti  $m_i \vec{v}_i$  variano nel tempo. Resta costante solo la loro somma. Dunque, considerando due punti isolati che possono interagire solo tra loro si ha

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{costante}$$

Derivando rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

La conseguenza del principio di conservazione è che le forze che si esercitano tra i due punti sono uguali in modulo e diverso opposto. La differenza col principio di azione e reazione sta nel fatto che quest'ultima **non** implica che le due forze abbiano la stessa retta d'azione.

### 4.4 Teorema del momento angolare

Consideriamo il momento angolare totale di un sistema di punti materiali rispetto ad un polo  $O$ ; detto  $\vec{r}_i$  il raggio vettore  $\overrightarrow{OP_i}$  si ha

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Bisogna ricordare che il polo  $O$  in generale non coincide con l'origine e può non essere fisso e che quindi il raggio vettore  $\vec{r}_i$  può avere entrambi gli estremi in movimento, con velocità  $\vec{v}_i$  e  $\vec{v}_O$  nel sistema di riferimento inerziale in cui si osserva il sistema di punti. Derivando  $\vec{L}$  otteniamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

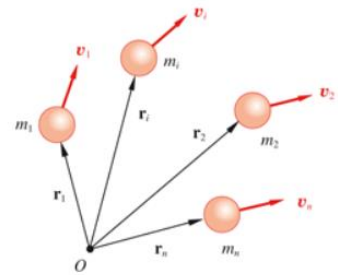
Ricordando che  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_O$  e che essendo un sistema inerziale si ha

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

Ne segue dunque che

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times (F_i^{(E)} + F_i^{(I)}) \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{v}_O \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= -\vec{v}_O \times m \vec{v}_{CM} + \vec{M}^{(E)} + \vec{M}^{(I)} \end{aligned}$$

Questo perché  $\sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i$  è nullo visto che ogni addendo è un prodotto vettoriale di vettori paralleli e perché  $\vec{v}_O$  è indipendente dall'indice  $i$  dunque va fuori dalla sommatoria.



Si dimostra ora che  $\vec{M}^{(I)} = 0$  osservando la figura (assumendo forze interne come forze uguali in modulo e di verso opposto, con stessa retta di azione).

La somma dei momenti delle due forze interne  $\vec{F}_{i,j}$  e  $\vec{F}_{j,i}$  rispetto al polo  $O$  è

$$\vec{M}_{i,j}^{(I)} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{i,j} = \vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j}$$

Il vettore  $\vec{r}_{i,j} = \overrightarrow{P_i P_j}$  è parallelo a  $\vec{F}_{i,j}$  e quindi  $\vec{M}_{i,j}^{(I)} = 0$

In conclusione,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM}$$

E se il termine  $-\vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM}$  è nullo si ha

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$

Tale addendo è nullo quando:

- Il polo  $O$  è fisso nel sistema di riferimento inerziale e quindi  $v_O = 0$ .
- Il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale e quindi  $v_{CM} = 0$ .
- Il polo  $O$  coincide con il centro di massa, per cui  $v_O = v_{CM}$  e il prodotto vettoriale è nullo.
- $v_O$  è parallelo a  $v_{CM}$ .

Dunque il teorema del momento angolare indica che, **se il polo  $O$  è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa, l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad  $O$ , mentre le forze interne non portano contributi.**

#### 4.5 Conservazione del momento angolare

In una situazione come quella presentata sopra, cioè dove  $\vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM} = 0$ , **se il momento delle forze esterne è nullo il momento angolare resta costante.** La condizione  $\vec{M}^{(E)} = 0$  si verifica in due casi:

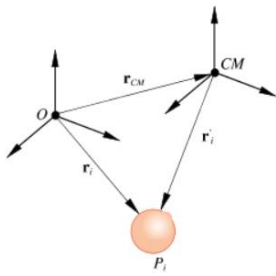
- Non agiscono forze esterne (*sistema isolato*) e dunque  $\vec{L}$  si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale  $\vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM} = 0$ . In questa situazione, in cui è anche  $\vec{R}^{(E)} = 0$  si ha pure la conservazione della quantità di moto  $\vec{P} = \text{costante}$ .
- Il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne. Per tali motivi si ha conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel polo.

Viene da sé l'importanza della scelta del polo per poter risolvere determinati problemi.

Inoltre, se fosse  $\vec{M}^{(I)} \neq 0$  il momento angolare non potrebbe conservarsi neanche in caso di sistema isolato (ma così non è perché verificato sperimentalmente).



#### 4.6 Sistema di riferimento del centro di massa



Il sistema di riferimento del centro di massa ha le seguenti caratteristiche:

- L'origine è nel centro di massa
- Gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi
- Si tratta in generale di un sistema non inerziale: in base al secondo punto, il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme; avviene solo se  $\vec{R}^{(E)} = 0$  e quindi  $\vec{a}_{CM} = 0$ .

Si indicano ora con un apice le grandezze relative al sistema del centro di massa e dalla figura si vede che, per il punto  $P_i$ :

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$$

Dal teorema delle velocità relative con  $\vec{\omega} = 0$  si ha

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, evidentemente la posizione e la velocità del punto di massa rispetto a se stesso sono nulle:

$$\vec{r}'_{CM} = 0, \quad \vec{v}'_{CM} = 0$$

Dalle formule per il centro di massa segue che

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0, \quad \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

**Perciò la quantità di moto totale del sistema  $\vec{P}' = \sum_i m_i \vec{v}'_i$  risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa.**

Essendo il sistema del centro di massa non inerziale, sui singoli punti sembra agire anche la forza di inerzia  $-m_i \vec{a}_t = -m_i \vec{a}_{CM}$  in quanto l'accelerazione di trascinamento è pari a quella dell'origine, cioè del centro di massa. Però per definizione  $\vec{a}'_{CM} = 0$  e dunque usando le formule del centro di massa si avrà anche  $\sum_i m_i \vec{a}'_i = 0$ .

**Inoltre, il momento risultante rispetto al centro di massa è uguale al solo momento delle forze esterne vere, senza contributi delle forze di inerzia.**

**Il momento angolare rispetto al centro di massa ha lo stesso valore sia nel sistema di riferimento inerziale che nel sistema di riferimento del centro di massa.** Di conseguenza

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}^{(E)'}.$$

*Ovvero, il teorema del momento angolare vale anche nel sistema (non inerziale) del centro di massa purché come polo si assuma l'origine, cioè il centro di massa; al calcolo del momento contribuiscono solo le forze vere (esterne).*

#### 4.7 Teoremi di Konig

I teoremi di Konig stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali, valutati in un sistema di riferimento inerziale ( $\vec{L}, E_k$ ) e nel sistema di riferimento del centro di massa ( $\vec{L}', E'_k$ ).

##### Teorema di Konig per il momento angolare

Si assuma come polo l'origine del sistema inerziale: il momento angolare è dato da

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Riscriviamolo ora utilizzando le relazioni  $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$  e  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})$$

E svolgendo i conti

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$

Il primo termine rappresenta il momento angolare rispetto al centro di massa  $\vec{L}'$ .

Il secondo e il terzo termine sono entrambi nulli.

L'ultimo termine che si può riscrivere come  $\vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$  rappresenta il momento angolare rispetto all'origine del sistema inerziale, di un punto materiale che ha una massa pari a quella totale del sistema, coincide con il centro di massa e ha la velocità dello stesso. Pertanto, viene chiamato **momento angolare del centro di massa**. In conclusione si ha il **primo teorema di Konig**:

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$$

*Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa,  $\vec{L}_{CM}$ , e di quello del sistema rispetto al centro di massa.*

Se si assume come polo il centro di massa, in modo da avere  $\vec{r}_{CM} = 0$  si ritrova  $L = L'$ .

##### Teorema di Konig per l'energia cinetica

L'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento inerziale è

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Che si può riscrivere come

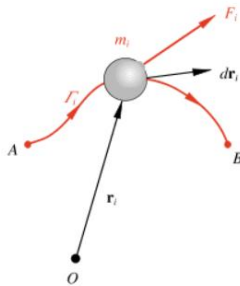
$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{CM}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, ossia l'energia cinetica rispetto al centro di massa,  $E'_k$ . Il secondo termine è pari a  $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$  (massa totale), ovvero l'energia cinetica di un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e si muove con la velocità del centro di massa, detta **energia del centro di massa**. L'ultimo termine è nullo da  $\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$ . Perciò si ha il **secondo teorema di Konig**:

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM}$$

L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

#### 4.8 Il teorema dell'energia cinetica



Calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali.

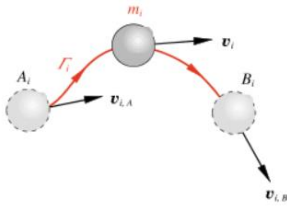
$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

Sommando su tutti i punti e integrando lungo le traiettorie, si ottiene

$$W = W^{(E)} + W^{(I)}$$

In questo caso però il contributo delle forze interne non scompare, questo perché  $dW^{(I)}$  è formato da tanti termini in generali non nulli e con somma diversa da zero. La struttura di  $dW^{(I)}$  implica che *al lavoro delle forze interne è legato un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti*. Se queste non potessero variare allora sarebbe  $W^{(I)} = 0$ .

Ritornando a  $dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$  sappiamo che essa è uguale a  $m_i v_i dv_i$  e sommando tutti i punti e integrando si ottiene



$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A}$$

E mettendo insieme i risultati ottenuti:

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

Che esprime il **teorema dell'energia cinetica per i sistemi di punti materiali**. Se le forze interne sono conservative,  $W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$  e analogamente per quelle esterne  $W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$ . Quando tutte le forze agenti (interne ed esterne) sono conservative, si ha la **conservazione dell'energia meccanica del sistema**.

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \rightarrow (E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = \text{costante}$$

Se invece non tutte le forze sono conservative, si ha

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W_{nc}$$

Si osserva che anche in assenza di forze esterne non è detto che l'energia meccanica si conservi: ciò dipende dalle caratteristiche delle forze interne.

#### 4.9 Urti tra due punti materiali

Quando due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema, si parla di **urto tra due punti**.

Nell'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto e vengono dette **forze impulsive**. Queste forze sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti.

*In assenza di forze esterne si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale.*

Se si indica con  $\vec{v}_{1,in}$ ,  $\vec{v}_{2,in}$  le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse  $m_1$  e  $m_2$ , e con  $\vec{v}_{1,fin}$ ,  $\vec{v}_{2,fin}$  le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di  $\vec{P}$  si scrive

$$\vec{P}_{in} = m_1 \vec{v}_{1,in} + m_2 \vec{v}_{2,in} = m_1 \vec{v}_{1,fin} + m_2 \vec{v}_{2,fin} = \vec{P}_{fin}$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto:

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} = \text{costante}$$

Il moto del centro di massa non viene dunque alterato nell'urto. Variano, invece, le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione:

$$m_1\vec{v}_{1,fin} - m_1\vec{v}_{1,in} = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1} dt$$

$$m_2\vec{v}_{2,fin} - m_2\vec{v}_{2,in} = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2} dt$$

$\vec{J}_{2,1}$  è l'impulso dovuto alla forza impulsiva  $\vec{F}_{2,1}$  esercitata dal punto 2 sul punto 1 e analogo anche per il punto 1. Naturalmente

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \rightarrow \vec{J}_{1,2} = -\vec{J}_{2,1}$$

Le variazioni di quantità di moto sono uguali ed opposte.

La quantità di moto totale si può conservare anche in presenza di forze esterne se la durata  $\tau$  dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive. Infatti la variazione della quantità di moto totale del sistema dovuta alle forze esterne è

$$\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(E)} dt = \vec{F}_m^{(E)} \tau$$

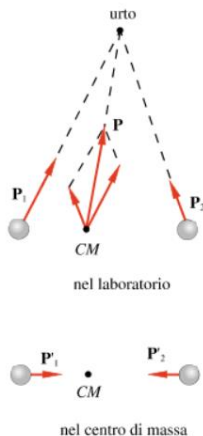
E se  $\tau$  è molto breve,  $\Delta\vec{P}$  è trascurabile. Se  $F^{(E)}$  fosse impulsiva il ragionamento non sarebbe corretto perché in tal caso il valor medio  $F_m^{(E)}$  potrebbe assumere valori notevoli.

Riguardo alle forze interne, non è possibile sapere se esse sono conservative e dunque non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica durante l'urto. Però visto che la posizione dei punti non varia nell'urto, eventuali energie potenziali dei punti non variano nell'urto e quindi  $\Delta E_m = \Delta E_k$ . Il secondo teorema di Konig per i due punti ci dice che:

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + E'_k$$

Il primo termine riguarda l'energia cinetica nel centro di massa e non varia nell'urto se vale la conservazione della quantità di moto. Ciò che resta costante o varia in base alle forze interne è l'energia cinetica rispetto al centro di massa

$$E'_k = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$



L'urto può essere studiato sia nel sistema di riferimento inerziale, sia nel sistema di riferimento del centro di massa. Perciò il legame tra le velocità nei due sistemi in qualsiasi istante è

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_{CM} \quad , \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_{CM}$$

Nel sistema del centro di massa la quantità di moto totale è nulla e dunque dal centro di massa si vedono i punti arrivare verso il centro di massa con quantità di moto uguali in modulo e opposte in verso; i punti si urtano nella posizione occupata dal centro di massa e ripartono dopo l'urto con quantità di moto uguali in modulo e opposte in verso.

#### 4.9 Urto completamente anelastico

Un urto è detto *completamente anelastico* quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa  $m_1 + m_2$ . Utilizzando le relazioni precedenti e indicando con  $v_1$  e  $v_2$  le velocità prima dell'urto e  $v'$  quelle dopo l'urto:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}' = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto ( $\vec{v}_{CM}$  nell'urto rimane invariata). L'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto, utilizzando Konig, è:

$$E_{k,in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2$$

Invece

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k,in}$$

In effetti, dopo l'urto completamente anelastico non c'è più moto rispetto al centro di massa e dunque in questo tipo di urto viene assorbita  $E'_k$ .

Esempi pag. 150

#### 4.11 Urto elastico

Si definisce *urto elastico* un urto durante il quale *si conserva anche l'energia cinetica del sistema*. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. Si possono dunque utilizzare le equazioni

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \quad , \quad E_{k,in} = E_{k,fin}$$

Nel caso unidimensionale, si può risolvere il problema usando due equazioni (diventano 6 in 3D)

$$m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

Per determinare i valori delle velocità finali in funzioni di quelle iniziali, è comodo considerare l'urto anche nel sistema di riferimento del centro di massa dove  $P' = 0$ . Dunque

$$m_1 v'_{1,in} = -m_2 v'_{2,in} \quad , \quad m_1 v'_{1,fin} = -m_2 v'_{2,fin}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

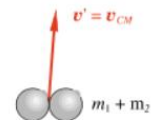
Da queste si ottiene la soluzione

$$v'_{1,fin} = -v'_{1,in} \quad , \quad v'_{2,fin} = -v'_{2,in}$$

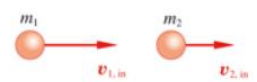
Nel sistema del centro di massa la velocità e la quantità di moto di ciascun punto restano le stesse in modulo, cambiando solo di verso. E' possibile ritornare al sistema inerziale usando le solite formule:



prima



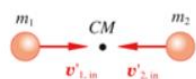
dopo



prima dell'urto



dopo l'urto  
nel laboratorio



prima dell'urto



dopo l'urto  
nel CM

$$v_{1,in} = v'_{1,in} + v_{CM} \quad , \quad v_{2,in} = v'_{2,in} + v_{CM}$$

$$v_{1,fin} = v'_{1,fin} + v_{CM} \quad , \quad v_{2,fin} = v'_{2,fin} + v_{CM}$$

Tenendo conto della soluzione trovata nel sistema del centro di massa e del fatto che

$$v_{CM} = \frac{(m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in})}{m_1 + m_2}$$

Si ottiene

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,fin} = \frac{2m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1)v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

Esempi pag. 153

#### 4.12 Urto anelastico

In questo caso i punti ritornano separato dopo l'urto, durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione di  $E'_k$  viene assorbita. Ciò avviene perché l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta, nella fase di deformazione dei corpi, superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla configurazione iniziale. Si considera il sistema di riferimento del centro di massa.

Il punto con quantità di moto  $p'_{1,in}$  nell'istante precedente all'urto vede ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva il punto riacquista quantità di moto fino al valore  $p'_{1,fin}$  opposto in verso e minore in modulo rispetto a  $p'_{1,in}$ , pertanto, si definisce *coefficiente di restituzione* il rapporto

$$e = -\frac{p'_{1,fin}}{p'_{1,in}} = -\frac{v'_{1,fin}}{v'_{1,in}} = -\frac{p'_{2,fin}}{p'_{2,in}} = -\frac{v'_{2,fin}}{v'_{2,in}}$$

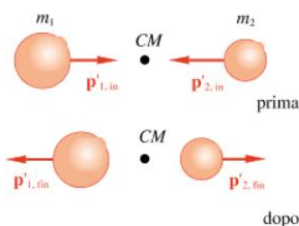
Ed essendo  $P' = 0$  in modulo  $p'_{1,in} = p'_{2,in}$  e  $p'_{1,fin} = p'_{2,fin}$  perciò il coefficiente è identico anche per la seconda particella. L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da

$$E'_{k,fin} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin} = e^2 \left( \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,in} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,in} \right)$$

$$\rightarrow E'_{k,fin} = e^2 E'_{k,in}$$

La variazione relativa di energia cinetica nell'urto è

$$\delta = \frac{E'_{k,fin} - E'_{k,in}}{E'_{k,in}} = e^2 - 1$$



Nell'urto elastico  $e = 1$ ,  $\delta = 0$  e l'energia cinetica si conserva. Nell'urto completamente anelastico  $e = 0$ ,  $\delta = -1$  e tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata.

Nella situazione di urto anelastico il *coefficiente di restituzione*  $e$  risulta compreso tra zero e uno,  $E'_{k,fin}$  è sempre minore di  $E'_{k,in}$ . Per ricavare la relazione tra le velocità nel sistema inerziale, si procede trasformando la relazione del coefficiente di restituzione:

$$\begin{aligned}
v'_{1,fin} &= v_{1,fin} - v_{CM} = -ev'_{1,in} = -e(v_{1,in} - v_{CM}) \\
v'_{2,fin} &= v_{2,fin} - v_{CM} = -ev'_{2,in} = -e(v_{2,in} - v_{CM}) \\
\rightarrow v_{1,fin} &= v_{CM}(1+e) - ev_{1,in} \quad , \quad v_{2,fin} = v_{CM}(1+e) - ev_{2,in}
\end{aligned}$$

Essendo  $v_{CM} = \frac{(m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in})}{m_1 + m_2}$  si ottiene

$$\begin{aligned}
v_{1,fin} &= \frac{(m_1 - em_2)v_{1,in} + m_2(1+e)v_{2,in}}{m_1 + m_2} \\
v_{2,fin} &= \frac{m_1(1+e)v_{1,in} + (m_2 - em_1)v_{2,in}}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

Con  $e = 1$  si ritorna al caso dell'urto elastico, mentre con  $e = 0$  si ha  $v_{1,fin} = v_{2,fin} = v_{CM}$  che è il caso dell'urto completamente anelastico.

Esempi pag. 156

## Gravitazione

### 5.1 La forza gravitazionale

Le leggi di **Keplero** affermano:

- **Prima legge:** i pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.
- **Seconda legge:** la velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante.
- **Terza legge:** il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse:  $T^2 = kr^3$

Le leggi di Keplero danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti. Da esse prese corpo la *teoria della gravitazione universale*.

Newton suppose che, essendo le orbite dei pianeti ellittiche, ma approssimabili a delle

circonferenze, le approssimò a orbite circolari. Dunque, se ciò è vero, la velocità areale è costante ed il moto di un pianeta è circolare uniforme. Ricordando che

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

La costanza della velocità areale e di  $r$  dà  $\frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$ .

La forza che agisce sul pianeta, per effettuare una traiettoria circolare con velocità costante, deve essere centripeta (senza componente tangenziale) e dunque

$$F = m\omega^2 r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r$$

Dove  $T$  è il periodo di rivoluzione,  $m$  la massa e  $r$  il raggio dell'orbita del pianeta. Utilizzando la terza legge di Keplero  $T^2 = kr^3$  si può scrivere che

$$F = m \left( \frac{2\pi}{\sqrt{kr^3}} \right)^2 r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$$

Primo risultato fondamentale: la forza esercitata dal sole sui pianeti che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole.

Considerando il sistema sole-terra, la forza esercitata dal sole sulla terra (e viceversa) si può scrivere come

$$F_{s,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2}$$

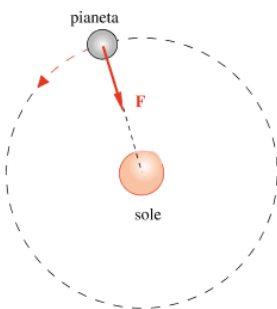
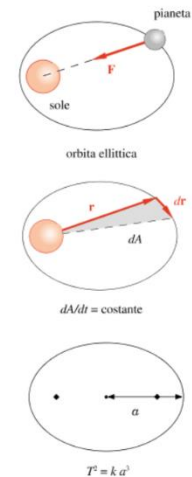
$$F_{T,s} = \frac{4\pi^2}{k_s} \frac{m_s}{r^2}$$

Uguale in modulo per il principio di *azione e reazione*. Dall'uguaglianza si ottiene  $m_T k_s = m_s k_T$ . Si può definire la costante

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_s} = \frac{4\pi^2}{m_s k_T}$$

E per il modulo della forza sole-terra si ha

$$F = \gamma \frac{m_s m_T}{r^2}$$





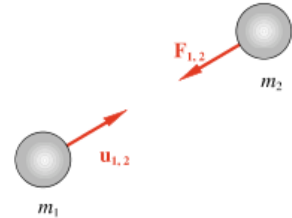
E la direzione è quella della retta congiungente il sole con la terra.

Da questa formula Newton enunciò la **legge di gravitazione universale**:

*date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.*

La costante di proporzionalità  $\gamma$  è una *costante universale* indipendente dai valori delle masse e dalla geometria del sistema, ma è caratteristica dell'interazione gravitazionale. In termini vettoriali, la formula si esprime come

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_{1,2}$$



La prima misura diretta di  $\gamma$  venne fatta da Cavendish utilizzando una bilancia di torsione per misurare la forza di attrazione tra due masse sferiche, misura molto difficile visto che la forza è dell'ordine di  $10^{-9}N$  a causa del piccolo valore di  $\gamma$ .

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2} \quad , \quad m_T = 5.98 \cdot 10^{24} kg$$

La formula mostra che la forza gravitazionale è una forza centrale: viene così chiarito il perché della validità della **seconda legge di Keplero**.

## 5.2 Massa inerziale e massa gravitazionale

La massa dei corpi indicata nella formula precedente è detta **massa gravitazionale**. A priori non c'è nessuna ragione logica per supporre che la massa gravitazionale, legata ad una particolare interazione, sia uguale alla massa inerziale che compare nella legge di Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Qui la grandezza  $m$  caratterizza l'inerzia del corpo.

Sulla superficie terrestre vale l'equazione

$$m_I g = \gamma \frac{m_{T,G} m_G}{r_T^2}$$

Dove  $m_I$  e  $m_G$  sono le *masse inerziale e gravitazionale* del corpo attirato dalla terra, la cui massa gravitazionale è  $m_{T,G}$ . Si ricava che

$$g = \gamma \frac{m_{T,G}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I}$$

Sperimentalmente si osserva che  $g$  in uno stesso luogo è indipendente dai corpi, quindi per qualsiasi corpo il rapporto  $\frac{m_G}{m_I}$  è costante. Poiché non esiste un modo diretto per misurare tale rapporto, l'ipotesi più semplice è supporre  $m_G = m_I$  e dunque nell'esperimento di Cavendish i valori delle masse delle sfere sono quelli inerziali e che il valore di  $\gamma$  si basa sull'ipotesi  $m_G = m_I$ .

### 5.3 Campo gravitazionale

La struttura della legge di gravitazione si presta a una considerazione interessante, cioè è possibile scrivere

$$\vec{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1,2}\right) m_2 \quad , \quad \vec{F}_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} \vec{u}_{2,1}\right) m_1$$

E dire che la forza gravitazionale  $\vec{F}_{1,2}$  esercitata dal corpo di massa  $m_1$  sull'altro di massa  $m_2$  è pari al prodotto di un vettore, che non dipende da  $m_2$ , ma solo da  $m_1$  e dalla distanza da  $m_1$ , per la massa  $m_2$  sottoposta all'azione di  $m_1$  (e viceversa per l'altra forza).

Il vettore tra parentesi è detto **campo gravitazionale**  $\vec{G}$  generato dalla massa sorgente del campo nel punto P distante  $r$ :

$$\vec{G}_1 = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_1 \quad , \quad \vec{F}_{1,2} = m_2 \vec{G}_1$$

$$\vec{G}_2 = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \hat{u}_2 \quad , \quad \vec{F}_{2,1} = m_1 \vec{G}_2$$

Il versore  $\hat{u}_i$  è un versore uscente radialmente dal punto in cui si trova la massa sorgente  $m_i$ .  $\vec{G}_1$  è diverso da  $\vec{G}_2$ , anche in modulo, ma  $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ . Tali formule sono valide per masse puntiformi, o a simmetria sferica.

