Mathe für Informatiker II

Mitschrift der Vorlesung von Christian Bender Sommersemester 17

Lukas Koschorke

24. Mai 2017

Vorwort

Hallo zusammen, ich versuche mein Skript immer aktuell zu halten und wenn ich es eh schon abtippe, kann ich es auch noch zusätzlich auf StudyDrive hochladen. Ich kann leider keine Garantie geben, dass es immer den kompletten Stoff aller Vorlesungen beinhaltet, auch wenn ich mein Bestes dafür gebe. Wenn euch Fehler auffallen, haut sie einfach in die Kommentare von StudyDrive.

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungssysteme und der Gaußalgorithmus

1.1 Beispiel (PageRank)

Ein Nutzer surft auf den vorhandenen Seiten des Internets S_1,...,S_N. Er beginnt auf irgendeiner Seite und folgt typischerweise einem der Links. Er kann aber auch auf eine beliebige Seite springen.
Zur Modellierung sei $0 < d < 1$ (Damping-Faktor, typischerweise $d = 0,85$). Auf einer Seite angekommen, folgt der Nutzer mit Wahrscheinlichkeit d einem rein zufällig ausgewähltem Link, mit Wahrscheinlichkeit $1 - d$ springt er auf eine rein zufällig gewählte Seite. (Konvention: Falls die Seite keinen Outlink hat, so wählt man rein zufällig eine Seite aus)
„Auf lange Sicht“ (d.h. wenn die Anzahl der Surfschritte gegen unenlich strebt, ist die Wahrscheinlichkeit p_i, sich auf der Seite S_i zu befinden, beschrieben durch

$$p_i = \frac{1-d}{N} + d\sum_{j=1}^{N} a_{ij}p_j, i = 1, ..., N \tag{1.1}$$

wobei:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{c_j} & \text{, falls Seite } S_j \text{ auf Seite } S_i \text{ verlinkt} \\ \frac{1}{N} & \text{, falls } S_j \text{ keinen Outlink hat} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und c_j die Anzahl an Seiten angibt, auf die S_j verlinkt (siehe dazu das „Das Kapital der Markovketten“ in der MFI3).
p_i wird PageRank der Seite S_i genannt.

1.1 ist ein System von N linearen Gleichungen zu N Unbekannten.

In einem Netz mit 3 Seiten sei die Verlinkung schematisch dargestellt durch:

$$S_1 \leftrightarrows S_3, S_2 \rightarrow S_1, S_3 \rightarrow S_2$$

Hier ist also $c_3 = 2, c_1 = c_2 = 1$, d.h. 1.1 wird im Spezialfall zu:

$$\begin{array}{rcrcrcl} p_1 & - & dp_2 & - & \frac{d}{2}p_3 & = & \frac{1-d}{3} \quad (I) \\ & & p_2 & - & \frac{d}{2}p_3 & = & \frac{1-d}{3} \quad (II) \\ -\ dp_1 & & & + & p_3 & = & \frac{1-d}{3} \quad (III) \end{array}$$

Indem man (I) durch $(\tilde{I}) = (I) + d(II) + \frac{1}{d}(III)$ersetzt, erhält man die äquivalente Form:

$$\begin{array}{rcrcl} -\ dp_1 & + & p_3 & = & \frac{1-d}{3} \qquad (III) \\ p_2 & - & \frac{d}{2}p_3 & = & \frac{1-d}{3} \qquad (II) \\ & & (\frac{1}{d} - \frac{d^2}{2} - \frac{d}{2})p_3 & = & \frac{1-d}{3}(1 + \frac{1}{d} + d) \qquad (\tilde{I}) \end{array}$$

Nun haben wir das System in „Zeilenstufenform“ und man kann die Lösung direkt ablesen $(0 < d < 1)$:

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1-d}{3} \frac{d^2 + d + 1}{1 - \frac{d^3}{2} - \frac{d^2}{2}} \\ p_2 &= \frac{1-d}{3} + \frac{d}{2}p_3 \\ p_1 &= \frac{1}{d}(p_3 - \frac{1-d}{3}) \end{aligned}$$

