FORMULARIO TEORIA ED ELABORAZIONE DEI SEGNALI

Energia & Potenza

Potenza media $P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|x(t)|^2 dt$

Energia di un segnale $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt$

Potenza media per sinusoide $\frac{A^2}{2}$ (dove A è il valor massimo del segnale)

Segnali e vettori

Norma ed energia $E(x) = \left||x|\right|^2$

Prodotto scalare $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt$

Ortogonalità $< x, y >= 0$

Disuguaglianza di Schwarz $|< x, y >| \le \left||x|\right|^2\left||y|\right|^2$

Base $x = \sum_1^n < x, w_i > w_i = \sum_1^n \alpha_i w_i$ dove $\alpha_i =< x, w_i >$

Uguaglianza di Parseval $x = \sum_1^n \alpha_i w_i => E(x) = \sum_1^n |\alpha_i|^2$

Disuguaglianza di Bessel $E(x) \ge \sum_1^n |\alpha_i|^2 = \sum_1^n |< x, w_i >|^2$

Segnali ortonormali $< w_i, w_j \ge \delta_{ij}$ dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ se\ i = j \\ 0\ altrimenti \end{cases}$

Proprietà delta di Dirac

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = 1\ - Area\ unitaria$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$
$x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$ – Proprietà campionamento
$x(t) * \delta(t) = x(t)$
$x(t) * \delta(t-\theta) = x(t-\theta)$ – Proprietà della traslazione

Il comportamento della delta è **analogo** in frequenza.

Serie di Fourier

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ $\quad c_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}dt$ $\quad E(x) = \sum|c_n|^2$

Rappresentazione alternativa (le sommatorie sono da intendere da $-\infty$ a $+\infty$)

$x(t) = \sum\mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ $\quad \mu_n = \frac{1}{\sqrt{T}}c_n$ $\quad E_T(x) = T\sum|\mu_n|^2$ $\quad P(x) = \frac{E_T(x)}{T}$

Trasformata di Fourier

$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta = F\{x(t)\}$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = F^{-1}\{X(f)\}$$

$E(x) = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$
$< x(t), y(t) >=< X(f), Y(f) >$

Sistemi lineari

Linearità $T\big(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\big) = a_1 T\big(x_1(t)\big) + a_2 T\big(x_2(t)\big)$

Tempo invarianza $T\big(x(t)\big) = y(t) \iff T\big(x(t-\theta)\big) = y(t-\theta)$

Risposta all'impulso $h(t)$ **Funzione di trasferimento** $H(f)$

Risposta sinusoide in sistemi LTI

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
$y(t) = |H(f_0)| \cos\big(2\pi f_0 t + \arg\big(H(f)\big)\big)$ Stessa frequenza ma modulo e fase diversi

$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$
$y(t) = |H(f_0)| \sin\big(2\pi f_0 t + \arg\big(H(f)\big)\big)$ Stessa frequenza ma modulo e fase diversi

Sistema causale: l'uscita in un certo istante non dipende dagli ingressi nel futuro. Inoltre $h(t) = 0 \ \forall t < 0$.

Stabilità BIBO: $\forall x(t): |x(t)| < \infty, \forall t \to |y(t)| < \infty$
si traduce in: "Ingresso limitato in ampiezza -> uscita limitata in ampiezza"

LTI Stabile $\int |h(t)| dt < \infty$ $|H(f)| < \infty$

Parallelo di due sistemi lineari: $H_1(f) + H_2(f)$

Serie di due sistemi lineari $H_1(f) \cdot H_2(f)$

Segnali periodici

Formula generale segnale periodico $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico $X(f) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} x_T\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ se T=2T modificare

Spettro di potenza segnale periodico $G_y(f) = \sum |\mu_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

Potenza segnale periodico $P_y = \sum |\mu_n|^2$

Segnale campionatore $C_T(t) = \sum \delta(t - nT)$ $C_T(f) = \frac{1}{T} \sum \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ Campionare implica periodicizzare.

Prodotto treno di delta $x(t) \cdot C_T(t) = \sum x(nT) \cdot \delta(t - nT)$

Convoluzione treno di delta $x(t) * C_T(t) = \sum x(t - nT)$

Funzione di autocorrelazione, Spettro di potenza e di energia

Spettro di energia -> Energia finita
Spettro di potenza -> Energia infinita

Funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$

Spettro di energia $S_x(f) = |X(f)|^2$ con $X(f)$ segnale ad energia finita

Spettro di potenza $G_x(f) = |X(f)|^2$ con $X(f)$ segnale ad energia infinita

Proprietà funzione di autocorrelazione

- Pari
- Max nell'origine che coincide con l'energia $R_x(0) = E(x)$
- $S_x(f) = F\{R_x(\tau)\} \geq 0$
- Per un segnale reale, l'autocorrelazione è reale

Spettro di energia di un segnale in uscita da LTI $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$

Processi casuali

Media $\mu_x(t) = m_x(t) = E\{X(t)\} = \int x f_x(x;t)dx$ dove $f_x(x;t)$ è la funzione di densità di probabilità

Valor quadratico medio $m_x^2 = E\{X^2(t)\} = \int x^2 f_x(x;t)dx$

Varianza $\sigma_x^2 = E\{(X(t) - \mu_x)^2\} = X(t)^2 - \mu_x^2$

Autocorrelazione $R_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\}$

Processi casuali WSS

Proprietà WSS (stazionario in senso lato):

- $m_x(t) \to m_x$ media indipendente dal tempo
- $R_x(t_1, t_2) \to R_x(t_2 - t_1) \to R_x(\tau)$ autocorrelazione che dipende solo da τ

Le seguenti formule sono valide **solo** per processi WSS.

Media LTI $m_y = m_x H(0)$ con H funzione di trasferimento

Valor quadratico medio $E\{X^2(t)\} = R_x(0) = \int S_x(f)df$

Autocorrelazione $R_x(\tau) = E\{X(t)X^*(t+\tau)\}$ $R_y(\tau) = R_y^*(-\tau)$

Funzione di autocorrelazione in uscita da LTI $R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$

Mutua correlazione $R_{xy}(\tau) = E\{X(t)Y(t+\tau)\} = R_x(\tau) * h(\tau)$

Potenza media processo stazionario $P_x = E\{X^2(t)\}$ tutti i processi casuali hanno energia infinita

Autocovarianza $K_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2$

Proprietà densità spettrale di potenza: l'ampiezza della δ centrata in 0 in $S_x(f)$ è uguale al quadrato della media μ_x^2. Esempio:

$S_x(f) = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{2}{3}\delta(f-3)$ $\mu_x^2 = \frac{1}{4} \to \mu_x = \frac{1}{2}$

Rumore gaussiano "Bianco"

Proprietà

- $S_x(f) = \frac{N0}{2}$ e dunque media nulla perché non ha delta centrate nell'origine
- $R_x(\tau) = F^{-1}\{S_x(f)\} = \frac{N0}{2}\delta(\tau)$
- $\sigma_x^2 = R_x(0) = \infty$ (la delta in 0 fa ∞)
- Un processo gaussiano bianco in uscita da un LTI è ancora un processo gaussiano ma **non** bianco (è colorato, ndr).

Ergodicità

Media temporale $< g[x(t)] >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g[x(t)]dt$ equivale alla potenza ma senza il quadrato

Ergodicità: $< g[X(t)] > = E\{X(t)\}$ media temporale e media statistica devono essere identiche.