Il campo gravitazionale totale  $\vec{G}$  in un punto P dovuto a più masse puntiformi si ottiene sommando vettorialmente tutti i vari contributi

$$\vec{G}(P) = \sum_i \vec{G}_i = \sum_i \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \hat{u}_i\right)$$

Il campo gravitazionale  $\vec{G}$  in un punto P dovuto a una massa  $m$  continua contenuta in una regione limitata, si calcola in modo analogo dividendo la massa  $m$  in parti infinitesime  $dm$ , ognuna delle quali genera un campo

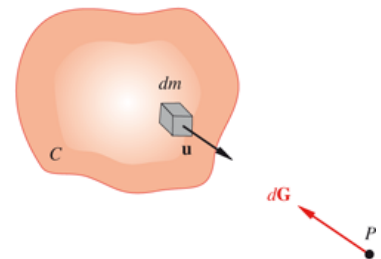
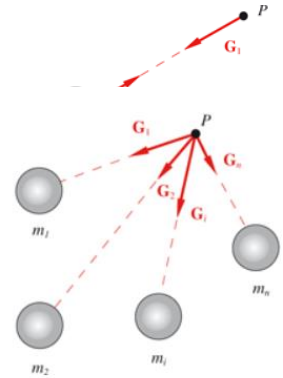
$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2} \hat{u}$$

E si integra vettorialmente su tutti i contributi (usando la relazione  $dm = \rho dV$ ):

$$\vec{G}(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} \hat{u} = \int_V -\gamma \rho \frac{dV}{r^2} \hat{u}$$

La forza tra due corpi estesi  $C_1$  e  $C_2$  di masse  $m_1$  ed  $m_2$  si ottiene calcolando in ciascun elemento di  $m_2$  la forza  $d\vec{F}_{1,2} = dm_2 \vec{G}_1$  esercitata dal corpo di massa  $m_1$ , con  $\vec{G}_1$  dato dall'espressione precedente e integrando vettorialmente su tutto  $C_2$

$$\vec{F}_{1,2} = \int_{C_2} \vec{G}_1 dm_2$$



## 5.4 Energia potenziale gravitazionale

Si dimostra ora che la forza gravitazionale è conservativa. Lo si sa già perché è una forza centrale, però il calcolo serve per trovare l'espressione dell'energia potenziale. La figura mostra la traiettoria di una massa  $m_2$  nel campo di una massa  $m_1$ . Il lavoro compiuto durante lo spostamento  $d\vec{s}$  è:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_1 \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto scalare  $\hat{u}_1 \cdot d\vec{s}$  della figura è pari alla proiezione di  $d\vec{s}$  su  $\hat{u}_1$  e quindi a  $dr$ , variazione del modulo della distanza tra  $m_1$  ed  $m_2$  a seguito dello spostamento  $d\vec{s}$ . Pertanto

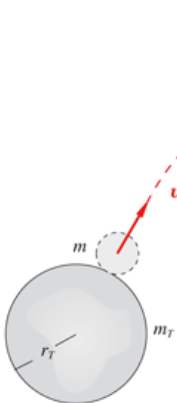
$$\begin{aligned} W &= \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \left( -\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) \\ &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \left( -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B} \end{aligned}$$

Si verifica dunque che il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalle posizioni iniziale e finale e che l'**energia potenziale** ha espressione

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Il segno negativo deriva da quello della legge di gravitazione che significa che la forza gravitazionale è attrattiva.

### Velocità di fuga



Nella condizione iniziale si ha un corpo di massa  $m$  sulla superficie terrestre, con energia cinetica  $E_{k,in} = \frac{1}{2}mv^2$ . Alla fine si vuole che il corpo sia a distanza infinita con velocità  $v_0 \geq 0$ . Si scrive dunque la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mm_T}{r_T} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Per cui

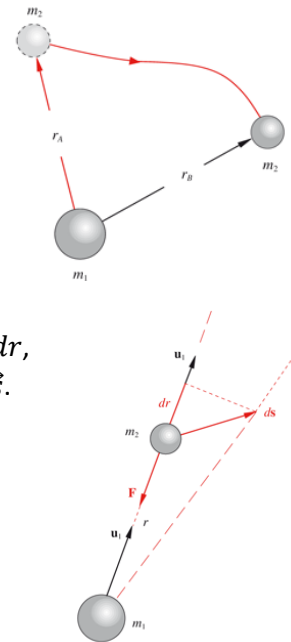
$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma \frac{m_T}{r_T}$$

Il valore limite (inferiore) di  $v$ , detto  $v_F$  **velocità di fuga**, corrisponde a  $v_0 = 0$ : il corpo arriva a distanza infinita dalla terra con velocità nulla. Si trova

$$v_F = \sqrt{2\gamma \frac{m_T}{r_T}}$$

Indipendente dalla massa del corpo. Poiché  $r_T = 6.37 \cdot 10^6 m$ , inserendo i valori di  $\gamma$  e  $m_T$  si trova

$$v_F = 11.2 \text{ km/s} = 4 \cdot 10^4 \text{ km/h}$$



## Potenziale gravitazionale

Anche alla formula dell'energia potenziale gravitazionale è possibile applicare il ragionamento fatto per il *campo gravitazionale*. Precisamente, l'energia potenziale si può scrivere  $E_P = m_2 V_1$  ponendo

$$V_1 = \frac{E_P}{m_2} = -\gamma \frac{m_1}{r}$$

La grandezza  $V_1(r)$  è detta **potenziale gravitazionale** del campo prodotto da  $m_1$ . Il lavoro per uno spostamento generico della massa  $m_2$  dalla posizione A alla posizione B nel campo di  $m_1$  è

$$W = -\Delta E_P = -m_2 \Delta V_1 = -m_2 (V_{1,B} - V_{1,A})$$

Tra campo e potenziale esiste la relazione fondamentale

$$\vec{G} = -\text{grad } V = -\nabla V$$

Che si ricava come studiato nel capitolo 2.21, utilizzando la legge di gravitazione universale e quella dell'energia potenziale.

## 5.5 Teorema di Gauss. Distribuzione sferica di massa

Consideriamo un certo numero di masse e una superficie geometrica che ne racchiude  $n$ . In ogni punto della superficie determiniamo  $\vec{G}$  che è dovuto a tutte le masse presenti (interne ed esterne) e calcoliamo la quantità scalare

$$d\phi = \vec{G} \cdot \hat{u}_N dS$$

$\hat{u}_N$  è il versore normale alla superficie che si assume orientato verso l'interno, e  $dS$  è l'elemento di superficie attorno cui è calcolato  $\vec{G}$ . L'integrale esteso a tutta la superficie chiusa

$$\phi = \oint d\phi = \oint \vec{G} \cdot \hat{u}_N dS$$

Si chiama **flusso del vettore  $\vec{G}$**  attraverso la superficie chiusa  $S$ .

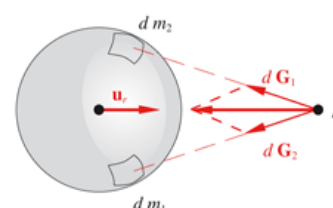
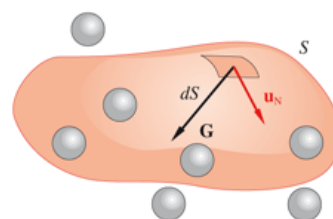
Il **teorema di Gauss** afferma che *il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma delle masse interne alla superficie*:

$$\phi = 4\pi\gamma \sum_i m_i$$

Nella dimostrazione del teorema è fondamentale il fatto che il campo gravitazionale di una massa puntiforme è funzione della distanza del tipo  $1/r^2$ : *il teorema di Gauss vale esclusivamente per i campi vettoriali che dipendono inversamente dal quadrato della distanza*.

Il teorema di Gauss permette di verificare che il campo di una distribuzione sferica di massa è pari a quello di una uguale massa puntiforme posta nel centro della distribuzione.

Supponiamo di avere una massa  $m$  distribuita su una superficie sferica di raggio  $R$  in modo uniforme (cioè la massa per unità di area è costante ovunque). Nel punto  $P$  in figura il campo  $G$  è radiale: è dovuto alla somma di contributi simmetrici, uguali in modulo, che danno risultato radiale. Se così non fosse, la distribuzione di massa non sarebbe uniforme. In qualsiasi altro



punto che abbia dal centro la stessa distanza di P la situazione è la stessa: il campo  $\vec{G}$  è radiale e il modulo dipende solo da  $r$ ,

$$\vec{G} = -G(r)\hat{u}_r$$

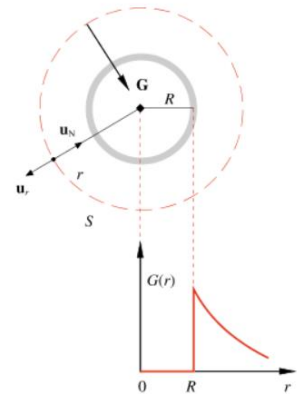
Per calcolare  $G(r)$  si utilizza il teorema di Gauss: come superficie di integrazione si prende una superficie sferica  $S$  concentrica a  $m$  e di raggio  $r \geq R$ , nei cui punti il campo ha lo stesso valore; la massa contenuta all'interno è  $m$ . Si ha:

$$\phi = \oint -G(r)\hat{u}_r \cdot \hat{u}_N dS = G(r) \oint dS = 4\pi r^2 G(r)$$

Uguagliamo l'espressione a quella del teorema di Gauss per ottenere

$$4\pi r^2 G(r) = 4\pi \gamma m \rightarrow G(r) = \gamma \frac{m}{r^2}$$

Come se  $m$  fosse concentrata nel centro. Il risultato vale per  $r \geq R$ ; all'interno, per  $r < R$ , qualsiasi superficie di integrazione si consideri, questa non contiene massa e dunque il flusso attraverso di essa è nullo. Deve quindi essere  $G = 0$  ovunque. Dalla figura si osserva che il campo è discontinuo nell'attraversare la massa in  $r = R$ .



Se  $m$  è distribuita uniformemente in tutto il volume sferico, all'esterno il discorso è identico e vale sempre

$$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2}, \quad r \geq R$$

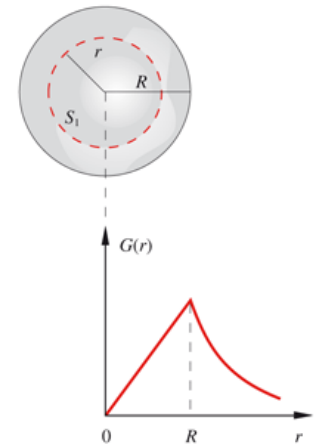
All'interno invece cambia tutto,  $G$  non è più nullo; resta però vero l'argomento di simmetria radiale.

All'interno di una superficie sferica  $S_1$  di raggio  $r \leq R$ , come in figura, si ha una massa  $m(r)$  minore di  $m$ ; dato che la distribuzione di massa è uniforme, il rapporto tra  $m(r)$  ed  $m$  è uguale al rapporto tra i volumi occupati, ovvero a  $r^3/R^3$  perciò si può scrivere

$$m(r) = m \frac{r^3}{R^3}$$

Applicando Gauss, si ottiene:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= 4\pi r^2 G(r) = 4\pi \gamma m(r) = 4\pi \gamma \frac{r^3}{R^3} \\ G(r) &= \gamma \frac{m}{R^3} r \end{aligned}$$

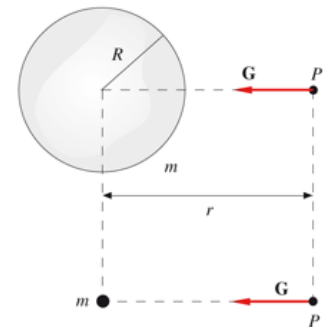


Il campo all'interno di una sfera omogenea cresce linearmente con la distanza dal centro.

Riassumendo, dai due campi calcolati si vede che il campo gravitazionale in un punto  $P$  all'esterno di una distribuzione sferica uniforme di massa in ogni caso vale

$$\vec{G}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{u}_r$$

Indipendente, inoltre, dal raggio della distribuzione. Questo inoltre corrisponde al campo gravitazionale in  $P$  prodotto da una massa  $m$  concentrata nel centro della distribuzione. La figura mostra l'equivalenza tra le due situazioni.



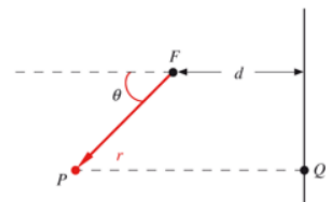
## 5.6 Determinazione della traiettoria

Si dimostra ora la 1° e la 3° legge di Keplero.

### Parentesi geometrica sulle coniche

Una conica è una curva piana definita come luogo dei punti per i quali il rapporto tra la distanza da un punto (fuoco) e la distanza da una retta (direttrice) è pari a una costante positiva che si chiama eccentricità  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d + r \cos \theta}$$



$d$  è la distanza tra il fuoco e la direttrice ed è un parametro dato. Pertanto l'equazione di una conica in coordinate polari di centro  $F$  è

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\epsilon d} - \frac{1}{d} \cos \theta$$

Se  $\epsilon < 1$  si ha un'ellisse, se  $\epsilon = 1$  si ha una parabola, se  $\epsilon > 1$  un'iperbole. In particolare per un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  valgono le relazioni:

$$a = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon^2} \quad b = a \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad \epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

L'area dell'ellisse è  $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$  e dunque  $\epsilon = 0$  corrisponde ad una circonferenza.

### Equazione del moto. Traiettoria

Consideriamo due punti isolati di massa  $M$  ed  $m$ , tra i quali esiste la forza gravitazionale  $\frac{\gamma M m}{r^2}$ . In un sistema di riferimento inerziale:

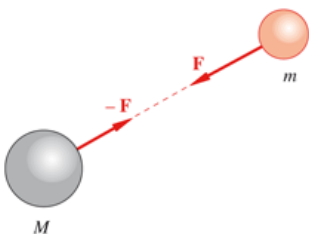
$$\vec{F} = m \vec{a}_m, \quad -\vec{F} = M \vec{a}_M$$

Secondo quanto già visto per i moti relativi, l'accelerazione relativa di  $m$  rispetto a  $M$  è:

$$\vec{a} = \vec{a}_m - \vec{a}_M = \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{F} = \frac{1}{\mu} \vec{F}$$

Dove

$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

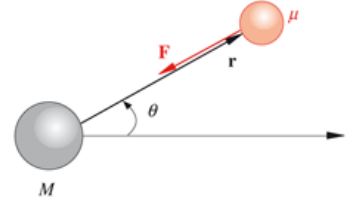


È detta **massa ridotta** del sistema  $\mu < m$  e  $\mu < M$ . Pertanto:

$$\vec{F} = \mu \vec{a}$$

Il moto relativo di due punti materiali sottoposti alla loro interazione mutua è equivalente al moto di un punto con massa uguale alla massa ridotta e sottoposto a una forza uguale alla forza di interazione mutua.

Introduciamo ora:



$$\vec{F} = -\mu \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r$$

$$a = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \hat{u}_r = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \hat{u}_r$$

Rispettivamente la forza dovuta all'interazione gravitazionale tra le due masse e la formula di Binet (già calcolata nel capitolo 2) che fornisce l'accelerazione in un campo di forze centrali, in funzione delle coordinate polari. Sostituendo le formule introdotte alla formula precedente si ha

$$-\mu \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \hat{u}_r$$

Ovvero

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{mM}{L^2}$$

La soluzione di questa equazione differenziale dà  $r(\theta)$ , cioè la relazione tra  $r$  e  $\theta$  che corrisponde in coordinate polari alla traiettoria di  $m$  rispetto a  $M$ . Una soluzione di questa equazione non omogenea è del tipo  $A \cos \theta + S_p$  ovvero dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare. Essendo  $S_p = \frac{1}{r} = \text{costante}$ , sostituendo alla formula si ottiene

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (S_p) + S_p = \gamma \mu \frac{mM}{L^2} \rightarrow S_p = \gamma \mu \frac{mM}{L^2}$$

Perciò la soluzione dell'equazione è:

$$\frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{mM}{L^2} + A \cos \theta$$

Confrontandola con l'equazione delle coniche ripresa prima, si ritrova che la traiettoria è una conica.

### **Momento angolare. Energia**

Un primo risultato del confronto con l'equazione delle coniche è che

$$L^2 = \gamma \mu m M \epsilon d$$

I parametri della traiettoria  $\epsilon$  e  $d$  danno il valore costante del momento angolare della massa  $m$ .

L'energia totale di  $m$  è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \gamma \frac{mM}{r} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \gamma \frac{mM}{r}$$

Avendo ricorso alle componenti polari del raggio vettore (cap. 1) visto che il moto è piano. Per la stessa ragione si può utilizzare la formula  $L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$  vista nel capitolo 2 per il momento angolare, ma riscritta come

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Il primo termine della formula,  $\frac{1}{2} \mu \left( \frac{dr}{dt} \right)^2$  si può trasformare ricorrendo all'equazione delle coniche

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\sin \theta}{d} \frac{d\theta}{dt} \\ \rightarrow \frac{1}{2} \mu \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 &= \frac{1}{2} \mu \frac{r^4}{d^2} \sin^2 \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} \frac{L^2}{\mu} \end{aligned}$$

Avendo anche utilizzato la formula per  $L$ . Questa permette di trasformare anche il secondo termine:

$$\frac{1}{2} \mu r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2}$$

Infine il terzo termine tramite la funzione per  $L^2$  viene

$$-\gamma \frac{mM}{r} = -\frac{L^2}{\epsilon d \mu r}$$

Mettendo insieme il tutto

$$E = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} \frac{L^2}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{L^2}{\epsilon d \mu r}$$

Riutilizzando l'equazione delle coniche per  $\frac{1}{r}$  e  $\frac{1}{r^2}$  e per  $L^2$  si ottiene

$$E = \frac{L^2}{2\mu\epsilon^2 d^2} (\epsilon^2 - 1) = \gamma \frac{mM}{2\epsilon d} (\epsilon^2 - 1)$$

Anche l'energia totale, costante perché la forza è conservativa, si ricava dai parametri dell'orbita.

Questa formula ci permette di dimostrare che con  $\epsilon < 1$ , orbita ellittica, l'energia è negativa, con  $\epsilon = 1$ , orbita parabolica, l'energia è nulla, con  $\epsilon > 1$ , orbita iperbolica, l'energia è positiva.

Essendo il sistema pianeta-sole legato, l'energia totale è negativa e quindi l'orbita del pianeta è **un'ellisse**.

Nel caso particolare di orbite ellittiche, utilizzando le relazioni introdotte per ellissi di semiasse  $a$  e  $b$ :

$$L^2 = \gamma \mu m M a (1 - \epsilon^2), \quad E = -\gamma \frac{mM}{2a}$$

Data l'energia totale  $E$  è fissato solo il semiasse maggiore  $a$ , ma non l'eccentricità. A parità di energia si possono avere ellissi diverse (stessa  $a$ , ma diversa  $\epsilon$ ) con momento angolare diverso, a conferma che energia e momento angolare sono indipendenti.

Infine, utilizzando la formula per la velocità areale (capitolo 2) e supponendo che la velocità areale sia costante  $\frac{dA}{dt} = C$ , implica che  $C = \frac{A}{T}$  dove  $A$  rappresenta l'area totale racchiusa dalla traiettoria e  $T$  il tempo totale impiegato a percorrerla, cioè il periodo. Allora  $\frac{A}{T} = \frac{L}{2m}$  e dunque

$$T = \frac{2m}{L} A = 2\mu \frac{A}{L} = 2\mu \frac{\pi a^2}{L} \sqrt{1 - \epsilon^2}$$



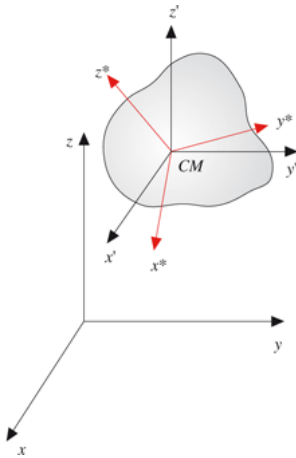
Confrontandola con la formula precedente, si ha

$$L^2 = \frac{4\pi^2 \mu^2 a^4 (1 - \epsilon^2)}{T^2} = \gamma \mu m M a (1 - \epsilon^2)$$
$$\rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \mu a^3}{\gamma m M} = \frac{4\pi^2}{\gamma (m + M)} a^3 = k a^3$$

Che è la **terza legge di Keplero**. Si osservi che la costante  $k$  è praticamente uguale per tutti i pianeti, essendo la massa  $m$  di ciascun pianeta molto minore della massa  $M$  del sole.

## Dinamica del corpo rigido

### 6.1 Definizione di corpo rigido. Prime proprietà



Il sistema fisico in esame è un insieme di punti materiali sottoposti ad un'interazione mutua tale da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro. Questo sistema viene detto **corpo rigido** ed è più precisamente definito come *un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare*.

Lo studio del moto di un corpo rigido verrà fatto normalmente in un sistema di riferimento inerziale. Un altro sistema importante è il sistema di riferimento del centro di massa del corpo rigido (non inerziale, con gli assi paralleli a quelli del sistema inerziale). In questo sistema si può studiare solo il moto rispetto al centro di massa e poiché la distanza dei singoli punti dal centro di massa non cambia mai, ciascun punto è visto dal centro di massa o fermo o in moto lungo un arco di circonferenza.

Per descrivere la posizione di un corpo rigido occorrono sei parametri (gradi di libertà). Se si conosce dove si trova ad un certo istante un punto P di un corpo rigido, l'evoluzione nel tempo della posizione di P nel sistema di riferimento inerziale è nota se conosciamo il moto del centro di massa.

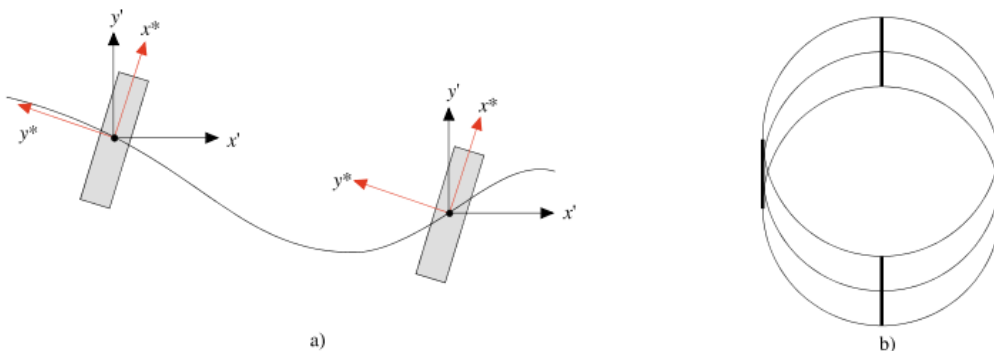
Un corpo rigido è un corpo esteso ed il suo moto è determinato dalle forze esterne che, in generale, sono più di una e sono applicate in punti diversi del corpo. Si tratta dunque di sistemi di forze, caratterizzati da una risultante  $\vec{R}^{(E)}$  e da un momento risultante  $\vec{M}^{(E)}$ , grandezze indipendenti tra loro.

Si ricorda che il lavoro delle forze interne è **nullo** in un sistema rigido, pertanto, la variazione di energia cinetica di un corpo rigido è uguale al lavoro delle sole forze esterne. Dunque, non si specificherà più col simbolo  $^{(E)}$ . Le leggi fondamentali sono dunque:

$$\vec{R} = m\vec{a}_{CM} \quad , \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad , \quad \Delta E_k = W$$

### 6.2 Moto di un corpo rigido

Il primo tipo di moto è quello di **traslazione**: tutti i punti descrivono traiettorie uguali, in generale curvilinee, percorse con la stessa velocità  $\vec{v}$ , che può variare nel tempo in direzione, modulo e verso:  $\vec{v}$  coincide con  $\vec{v}_{CM}$ , velocità del centro di massa. Pertanto, nel moto di traslazione, che può essere uniforme o vario, se è noto il moto del centro di massa è noto quello di qualsiasi altro punto.



A sinistra si nota una generica traslazione e si nota che l'angolo tra gli assi del sistema del centro di massa e gli assi del sistema solidale al corpo non cambiano durante il moto. A destra invece si nota un moto di traslazione in cui tutti i punti descrivono una traiettoria circolare: le circonferenze sono tutte uguali ma non hanno lo stesso centro. La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al centro di massa:

$$\vec{L}' = 0 \quad , \quad E'_k = 0$$

Le grandezze significative in una traslazione sono dunque:

$$\vec{P} = m\vec{v}_{CM}$$

$$E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2}m\vec{v}_{CM}^2$$

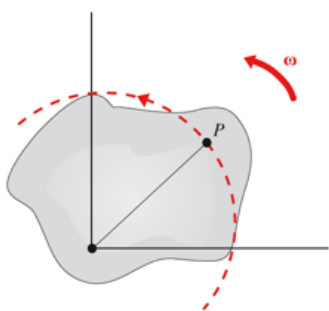
L'equazione del moto del centro di massa è

$$\vec{R} = m\vec{a}_{CM}$$

La conoscenza del momento angolare si ricava dalla conoscenza della quantità di moto e dalla posizione del centro di massa:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

Si nota che  $\vec{L}$  non è indipendente da  $\vec{P}$ . Di conseguenza, anche l'equazione  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  non aggiunge alcuna informazione.