Da $p_3 > \frac{1-d}{3}$ folgt $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$.
Da ferner $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (Nachrechnen), kann der PageRank tatsächlich als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden.
Für $d = 0,85$ ist:
$p_1 \approx 0,397$
$p_2 \approx 0,215$
$p_3 \approx 0,388$
Betrachten wir den „Grenzfall“ $d = 1$, in dem nur Links zum Surfen verwendet werden,

dann:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} p_1 & - & p_2 & - & \frac{1}{2}p_3 & = & 0 & (I) \\ & & p_2 & - & \frac{1}{2}p_3 & = & 0 & (II) \\ -\ p_1 & & & + & p_3 & = & 0 & (III) \end{array}$$

und wie zuvor:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -\ p_1 & & & + & p_3 & = & 0 & (III) \\ & & p_2 & - & \frac{1}{2}p_3 & = & 0 & (II) \\ & & & & 0 & = & 0 & (\tilde{I}) \end{array}$$

Hier lösen alle p_1, p_2, p_3 der Form

$$p_1 = p_3, p_2 = \frac{1}{2}p_3,\ p_3 \in \mathbb{R}$$

das System 1.1. Fordert man zusätzlich die Wahrscheinlichkeitsbedingung $p_1+p_2+p_3 = 1$, so ist die eindeutige Lösung:

$$p_3 = p_1 = 0,4,\ p_2 = 0,2$$

Zur Bedeutung des Damping-Faktor:

a) Die Wahl $0 \leq d < 1$ sichert, das 1.1 genau eine Lösung hat und, dass diese Lösung positive Einträge hat.
Dies werden wir im Zusammenhang mit „Eigenwertproblemen“ besser verstehen.

b) Im realistischen Problem ist N sehr groß ($N > 20 Mio.$). Dann müssen nummerische Verfahren zur Approximation des PageRank herangezogen werden. Wir werden sehen, dass die Wahl von d eine wichtige Rolle bei der Konvergenzgeschwindigkeit derartiger Verfahren spielt.

Problem:

Gegeben sei ein System von $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen mit $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} (L)$$

Hierbei seien die Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (mit doppelter Indexschreibweise) für $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, sowie die rechte Seite $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., m$, gegeben.
Gesucht sind alle n-Tupel $(x_1, ..., x_n)$ von reellen Zahlen, die das System (L) lösen.
Zur übersichtlichen Notation schreibt man die Koeffizienten als Rechteckschema, das $m \times n$-Matrix genannt wird

$$A := (a_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die $b_i' s$ und $x_j' s$ als **Spaltenvektor**

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definiert man nun ein Produkt zwischen $m \times n$-Matrix und Spaltenvektor der Höhe n, das einen Spaltenvektor der Höhe m ergibt, durch:

$$Ax := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

dann kann (L) umgeschrieben werden in die Form

$$Ax = b \text{ (L')}$$

als Gleichung von Spaltenvektoren der Höhe m.
Wir bezeichnen die Menge aller Spaltenvektoren der Höhe m mit reellen Einträgen als $\mathbb{R}^n$ und die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen als $\mathbb{R}^{m \times n}$.Dann ist die Lösungsmenge von (L) gegeben durch:

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$$

1.2 Definition Zeilenstufenform

Wir sagen, eine $m \times n$-Matrix$A = (a_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n}$ hat **Zeilenstufenform**, falls:

1. Es gibt ein $0 \leq r \leq m$, sodass in den Zeilen mit Index 1 bis r nicht alle Einträge gleich 0 sind und in der Zeile(r+1) bis m alle Einträge gleich 0 sind
und

2. es gelte

$$j_1 < ... < j_r$$

wobei für jedes $1 \leq i \leq r$

$$j_i = min\{j|a_{ij} \neq 0\}$$

der niedrigste Spaltenindex angibt, in dem in der i-ten Zeile ein von 0 verschiedener Eintrag steht.
Die Zahl r wird **Zeilenrang** von A genannt.
Die Einträge $a_{i,j_i}, i = 1, ..., r$, werden **Pivots** genannt.
Offenbar gilt: $r \leq min\{m, n\}$

$$A = \begin{pmatrix} (*) & & & \\ 0 & (*) & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & (*) \end{pmatrix}$$

Matrix in Zeilenstufenform: Die mit $(*)$ gekennzeichneten Einträge sind die von 0 verschiedenen Pivots, die Einträge unterhalb der „Stufenlinie“ sind gleich 0, die übrigen Einträge sind beliebig.
Im Beispiel 1.1 hat die Koeffizientenmatrix zum System $(III), (II), (\tilde{I})$ Zeilenstufenform, nämlich:

$$\begin{pmatrix} -d & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2} - \frac{d^2}{2} - \frac{d}{2}) \end{pmatrix}$$

Fall 1:

Löse $Ax = b$, wobei A Zeilenstufenform hat.

a) Durch Umordnung der Spalten und damit Umnummerierung der Unbekannten, kann man stets voraussetzen, dass die Pivots in den ersten r Spalten stehen, d.h $j_i = i$ für $1 \leq i \leq r$.
Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{j_1=2, j_2=3, j_3=5} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Wir betrachten die **erweiterte Koeffizientenmatrix** zu $Ax = b$ (A beliebige $m \times n$-Matrix).