Il secondo tipo di moto è la **rotazione**: tutti i punti descrivono un moto circolare e la rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano in un dato istante la stessa velocità angolare  $\vec{\omega}$ , che è parallela all'asse di rotazione. Le velocità  $\vec{v}_i$  dei singoli punti sono diverse in base alla distanza  $R_i$  dall'asse di rotazione ( $\vec{v}_i = \omega R_i$ ). Se l'asse di rotazione è fisso nel tempo,  $\vec{\omega}$  può variare solo in modulo e verso e abbiamo un moto circolare vario. L'equazione dinamica di base del moto di rotazione è:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Il moto rigido più generale è una **rototraslazione**: ogni spostamento infinitesimo può essere sempre considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da  $\vec{v}$  e  $\vec{\omega}$ , variabili nel tempo. Per descrivere la rototraslazione si utilizzano sia il teorema del moto del centro di massa che il teorema del momento angolare, avendo preso come polo un punto fisso nel sistema inerziale o il centro di massa.

Considerando due punti  $P$  e  $Q$  di un corpo rigido: per un moto di rototraslazione le velocità nei due punti sono:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} \quad , \quad \vec{v}_Q = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OQ}$$

$O$  è un punto generico, che potrebbe anche coincidere col centro di massa.  $\vec{v}_O$  rappresenta il moto di traslazione,  $\vec{\omega} \times \vec{OP}$  e  $\vec{\omega} \times \vec{OQ}$  rappresentano una rotazione istantanea attorno ad un asse passante per  $O$ . Sottraendo membro a membro:

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{OP} - \vec{OQ}) = \vec{\omega} \times \vec{QP} \rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{QP}$$

Il moto di  $P$  è ancora una rototraslazione, caratterizzata dalla velocità  $v_Q$  e dalla stessa velocità angolare  $\omega$ , che individua l'asse di rotazione passante per  $Q$ . In particolare, se  $Q$  è fermo,  $v_Q = 0$  e il moto è una pura rotazione. Si nota dunque che  $\omega$  è unica, mentre  $v$  dipende da quale asse di rotazione vogliamo considerare.

Pur potendo descrivere il moto in vari modi, i valori del momento angolare e dell'energia cinetica del corpo non dipendono dalla descrizione.

### 6.3 Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa

Si effettua ora una suddivisione concettuale per ottenere dei vantaggi. Il singolo punto materiale che compone il corpo rigido va pensato come un piccolo volume  $dV$  contenente una massa  $dm$ . Tale suddivisione permette di utilizzare i risultati ricavati per i sistemi discreti di punti semplicemente sostituendo alle sommatorie degli integrali. Un ulteriore vantaggio è quello di poter tenere conto di come la massa è distribuita all'interno del corpo. Ciò viene fatto introducendo la grandezza **densità** definita come:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Che scrivendola come  $\rho dV = dm$  è possibile risalire alla massa totale del corpo

$$m = \int dm = \int_V \rho dV$$

Un corpo nel quale la densità è costante si dice *omogeneo* e la formula diventa:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad , \quad m = \rho V$$

In casi particolari la massa può essere distribuita invece che in un volume su una superficie  $S$ . Dunque si può introdurre anche il concetto di *densità superficiale* e *densità lineare*

$$\rho_s = \frac{dm}{dS} \rightarrow m = \int \rho_s dS \quad , \quad \rho_l = \frac{dm}{dl} \rightarrow m = \int \rho_l dl$$

La grandezza  $v = 1/\rho$  è detta *volume specifico*. La densità rappresenta la massa contenuta nell'unità di volume, mentre il volume specifico rappresenta il volume occupato dall'unità di massa. La densità si misura in  $kg/m^3$ .

#### Calcolo della posizione del centro di massa

La posizione di ciascun punto di un corpo rigido di massa  $dm = \rho dV$  è individuata dal raggio vettore  $\vec{r}$  ed in accordo con la definizione già introdotta, la posizione del centro di massa è data dalla somma degli infiniti vettori  $\vec{r} dm$  divisa per la massa totale:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{m}$$

Se il corpo è omogeneo, e dunque  $\rho = cost$ ,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{m} \int \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV$$

Dalla formula si nota che in un corpo omogeneo la posizione del centro di massa non dipende dal valore della massa nel corpo, ma solo dalla sua forma.

Se un corpo omogeneo è simmetrico rispetto a un punto, un asse o un piano, il centro di massa rispettivamente coincide col centro di simmetria o è un punto dell'asse o del piano di simmetria. Se esistono più assi o piani di simmetria, il centro di massa sta sulla loro intersezione.

Esempi pag. 197

## Centro di massa e forza peso

Considerando un corpo continuo sottoposto alla forza peso, si nota che su ciascun elemento agisce la forza  $\vec{g} dm$  e la risultante di tutte queste forze parallele è

$$\int \vec{g} dm = \vec{g} \int dm = m\vec{g}$$

Applicata nel centro di massa. Rispetto ad un polo fisso, che potrebbe essere l'origine delle coordinate, il momento risultante è

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{g} dm = \left( \int \vec{r} dm \right) \times \vec{g} = m\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{g}$$

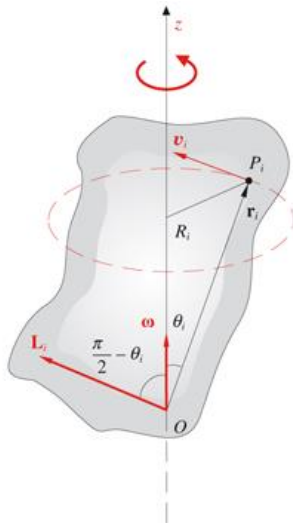
Uguale al momento della risultante, cioè della forza peso, rispetto allo stesso polo. Anche l'energia potenziale si calcola integrando:

$$E_p = \int g z dm = g \int z dm = mgz_{CM}$$

## 6.4 Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

Si considera ora la rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale. I punti dell'asse di rotazione sono punti fissi e quindi possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti. Il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  ha direzione fissa, quella dell'asse di rotazione, mentre il modulo è in generale variabile nel tempo. Il verso di  $\vec{\omega}$  indica il verso della rotazione. Se  $\omega$  varia, allora è diverso da zero il vettore accelerazione angolare  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$  anch'esso parallelo all'asse di rotazione.

### Calcolo del momento angolare. Momento d'inerzia



Assumiamo l'asse  $z$  come asse di rotazione. Dunque,  $\vec{\omega}$  è parallelo all'asse  $z$ . Il polo dei momenti è il punto  $O$  sull'asse  $z$ . Il raggio vettore  $\vec{r}_i$  del punto  $P_i$  forma un angolo  $\theta_i$  con l'asse  $z$  ed un angolo di  $\frac{\pi}{2}$  con il vettore  $\vec{v}_i$  del punto  $P_i$ . La traiettoria del punto è quella in figura e si nota che ha raggio  $R_i$  e che  $R_i = r_i \sin \theta_i$ . Il momento angolare del punto  $P_i$  rispetto al polo  $O$  è dato da  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ .  $L_i$  è ortogonale al piano individuato dai vettori  $\vec{r}_i$  e  $\vec{v}_i$  e forma un angolo  $\frac{\pi}{2} - \theta_i$  con l'asse  $z$ . Il modulo di  $L_i$  è:

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$$

Si calcola ora la proiezione del momento angolare  $L_i$  sull'asse di rotazione, ovvero il *momento angolare assiale*:

$$L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin(\theta_i) = m_i r_i \sin \theta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega$$

Il momento angolare del corpo è  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$  ed in generale non è parallelo all'asse di rotazione. La proiezione di  $L$  sull'asse  $z$  è:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left( \sum m_i R_i^2 \right) \omega = I_z \omega$$

Il coefficiente  $I_z$  è il **momento d'inerzia del corpo** rispetto all'asse  $z$ :

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Il momento d'inerzia dipende dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione.

La formula del momento d'inerzia ci dice che *la componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente  $I_z$ , solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo.*

Riassumendo, il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse di rotazione e ruota attorno a questo assieme al corpo.

La componente parallela all'asse può variare solo in modulo e dipende dalla scelta del polo, mentre la componente ortogonale dell'asse varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo. Il momento angolare risulta certamente parallelo all'asse di rotazione e quindi a  $\omega$  quando l'asse di rotazione è un'asse di simmetria del corpo o, più in generale, quando l'asse di rotazione coincide con un asse principale d'inerzia. In tali condizioni:

$$\vec{L} = \vec{I}_z \omega, \quad L = L_z, \quad L_{\perp} = 0$$

Un moto come quello più generale di  $\vec{L}$ , che ruota attorno all'asse di rotazione, si chiama **moto di precessione** e in particolare moto di precessione uniforme se la velocità angolare è costante. In questo caso anche  $\vec{L}$  è costante in modulo e si ha:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

La variazione di  $\vec{L}$  nel tempo, che si riferisce solo alla variazione di direzione e non del modulo, è espressa semplicemente da  $\vec{\omega} \times \vec{L}$ .  $d\vec{L}$  è ortogonale a  $\vec{L}$  e parallelo a  $\vec{M}$  ed il suo modulo vale, in base alla figura,  $dL = L_{\perp} d\phi$ , pertanto, sempre in modulo

$$M = \frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega$$

La situazione dinamica è la seguente, in caso di  $\omega$  costante: il momento angolare, che non è parallelo a  $\omega$ , cambia nel tempo secondo la formula di  $\vec{M}$  e ciò è dovuto al momento delle forze esterne.

### Equazione del moto

Nel caso più semplice in cui  $\vec{L}$  è parallelo a  $\vec{\omega}$ , vale che:

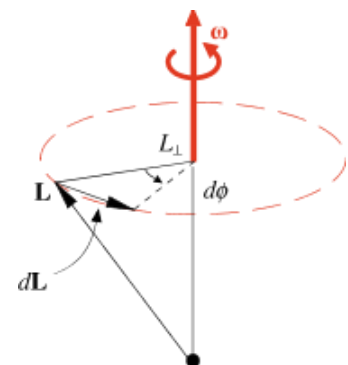
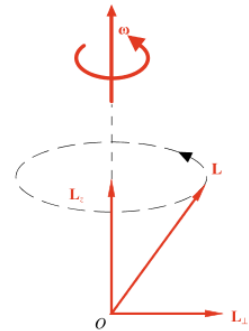
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

E dunque si scrive:

$$\vec{M} = I_z \alpha$$

Questa è l'**equazione del moto di rotazione**: la conoscenza del momento di forze esterne permette di calcolare l'accelerazione angolare se è noto il momento di inerzia. Sia  $\alpha$  che  $\vec{M}$  sono paralleli all'asse di rotazione, cioè a  $\vec{\omega}$ . E' possibile dunque ottenere la legge oraria, note le condizioni iniziali del moto, cioè posizione angolare e velocità angolare iniziali:

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$



Se  $M = 0$  il corpo resta in quiete o si muove con moto circolare uniforme:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \omega = \omega_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

Se  $M = \text{costante}$  il moto è circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha = \text{costante} \quad , \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Infine, con  $M$  generico,  $\alpha = \alpha(t)$  e il moto è circolare vario.

Quando invece  $\vec{L}$  non è parallelo a  $\vec{\omega}$  si utilizza la relazione  $L_z = I_z \omega$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

E proiettando sull'asse di rotazione:

$$M_z = I_z \alpha$$

Da questa si ricava  $\alpha$  e la legge oraria esattamente come fatto prima.

### Calcolo dell'energia cinetica e del lavoro

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Anche l'energia cinetica dipende dal momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. La formula mostra un'altra possibile maniera per arrivare alla definizione del momento d'inerzia. Se il momento angolare è parallelo a  $\vec{\omega}$ , si ha

$$E_k = \frac{L^2}{2I_z}$$

Quando un corpo rigido in quiete o rotazione con velocità angolare  $\omega_{in}$  viene portato a ruotare con velocità angolare  $\omega_{fin}$  a seguito dell'applicazione di un momento esterno, l'energia cinetica subisce una variazione ed è stato dunque compiuto lavoro:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2$$

Derivando si ottiene:

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M_z d\theta$$

Integrando dalla posizione iniziale a quella finale:

$$W = \int_0^\theta M_z d\theta$$

## 6.5 Momento d'inerzia

Il *momento d'inerzia* per un corpo continuo lo si deduce utilizzando la formula già trovata:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

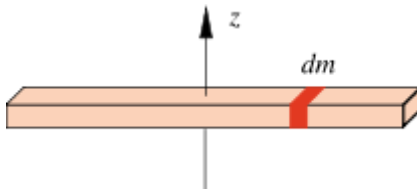
E integrando:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

Dove  $R$  è la distanza dell'elemento di massa  $dm$  dall'asse  $z$ , assunto come asse di rotazione. Essendo il momento d'inerzia additivo, se si suddivide un corpo in tante parti il *momento d'inerzia totale* è la *somma dei momenti d'inerzia parziali*, calcolati tutti rispetto allo stesso asse.

### Momento d'inerzia dell'asta

Si vuole calcolare il momento d'inerzia di una sottile asta omogenea, di massa  $m$  e di lunghezza  $d$ , rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il suo centro e nel caso in cui l'asse passa per un estremo dell'asta.



Detta  $S$  la sezione dell'asta, la massa è  $m = \rho S d$ . Un elemento di massa  $dm = \rho S dx$  si trova a distanza  $x$  dall'asse (si assume che le dimensioni trasversali siano trascurabili rispetto a  $d$ ). Pertanto:

$$I_z = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 dm = \rho S \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S d^3$$

Utilizzando la massa dell'asta,  $I_z = \frac{1}{12} m d^2$ . Nel secondo caso, invece:

$$I_z = \int_0^d x^2 dm = \rho S \int_0^d x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S d^3 = \frac{1}{3} m d^2$$

Il momento d'inerzia si misura in  $kg \, m^2$ .

## 6.6 Teorema di Huygens-Steiner

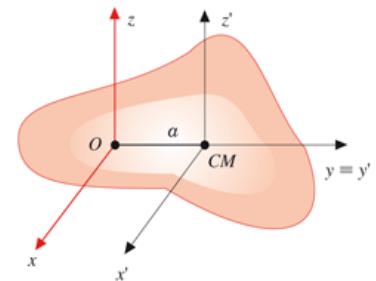
Fino ad ora si è scelto un particolare asse di rotazione, cioè un asse di simmetria passante per il centro di massa. Nel caso in cui si scelga un altro asse, il calcolo può diventare molto complicato.

Il **teorema di Huygens-Steiner** semplifica questi calcoli, poiché stabilisce che il *momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad un asse che si trova a una distanza  $a$  dal centro di massa del corpo* è dato da:

$$I = I_c + m a^2$$

Dove  $I_c$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa. Per dimostrarlo si considerano due assi  $z$  e  $z'$ , tra loro paralleli, distanti  $a$ ; l'asse  $z'$  passa per il centro di massa. La relazione tra le coordinate nei due sistemi, con centro in  $O$  e nel centro di massa è dato da:

$$x = x' \quad , \quad y = y' + a \quad , \quad z = z'$$



Il momento d'inerzia di un generico punto  $P_i$  rispetto all'asse  $z$  è dato da

$$m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Sommiamo tutti i punti utilizzando le formule di trasformazione:



$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i [x_i'^2 + (y_i' + a)^2] = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum m_i a^2 + 2a \sum m_i y_i'$$

Il primo termine è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse  $z'$ , il secondo è  $ma^2$  e il terzo è nullo perché  $\sum m_i y_i' = m y_{CM}'$  e  $y_{CM}'$ , coordinata del centro di massa nel sistema del centro di massa, è nulla. Si è quindi ricavata la formula di partenza.

Il teorema è molto utile poiché è sufficiente determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e lo si può ricavare rispetto a qualunque altro asse parallelo. Riprendendo il risultato dell'asta passante per un estremo e ortogonale all'asta:  $I = \frac{1}{12} m d^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m d^2$

### Teorema di H.S. e teorema di Konig

Riprendendo in esame l'espressione dell'energia cinetica di rotazione, dove  $I_z$  è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse  $z$  di rotazione, si può applicare il teorema di H.S. :

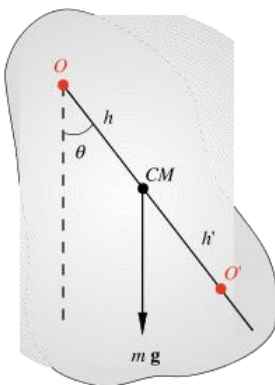
$$E_k = \frac{1}{2} (I_{z'} + ma^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} ma^2 \omega^2$$

$I_{z'}$  è il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse  $z$ , mentre  $a$  è la distanza tra i due assi. D'altra parte  $a\omega$  rappresenta la velocità  $v_{CM}$  del centro di massa, che percorre una traiettoria circolare di raggio  $a$  rispetto all'asse  $z$  e quindi:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Che in accordo col teorema di Konig per l'energia cinetica e con le caratteristiche del moto rigido afferma: quando il centro di massa non è sull'asse di rotazione, l'energia cinetica è data dalla somma di  $E_{k'} = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2$  tipico della rotazione che costituisce il moto rispetto al centro di massa, e di  $E_{k,CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ , energia cinetica del centro di massa.

### 6.7 Pendolo composto



Si chiama pendolo composto o pendolo fisico, ogni *corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa*.

In figura è rappresentata la sezione del pendolo contenente il centro di massa  $CM$ ;  $O$  è la traccia dell'asse di rotazione ortogonale al foglio, e  $h$  è la distanza del centro di massa da  $O$ .

Se si sposta il pendolo composto dalla posizione di equilibrio statico ( $\theta = 0$ ), sia a destra che a sinistra, l'azione del peso è tale da riportare il pendolo verso la posizione di equilibrio. Il momento della forza peso (che agisce come momento di richiamo verso  $\theta = 0$ ) è pari a  $M = -mgh \sin \theta$ . Se non esistono momenti di forze

di attrito nella rotazione attorno all'asse, l'equazione del moto è:

$$M_z = I_z \alpha \rightarrow \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Uguagliando al momento della forza peso:

$$-mgh \sin \theta = I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin \theta = 0$$

$I_z$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione orizzontale,  $z$ ; per il teorema di H.S. si ha  $I_z = I_c + mh^2$

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola,  $\sin\theta \cong \theta$  e si ottiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0$$

Che è l'equazione del moto armonico ed ha soluzione:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)$$

La pulsazione è:  $\Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$  ed il periodo vale:  $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

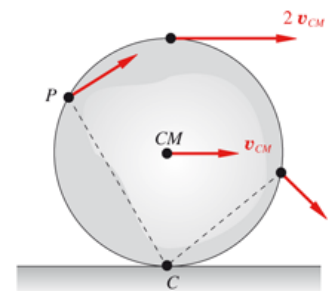
La grandezza  $l = \frac{I_z}{mh}$  rappresenta la *lunghezza ridotta del pendolo composto* e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

Quando invece l'ampiezza dell'oscillazione è grande il pendolo si muove ancora di moto periodico, ma non più armonico.

## 6.8 Moto di puro rotolamento

In questa situazione fisica l'asse di rotazione non è un asse materiale ma un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido. Questo, di forma cilindrica o sferica, si trova sopra un piano e si muove rispetto ad esso. Se le velocità di tutti i punti sono uguali tra loro e parallele al piano, si ha un moto di traslazione e il corpo striscia sul piano.

In generale però il corpo in questione rotola sul piano e il punto di contatto ha velocità non nulla rispetto al piano: si dice allora che il *corpo rotola e striscia*. Se invece la velocità del punto di contatto è nulla, si ha un *moto di puro rotolamento*.



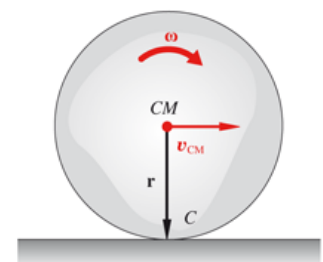
In ogni intervallo  $dt$  il corpo che rotola senza strisciare può venire considerato come se ruotasse rispetto ad un asse, fisso durante  $dt$ , passante per il punto di contatto  $C$  e ortogonale al piano in figura, con velocità angolare  $\omega$ . La velocità di ogni punto del corpo, di conseguenza, è ortogonale alla linea che congiunge il punto con  $C$  ed è in modulo proporzionale alla distanza da  $C$ ,  $v_p = \omega|PC|$ . In un intervallo  $dt$  successivo il contatto avviene in un altro punto  $C'$  e si ripete la rotazione attorno ad un altro asse e così via.

Deve dunque agire una forza per tenere fermo, nell'intervallo  $dt$ , il punto  $C$ . Si tratta di una **forza di attrito statico** (il punto  $C$  è fermo) **che si esercita tra il piano e il corpo**.

La velocità del punto  $C$ , distante  $r$  dal centro di massa, si può sempre scrivere  $\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ , somma della velocità del centro di massa e della velocità di  $C$  relativa al centro di massa.

La condizione per il **puro rotolamento** è  $\vec{v}_C = 0$  e dunque

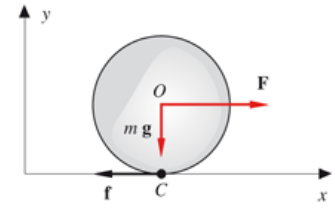
$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$$



In modulo:

$$v_{CM} = \omega r \rightarrow a_{CM} = \alpha r$$

Supponiamo di avere un corpo di massa  $m$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare su una superficie piana orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale  $\vec{F}$  applicata all'asse. Sul corpo agiscono anche la forza peso  $m\vec{g}$  e la normale del piano  $\vec{R}$  che ha una componente normale  $\vec{N}$  e una componente tangenziale  $f$  (forza di attrito statico). Dato che la forza  $\vec{F}$  spinge tutto il corpo verso destra, la reazione  $f$  deve avere il verso indicato in figura per tenere fermo il punto. La legge del moto è:



$$\vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM}$$

Che proiettata sugli assi  $x$  e  $y$ :

$$F - f = ma_{CM} \quad , \quad N - mg = 0 \rightarrow N = mg$$

Il teorema del momento angolare, scelto il centro di massa  $O$  come polo, si scrive:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} = I\vec{\alpha} \rightarrow rf = I\alpha = I \frac{a_{CM}}{r}$$

Facendo sistema tra l'ultima equazione e quella dell'asse  $x$ , si trovano le due incognite  $a_{CM}$  e  $f$

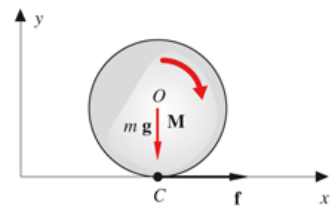
$$a_{CM} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \quad , \quad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

$f$  non può assumere qualsiasi valore: essa non può superare la massima forza di attrito statico, ovvero deve essere soddisfatta la disuguaglianza

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \rightarrow F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) = F_{lim}$$

Pertanto il moto può essere di puro rotolamento solo se la forza applicata non supera il valore limite indicato; altrimenti il corpo rotola e striscia contemporaneamente.

Invece di spingere il corpo è possibile applicare all'asse un momento costante  $\vec{M}$ . Questa volta l'azione del momento tende a far slittare verso sinistra il punto di contatto e  $f$  deve avere il verso indicato in figura. Le equazioni sono:



$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM} \quad , \quad \vec{M} + \vec{r} \times \vec{f} = I\vec{\alpha}$$

E si ricava:

$$N = mg \quad , \quad f = ma_{CM} \quad , \quad M - rf = I \frac{a_{CM}}{r}$$

$$\rightarrow a_{CM} = \frac{M}{mr \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \quad , \quad f = \frac{M}{r \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

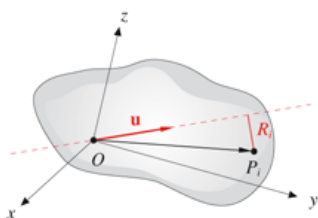
Anche ora bisogna verificare che

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \rightarrow M \leq \mu_s mgr \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) = M_{lim}$$

Mentre sotto l'azione di  $\vec{F}$  la reazione tangente  $\vec{f}$  si oppone al moto, a causa dell'azione di  $\vec{M}$   $\vec{f}$  favorisce il moto, anzi è la forza che causa l'accelerazione del centro di massa: quando un motore fa girare una ruota, è l'attrito col suolo che la spinge avanti.

Esempi pag. 217

## 6.10 Teorema di Poincot. Ellissoide d'inerzia



Consideriamo un punto qualsiasi  $O$  di un corpo rigido e assumiamo un sistema di riferimento con origine in  $O$  e con i tre assi  $x, y, z$  solidali al corpo stesso. Il versore di un qualsiasi asse di rotazione passante per  $O$  si scrive  $\vec{u} = \alpha \hat{u}_x + \beta \hat{u}_y + \gamma \hat{u}_z$  dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono i coseni direttori dell'asse e sono le componenti di  $\hat{u}$  rispetto ai tre assi di riferimento. Un punto  $P_i$  è individuato come segue:

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i} = x_i \hat{u}_x + y_i \hat{u}_y + z_i \hat{u}_z$$

E la sua distanza dall'asse di rotazione è

$$R_i = r_i \sin \theta_i = |\hat{u} \times \vec{r}_i|$$

E il momento d'inerzia vale

$$m_i R_i^2 = m_i (\hat{u} \times \vec{r}_i)^2$$

Tale prodotto vettoriale si scrive

$$\hat{u} \times \vec{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i) \hat{u}_x + (\gamma x_i - \alpha z_i) \hat{u}_y + (\alpha y_i - \beta x_i) \hat{u}_z$$

Eseguendo il quadrato di  $\hat{u} \times \vec{r}_i$  si ha il momento d'inerzia di  $P_i$  rispetto all'asse di rotazione. Il *momento d'inerzia del corpo* si ottiene sommando su tutti i punti:

$$I = I_{xx} \alpha^2 + I_{yy} \beta^2 + I_{zz} \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{yz} \beta \gamma - 2I_{zx} \gamma \alpha$$

Dove i coefficienti  $I_{j,i}$  hanno le seguenti espressioni:

$$I_{xx} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } x$$

$$I_{yy} = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } y$$

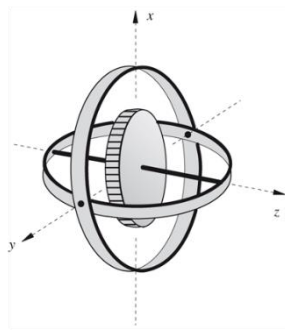
$$I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } z$$

$$I_{xy} = \sum m_i x_i y_i, \quad I_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum m_i z_i x_i$$

Gli ultimi tre termini sono detti **prodotti d'inerzia**.

Approfondimento a pag. 225 (non sono sicuro sia nel programma)

## 6.11 Giroscopi

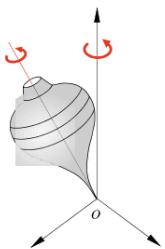
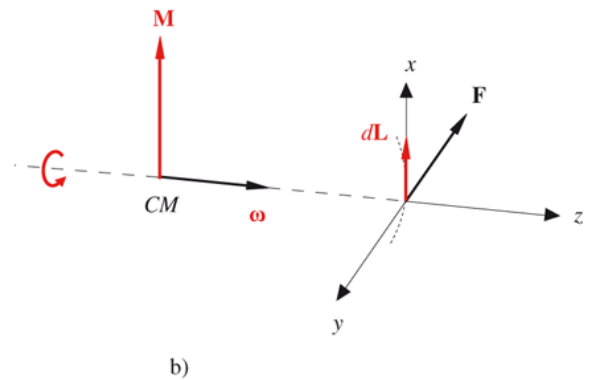
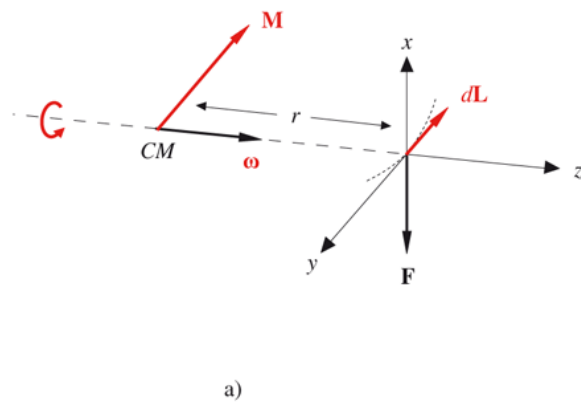


Si definisce *giroscopio* un corpo rigido con un punto che è mantenuto fisso da un opportuno sistema di vincoli. Si analizzano alcuni casi

1° caso: il punto fisso coincide col centro di massa, non vi sono momenti esterni rispetto al centro di massa ( $\vec{M} = 0$ ) e la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia, per cui  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ .

Dato che  $\vec{M} = 0$ ,  $\vec{L}$  è costante e quindi anche  $\vec{\omega}$  è costante l'asse di rotazione resta fisso nel tempo.

2° caso (*precessione del giroscopio*): il punto fisso coincide col centro di massa, la rotazione ha luogo attorno a un asse centrale d'inerzia,  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , ma agisce rispetto al punto fisso un momento esterno. Supponiamo che l'asse di rotazione sia orizzontale e che venga applicata una forza verticale. Il momento rispetto al centro di massa è  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  e giace in un piano orizzontale. La variazione di  $\vec{L}$  è  $d\vec{L} = \vec{M}dt$ , parallela a  $\vec{M}$ : l'asse si sposta in un piano orizzontale e non verso il basso ( $\vec{L}$ , costante in modulo, **precede** rispetto ad un asse verticale con velocità angolare  $\vec{\Omega}$  tale che  $\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$ ). Se invece la forza applicata è orizzontale, l'asse ruota in un piano verticale.



3° caso: il punto fisso  $O$  è diverso dal centro di massa e dunque rispetto ad  $O$  è diverso da zero il momento della forza peso. Il punto fisso, assunto come polo, è il punto di contatto di una trottola con il piano di appoggio. L'asse di rotazione, che è un asse centrale d'inerzia, passa per  $O$  e per il centro di massa. Si ha dunque  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  con  $\omega = \text{cost}$  in modulo. Il momento della forza peso è  $\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}$ , mentre il momento della reazione del piano è nullo. Dunque:

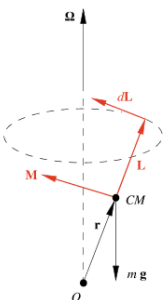
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

Ed essendo  $\vec{L}$  costante in modulo si ha

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{\Omega} \times I\vec{\omega}$$

$\vec{\Omega}$  è la velocità angolare di precessione del vettore  $\vec{L}$ , ovvero dell'asse di rotazione della trottola, rispetto all'asse verticale passante per  $O$ . Eguagliando

$$\vec{\Omega} \times I\vec{\omega} = \vec{r} \times m\vec{g} \rightarrow \vec{\Omega} = -\frac{m\vec{r}}{I\omega} \vec{g}$$



La *velocità angolare di precessione* è inversamente proporzionale alla velocità angolare della trottola. Il periodo del moto di precessione è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi I \omega}{mgr}$$

La precessione descritta qui è analoga al secondo caso.

## 6.12 Corpo rigido libero

Un corpo rigido libero è un corpo in cui nessun punto è vincolato. Per descriverne il moto, si utilizzano le due equazioni:

$$\vec{R} = m\vec{a}_{CM} \quad \text{moto del centro di massa} \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{moto rispetto al centro di massa}$$

Se rispetto al centro di massa  $\vec{M} = 0$ , come nel caso in cui agisca solo la forza peso,  $\vec{L} = \text{costante}$ . Si ha  $\vec{\omega} = \text{costante}$  solo se la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia.

Un esempio di corpo rigido libero è un disco che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro e contemporaneamente si sposta in un piano in assenza di attrito ( $v_{CM} = \text{costante}$ ,  $\omega = \text{costante}$ , non legate tra loro).

## 6.13 Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido

Si parte dalla *conservazione della quantità di moto del sistema*,  $\vec{P} = m\vec{v}_{CM}$ . Se la risultante delle forze esterne è nulla, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, ma il moto dei singoli punti non è detto che sia traslatorio rettilineo uniforme. Basta pensare, ad esempio, al moto di puro rotolamento uniforme. Anche se si suppone che  $\vec{M} = 0$  e dunque il momento angolare resta costante, ciò non comporta che  $\omega = \text{costante}$ , in quanto non è detto che il moto di rotazione avvenga attorno a un asse principale di inerzia, cioè che sia  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ .

In generale, la variazione del momento di inerzia comporta una variazione della velocità angolare anche se  $\vec{L}$  è costante. Si nota dunque l'*indipendenza della legge di conservazione del momento angolare da quella dell'energia*. Questo perché vi è una variazione dell'energia compiuto dalle forze centripete (come già visto in altri esempi, vedi 4.8 e 4.11).

Dunque la legge di conservazione dell'energia meccanica nel moto di un corpo è valida quando non ci sono attriti o quando, come nel moto di puro rotolamento, le forze di attrito non compiono lavoro, pur essendo presenti.

Esempio pag. 232

## 6.14 Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi

- In un urto l'energia cinetica del sistema rimane costante solo se l'urto è dichiaratamente elastico.
- Se agiscono solo forze interne, o quelle esterne non sono di tipo impulsivo, si conserva la quantità di moto totale.
- Qualora rispetto a un certo polo, fisso in un sistema di riferimento inerziale o coincidente col centro di massa, il momento delle forze esterne, comprese quelle vincolari, è nullo, si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Se agiscono solo forze interne  $\vec{L}$  si conserva sempre, indipendentemente dalla scelta del polo.

Quando il corpo urtato è vincolato, il sistema di vincoli può esplicare durante l'urto un sistema di forze che ha una risultante  $\vec{R}$  ed un momento risultante  $\vec{M}$ . L'effetto complessivo, nel brevissimo tempo di durata

dell'urto, è dato dall'impulso della forza  $\vec{J} = \int \vec{R} dt$  e dall'impulso angolare  $\int \vec{M} dt$ , uguali rispettivamente alla variazione della quantità di moto e alla variazione del momento angolare del sistema.

Quando due corpi estesi si urtano, ma non restano attaccati, le quantità di moto dopo l'urto formano normalmente un certo angolo con la direzione che avevano prima dell'urto. Infatti la forza interna impulsiva  $\vec{F}_{2,1}$  agente sul primo corpo non è parallela a  $\vec{p}_{1,in}$  e quindi  $\vec{p}_{1,in}$  risulta deviata rispetto alla direzione iniziale del moto; lo stesso accade per il secondo corpo.

## 6.15 Statica

La condizione di equilibrio statico per un punto materiale è che la risultante delle forze applicate al punto sia nulla,  $\vec{R} = 0$ . Se il punto è inizialmente in quiete, rimane in tale stato. Per un corpo rigido inizialmente in quiete si ha equilibrio statico se:

$$\vec{R} = 0 \quad , \quad \vec{M} = 0$$

Con  $R = 0$  si realizza l'equilibrio statico del centro di massa,  $v_{CM} = 0$ , mentre con  $M = 0$  non si ha moto rotatorio,  $\omega = 0$ .

Per quando riguarda l'equilibrio dei corpi sospesi, come ad esempio il pendolo composto, si nota che in qualsiasi posizione in cui il centro di massa non si trova sulla verticale passante per il centro di sospensione  $O$  il momento della forza peso rispetto ad  $O$  è diverso da zero e comunica al corpo un'accelerazione angolare. Se invece il centro di massa sta sulla verticale passante per  $O$  e ha velocità nulla, la posizione è di equilibrio: il momento è nullo e la risultante delle forze è nulla. Esistono dunque due posizioni possibili: il centro di massa sta sotto o sopra  $O$ . Nel primo caso se si allontana il corpo dalla posizione di equilibrio la forza peso tende a riportarlo, perciò si parla di **posizione di equilibrio**. Nel secondo caso invece, se il corpo si è appena allontanato dalla posizione di equilibrio, la forza peso lo fa ruotare portandolo verso la situazione con il centro di massa sotto  $O$  e si parla di **posizione di equilibrio instabile**. Se invece il centro di sospensione coincidesse con il centro di massa, il momento della forza peso sarebbe nullo e il corpo starebbe in quiete in qualsiasi posizione angolare: **equilibrio indifferente**.

## Proprietà meccaniche dei fluidi

### 8.1 Generalità sui fluidi. Pressione

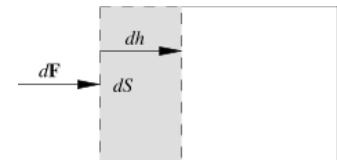
Una sostanza liquida assume la forma del recipiente che la contiene, per tale motivo viene definita **fluido**. I liquidi, per quanto riguarda il comportamento elastico, sono praticamente *incompressibili* come i solidi. I fluidi da un punto di vista macroscopico sono sistemi continui, composti da un numero infinito di elementi ciascuno di massa  $dm = \rho dV$ . La caratteristica principale è lo scorrimento di una qualsiasi parte di fluido rispetto ad un'altra adiacente o alla parete del contenitore. Allo scorrimento però si oppone una forza di attrito interno. Non si può parlare di forza applicata in un punto del fluido: per ciascun elemento  $dm$  si considerano forze di volume, proporzionali a  $dV$ , come la forza peso  $dF = gdm = \rho g dV$  e forze di superficie, proporzionali a  $dS$ ,  $dF = p dS$  dove  $p$  è la pressione. Dalla definizione di fluido in equilibrio è possibile dedurre che la *pressione in un fluido non ha caratteristiche direzionali*. Perciò si definisce la pressione come il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima e l'area della superficie stessa

$$p = \frac{dF}{dS} \quad , \quad p = \frac{F}{S}$$

Dove la seconda espressione vale per una superficie finita se nei punti di questa la pressione è costante. L'unità di misura della pressione è il pascal (Pa), pari a  $1N/m^2$ . Un multiplo importante è  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

#### Lavoro delle pressioni

E' possibile che sotto l'azione delle forze di pressione vi sia uno spostamento e quindi un lavoro associato. Si consideri la situazione più semplice: una forza  $dF = p dS$  agisce ortogonalmente ad una superficie  $dS$  che a seguito di ciò si sposta concordemente alla forza di una quantità  $dh$ . Il lavoro infinitesimo vale:



$$dW = dF dh = p dS dh = p dV$$

Dove  $dV$  è il volume infinitesimo coperto dalla superficie  $dS$  nello spostamento  $dh$ . Integrando sulla variazione complessiva di volume si ottiene:

$$W = \int \rho dV$$

### 8.2 Equilibrio statico di un fluido

Equilibrio statico: *in un fluido in quiete tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale.*

Le forze agenti avranno risultante pari a zero. Siccome sull'elemento  $dm$  di fluido agiscono forze di pressione  $\vec{F}_p$  e forze di volume  $\vec{F}_V$ , deve essere  $\vec{F}_p + \vec{F}_V = 0$  ed ovviamente è nulla la somma delle componenti lungo qualsiasi asse. La condizione di equilibrio statico di un elemento di fluido è data da:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

Che si riassumono in:

$$\nabla p = \text{grad } p = \rho \vec{f}$$

La pressione in un fluido è costante solo se  $\rho \vec{f} = 0$ . Ciò si verifica se non agiscono forze di volume oppure quando il valore della densità è così basso da poter considerare trascurabile il prodotto  $\rho \vec{f}$ . Per esempio un liquido contenuto in un recipiente e sottoposto alla forza peso (forze di volume) e alla forza di pressione



atmosferica (forza di superficie) viene compresso contro le pareti e la reazione di queste, che è una forza di superficie, si manifesta nel liquido con una ben determinata pressione, variabile all'interno del liquido.

Se la forza di volume agente sul fluido è conservativa, si ricava (dividendo per la massa da  $F = -\nabla E_p$ ):

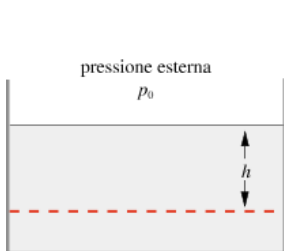
$$\vec{f} = -\nabla E_{p,m}$$

Dove  $E_{p,m}$  rappresenta l'energia potenziale per unità di massa. In condizioni di equilibrio statico dunque:

$$\nabla p = \rho \vec{f} = -\rho \nabla E_{p,m}$$

Il gradiente della pressione ha la stessa direzione e verso opposto del gradiente dell'energia potenziale (per unità di massa). Le superfici equipotenziali coincidono con quelle isobariche: in ogni punto di una tale superficie la pressione ha lo stesso valore.

### 8.3 Equilibrio in presenza della forza peso



Osservando la figura si ha che  $f_x = f_y = 0, f_z = -g$ . Con riferimento alla formula precedente, la pressione varia solo lungo l'asse  $z$  ed è costante in un piano normale all'asse  $z$ , che è dunque una superficie isobarica. Si verifica subito che questa è anche una superficie equipotenziale poiché  $E_{p,m} = gz$ .

Essendo

$$(\nabla p)_z = \frac{\partial p}{\partial z} \quad e \quad (\nabla E_{p,m})_z = \frac{dE_{p,m}}{dz} = g$$

Si ottiene

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \rightarrow dp = -\rho g dz \rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Se la densità è costante

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Questa è la legge con cui varia la pressione in un fluido in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità se  $\rho = \text{costante}$  in tutto il fluido. Se consideriamo il liquido in figura, inserito in un contenitore e sia  $p_0$  la pressione sulla superficie limite del liquido, dove  $z_2 = 0$  e  $p_2 = p_0$ . Alla profondità si ha  $z_1 = -h$  ( $h > 0$ ). Sostituendo tali valori alla legge si ha:

$$p_2 - p_1 = p_0 - p(h) = -\rho g(z_2 - z_1) = -\rho gh$$

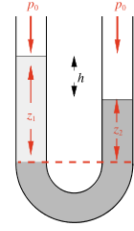
$$p(h) = p_0 + \rho gh$$

Questa relazione è detta **legge di Stevino** e mostra che in un liquido con  $\rho = \text{costante}$  la pressione cresce linearmente con la profondità.

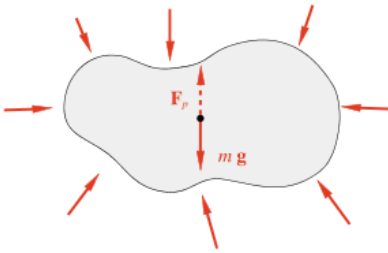
Siccome la densità lungo le superfici isobariche deve essere costante, *la superficie libera di un liquido in quiete dentro un contenitore è una superficie piana coincidente con una superficie orizzontale.*

## Barometro di Torricelli

Torricelli fu il primo a sostenere che l'atmosfera esercita una pressione e a misurarne il valore con dispositivi detti *barometri a mercurio*. Considerando un manometro a U come in figura, dove vi è un ramo chiuso e un ramo aperto in ambiente a pressione atmosferica, esso viene riempito con del mercurio e, se effettuato opportunamente senza far entrare aria nella parte chiusa, si osserva che il dislivello  $h$  tra le due superficie libere è di circa  $76\text{cm}$ . Poiché nel ramo chiuso agisce solo la pressione dei vapori di mercurio, che è molto bassa, il dislivello è dovuto solo alla pressione atmosferica che vale dunque  $\rho gh$ .



## 8.4 Principio di Archimede



In un fluido in equilibrio sotto l'azione della gravità si isola idealmente un volume finito di fluido  $V_0$ , di forma qualsiasi. La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è uguale ed opposta alla forza peso della stessa. Infatti, per la condizione di equilibrio del volume  $V_0$  del fluido,

$$\vec{F}_p + \vec{F}_V = \vec{F}_p + m\vec{g} = 0 \rightarrow \vec{F}_p = -m\vec{g}$$

Essendo  $m$  la massa di fluido contenuta nel volume  $V_0$ ,  $m = \rho V_0$ .

Se adesso si sostituisce al volume  $V_0$  un identico volume di qualsiasi altra sostanza, con massa  $m' = \rho' V_0$ , la risultante  $\vec{F}_p$  delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante resta la stessa, ma varia la forza peso del volume preso in considerazione. Pertanto non sussiste più una condizione di equilibrio e la forza risultante agente su  $V_0$  vale  $F'_V + F_p$ , cioè

$$(m' - m)\vec{g} = (\rho' - \rho)V_0\vec{g}$$

Se  $\rho' > \rho$  la forza risultante ha la stessa direzione e verso di  $\vec{g}$  e quindi il corpo, introdotto al posto del volume  $V_0$  di fluido, scende nel fluido; se invece  $\rho' < \rho$  il corpo sale.

In entrambi i casi il corpo riceve una spinta verso l'alto  $\vec{F}_A = -\rho V_0 \vec{g}$ , pari al peso del volume di fluido spostato. Questo risultato esprime il *principio di Archimede*.

## 8.6 Attrito interno. Viscosità. Fluido ideale

Quando si verifica una condizione di scorrimento relativo tra due elementi di fluido, compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito, detta *forza di attrito interno*, con verso sempre contrario a quello della velocità relativa. L'elemento 1 del fluido esercita una forza sull'elemento 2 e viceversa: le due forze sono uguali e contrarie. Se la velocità  $v_1$  dell'elemento 1 è maggiore di quella  $v_2$  dell'elemento 2, la forza di attrito interno è ritardante per il primo elemento e accelerante per il secondo. Si trova sperimentalmente che il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come:

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}$$

Dove  $dS$  rappresenta l'area di contatto e  $dv/dn$  la variazione del modulo della velocità in direzione ortogonale a  $dS$ . Il coefficiente  $\eta$  è la **viscosità del fluido** e dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura. Nei liquidi  $\eta$  decresce all'aumentare della temperatura, mentre nei gas cresce.

Si definisce **fluido ideale** un fluido in cui  $\eta = 0$  e  $\rho = \text{costante}$ , cioè un *fluido non viscoso e incompressibile*: cioè se la densità è costante una massa di fluido occupa sempre lo stesso volume, anche se è in movimento. Essendo la viscosità nulla, le forze tra gli elementi fluidi, seppure in moto relativo, sono sempre ortogonali alle superfici di contatto come avviene in un fluido in quiete. Un fluido reale è sempre  $\eta \neq 0$ .

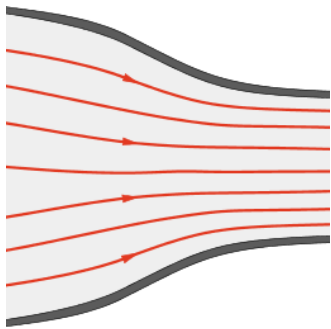
## 8.7 Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata

Consideriamo un fluido in moto, per esempio all'interno di un condotto.

E' possibile utilizzare due diverse descrizioni:

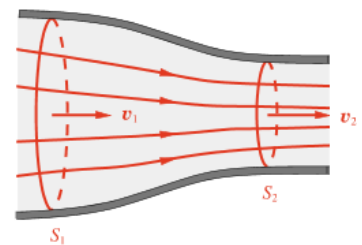
- **Descrizione lagrangiana:** si prende in esame un elemento di fluido e ne si segue il moto dovuto alle varie forze agenti. E' una descrizione analoga a quella fatta per il punto materiale
- **Descrizione euleriana:** si osserva un punto della massa fluida  $P(x, y, z)$  e si considera la velocità  $\vec{v}(x, y, z, t)$  di un elemento di fluido che passa nel punto  $P$  all'istante  $t$ . In generale la grandezza è variabile nel tempo, cioè i vari elementi che successivamente passano per il punto hanno velocità diverse. Però se in base alle leggi della meccanica si è in grado di determinare in tutta la massa del fluido la funzione  $\vec{v}(x, y, z, t)$  si ha una rappresentazione del moto di tutti gli elementi fluidi.

Verrà utilizzata la descrizione euleriana e si suppone che, pur cambiando da punto a punto, la velocità sia in ciascun punto indipendente dal tempo e dunque  $\vec{v}(x, y, z)$ . Questa situazione è detta **regime stazionario**, ovvero tutti gli elementi di fluido che passano per  $P$ , vi passano con la stessa velocità. In caso contrario si parla di **regime variabile**. Nel regime stazionario risulta conveniente la descrizione euleriana poiché rimuove la dipendenza dal tempo.



Le **linee di corrente** sono linee che in ogni punto hanno direzione e verso della velocità, cioè sono tangenti al vettore velocità. In regime stazionario posseggono una configurazione costante nel tempo e coincidono con le traiettorie degli elementi fluidi. Tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione  $S$  individuano un **tubo di flusso**, come nella figura in basso. Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima  $dS$ , ortogonale alle linee di corrente. Il prodotto  $dq = v dS$  detto **portata** del tubo di flusso, rappresenta tutto il volume di fluido che è passato attraverso  $dS$  in un secondo ( $m^3/s$ ). Il tubo di flusso può cambiare di sezione, ma se il fluido è

incomprimibile, cioè la densità è costante, e si è in condizioni di regime stazionario, la portata deve essere la stessa attraverso qualsiasi sezione. Fissate due qualsiasi sezioni del tubo di flusso, e quindi il volume compreso tra queste, la massa ivi contenuta può entrare e uscire solo dalle sezioni, ma non dalle pareti se il regime è stazionario, e non può cambiare se la densità è costante. Pertanto, la portata attraverso le sezioni è la stessa. In conclusione, *in regime stazionario se la densità è costante, è costante la portata di un tubo di flusso infinitesimo:  $v dS = \text{costante}$ ; dove la sezione aumenta la velocità diminuisce, mentre se diminuisce la sezione aumenta la velocità.*



Per un tubo di sezione finita la portata è data da

$$q = \int_S dq = \int_S v dS = v_m S$$

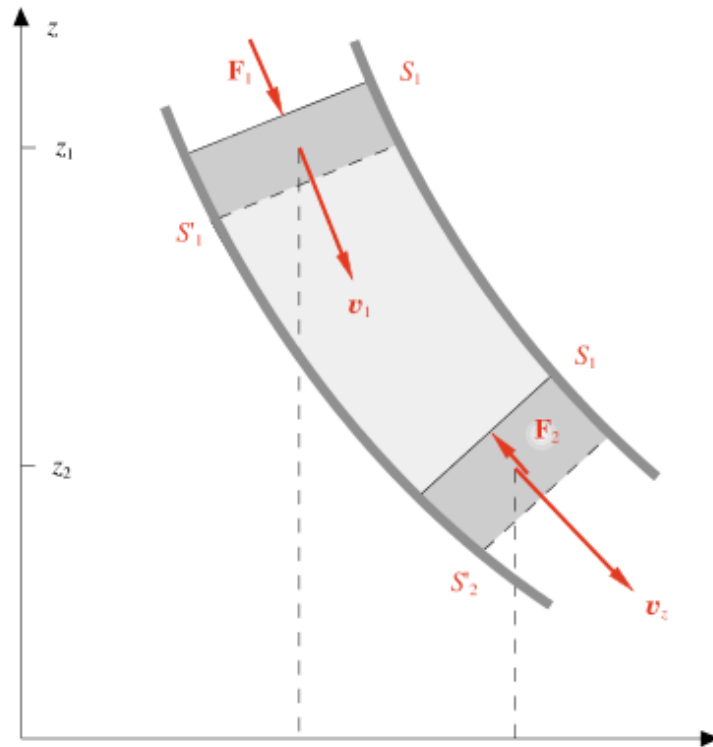
Dove  $v_m$  è la media delle velocità nei vari punti della sezione (media spaziale, non temporale). Dunque, per un fluido incomprimibile in regime stazionario:

$$v_m S = \text{costante}$$

Si trova sperimentalmente che tale formula vale anche per i gas.

## 8.8 Teorema di Bernoulli

Supponiamo di avere un fluido ideale con  $\eta = 0$  e  $\rho = \text{costante}$ , che scorre in condizioni di regime stazionario dentro un condotto a sezione variabile.



Un volume di fluido, compreso tra le sezioni  $S_1$  ed  $S_2$  si sposta tra le sezioni  $S'_1$  ed  $S'_2$  come in figura. Sia  $d\vec{s}_1$  lo spostamento da  $S_1$  ad  $S'_1$  e  $d\vec{s}_2$  da  $S_2$  a  $S'_2$ . Se il fluido è incomprimibile il volume  $dV_1 = S_1 ds_1$  che attraversa la sezione  $S_1$  nel tempo  $dt$  è uguale a quello  $dV_2 = S_2 ds_2$  che attraversa nello stesso intervallo di tempo la sezione  $S_2$ . Dunque  $dV_1 = dV_2$ .

Si vuole ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido nelle varie sezioni del condotto. Si utilizza quindi il teorema dell'energia, secondo cui il lavoro delle forze agenti è uguale alla variazione di energia cinetica. Le forze agenti sul volume di fluido sono la forza peso e la forza di pressione (non ci sono forze di attrito perché  $\eta = 0$ ). Dalla figura si osserva che complessivamente il movimento del volume di fluido equivale a spostare nel volume  $dV_2$  la stessa massa contenuta nel volume  $dV_1$ ; l'energia potenziale del fluido compreso tra  $S'_1$  e  $S_2$  rimane invariata, anche se nel tempo gli elementi fluidi che lo compongono sono cambiati. Il lavoro della forza peso è dato da:

$$dW = -dE_p = -dmg(z_2 - z_1) = -\rho dVg(z_2 - z_1)$$

Dove  $z_1$  e  $z_2$  sono le quote dei due volumi uguali  $dV_1$  e  $dV_2$ , di massa  $dm$ .

Le forze di pressione dovute alle pareti del condotto danno lavoro nullo poiché sono ortogonali allo spostamento ( $\eta = 0$ ), mentre il lavoro di quelle dovute agli elementi a monte di  $S_1$  e a valle di  $S_2$  è dato da

$$dW_p = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2 = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = (p_1 - p_2) dV$$

Il calcolo della variazione di energia cinetica, seguendo quello utilizzato per l'energia potenziale (nel volume compreso tra  $S'_1$  ed  $S_2$  non vi è variazione di energia cinetica), fornisce

$$dEk = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

Perciò

$$dW + dW_p = -\rho dV g(z_2 - z_1) + (p_1 - p_2)dV = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2)$$

E separando i termini relativi a  $dV_1$  e  $dV_2$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

Overo

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

La relazione valida per qualsiasi sezione  $S$  esprime il **teorema di Bernoulli**: *in un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, della densità di energia cinetica (energia cinetica per unità di volume) e della densità di energia potenziale (energia potenziale per unità di volume) è costante lungo il condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.*

Se il condotto è orizzontale  $\rho g z$  è costante, dunque la formula si riduce a

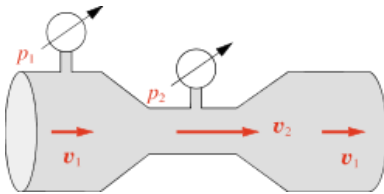
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

Si nota che la pressione e la velocità del fluido cambiano solo se cambia la sezione: dove questa è maggiore la velocità è minore e maggiore è la pressione; dove la sezione è minore accade il contrario.

Se si pone  $v = 0$  si ritrova la legge di Stevino:  $p + \rho g z = \text{costante}$ .

## 8.9 Applicazioni del teorema di Bernoulli

### Tubo di Venturi



Il tubo di Venturi consiste in un condotto orizzontale a sezione variabile e viene utilizzato per misure di velocità e di portata, inserendolo nella conduttura in cui scorre il fluido. Applicando il teorema di Bernoulli si ha:

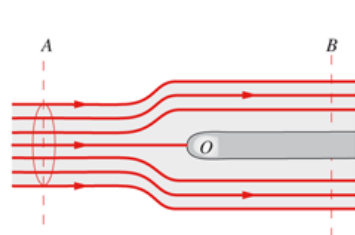
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Essendo  $S_1$  ed  $S_2$  rispettivamente la sezione della conduttura e della strozzatura. Pertanto:

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}$$

Dalla misura della differenza di pressione nelle due sezioni  $\Delta p = p_1 - p_2$ , si possono calcolare  $v_2$  e quindi  $v_1$  e risalire al valore della portata.

### Tubo di Pitot



Se un ostacolo viene posto in una corrente fluida le linee di corrente si aprono, ma nel punto di ostacolo ( $O$  in figura) il fluido è fermo. Nelle sezioni  $A$  e  $B$ , a sufficiente distanza dall'ostacolo, la pressione e la velocità del fluido sono le stesse, per cui dal teorema di Bernoulli si ha

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_0$$

Praticando due piccoli fori nel tubo di Pitot, in  $O$  e in  $B$ , per misurare in quelle posizioni le pressioni nel fluido: dalla loro differenza si calcola la velocità del fluido relativa al tubo. Tale sistema viene utilizzato per la misura della velocità degli aerei.

## Oscillazioni e onde

### 9.7 Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa

Si supponga che l'oscillatore armonico venga frenato da una forza di tipo viscoso, cioè proporzionale e opposta alla velocità,  $-\lambda v$ , e che non agiscano forze di attrito costanti. La legge del moto si scrive:

$$ma = -kx - \lambda v \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Si definiscono **coefficiente di smorzamento** e **pulsazione propria** rispettivamente:

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

E si riscrive l'equazione come segue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Questa si chiama **equazione differenziale dell'oscillatore armonico smorzato**. Essa è l'esempio più completo di equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenea. L'attrito viscoso porta a uno smorzamento esponenziale, perciò vediamo se esiste una soluzione  $x(t)$  proporzionale a  $e^{\alpha t}$ . Deve essere:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(e^{\alpha t}) + 2\gamma \frac{d}{dt}(e^{\alpha t}) + \omega_0^2 e^{\alpha t} &= 0 \\ \alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma \alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} &= e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma \alpha + \omega_0^2) = 0 \end{aligned}$$

Si deduce che  $e^{\alpha t}$  è soluzione solo se  $\alpha$  soddisfa l'equazione caratteristica di secondo grado:

$$\alpha^2 + 2\gamma \alpha + \omega_0^2 = 0$$

E cioè se

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Esistono dunque 3 casi possibili:

$$\gamma^2 > \omega_0^2 \quad , \quad \gamma^2 = \omega_0^2 \quad , \quad \gamma^2 < \omega_0^2$$

**Primo caso: smorzamento forte**

$$\gamma^2 > \omega_0^2 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 > 4mk$$

$\alpha$  assume due valori distinti

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

entrambi negativi e la soluzione più generale è

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t} (Ae^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}})$$

Che è un esponenziale decrescente ed A e B dipendono dalle condizioni iniziali.

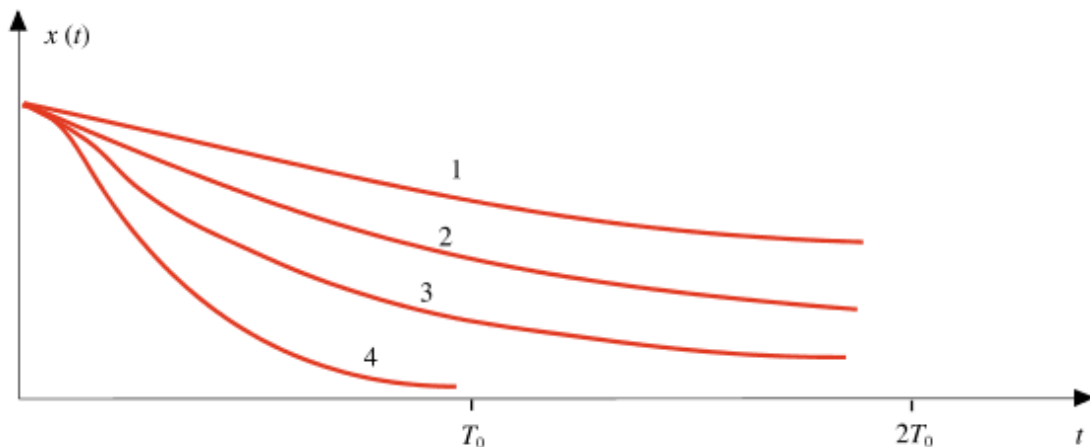
### Secondo caso: smorzamento critico

$$\gamma^2 = \omega_0^2 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 = 4mk$$

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono coincidenti:  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$ . Si dimostra che la soluzione più generale è

$$x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

Ancora esponenzialmente decrescente. Nel grafico sono riportati i vari casi possibili. In ascissa il tempo è misurato in unità  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , periodo dell'oscillatore non smorzato. La curva 4  $\gamma = \omega_0$  corrisponde allo **smorzamento critico**.



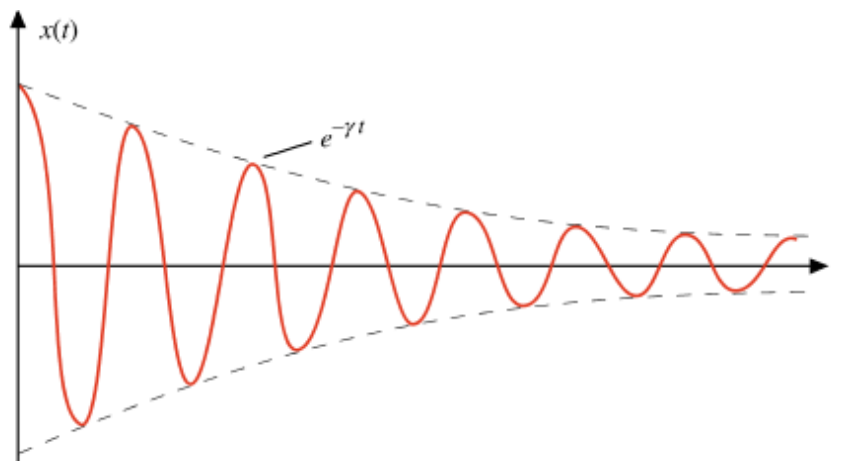
### Terzo caso: smorzamento debole

$$\gamma^2 < \omega_0^2 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 < 4mk$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono complesse coniugate. Si dimostra che la soluzione è del tipo

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

Con  $A_0$  e  $\phi$  determinate in base alle condizioni iniziali. Il punto, in condizioni di smorzamento debole, compie oscillazioni di pulsazione  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$  e pseudoperiodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . L'ampiezza è smorzata esponenzialmente. Il moto si inverte a intervalli regolari, pari a  $\frac{T}{2}$  ma non è periodico perché il punto non ripassa nelle stesse posizioni. Il punto si ferma in  $x = 0$ .



## 9.8 Oscillatore armonico forzato

Vogliamo ora provare a rendere l'oscillazione persistente, che in caso di oscillazioni libere a causa di attriti risulta sempre smorzata. Si applica all'oscillatore una forza sinusoidale  $F = F_0 \sin \omega t$  in modo che l'equazione del moto risulti

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \sin \omega t$$

Ovvero

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

L'equazione, però, non è più omogenea. Si nota che la forza impressa ha una pulsazione  $\omega$  in generale diversa da quella propria dell'oscillatore  $\omega_0$ . Si vuole verificare se l'equazione ammette una soluzione oscillatoria non smorzata del tipo  $x = A \sin(\omega t + \phi)$ , cioè con la stessa pulsazione della forza impressa. Se la risposta fosse positiva si avrebbe una soluzione del tipo

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + a e^{\alpha_1 t} + b e^{\alpha_2 t}$$

E, smorzatosi il fenomeno transitorio in un tempo che è caratterizzato dal coefficiente di smorzamento  $\gamma$ , resterebbe l'oscillazione permanente  $x = A \sin(\omega t + \phi)$  dovuta alla forza impressa. Si inserisce dunque  $x$  nella formula per ottenere:

$$-\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) + 2\gamma \omega A \cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

Da qui, sviluppando  $\sin(\omega t + \phi)$  e  $\cos(\omega t + \phi)$  si giunge alla soluzione

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \tan \phi = -\frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Riassumendo:

- A una sollecitazione sinusoidale l'oscillatore armonico risponde con uno spostamento sinusoidale: la pulsazione non è quella propria  $\omega_0$ , bensì è eguale a quella voluta  $\omega$ , impressa dall'esterno;
- Lo spostamento è sfasato rispetto alla forza;
- La risposta dell'oscillatore non è la stessa qualunque sia  $\omega$ : ampiezza e fase dipendono dal valore di  $\omega$
- $A$  e  $\phi$  non dipendono dalle condizioni iniziali, da cui dipendono solo le costanti  $a$  e  $b$  della parte transitoria.



## Primo principio della termodinamica

### 10.1 Sistemi e stati termodinamici

Uno degli argomenti principali della *termodinamica* è l'esame del bilancio energetico complessivo di un processo fisico, estendendo l'indagine a scambi di energia che non sono meccanici nel senso macroscopico finora discusso. Un **sistema termodinamico** è spesso assimilabile, dal punto di vista meccanico, ad un sistema continuo, considerato che microscopicamente è costituito da un numero di elementi dell'ordine del *numero di Avogadro*  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ . Si cercherà di descrivere le **trasformazioni** che il sistema può subire e gli scambi energetici che ne risultano con l'ambiente circostante, individuando le grandezze più appropriate a tale descrizione.

**Sistema termodinamico:** *una porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti, per esempio un volume di gas, un liquido in equilibrio con il suo vapore, un insieme di blocchi solidi diversi.*

**Ambiente:** *si intende l'insieme che può essere costituito da una o più parti con cui il sistema può interagire: l'ambiente contribuisce in generale a determinare le caratteristiche fisiche e macroscopiche del sistema e la loro evoluzione.*

**Universo termodinamico:** *l'insieme di sistema e ambiente si chiama universo termodinamico, in senso locale.*

**Sistema aperto:** *se tra il sistema e l'ambiente avvengono scambi di energia e di materia, il sistema è detto aperto.* Ad esempio, se il sistema è costituito da un liquido in ebollizione e l'ambiente dal recipiente che contiene il liquido, dall'atmosfera esterna compreso il vapore e dalla sorgente di calore, nel processo di ebollizione si ha trasformazione di liquido in vapore e quindi passaggio di materia dal sistema all'ambiente tramite la sorgente di calore.

**Sistema chiuso:** *il sistema si dice chiuso se sono esclusi scambi di materia, ma si hanno solamente scambi di energia.* Riprendendo l'esempio precedente, il liquido è contenuto in un recipiente chiuso, a contatto con la sorgente di calore; il vapore prodotto rimane all'interno del sistema.

**Sistema isolato:** *il sistema si dice isolato se non avvengono scambi di energia e di materia con un altro sistema esterno, cioè con l'ambiente. L'universo termodinamico formato da un sistema e dal suo ambiente è da considerarsi un sistema isolato.*

**Variabili termodinamiche:** un sistema termodinamico viene descritto da un numero ridotto di grandezze fisiche direttamente misurabili dette variabili termodinamiche, come *volume, pressione e temperatura, massa, concentrazione, densità, ec..*

Lo stato di un gas ideale, ad esempio, è descrivibile tramite tre grandezze, pressione, volume e temperatura legate tra loro dall'**equazione di stato**, per cui due sole sono variabili indipendenti mentre la terza è determinata dal valore che assumono le prime due.

### 10.2 Equilibrio termodinamico. Principio dell'equilibrio termico

Lo *stato termodinamico* di un sistema è detto di **equilibrio** quando le variabili termodinamiche che lo descrivono sono costanti nel tempo. In un sistema di questo tipo, le variabili termodinamiche sono dette **variabili di stato**. L'equilibrio termodinamico è il risultato di tre diversi tipi di equilibrio (da verificarsi contemporaneamente):

- *Equilibrio meccanico:* equilibrio di forze e momenti
- *Equilibrio chimico:* non avvengono reazioni chimiche o trasferimenti di un componente del sistema entro il sistema stesso
- *Equilibrio termico:* la temperatura è la stessa ovunque

In uno *stato di equilibrio* esiste, in generale, una precisa relazione tra le coordinate termodinamiche che si esprime sotto forma di **equazione di stato**. Se ad esempio le coordinate sono la pressione  $p$ , il volume  $V$  e la temperatura  $T$ , l'equazione di stato si scrive in forma implicita come  $f(p, V, T) = 0$ .

Dati due diversi stati di equilibrio termodinamico di un certo sistema, l'eventuale evoluzione del sistema da uno stato all'altro, spontanea o per effetto dell'ambiente, viene detta **trasformazione termodinamica del sistema**. Vengono considerati solo gli istanti iniziali e finali delle trasformazioni, ma ai fini del calcolo verranno considerate anche *trasformazioni infinitesime* tra stati molto prossimi.

Si considerino due sistemi A e B, ciascuno in equilibrio termodinamico, con il sistema A alla temperatura  $T_A$  e il sistema B con temperatura  $T_B$ . I sistemi si dicono in **equilibrio termico** tra loro quando hanno la stessa temperatura, cioè  $T_A = T_B$ : *la temperatura è indice dell'equilibrio termico tra due sistemi*.

Il *principio dell'equilibrio termico* afferma che: due sistemi che siano ciascuno in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico tra loro.

Un possibile metodo per portare due sistemi all'equilibrio termico è quello di tenerli a contatto tramite una parete. Se viene raggiunto l'equilibrio tale parete è detta **parete diatermica**, mentre se l'equilibrio termico non viene mai raggiunto si dice che la parete è **adiabatica**.

Due sistemi separati da una parete diatermica si dicono anche in **contatto termico** tra loro e inevitabilmente raggiungono l'equilibrio termico. Il contatto termico si può realizzare anche direttamente, senza l'utilizzo di alcuna parete.

Un sistema è detto **adiabatico** se è circondato da pareti adiabatiche e quindi non può essere messo in contatto termico con un altro sistema o con l'ambiente.

L'esistenza di equilibrio termico non implica che vi sia anche equilibrio meccanico o chimico.

### 10.3 Definizione di temperatura. Termometri

Si fornisce ora una definizione operativa di temperatura. Per fare ciò bisogna realizzare due condizioni. Innanzitutto deve esistere una grandezza  $X$  che caratterizza un fenomeno fisico e che varia con la temperatura.  $X$  è detta *caratteristica termometrica* e la temperatura è una funzione di  $X$ ,  $\Theta(X)$ , detta *funzione termometrica*. Il dispositivo in cui avviene il fenomeno che fornisce il valore della caratteristica termometrica è indicato come *termometro*.

In secondo luogo deve esistere un sistema, in uno stato di equilibrio, definibile con precisione e riproducibile facilmente, detto *punto fisso*.

Il punto fisso campione è il *punto triplo dell'acqua*, ovvero quel particolare stato in cui ghiaccio, acqua e vapor d'acqua saturo sono in equilibrio. Al punto triplo dell'acqua è stata assegnata arbitrariamente la temperatura  $273.16\text{ K}$ , dove il simbolo  $K$  indica l'unità di misura, il Kelvin.

Si stabilisce in maniera preliminare che la forma della funzione sia  $\Theta(X) = aX$ , con  $a$  costante. Il sistema, di cui si vuole misurare la temperatura, viene messo a contatto termico con un termometro che, all'equilibrio termico, fornisce il valore  $X$ . Tale termometro al punto triplo dell'acqua dà il valore  $X_{pt}$  e per definizione si ha

$$\Theta(X_{pt}) = aX_{pt} = 273.16$$

Da cui  $a = 273.16/X_{pt}$ , valore valido per quel termometro. Ne segue che la temperatura  $T$  del sistema si scrive

$$T = 273.16 \frac{X}{X_{pt}}\text{ K}$$

Ed è la formula fondamentale per ogni termometro e fornisce la temperatura empirica di quel termometro.

#### Scale termometriche

La scala più comunemente utilizzata è il Celsius dove lo zero di tale scala corrisponde a  $273.15\text{ K}$ . La formula di conversione è semplicemente

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15$$

#### 10.4 Sistemi adiabatici. Esperimento di Joule. Calore

Una serie di esperimenti condotti di Joule hanno portato ad un risultato fondamentale, cioè all'indipendenza del lavoro dal tipo di trasformazione che congiunge due stati termodinamici, purché il sistema sia adiabatico. E' possibile dunque scrivere la relazione:

$$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$$

Dove  $U$  è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema, cioè dalle sue coordinate termodinamiche. Se il sistema fornisce lavoro all'esterno il lavoro è assunto positivo e dunque  $U$  diminuisce, viceversa se invece si compie lavoro dall'esterno sul sistema  $W$  è assunto negativo e l'energia  $U$  aumenta.

Dato dunque un valore arbitrario  $U_A$  all'energia dello stato  $A$ , preso come riferimento, il valore  $U_B$  nello stato  $B$  è determinato dal lavoro adiabatico scambiato, secondo la formula precedente.

Se si immagina di avere un corpo caldo e l'acqua all'interno di un contenitore adiabatico si nota che si realizza uno scambio di calore tra il corpo e l'acqua senza nessuna azione meccanica macroscopica. Si può dunque scrivere che nel caso di scambio di calore con lavoro nullo si ha

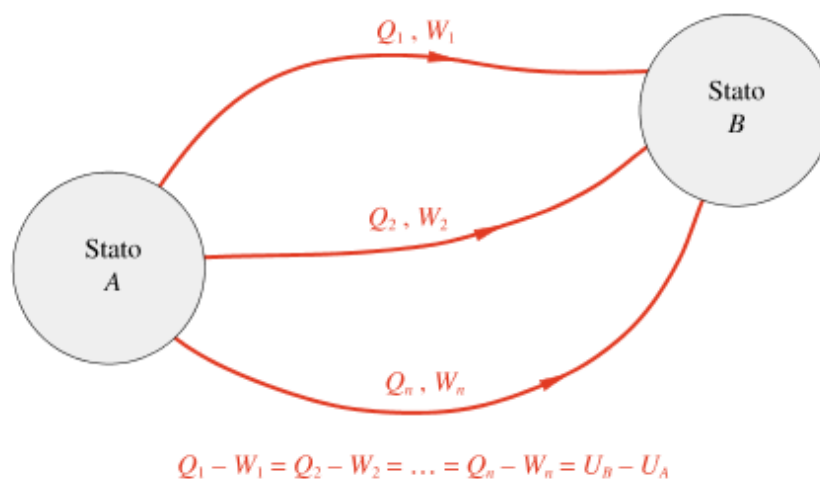
$$Q = \Delta U$$

Assumendo positivo il calore ceduto al sistema dall'esterno. Perciò

$$Q = -W$$

$Q$  rappresenta il *calore scambiato, senza lavoro esterno, per far variare di  $\Delta T$  la temperatura della massa d'acqua* e  $W$  *il lavoro che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura*. Quest'ultima formula è detta *equivalenza tra calore e lavoro*. Esiste dunque un meccanismo di scambio di energia che non comporta movimenti macroscopici, al quale si dà il nome di **scambio di calore**.

#### 10.5 Primo principio della termodinamica. Energia interna



Considerando ora una situazione più generale, si prende un sistema che oltre allo scambio di lavoro meccanico con l'ambiente possa avere anche scambio di calore, cioè trasmissione di energia non accompagnata da fenomeni meccanici macroscopici. Sperimentalmente si trova sempre verificato che: *se il sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente,  $Q$  e  $W$  dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre la differenza  $Q - W$  risulta indipendente dalla trasformazione*. Si può pertanto scrivere, posto  $\Delta U = U_B - U_A$  che

$$Q - W = \Delta U \quad , \quad Q = \Delta U + W$$

La formula esprime il **primo principio della termodinamica**, che viene assunto come postulato basato sull'esperienza. Il significato è il seguente:

- Esiste una funzione delle coordinate termodinamiche del sistema (*funzione di stato*) detta **energia interna**, le cui variazioni danno gli scambi energetici del sistema con l'ambiente che lo circonda durante una trasformazione.
- Quando, durante una trasformazione, si fornisce energia a un sistema, sia tramite un lavoro meccanico che con uno scambio di calore, questa resta immagazzinata sotto forma di energia interna e può essere successivamente riutilizzata. (Si nota che esiste un limite per la riutilizzazione dell'energia interna, che verrà reso noto col *secondo principio della termodinamica*).
- Il termine *energia interna* non fa riferimento all'energia cinetica del sistema o all'energia potenziale, ma si tratta di energia legata alle *proprietà interne del sistema*.
- Il primo principio mette in evidenza l'esistenza di un meccanismo di scambio di energia, che non è esprimibile come lavoro meccanico macroscopico: a ciò si dà il nome di **calore**. Perciò, il primo principio è la definizione più generale di calore. Il calore e il lavoro sono forme di *scambio di energia* e dunque è sempre necessario parlare di calore o lavoro scambiati **tra sistemi** e **mai** di calore o lavoro posseduti da un sistema. Il sistema possiede una quantità di energia che può variare in una trasformazione.
- Se un sistema termodinamico esegue una qualsiasi trasformazione che lo riporti allo stato iniziale, detta **trasformazione ciclica**, si ha per definizione

$$\Delta U = 0 \rightarrow Q = W$$

cioè che il calore scambiato è uguale al lavoro scambiato. Se nella trasformazione ciclica il sistema complessivamente assorbe calore,  $Q > 0$ , esso fornisce lavoro,  $W > 0$  e costituisce una **macchina termica**. Se invece il sistema cede calore  $Q < 0$  esso deve assorbire lavoro  $W < 0$ .

- Per eseguire calcoli specifici è utile considerare trasformazioni termodinamiche nelle quali le variabili stato cambiano di quantità infinitesime. La forma infinitesima del primo principio ha la forma:

$$dQ = dU + dW$$

Ed integrando per una trasformazione finita si ha

$$\Delta U = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

indipendente dalla trasformazione. Il calore e il lavoro scambiati nella trasformazione finita si ottengono anch'essi sommando quantità infinitesime

$$Q_{AB} = \int_A^B dQ, \quad W_{AB} = \int_A^B dW$$

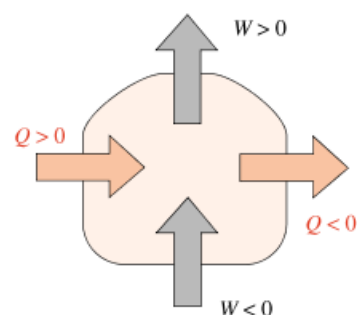
però queste ultime dipendono da come si è svolta la trasformazione e ciascuno di essi non può essere espresso come differenza dei valori di una funzione di stato. In altre parole, *la variazione di energia interna è un differenziale esatto, mentre  $dQ$  e  $dW$  non sono differenziali esatti*.

- L'unità di misura dell'energia interna, calore e lavoro è la stessa ed è il Joule.

### Convenzione sui segni di calore e lavoro

calore che entra in un sistema dall'esterno  
lavoro che è compiuto da un sistema sull'esterno  
calore che esce da un sistema verso l'esterno  
lavoro che è compiuto dall'esterno sul sistema

segno positivo  
segno positivo  
segno negativo  
segno negativo



## 10.6 Trasformazioni termodinamiche. Lavoro e calore

Si vuole calcolare quanto valgono  $\Delta U$ ,  $Q$  e  $W$ .

La quantità  $\Delta U$  può essere calcolata direttamente se è nota l'espressione esplicita di  $U$ , altrimenti l'unico modo è servirsi del primo principio della termodinamica e quindi  $\Delta U = Q - W$  (ricordando che essendo funzione di stato dipende solo dallo stato iniziale e finale e dunque non dipende dalla trasformazione).

Anche nel caso di  $Q$  e  $W$  è possibile calcolarle direttamente tramite le loro espressioni analitiche oppure tramite:

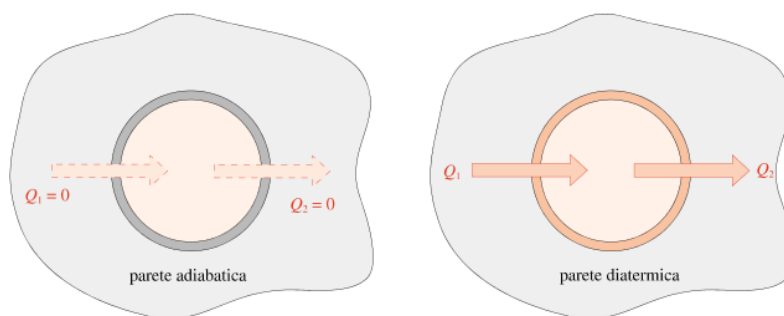
$$Q = \Delta U + W \quad , \quad W = Q - \Delta U$$

Dunque, il primo principio è da intendere come un'equazione a una incognita. Se si conoscono le espressioni di  $\Delta U$ ,  $Q$  e  $W$  in funzione delle coordinate termodinamiche, il primo principio della termodinamica diventa un'equazione che lega le coordinate termodinamiche durante la trasformazione, ovvero diventa l'equazione della trasformazione.

### Trasformazioni adiabatiche

Si chiama *trasformazione adiabatica* una qualsiasi trasformazione in cui  $Q = 0$ , in cui cioè il sistema non scambia calore con l'esterno. Il primo principio si scrive dunque  $W = -\Delta U$  e gli scambi energetici con l'ambiente possono avvenire solo sotto forma di lavoro meccanico. Sperimentalmente ciò si realizza chiudendo il sistema in un contenitore con pareti adiabatiche. Poiché due sistemi separati da una parete adiabatica non raggiungono l'equilibrio termico, si conclude che:

- Una trasformazione che porta all'equilibrio termico avviene con scambio di calore
- Una parete diatermica permette il passaggio di calore da un sistema all'altro
- Una parete adiabatica non consente il passaggio di calore, ed è quindi isolante rispetto allo scambio di calore



### Trasformazioni reversibili e irreversibili

Tornando a considerare una trasformazione qualsiasi, gli *stati intermedi* attraverso cui passa il sistema possono essere *di equilibrio* o di *non equilibrio*. Per effettuare una trasformazione che passi attraverso stati di equilibrio bisogna procedere con variazioni molto piccole delle coordinate termodinamiche, in modo che queste siano definite in ogni istante. Ciò si può realizzare discostandosi molto poco dallo stato di equilibrio, per permettere che la trasformazione avvenga, e attendendo il ristabilirsi dell'equilibrio nelle nuove condizioni prima di procedere a un'ulteriore variazione infinitesima di stato. Questa operazione è detta *trasformazione quasi-statica*. Tale condizione è necessaria ma non sufficiente, poiché oltre a quanto detto bisogna verificare la presenza di *forze dissipative* durante la trasformazione. In definitiva, si possono classificare le trasformazioni secondo lo schema:

- **Trasformazione reversibile:** una trasformazione è detta reversibile se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa

- **Trasformazione irreversibile:** una trasformazione è detta irreversibile qualora non si svolga secondo le modalità precedenti, ossia passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative, oppure si verifichino, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni.

Una trasformazione reversibile può essere arrestata in qualsiasi stato intermedio e, variando di poco le condizioni esterne, si può invertire il verso della trasformazione, ripercorrendo gli stessi stati già attraversati. In tal caso cambia il segno degli scambi di energia e della variazione di energia interna. Considerando una trasformazione reversibile  $AB$ , durante tale trasformazione l'energia interna varia della quantità  $\Delta U = U(B) - U(A)$  e vengono scambiate le quantità di lavoro e calore  $W$  e  $Q$ . Percorrendo la trasformazione in senso inverso la variazione di energia interna è  $-\Delta U = U(A) - U(B)$ . Poiché la trasformazione è reversibile le coordinate termodinamiche sono note durante il processo e in ogni stato sono legate da una precisa relazione matematica, e da ciò deriva che il lavoro si può esprimere con un integrale che contiene le coordinate e le loro variazioni. Se si cambia il segno delle variazioni allora cambia il segno dell'integrale e  $W$  diventa  $-W$ , cioè  $W_{AB} = -W_{BA}$ . Allora dal primo principio della termodinamica si ricava che nella trasformazione reversibile percorsa in senso inverso cambia anche il segno del calore  $Q$  diventa  $-Q$ , cioè  $Q_{AB} = -Q_{BA}$ .

## 10.7 Calorimetria

Prendendo in esame due corpi a diversa temperatura che vengono messi in contatto termico all'interno di un contenitore adiabatico, si nota che  $T_e$  è la temperatura di equilibrio raggiunta da entrambi i corpi. Il corpo più caldo passa dalla temperatura  $T_1$  a  $T_e$  con  $T_e < T_1$ , mentre quello più freddo passa da  $T_2$  a  $T_e$  con  $T_e > T_2$ . Nel processo non viene scambiato lavoro né con l'ambiente né tra i due corpi, se si ammette che le variazioni di volume dei due corpi siano trascurabili. Inoltre, i due corpi, non scambiano calore con l'ambiente. Pertanto,  $Q$  e  $W$  sono nulli e l'energia interna totale del sistema, costituito dai due corpi, resta costante.

Tuttavia, lo stato termodinamico del primo corpo cambia e di conseguenza anche la sua energia interna varia di  $\Delta U_1$ , analogamente per il secondo corpo e  $\Delta U_2$ . Dovendo essere  $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$  si ha  $\Delta U_1 = -\Delta U_2$ , le variazioni sono uguali e opposte. Inoltre, l'applicazione del primo principio a ciascun corpo separatamente dà  $\Delta U_1 = Q_1$  e  $\Delta U_2 = Q_2$ : il calore scambiato dal primo corpo è uguale ed opposto a quello scambiato dal secondo  $Q_1 = -Q_2$ . Gli esperimenti di Joule, inoltre, ci dicono che l'energia interna cresce con la temperatura, e dunque  $\Delta U_1 < 0$  e  $\Delta U_2 > 0$ .

Nel realizzare tali misure si trova che esiste proporzionalità tra il calore  $Q$  scambiato da un corpo, la massa del corpo stesso e la variazione della sua temperatura:

$$Q = mc(T_{fin} - T_{in})$$

Dove  $c$  è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo, in generale funzione a sua volta della temperatura, chiamata *calore specifico*.

Dalla formula si deduce che *il calore specifico rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa in una data sostanza, alla temperatura  $T$ , per farne variare la temperatura di 1 K (ovvero di 1°C).*

Il prodotto  $C = mc$  è detto *capacità termica* del corpo, rappresenta a sua volta il calore necessario per far variare di 1 K la temperatura del corpo. In termini infinitesimi si ha:

$$dQ = mcdT$$

Segue che per il calore specifico:

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

Ritornando ai corpi in contatto termico, l'uguaglianza  $Q_1 = -Q_2$  diviene:

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

E' possibile generalizzare il risultato: quando un corpo solido o liquido presenta una variazione di temperatura da  $T_1$  a  $T_2$  a seguito del contatto termico con un altro corpo, si ammette che abbia scambiato il calore

$$Q = mc(T_2 - T_1)$$

Il calore risulta assorbito se  $T_2 > T_1$  oppure ceduto se  $T_2 < T_1$ . Qualora nell'intervallo di temperatura da  $T_1$  a  $T_2$  non si possa assumere che il calore specifico sia costante bisogna scrivere:

$$Q = \int dQ = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT$$

Molto spesso viene anche utile fare riferimento al calore scambiato da un certo numero di moli di una sostanza, pertanto si definisce anche il *calore specifico molare*

$$c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$$

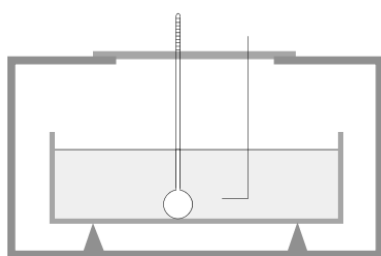
Dove  $n$  è il numero di moli. In tal caso le formule diventano, rispettivamente:

$$dQ = ncdT, \quad Q = nc(T_2 - T_1), \quad Q = n \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT$$

Infine, quando la trasformazione avviene in assenza di lavoro scambiato con l'ambiente  $dW = 0$  e  $dQ = dU$ , perciò si può scrivere

$$c = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT}, \quad c = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

### Misura dei calori specifici



Un metodo per la misura del calore specifico in una sostanza solida si realizza con lo strumento detto *calorimetro di Regnault*. Si considera un recipiente pieno di liquido, con immerso un termometro e un agitatore: il tutto chiuso dentro un contenitore a pareti adiabatiche. Sia  $C_1 = mc$  la capacità termica del liquido,  $C_2$  quella del restante materiale (termometro, agitatore, recipiente) nel contenitore adiabatico e  $T_2$  la temperatura iniziale.

Si prende un corpo di massa  $m$  con calore specifico incognito  $c_x$ , alla temperatura  $T_1 > T_2$  e lo si immerge nel liquido. In breve tempo si raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura  $T_e$ . Durante il processo si deve avere l'accortezza di agitare il liquido per rendere uniforme la temperatura più rapidamente. Il bilancio dei calori scambiati, presi in modulo, è dato da

$$mc_x(T_1 - T_e) = (C_1 + C_2)(T_e - T_2)$$

Il primo termine rappresenta il calore ceduto dal corpo, mentre quello al secondo membro il calore assorbito dal calorimetro. Nota  $m$  e tarato il calorimetro si risale a  $c_x$ . La difficoltà della misura sta nell'imperfezione dell'isolamento termico, perciò la temperatura  $T_e$  non rimane costante, ma diminuisce lentamente (il sistema cede calore all'esterno).

Esempi a pag. 381

## Calori specifici dei solidi

Nella figura è riportato l'andamento tipico del calore specifico molare delle sostanze solide in funzione della temperatura, misurata in unità di  $T_D$ , la *temperatura di Debye*. Questo è un parametro caratteristico del tipo solido e il suo valore dà un'indicazione della *coesione del materiale*. Si noti che per  $\frac{T}{T_D} > 1$  il calore specifico molare tende a un valore costante, uguale per tutte le sostanze solide, pari a circa  $25 \text{ J/mol K}$ .

## 10.8 Processi isotermi. Cambiamenti di fase

Quando durante una trasformazione la temperatura si mantiene costante, si parla di **trasformazione isoterma**. Si vedrà in futuro che l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura e quindi, prendendo in esame un gas contenuto in un recipiente, immerso a sua volta in una vasca d'acqua a temperatura costante  $T$ , muovendo una parete del contenitore e lasciando espandere lentamente il gas, si ha equilibrio termico con l'acqua, e dunque  $\Delta U = 0$  e secondo il primo principio  $Q = W$ . Si è realizzato un flusso di calore dall'acqua a gas in condizioni isoterme e il calore assorbito non comporta un aumento di temperatura del gas, bensì la produzione di lavoro, compiuto dal gas che si espande.

Una classe importante di processi isotermi è costituita dai *cambiamenti di fase*, ovvero passaggi di una sostanza da una fase all'altra, per esempio dalla fase solida a liquida.

I cambiamenti di fase sono accompagnati da scambi di calore e si osserva che, per unità di massa, si tratta di quantità ben definite, dette *calori latenti*  $\lambda$ . Pertanto, il calore richiesto per il cambiamento di fase della massa  $m$  di una sostanza pura è dato da

$$Q = m\lambda$$

Una caratteristica dei cambiamenti di fase è di essere, in opportune condizioni, trasformazioni reversibili.

## Sorgenti di calore

Si definisce *sorgente di calore o serbatoio*, un corpo con *capacità termica* praticamente *infinita* e quindi con la proprietà di poter scambiare calore restando a temperatura costante.

## 10.9 Trasmissione del calore

Lo scambio e anche il trasporto di calore entro un sistema possono avvenire tramite tre meccanismi distinti, che nel loro complesso sono indicati come *trasmissione del calore: conduzione, convezione e irraggiamento termici*. Questi meccanismi operano sempre in presenza di una differenza di temperatura tra sistema e ambiente o all'interno dello stesso sistema.

### Conduzione del calore

Consideriamo un corpo esteso in cui la temperatura non sia uniforme e tracciamo le superfici isoterme, cioè il luogo dei punti in cui la funzione  $T(x, y, z)$  assume un valore costante, per esempio  $T_1$  sulla superficie isoterma  $S_1$  e  $T_2$  su  $S_2$ .

La legge fenomenologica che regola la conduzione del calore è la *legge di Fourier*. Se  $dS$  è un elemento di una superficie isoterma,  $\frac{dT}{dn}$  il modulo del gradiente della temperatura, ortogonale a  $dS$  e diretto nel verso delle temperature crescenti, il calore che passa attraverso  $dS$  nel tempo  $dt$  è dato da:

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt$$

La grandezza  $k$ , detta *conducibilità o conduttività termica*, è tipica del materiale ed è in genere funzione della temperatura. Il segno negativo indica che il flusso di calore avviene nel senso in cui la temperatura diminuisce, cioè nel verso opposto al gradiente di temperatura, dalla regione a temperatura maggiore a quella a temperatura minore.



## Gas ideali

### 11.1 Leggi dei gas. Equazione di stato dei gas ideali

Un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

- Non ha forma né volume proprio, occupa pertanto tutto il volume a disposizione, per esempio, quello del recipiente che lo contiene;
- È comprimibile facilmente, con conseguenti variazioni notevoli di volume, densità e pressione.

Le *variabili termodinamiche* più appropriate per descrivere lo stato termodinamico del gas e le eventuali trasformazioni sono la *pressione*  $p$ , il *volume*  $V$  e la *temperatura*  $T$ .

Si stabiliscono ora alcune relazioni tra le coordinate termodinamiche di un gas, che sono tanto meglio verificate quanto più un gas si avvicina a condizioni di pressione sufficientemente bassa e di temperatura alta rispetto a quella per cui si avrebbe condensazione (alla data pressione). Si parla in tal caso di *comportamento ideale*.

#### Legge isoterma di Boyle

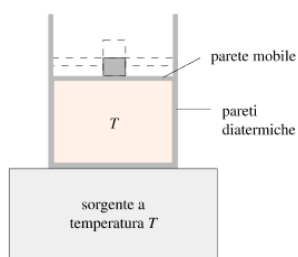
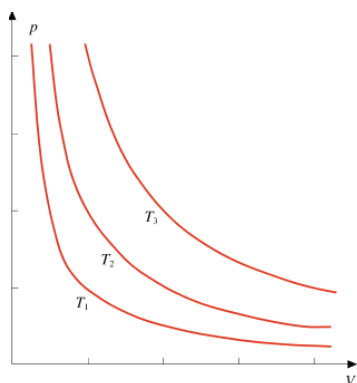
Si abbia un gas in equilibrio termodinamico ad una certa pressione entro un dato volume e a temperatura  $T$ : se si fanno variare i valori della pressione e del volume, mantenendo costante la temperatura, si trova che in tutti i possibili stati di equilibrio isotermi il prodotto della pressione per il volume ha sempre lo stesso valore. Vale cioè la legge di Boyle

$$pV = \text{costante}$$

a temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume.

Comunque il gas passi da uno stato di equilibrio a pressione  $p_1$  e volume  $V_1$  ad un altro con pressione  $p_2$  e volume  $V_2$ , ma con la stessa temperatura, la legge di Boyle stabilisce che

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$



Rappresentando la variazione su un piano cartesiano  $p, V$  si ottiene un ramo di iperbole: infatti l'equazione è quella di una iperbole equilatera. Per ogni temperatura si ha una diversa iperbole e le curve si chiamano *isoterme del gas ideale*. Il piano  $(p, V)$  utilizzato per la rappresentazione degli stati di equilibrio del gas viene detto *piano di Clapeyron*.

#### Legge isobara di Volta-Gay Lussac

Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante, si parla di *trasformazione isobara*. Si verifica che in condizioni isobare il volume varia linearmente con la temperatura:

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

Nella formula tale temperatura è espressa in gradi Celsius,  $V_0$  è il volume occupato dal gas per  $t = 0$  e  $\alpha$  è una costante che varia poco al variare del tipo di gas, detta *coefficiente di dilatazione termica*.

La trasformazione isobara, nel piano  $(p, V)$  già considerato, è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse dei volumi.

### Legge isocora di Volta-Gay Lussac

Se invece si mantiene costante il volume di un gas la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

Anche ora la temperatura è espressa in gradi Celsius;  $p_0$  è la pressione del gas per  $t = 0$  e  $\beta$  è una costante, praticamente indipendente dal tipo di gas.

Una trasformazione a volume costante si dice *isocora*; nel piano  $(p, V)$  è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse delle pressioni.

Si trova che  $\alpha$  e  $\beta$  assumono lo stesso valore per tutti i gas:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15} ^\circ\text{C}^{-1}$$

Dunque, è possibile riscrivere le ultime due leggi come:

$$V = v_0 \alpha \left( \frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \alpha T$$
$$P = p_0 \alpha \left( \frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 \alpha T$$

Dove con  $T$  si indica la temperatura in Kelvin.

### Legge di Avogadro

La quarta legge dei gas è la *legge di Avogadro* di carattere completamente diverso rispetto alle precedenti. Essa stabilisce che *volume uguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole*.

Anche questa legge si riferisce a gas che abbiano un comportamento ideale e quindi obbediscano alle leggi precedentemente enunciate.

Considerando una massa  $M$  uguale ad  $A$  grammi di gas, quantità che si chiama *mole* (mol), il numero di Avogadro vale:

$$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mol}$$

Dalla legge di Avogadro discende la definizione della *settima unità fondamentale*, quella della quantità di materia. Si chiama *mole una quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0.012kg dell'isotopo  $^{12}\text{C}$  del carbonio, ovvero  $N_A$  unità elementari*.

Conseguenza della legge di Avogadro è che *una mole qualsiasi di gas, a una data temperatura e pressione, occupa sempre lo stesso volume*. Se la pressione è quella atmosferica ( $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ ) e la temperatura è  $T_0 = 273.15 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$ , tale volume vale

$$V_m = 0.022414 \text{ m}^3 = 22.414 \text{ litri}$$

$V_m$  è detto *volume molare*. Pertanto  $n$  moli occupano un volume pari a  $nV_m$ .

### Equazione di stato del gas ideale

Se si considerano  $n$  moli di un gas alla pressione atmosferica  $p_0$  e alla temperatura  $T_0 = 273.15\text{ K}$ , esse occupano il volume  $V_0 = nV_m$ . Mantenendo costante il volume e portando la temperatura al valore  $T$ , la pressione in base alla legge vista in precedenza assume il valore:

$$p_T = p_0 \alpha T$$

Moltiplicando per  $V_0$  si ha

$$p_T V_0 = p_0 V_0 \alpha T = p_0 V_T$$

$V_0$  e  $p_T$  sono le coordinate termodinamiche in un particolare stato di equilibrio alla temperatura  $T$ , come lo sono  $p_0$  e  $V_T$  per un altro stato, sempre alla temperatura  $T$ . In base alla legge di Boyle:

$$p_T V_0 = p_0 V_T = pV$$

Essendo  $p$  e  $V$  le coordinate in un generico stato di equilibrio, purché a temperatura  $T$ . Si ottiene dunque

$$pV = p_0 V_0 \alpha T = np_0 V_m \alpha T$$

Il prodotto  $p_0 V_m \alpha$  è una costante universale, che ha lo stesso valore per tutti i gas e dunque

$$pV = nRT$$

Con  $R = p_0 v_m \alpha = 8.314\text{ J/mol K}$ .

Si definisce, sulla base delle tre leggi elementari e della legge di Avogadro, come *gas ideale un sistema le cui coordinate termodinamiche in uno stato di equilibrio obbediscono alla legge di cui sopra, detta equazione di stato di un gas ideale*.  $R$  è detta *costante dei gas ideali*.

E' possibile riscrivere la legge anche in altre forme, ricordando che  $n = N/N_A$ , con  $N$  numero di molecole del gas, si ha

$$pV = \frac{N}{N_A} RT = Nk_b T$$

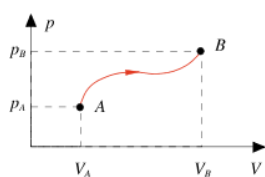
La costante universale

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.3807 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$$

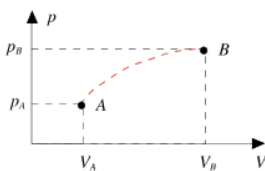
E' detta *costante di Boltzmann*. Se al posto del volume si utilizza la densità  $\rho = M/V$  e al posto della massa  $M$  del gas si utilizza  $An$  con  $A$  massa molecolare, si ha

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A}$$

### 11.3 Trasformazioni di un gas. Lavoro



a)

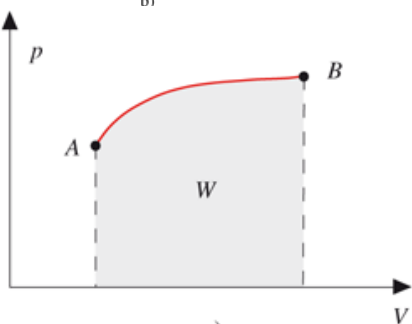


b)

Considerando due stati di equilibrio  $A$  e  $B$  di un sistema formato da  $n$  moli di gas ideale e noti i valori della pressione e del volume, si può scrivere:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR}, \quad T_B = \frac{p_B V_B}{nR}$$

Una trasformazione che porti il gas dallo stato  $A$  allo stato  $B$  può svolgersi attraverso stati di equilibrio termodinamico ed è rappresentabile nel piano di Clapeyron da una curva continua. Se invece avviene lungo stati di non equilibrio, si usa una rappresentazione simbolica a tratto per indicare che si ignorano i valori delle coordinate durante il processo.



a)

Quando un gas si espande o viene compresso, avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere in generale  $dW = p dV$ , come si è visto per un fluido sottoposto a forze di pressione. In una trasformazione finita dallo stato  $A$  allo stato  $B$  si avrebbe:

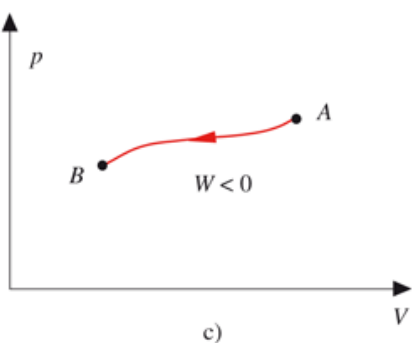
$$W = \int_A^B p(V) dV$$

Espressione utile soltanto quando si conosce la funzione  $p(V)$  e ciò è possibile in due situazioni:

- *Trasformazione reversibile* e dunque si può calcolare l'integrale, dato che la pressione è determinata in ogni stato intermedio  $p = p_{\text{gas}} = p_{\text{amb}}$ ;
- E' nota la *pressione esterna* che, ad esempio, è costante, caso tipico di quando il processo avviene sotto la pressione atmosferica; allora anche se la trasformazione non è reversibile, il lavoro è calcolabile ed è dato da

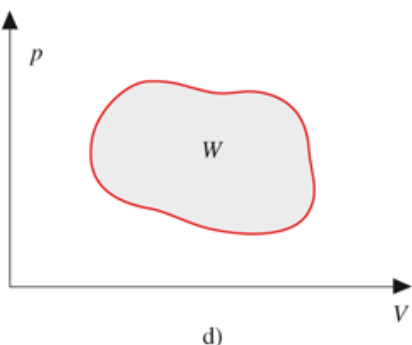
$$W = p_{\text{amb}}(V_B - V_A)$$

Se la trasformazione è isocora ( $V = \text{costante}, \Delta V = 0$ ), il lavoro è sempre nullo; se il gas si espande il volume finale  $V_B$  è maggiore del volume iniziale  $V_A$  e il gas *compie un lavoro sull'ambiente* che secondo la convenzione adottata è positivo; se il gas viene *compresso*,  $V_B < V_A$  e il gas *subisce un lavoro* (negativo), *compiuto dall'ambiente*.



c)

L'ultima figura fa riferimento ad una *trasformazione ciclica reversibile* e il lavoro è dato dall'area racchiusa dal ciclo. Positivo, se percorso in senso orario, negativo se in senso antiorario.



d)

Esempi pag. 402

## 11.4 Calore. Calori specifici

Per calcolare il calore scambiato con l'ambiente nel caso di un gas è necessario ricorrere al primo principio della termodinamica. Per una trasformazione non isoterma è però possibile ottenere:

nel caso di una trasformazione isocora  $dQ = nc_V dT$

nel caso di una trasformazione isobara  $dQ = nc_P dT$

E dunque ottenere:

$$c_V = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V, \quad c_P = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P$$

Che sono detti rispettivamente *calore specifico molare a volume costante* e *a pressione costante* e si misurano in  $J/mol \cdot K$ . Se  $c_V$  e  $c_P$  possono essere ritenuti costanti, il calore scambiato per una variazione  $\Delta T$  di temperatura ( $\Delta T = T_B - T_A$ ) si scrive nei due casi

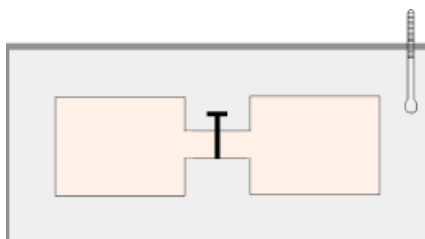
$$Q_V = nc_V \Delta T, \quad Q_P = nc_P \Delta T$$

Altrimenti

$$Q_V = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT, \quad Q_P = n \int_{T_A}^{T_B} c_P dT$$

Inoltre si può dimostrare che  $c_P > c_V$ , cioè: *il calore che bisogna cedere ad una mole di gas ideale per far aumentare la sua temperatura di 1 K è maggiore a pressione costante che a volume costante, perché a pressione costante il gas compie anche lavoro.*

## 11.5 Energia interna del gas ideale



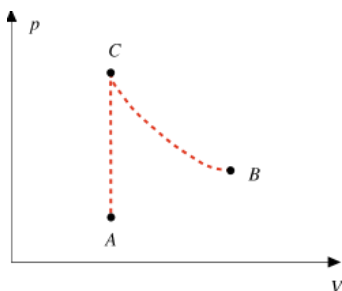
La dipendenza dell'energia interna di un gas ideale dalle coordinate termodinamiche è stata ricavata analizzando il risultato dell'esperienza sull'**espansione libera** eseguita da Joule.

In un contenitore con pareti rigide e diatermiche, diviso in due parti uguali separate da un rubinetto, si trova un gas nella parte di sinistra, mentre nella parte di destra è stata realizzata una condizione di vuoto. Il contenitore è immerso in un calorimetro e la temperatura di

equilibrio è  $T$ . Si apre il rubinetto e si lascia espandere il gas in tutto il volume a disposizione.

L'espansione è detta libera perché non agiscono forze esterne sul gas. Sperimentalmente si osserva che, comunque si operi, la temperatura del liquido calorimetro alla fine del processo è sempre pari a  $T$ , temperatura iniziale di equilibrio.

Il gas, dunque, non scambia calore col calorimetro,  $Q = 0$ . Inoltre, non scambia lavoro con l'esterno (pareti rigide) e dunque  $W = 0$ . Dal primo principio si ha  $\Delta U = Q - W = 0$ : *nell'espansione libera l'energia interna di un gas ideale non varia*. Si può dunque concludere: poiché nel processo la temperatura del gas non cambia, mentre variano pressione e temperatura visto che la trasformazione è isoterma, l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura.



Il risultato è assunto vero rigorosamente solo per un gas ideale.

Per ottenere l'espressione esplicita di  $U(T)$  si considerano due generici stati di equilibrio A e B:  $\Delta U = U_B - U_A$  deve essere la stessa qualsiasi trasformazione si scelga, essendo  $U$  una funzione di stato. Se si sceglie in particolare una trasformazione AC isocora ed una CB isoterma, si ha

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$

Poiché  $U_B = U_C$  essendo gli stati  $B$  e  $C$  alla stessa temperatura ed  $U$  funzione solo della temperatura.

Applicando ora il principio alla trasformazione isocora: dato che  $W = 0$ ,  $\Delta U = Q$  dove  $Q$  è il calore scambiato in condizioni isocore, dato dalle leggi viste prima. Pertanto

$$\Delta U = U_B - U_A = nc_V(T_B - T_A) = nc_V\Delta T$$

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT$$

A seconda che il calore specifico a volume costante sia indipendente dalla temperatura o meno. Per trasformazioni infinitesime

$$dU = nc_V dT$$

Da cui si ricava

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

Poiché l'energia interna è funzione soltanto della temperatura, anche il *calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura, potendo essere, in particolare, costante*. Si può scrivere ora il primo principio in forma esplicita:

$$dQ = nc_V dT + dW \rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT + W$$

$$Q = nc_V\Delta T + W \text{ se } c_v = \text{costante}$$

Se la trasformazione è reversibile le formule sopra diventano

$$dQ = nc_V dT + p dV \rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT + \int_{V_A}^{V_B} p dV$$

$$Q = nc_V\Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p dV \text{ se } c_v = \text{costante}$$

### Relazione di Mayer

In una trasformazione isobara infinitesima  $dQ = nc_p dT$  e  $dW = p dV$  perciò utilizzando la formula precedente

$$nc_p dT = nc_V dT + p dV$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali  $pV = nRT$  si ha

$$p dV + V dp = nR dT$$

In una trasformazione isobara  $dp = 0$  e quindi  $p dV = nR dT$ . Pertanto

$$nc_p dT = nc_V dT + nR dT$$

E in conclusione si ottiene la **relazione di Mayer**

$$c_p - c_v = R$$

Di conseguenza *in un gas ideale anche  $c_p$  è funzione soltanto della temperatura potendo in particolare essere costante*. Il rapporto tra calori specifici  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  risulta in un gas ideale sempre  $> 1$ .

Sperimentalmente si trovano per i calori specifici dei gas ideali questi risultati:

- I gas ideali *monoatomici* hanno  $c_V$  costante e pari a  $3R/2$ :

$$c_V = \frac{3}{2}R \rightarrow c_p = \frac{5}{2}R \rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

- Alcuni gas ideali *biatomici* hanno  $c_V$  costante e pari a  $5R/2$ :

$$c_V = \frac{5}{2}R \rightarrow c_p = \frac{7}{2}R \rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$$

Riassumendo:

$\Delta U = nc_V \Delta T$  per qualsiasi trasformazione

$Q = nc_V \Delta T$  se  $V = \text{costante}$   $Q = nc_p \Delta T$  se  $p = \text{costante}$

$pV = nRT$  equazione di stato in uno stato di equilibrio

$c_p - c_v = R$  relazione di Mayer

**Nota su unità di misura**

$$R = 8.314 \text{ J/mol K} = 8314 \text{ J/kmol K}$$

Se però si utilizza la caloria, si ricorda che

$$1 \text{ Cal} = 4186.8 \text{ J}$$

Allora il valore di  $R$  da usare è:

$$R = 1.986 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Cal}}{\text{mol}} \text{K} = 1.986 \text{ Cal/kmol K}$$

## 11.6 Studio di alcune trasformazioni

### Trasformazioni adiabatiche

Il gas è racchiuso in un contenitore con pareti adiabatiche e quindi può scambiare solo lavoro, per esempio a causa di una parete mobile. Dal primo principio si ha:

$$W_{AB} = -\Delta U = -nc_V(T_B - T_A)$$

E sapendo dall'equazione dei gas ideali che  $T = \frac{pV}{nR}$  e che  $R = c_p - c_v$  si ottiene

$$-nc_V \left( \frac{p_B V_B - p_A V_A}{nR} \right) \rightarrow \frac{c_v}{c_p - c_v} (p_A V_A - p_B V_B) \rightarrow \frac{1}{\gamma - 1} (p_A V_A - p_B V_B)$$

Tutto ciò che avviene tra i due stati di equilibrio  $A$  iniziale e  $B$  finale. Se si ha un'espansione adiabatica il lavoro  $W_{AB}$  è positivo e quindi  $\Delta U$  è negativa e  $T_B < T_A$ : il gas si raffredda. Se invece si ha una compressione adiabatica,  $W_{AB} < 0$ ,  $\Delta U > 0$ ,  $T_B > T_A$ : il gas si riscalda.

Se invece la trasformazione è *adiabatica reversibile*, l'espressione infinitesima del primo principio diviene

$$dU + dW = nc_V dT + p dV = 0$$

In quanto si può esprimere il lavoro in funzione delle coordinate termodinamiche proprio perché la trasformazione è reversibile. Dunque utilizzando l'equazione di stato in qualsiasi stato intermedio per esprimere  $p$  come  $p = nRT/V$  si ottiene

$$nc_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

Separando le variabili e utilizzando la relazione di Mayer, si ottiene

$$\frac{c_p - c_v}{c_v} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \rightarrow (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Questa equazione differenziale rappresenta la condizione a cui obbediscono le coordinate degli stati di un gas ideale collegati da una trasformazione adiabatica reversibile. Integrando dallo stato  $A$  allo stato  $B$  e supponendo  $\gamma$  costante

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B} \rightarrow \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \ln \left( \frac{T_A}{T_B} \right)$$

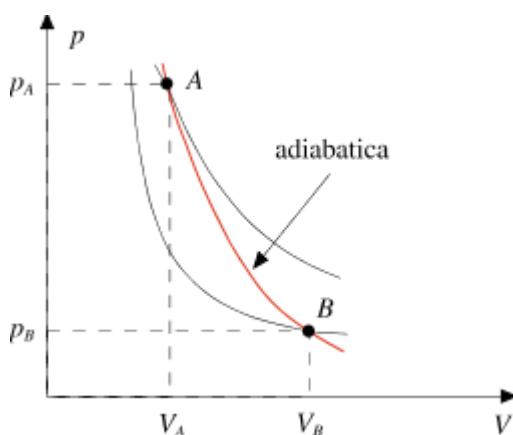
L'uguaglianza tra logaritmi porta all'uguaglianza degli argomenti, e dunque:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

Espressione che dà la relazione tra le coordinate termodinamiche del gas durante una trasformazione adiabatica reversibile.

Tramite l'equazione di stato si può trasformare la relazione tra  $T$  e  $V$  in una tra  $p$  e  $V$  o tra  $p$  e  $T$  e in conclusione si hanno tre espressioni equivalenti:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante}, \quad pV^{\gamma} = \text{costante}, \quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{costante}$$



Si utilizza ora l'equazione  $pV^{\gamma} = \text{costante}$  per rappresentare la trasformazione nel piano di Clapeyron. Rispetto alla curva isoterma  $pV = \text{costante}$ , la curva adiabatica ha un andamento simile però con pendenza maggiore perché  $\gamma$  è sempre  $> 1$ : si conferma che  $T_B < T_A$

Esempi pag. 410

### Trasformazioni isoterme

Nel caso di una trasformazione isoterma si considera il gas racchiuso in un recipiente che è in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura  $T$ . Durante la trasformazione la temperatura del gas resta costante al valore  $T$  e abbiamo

$$\Delta U = 0, \quad Q = W, \quad p_A V_A = p_B V_B$$

Se la trasformazione è una espansione isoterma  $W_{AB} > 0$  e quindi  $Q_{AB} > 0$ : il gas compie lavoro e assorbe calore. Se invece la trasformazione è una compressione isoterma  $W_{AB} < 0$  e  $Q_{AB} < 0$ : il gas subisce lavoro e cede calore. Qualora la trasformazione sia isoterma reversibile, si ha

$$W_{AB} = \int_A^B p dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

e questa è anche l'espressione esplicita del calore scambiato. Si nota che è sempre  $Q \neq 0$ : una trasformazione isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore, a meno che non sia  $T = 0$ , condizione che, come vedremo, non è mai raggiungibile.

Esempi pag. 412



## Trasformazioni isocore

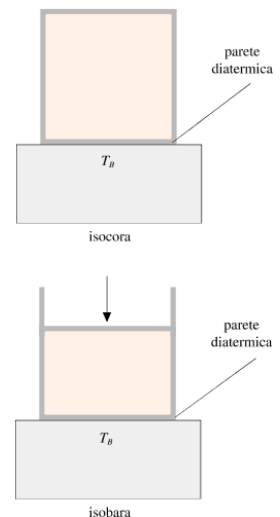
Gas contenuto in un recipiente diatermico di volume fisso:  $V = \text{costante}$  e  $W = 0$ .  
Il gas può scambiare solo calore e questo è uguale, per il primo principio, alla variazione di energia interna:

$$Q = \Delta U = nc_V(T_B - T_A) \text{ se } c_V = \text{costante}$$

Essendo il volume costante, dall'equazione di stato si ha

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

*Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas pressione e temperatura diminuiscono.*



## Trasformazioni isobare.

Il gas è contenuto ora in un recipiente diatermico con una parete mobile su cui agisce una pressione esterna costante  $p$ . Dall'equazione di stato si ha che in una trasformazione isobara

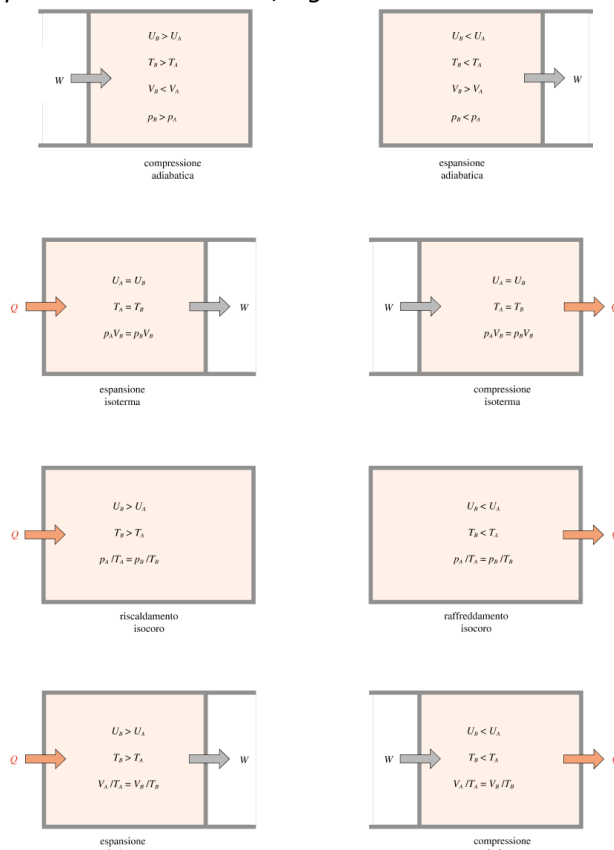
$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Il gas può scambiare sia calore che lavoro dati da

$$Q = nc_p(T_B - T_A) \text{ , } W = p(V_B - V_A) = p \left( \frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p} \right) = nR(T_B - T_A)$$

E deve essere sempre  $Q - W = \Delta U = nc_V(T_B - T_A)$

*Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro; se si assorbe calore dal gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro.*



## 11.7 Trasformazioni cicliche

In una trasformazione ciclica lo stato iniziale coincide con lo stato finale. Il primo principio assume la forma  $Q = W$  e dunque il calore scambiato è uguale al lavoro scambiato. Se durante il ciclo viene *prodotto lavoro*  $W > 0$ , assorbendo calore da un opportuno numero di sorgenti, tale ciclo è detto *termico*. Il dispositivo che opera è indicato come *macchina termica*.

Se invece il ciclo è tale da richiedere un lavoro eterno ( $W < 0$ ), *estraendo calore* da una o più sorgenti fredde per cederlo a sorgenti calde si parla di *ciclo frigorifero*. Il dispositivo corrispondente è la *macchina frigorifera*.

Il calore complessivo scambiato si può scrivere come

$$Q = Q_A + Q_C$$

Dove  $Q_A > 0$  rappresenta la somma dei calori assorbiti e  $Q_C < 0$  quella dei calori ceduti,

$$W = W_F + W_S$$

In cui  $W_F > 0$  è la somma dei lavori compiuti e  $W_S < 0$  è la somma dei lavori subiti.

Per un ciclo termico si definisce **rendimento** la quantità adimensionale:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Il rendimento è quindi la *percentuale di calore assorbito che viene trasformata in lavoro*. Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che  $Q_C$  è negativo. Sperimentalmente si osserva sempre

$$0 \leq \eta < 1$$

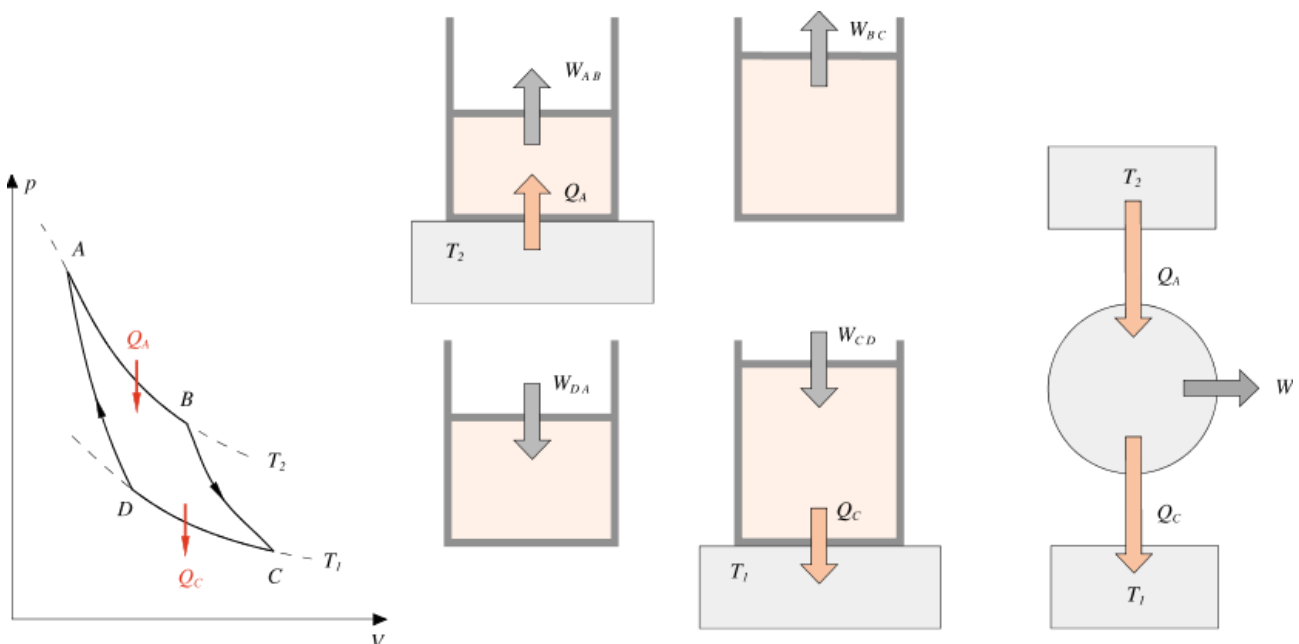
E cioè che

$$W < Q_A, \quad |Q_C| < Q_A, \quad Q_C \neq 0$$

In un ciclo termico solo una frazione minore di 1 del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene sempre ceduto.

### Ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è costituito da quattro trasformazioni reversibili:



- Trasformazione AB, *espansione isoterma reversibile*
- Trasformazione BC, *espansione adiabatica reversibile*
- Trasformazione CD, *compressione isoterma reversibile*
- Trasformazione DA, *compressione adiabatica reversibile*

Nello stato A il gas è in equilibrio a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura  $T_2$ . In seguito a ciascuna diminuzione  $dp$  della pressione esterna il gas si espande di una quantità  $dV$  raffreddandosi di  $dT$ ; si ha quindi cessione di calore  $dQ$  dalla sorgente a temperatura  $T_2$  al gas che ritorna alla temperatura  $T_2$ . Definendo  $p_A, V_A, T_2$  lo stato A e  $p_B, V_B, T_2$  lo stato B, si ha:

$$Q_A = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB}$$

$W_{AB}$  è il lavoro fatto dal gas nell'espansione isoterma.

Nella trasformazione BC il gas è isolato da qualsiasi sorgente di calore. In questo caso si ha una diminuzione  $dp$  della pressione esterna, un'espansione  $dV$  e un raffreddamento  $dT$ . Il gas dunque passa da  $B(p_B, V_B, T_2)$  a  $C(p_C, V_C, T_1)$  con  $T_1 < T_2$  e dunque

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

Il lavoro fatto dal gas è  $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = nc_V(T_2 - T_1)$

Nella trasformazione CD il gas è a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura  $T_1$ . Il processo è analogo ad AB ma ora si aumenta la pressione esterna di  $dp$ , il gas si comprime di  $dV$  e la temperatura aumenta di  $dT$ , cedendo  $dQ$  alla sorgente a temperatura  $T_1$  e ritorna alla temperatura  $T_1$ . Il calore ceduto è

$$Q_C = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = W_{CD}$$

Ed è negativo, come il lavoro, perché  $V_D < V_C$ .

Infine nella trasformazione DA il gas è di nuovo isolato termicamente, ma aumenta la pressione esterna di  $dp$ , il volume diminuisce di  $dV$  e la temperatura aumenta di  $dT$ . Il gas ritorna allo stato iniziale e vale, avendo assunto  $\gamma$  costante la relazione

$$T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

Il lavoro subito è  $W_{DA} = -\Delta U_{DA} = nc_V(T_1 - T_2) = -W_{BC}$

Sommando tutti i contributi:

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD}$$

Questa quantità coincide con l'area racchiusa dal ciclo.

Il rendimento del ciclo è:

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln(V_D/V_C)}{nRT_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1 \ln(V_C/V_D)}{T_2 \ln(V_B/V_A)}$$

E dividendo membro a membro i termini delle relazioni

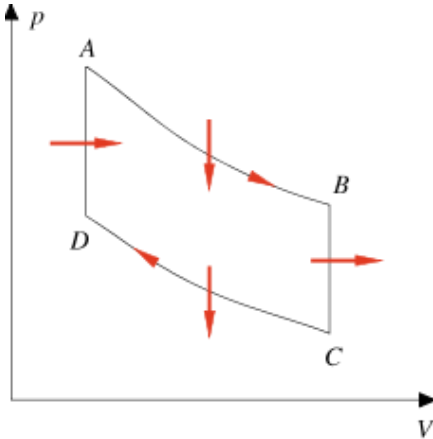
$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \quad , \quad T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

Si ottiene  $\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$  ovvero  $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$  dunque il rendimento diventa:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Si noti il fatto che nella formula non compare alcuna grandezza caratteristica del gas, ma solo i valori delle temperature delle sorgenti con cui il gas scambia calore: *il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore*. Questa proprietà risulta vera qualunque sia la sostanza che descrive il ciclo. Essendo  $T_1 < T_2$  allora si verifica che  $\eta < 1$ .

### Ciclo di Stirling



Il ciclo termico di Stirling è composto da quattro trasformazioni reversibili rappresentate in figura:

- Trasformazione AB, espansione isoterma reversibile a temperatura  $T_2$
- Trasformazione BC, isocora reversibile da  $T_2$  a  $T_1 < T_2$
- Trasformazione CD, compressione isoterma reversibile a temperatura  $T_1$
- Trasformazione DA, isocora reversibile da  $T_1$  a  $T_2$ .

Le trasformazioni AB e CD sono già state discusse nel caso del ciclo di Carnot e dunque i risultati sono:

$$Q_A = Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$Q_C = Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0$$

Nell'isocora BC il gas cede a una serie infinita di sorgenti a temperatura  $T_2, T_2 - dT, T_2 - 2dT, \dots$ , il calore

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_V(T_1 - T_2)$$

Nell'isocora DA avviene con le stesse modalità il processo inverso e il gas assorbe calore

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = nc_V(T_2 - T_1) = -Q_{BC}$$

Nelle isocore non viene scambiato lavoro. Il rendimento è dato da:

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right)}{nRT_2 \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Poiché  $V_A = V_D$  e  $V_B = V_C$ . Il rendimento del ciclo di Stirling è identico a quello del ciclo di Carnot.

## 11.10 Teoria cinetica dei gas

Le ipotesi di partenza del modello cinetico sono:

- Un gas è costituito da molecole uguali, in moto continuo e disordinato
- Gli urti tra molecole e tra molecole e pareti del contenitore sono elastici
- Non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti
- Le dimensioni delle molecole sono molto più piccole rispetto alle distanze medie tra esse

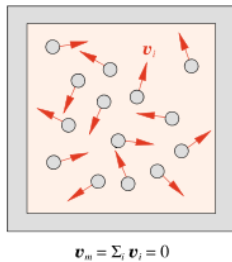
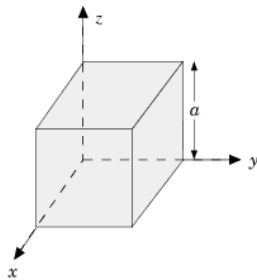
Sulla base della prima ipotesi, in ogni istante, considerata una qualsiasi direzione orientata  $\vec{u}$ , vi sono tante molecole che hanno velocità concorde a  $\vec{u}$  e altrettante discorde, perciò la velocità media  $\vec{v}_m$  è nulla.

La seconda ipotesi implica che negli urti tra molecole si conservano quantità di moto ed energia, mentre nell'urto di una molecola contro una parete si conserva solo l'energia.

Dalla terza ipotesi deriva che l'energia potenziale interna è nulla, quindi la sola forma di energia è quella cinetica.

La quarta ipotesi indica che il volume totale occupato dalle molecole è trascurabile rispetto a quello del recipiente.

### Calcolo della pressione



$$\vec{v}_m = \sum_i \vec{v}_i = 0$$

Si consideri un contenitore cubico di lato  $a$  riempito con un gas che si comporta secondo il modello cinetico. La velocità di una molecola è  $\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$ : la componente  $v_x u_x$  è ortogonale alla parete  $yz$ , la componente  $v_y u_y$  ortogonale a  $xz$  e la componente  $v_z u_z$  ortogonale a  $xy$ . Nell'urto elastico contro la parete  $yz$  cambia solo la componente  $v_x u_x$  che diventa  $-v_x u_x$  mentre le altre restano invariate, data l'assenza di forze d'attrito.

La variazione della quantità di moto nell'urto della molecola con la parete  $yz$  è pari a  $-2mv_x u_x$ , se  $m$  è la massa della molecola e quindi l'impulso comunicato alla parete è  $2mv_x u_x$ . L'urto successivo contro  $yz$  avviene dopo un tempo  $t = \frac{2a}{v_x}$  necessario per attraversare nei due sensi il cubo lungo  $x$ . In realtà non è la stessa molecola che compie l'urto perché durante il viaggio può subire degli urti contro altre molecole ed essere deviata. Pertanto, il numero di urti al secondo su  $yz$  è dato da  $\frac{1}{t} = \frac{v_x}{2a}$  e l'impulso comunicato in un secondo, pari alla componente  $x$  della forza media esercitata sulla parete da una molecola vale in modulo

$$F_x = 2mv_x \frac{v_x}{2a} = \frac{mv_x^2}{a}$$

La forza risultante sulla parete è:

$$R_x = \frac{m}{a} \sum_i v_{x,i}^2$$

Dove la somma è estesa a tutte le molecole. La pressione sulla parete  $yz$  di area  $S = a^2$  dovuta agli urti è

$$p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3} \sum_i v_{x,i}^2 = \frac{Nm}{V} \frac{1}{N} \sum_i v_{x,i}^2$$

$N$  è il numero totale di molecole nel cubo di volume  $V = a^3$ .

Si definisce *velocità media quadratica* la quantità  $\bar{v}$  definita come radice quadrata della media dei quadrati delle velocità:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \frac{1}{N} \sum_i (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2)$$

Se il moto è completamente disordinato non vi è direzione preferita per le molecole e dunque i valori medi quadratici sono uguali tra loro:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

Si ottiene dunque l'equazione di Joule-Clausius-Kronig

$$p = \frac{Nm}{V} \frac{\overline{v^2}}{3} \rightarrow pV = \frac{1}{3} Nm \overline{v^2}$$

Definendo come *energia cinetica media di traslazione* delle molecole  $\overline{E_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$  i ottiene

$$pV = \frac{2}{3} N \overline{E_k}$$

Il prodotto pressione per volume è proporzionale all'energia cinetica media di traslazione delle molecole  $N \overline{E_k}$ , che nel modello cinetico coincide con l'energia totale. Utilizzando l'equazione di stato  $pV = nRT$  si trova:

$$nRT = \frac{2}{3} N \overline{E_k} \rightarrow \overline{E_k} = \frac{3}{2} \frac{nRT}{N} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

Visto che  $nN_A = N$ . Ricordando che la costante di Boltzmann vale  $k_B = R/N_A$  si ottiene

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} k_B T$$

L'energia cinetica media traslazionale di una molecola di un gas ideale è proporzionale alla temperatura del gas. Si è dunque trovato il *significato microscopico della grandezza temperatura*. Essa è proporzionale all'energia cinetica media di traslazione delle molecole ovvero, per un dato gas, al quadrato della velocità media quadratica.

### Equipartizione dell'energia

Osservando la relazione precedente, si può concludere che: *ad ogni termine quadratico dell'energia classica di una molecola di un corpo corrisponde, all'equilibrio termodinamico, un'energia media pari a  $\frac{1}{2} k_B T$* . Nel caso esaminato i gradi di libertà erano 3: le componenti  $x, y, z$  della velocità, dunque  $\frac{3}{2}$ .

Pertanto, per un sistema con  $l$  gradi di libertà:

$$\overline{E} = \frac{l}{2} k_B T$$

Detto *principio di equipartizione dell'energia*.

Una molecola di gas ideale biatomico può essere visualizzata come due punti (i due atomi) vincolati a restare a distanza tra loro e ha *cinque gradi di libertà* (simil corpo rigido 6.1).  $\overline{E_k} = \frac{5}{2} k_B T$

## Secondo principio della termodinamica

### 12.1 Enunciati del secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica non pone limiti alle trasformazioni di energia da una forma all'altra ma, sperimentalmente la situazione non è simmetrica. Si è visto che nel caso di una macchina che compie un ciclo termico  $Q_C < 0$  e non succede mai che  $Q_C = 0$  o  $Q_C > 0$ . Questo comporta che  $Q_A$  non viene trasformato integralmente in lavoro, ma una parte viene ceduta alla sorgente a temperatura inferiore. Il *secondo principio della termodinamica* prende atto di queste impossibilità sperimentali, che non presentano eccezioni conosciute, e le trasforma in postulati secondo i seguenti enunciati:

Enunciato di Kelvin-Planck:

*È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.*

Enunciato di Clausius:

*È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.*

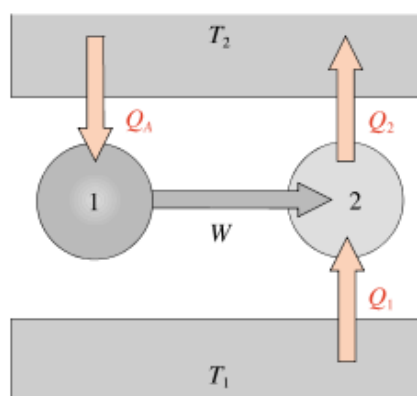
Conseguenza immediata del secondo principio è ciò che è già stato visto: in un processo ciclico per produrre lavoro sono necessarie almeno due sorgenti, cioè non può sussistere  $Q_C = 0$  ma deve essere  $Q_A > |Q_C|$  e quindi,  $\eta < 1$ .

In particolare, per un processo ciclico che si svolge utilizzando una sola sorgente, detto *ciclo monoterme*, non essendo possibile assorbire calore e produrre lavoro senza violare il secondo principio, deve valere

$$Q \leq 0 \quad , \quad W \leq 0$$

In altre parole, assorbe lavoro dall'ambiente esterno e cede calore alla sorgente, dunque trasforma integralmente lavoro in calore senza limite alcuno, oppure non ha scambi energetici  $Q = 0$  e  $W = 0$ . Se fosse reversibile, dovrebbe valere  $Q \geq 0$  ,  $W \geq 0$  ma essendo > vietato, deve per forza essere  $Q = 0$  e  $W = 0$ .

#### Dimostrazione equivalenza dei due enunciati del II principio



Supponiamo sia possibile realizzare un processo ciclico che trasformi integralmente calore in lavoro (in contrasto con l'enunciato di Kelvin-Planck). Dalla figura si nota che la macchina termica 1 produce il lavoro  $W$  trasformando il calore  $Q_A$  assorbito dalla sorgente a temperatura  $T_2$ :  $W = Q_A$  ed è nulla la cessione di calore alla sorgente fredda.

Si utilizza ora il lavoro  $W$  per far funzionare una macchina frigorifera, che preleva il calore  $Q_1$  dalla sorgente a temperatura  $T_1$  e cede il calore  $Q_2$  alla sorgente a temperatura  $T_2 > T_1$ . La seconda macchina non contraddice l'enunciato di Clausius poiché nel processo interviene il lavoro  $W' = -W$  fatto sul sistema (il lavoro fatto dalla macchina 1 è  $W$  ed è positivo, mentre  $W'$  è subito dalla macchina termica 2 ed è negativo). Il bilancio della macchina 2 sulla base del primo principio è

$$Q_1 + Q_2 = W' = -W$$

La macchina complessiva, costituita dall'ambiente delle due macchine, assorbe  $Q_1$  a temperatura  $T_1$  e scambia a temperatura  $T_2$ :

$$Q_A + Q_2 = W + Q_2 = -Q_1$$

Se  $Q_1$  è assorbito,  $-Q_1$  è ceduto. Il lavoro complessivo della macchina è nullo in quanto non c'è scambio di lavoro con l'ambiente esterno e l'unico risultato è pertanto il passaggio spontaneo di calore dalla sorgente a temperatura inferiore a quella a temperatura superiore, violando l'enunciato di Clausius.

Supponiamo ora di poter utilizzare una macchina che come unico risultato faccia passare il calore  $Q$  da una sorgente a temperatura  $T_1$  ad un'altra temperatura  $T_2 > T_1$  e consideriamo una seconda macchina che lavori normalmente tra le due sorgenti, in accordo col secondo principio.

Si dimensiona la macchina in modo che  $Q_1 = Q$ , cioè in modo da cedere alla sorgente a  $T_1$  lo stesso calore che viene assorbito dalla prima macchina. Pertanto, alla fine di un ciclo della macchina complessiva la sorgente a  $T_1$  non scambia calore e il lavoro prodotto è dato da

$$W = Q_2 + Q_1 = Q_2 + Q$$

Ed è positivo, perché  $Q_2 > |Q_1| = |Q|$ . Tale lavoro è uguale al calore complessivamente scambiato con la sorgente a  $T_2$  e in conclusione l'unico risultato è la trasformazione integrale in lavoro del calore assorbito da una sola sorgente, violando l'enunciato di Kelvin-Planck.

L'unione dei due risultati costituisce l'*equivalenza tra i due enunciati del secondo principio della termodinamica*.

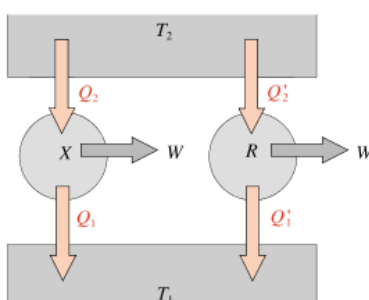
## 12.2 Reversibilità e irreversibilità

Quando viene compiuta una trasformazione reversibile da uno stato  $A$  ad uno stato  $B$ , con scambio di  $Q_{AB}$  e  $W_{AB}$  tra il sistema e l'ambiente, è sempre possibile ripercorrerla in senso inverso, scambiando le quantità  $-Q_{AB}$  e  $-W_{AB}$ : alla fine il sistema e l'ambiente sono ritornati ai rispettivi stati iniziali. L'argomento si estende anche ai cicli reversibili. In generale dunque una *trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce*.

Invece, quando avviene una trasformazione irreversibile *non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo*. Il sistema può essere riportato allo stato iniziale attraverso altre trasformazioni, ma l'ambiente subisce una modifica irreversibile. Esempio:

passaggio di calore tra due corpi a contatto termico e che presentano una differenza finita di temperatura: alla fine si raggiunge l'equilibrio termico senza produzione di lavoro, ma per ripristinare la situazione iniziale si dovrebbe fornire lavoro dall'esterno.

## 12.3 Teorema di Carnot



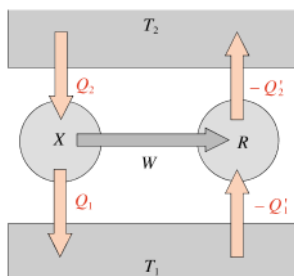
Il teorema di Carnot rappresenta una prima precisazione quantitativa dell'enunciato di Kelvin-Planck, in quanto fissa la massima percentuale di calore assorbito da una macchina termica che può essere trasformata in lavoro.

Si considerano due macchine che lavorano utilizzando le stesse sorgenti con  $T_2 > T_1$ , dimensionate in modo da produrre lo stesso lavoro  $W$ . Si assume che la seconda sia reversibile, mentre non si assume nulla per la prima.



I rendimenti delle due macchine sono

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \quad , \quad \eta_R = \frac{W}{Q'_2}$$



Dal primo principio si ha inoltre che

$$Q_2 + Q_1 = W = Q'_2 + Q'_1$$

Supponiamo che sia  $\eta_X > \eta_R$  e costruiamo una macchina composta da X e R, in cui quest'ultima viene fatta funzionare come macchina frigorifera, assorbendo il lavoro  $-W$  e il calore  $-Q'_1$  e cedendo il calore  $-Q'_2$ , come nella figura a sinistra. Si sfrutta così una proprietà caratteristica di un processo reversibile. Dall'ipotesi  $\eta_X > \eta_R$  segue

$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q'_2} \quad , \quad Q_2 < Q'_2 \quad , \quad Q_2 - Q'_2 < 0$$

E quindi, dal primo principio enunciato prima si ottiene

$$Q_1 - Q'_1 = Q'_2 - Q_2 > 0$$

Si hanno dunque i seguenti risultati:

- La macchina assorbe il calore  $Q = Q_1 - Q'_1 > 0$  dalla sorgente a temperatura  $T_1$
- Non viene scambiato lavoro con l'ambiente esterno
- La macchina cede il calore  $-Q = Q_2 - Q'_2 < 0$  alla sorgente a temperatura  $T_2$ .

L'unico risultato alla fine di un ciclo è il passaggio di calore dalla sorgente fredda alla sorgente calda, in contrasto con l'enunciato di Clausius. Allora è sbagliata l'ipotesi di partenza e deve essere

$$\eta_X \leq \eta_R$$

Se anche la macchina X fosse reversibile, in alternativa al ragionamento precedente potremmo supporre  $\eta_R > \eta_X$ , e troveremmo  $\eta_X \geq \eta_R$ . La disuguaglianza risulta compatibile con la precedente solo se

$$\eta_X = \eta_R$$

In conclusione il *teorema di Carnot* afferma che tutte le macchine reversibili che lavorano alle stesse sorgenti alle temperature  $T_1$  e  $T_2$  hanno rendimento uguale. Qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore. Il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo, come si deduce dal fatto che le proprietà del sistema non compaiono nella dimostrazione.

Una particolare macchina reversibile che lavora tra due sorgenti è il *ciclo di Carnot a gas ideale*, il cui rendimento è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

E stando al teorema di Carnot si deduce che la formula del rendimento rappresenta il rendimento di tutte le macchine reversibili che lavorano con due sole sorgenti alle temperature  $T_1$  e  $T_2$ .

Il teorema di Carnot risulta valido anche per macchine che lavorano con più sorgenti: *la macchina che funziona in modo reversibile è sempre quella il cui rendimento è il limite superiore dei rendimenti possibili*. Ritornando al caso delle due sorgenti, confrontando le formule:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} \quad e \quad \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Si ha che, per qualsiasi macchina reversibile, la relazioni tra calori scambiati e temperature a cui avviene lo scambio è

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Fissate dunque le temperature delle sorgenti  $T_1$  e  $T_2$ , per il teorema di Carnot:

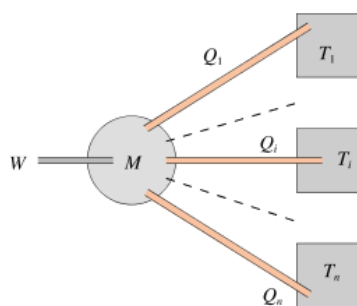
$$\eta_R = \eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

La macchina reversibile è quella che sfrutta meglio l'energia fornita sotto forma di calore. Infatti, *a parità di calore assorbito  $Q_A$ , la macchina reversibile è quella che fornisce il lavoro massimo, ovvero a parità di lavoro fornito, la macchina reversibile è quella che assorbe meno calore*.

## 12.5 Teorema di Clausius

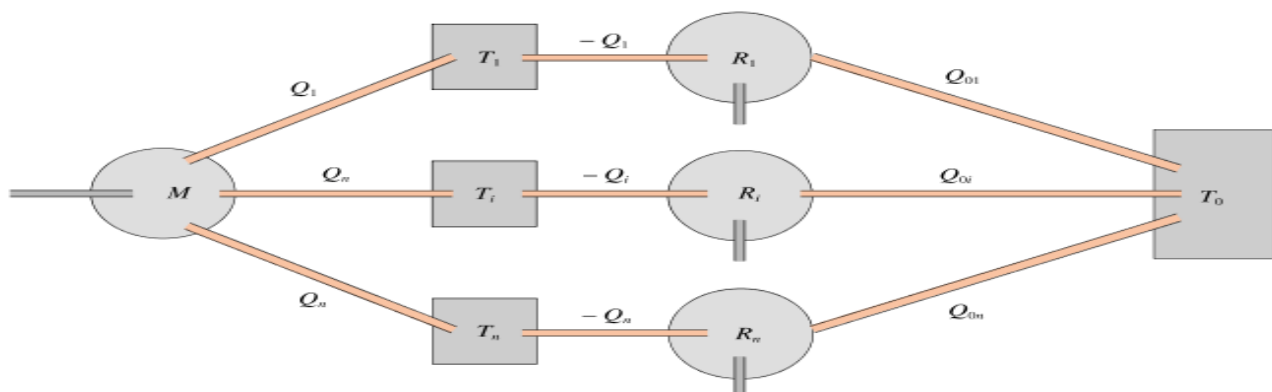
La relazione  $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$  può essere estesa e generalizzata a macchine termiche operanti con più sorgenti di calore. Sussiste infatti il *teorema di Clausius*: data una macchina  $M$  qualsiasi che scambia calore con  $n$  sorgenti, è valida la relazione:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$



Dove  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  sono i calori scambiati con le sorgenti a temperatura  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . La situazione è schematizzata nella figura di sinistra.

Per dimostrare il teorema di Clausius, immaginiamo di aggiungere  $n$  macchine reversibili funzionanti tra le sorgenti già considerate e una sorgente a temperatura  $T_0$ . Ciascuna di queste macchine  $R_i$  scambia con la sorgente  $T_i$  il calore  $-Q_i$ , opposto a quello scambiato con la stessa sorgente della macchina  $M$ , e con la sorgente a  $T_0$  il calore  $Q_{0i}$ . L'insieme è dato dalla figura in basso.



Applicando il teorema di Carnot a ciascuna macchina reversibile, si ha:

$$-\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_{0i}}{T_0} = 0 \rightarrow \frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{Q_i}{T_i}$$

E sommando su tutte le macchine:

$$\frac{1}{T_0} \sum_i Q_{0i} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

Alla fine di un ciclo della macchina  $M$  e delle macchine reversibili  $R_i$  le sorgenti  $T_i$  sono rimaste invariate in quanto ciascuna ha scambiato calori uguali ed opposti con le macchine.

Dunque la macchina complessiva compie una trasformazione ciclica monoterma perché scambia calore solo con la sorgente a temperatura  $T_0$ . Come già visto, il calore totale scambiato durante un ciclo monoterma non può essere positivo e dunque

$$\sum_i Q_{0i} \leq 0 \rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Se lo scambio di calore  $M$  avviene con una serie infinita di sorgenti, la formula del teorema di Clausius diventa:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Dove l'integrale di linea indica che l'integrale è esteso a tutto il ciclo descritto dalla macchina  $M$ . Se la macchina  $M$  è reversibile si ha:

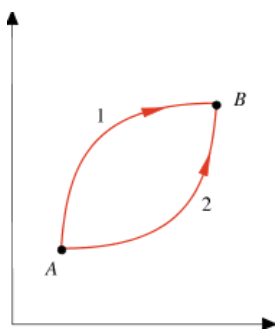
$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \text{ oppure } \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Se invece il processo ciclico è irreversibile, si può scrivere come:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0 \text{ oppure } \oint \frac{dQ}{T} < 0$$

Si tenga conto che la temperatura  $T$  delle formule è quella della sorgente con cui avviene lo scambio di calore: essa coincide con la temperatura del sistema che compie il ciclo solo se il processo è reversibile ed i calori sono quelli visti dal sistema.

## 12.6 La funzione di stato entropia



Siano A e B due stati qualunque di un sistema termodinamico e passiamo da uno all'altro tramite due diverse trasformazioni reversibili, rappresentate nella figura. Se si percorre in verso opposto la trasformazione 2 (chiamandola -2), si è composto un ciclo reversibile. Dal teorema di Clausius per le macchine reversibili:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left( \frac{dQ}{T} \right)_{-2} = \int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_2$$

Per tale motivo si ottiene che

$$\int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_1 = \int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_2 = \dots = \int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_i$$

Il valore dell'integrale  $\int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{rev}$  esteso ad una qualunque trasformazione reversibile che congiunge due stati di un sistema termodinamico, è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo. Si può dunque porre l'integrale uguale alla variazione di una funzione che dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema nei due stati di equilibrio A e B:

$$\int_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{rev} = S_B - S_A = \Delta S$$

La *funzione di stato* così introdotta è detta **entropia**. E' possibile scrivere la formula anche in forma infinitesima come

$$dS = \left( \frac{dQ}{T} \right)_{rev}$$

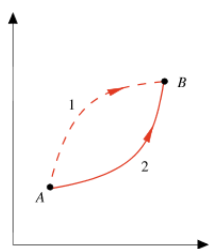
L'*entropia* è una quantità additiva, cioè dati due sistemi di entropia  $S_1$  ed  $S_2$  l'entropia complessiva è espressa da  $S = S_1 + S_2$ . Ciò è conseguenza del fatto che l'energia interna complessiva dei due sistemi è la somma delle energie interne come pure il lavoro complessivo è la somma dei lavori. In particolare risulta che se si aumenta la massa di un sistema, l'entropia aumenta in proporzione. L'entropia ha dunque le caratteristiche di una *grandezza estensiva*.

Supponiamo ora di avere una trasformazione irreversibile che collega lo stato A allo stato B e di voler calcolare la variazione di entropia del sistema che descrive la trasformazione. Le considerazioni fatte finora dicono che:

- L'entropia degli stati iniziali e finali è certamente definibile.
- Conseguentemente è definibile la variazione  $S_B - S_A$
- La variazione  $S_B - S_A$  non dipende dal tipo di trasformazione che collega A e B, ma solo delle coordinate termodinamiche di A e B.

Perciò, per il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione irreversibile da A a B basta scegliere una qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi A e B ed applicare a questa la formula dell'entropia: il risultato è valido in ogni caso.

## 12.7 Il principio di aumento dell'entropia



Ritornando all'esempio precedente, si supponga ora che la trasformazione 1 sia irreversibile, mentre la 2 resta reversibile. Per tali motivi, il ciclo formato da 1 e -2 è irreversibile. Il teorema di Clausius si scrive:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} < 0$$

L'ultimo integrale dà la variazione di entropia e quindi:

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr}$$

Questa formula ci dice che l'integrale  $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)$  calcolato lungo una generica trasformazione  $AB$  dipende dalla trasformazione, e risulta sempre minore dell'integrale  $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$ , il quale è invece indipendente dalla trasformazione, purché reversibile e definisce la variazione della funzione di stato entropia.

In termini infinitesimi la relazione diventa:

$$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr}$$

Se il sistema che descrive la trasformazione  $AB$  è isolato termicamente, cioè non scambia calore, si ha  $dQ = 0$  e dunque

$$S_B - S_A \geq 0 \rightarrow S_B \geq S_A$$

*L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta e la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile.* Quest'ultima relazione esprime il **principio di aumento dell'entropia**. La forma infinitesima:

$$dS \geq 0$$

Esprime la **formulazione matematica del secondo principio della termodinamica**.