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

, bei der die rechte Seite b als (n+1)-te Spalte an die Koeffizientenmatrix angehängt wird. Ist A in Zeilenstufenform mit Pivots in den ersten r Spalten, so

$$(A,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{rr} & b_r \\ & & & b_{r+1} \\ & & & \vdots \\ & & & b_m \end{pmatrix}$$

1.3 Algorithmus (Rückwärtseinsetzen)

Input: $m \times n$-Matrix A in Zeilenstufenform mit Zeilenrang r ($0 \leq r \leq m$) und Pivots in den ersten r Spalten, $b \in \mathbb{R}^m$.

Output: „es existiert keine Lösung“ oder eine bijektive Abbildung:

$$\Phi_{A,b} : \mathbb{R}^{n-r} \to \text{Lös}(A,b)$$

1. Falls $b_i \neq 0$ für ein $i = r+1, ..., m$, so gebe „keine Lösung“ als Output aus.

2.1 Andernfalls setze in Abhängigkeit von $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix}$

$$x_{r+1}(\lambda) := \lambda_1, ..., x_n(\lambda) := \lambda_{n-r}$$

und für $i = r, ..., 1$ rekursiv

$$x_i := \frac{1}{a_{ij}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j(\lambda))$$

2.2 Gebe $\Phi_{A,b} : \mathbb{R}^{n-r} \to \text{Lös}(A,b), \lambda \mapsto x(\lambda) := \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ \vdots \\ x_n(\lambda) \end{pmatrix}$ aus.

Bemerkung:

Ist $r = n$, so ist $\mathbb{R}^{n-r} = \mathbb{R}^0 := \{0\}$ eineindeutig und das Rückwärtseinsetzen liefert genau eine Lösung für $Ax = b$

Beweis der Korrektheit des Algorithmus:

Ist $b_i \neq 0$ für ein $i = r+1, ..., m$, so lautet die i-te Gleichung

$$0 * x_1 + ... + 0 * x_n = b_i \neq 0$$

und kann also für kein $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt sein. Andernfalls sind die Gleichungen r+1 bis m immer erfüllt (0=0).
Für $i = 1, ..., r$ lautet die i-te Gleichung

$$a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + ... + a_{in}x_n = b_i$$

und ist wegen$a_{ii} \neq 0$ äquivalent zu:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)$$

Also: $x(\lambda) \in \text{Lös}(A, b)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^{n-r}$
Zur Bijektivität:

Injektiv ist klar, da $x(\lambda) = \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ \vdots \\ x_r(\lambda) \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix}$
und also $x(\lambda) \neq x(\tilde{\lambda})$ für $\lambda \neq \tilde{\lambda}$.
Surjektiv: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Lös}(A, b)$. Setze $\lambda = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Dann:

$$x_{r+i}(\lambda) = \lambda_i = x_{r+i} \forall i = 1, ..., n-r$$

Für $i = r, ..., 1$ folgt induktiv (Induktionsannahme: $x_j(\lambda) = x_j \forall j \geq i+1$):

$$x_1(\lambda) = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j(\lambda)) = \frac{1}{a_{ij}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j) = x_i \square$$

Fall 2:

Löse $Ax = b$, wobei A in allgemeiner Form.
Strategie: Finde ein Äquivalentes System $\tilde{A}x = \tilde{b}$ (also mit Lös(A, b)= Lös$(\tilde{A}, \tilde{b})$), wobei $\tilde{A}$ Zeilenstufenform hat.
Dazu: Unter **elementaren Zeilenumformungen** einer Matrix verstehen wir (vorläufig):

1) Das Vertauschen von zwei Zeilen

2) Die Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile($i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$)

1.4 Satz

Sei (A,b) die erweiterte Koeffizientenmatrix zu $Ax = b$ und $(\tilde{A}, \tilde{b})$ gehe aus(A,b) durch endlich viele Zeilenumformungen hervor. Dann:

$$\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{b})$$

Beweis:

Es reicht zu zeigen, dass sich die Lösungsmenge bei einer elementaren Zeilenumformung nicht ändert.

Typ1: Da alle Gleichungen in (L) simultan erfüllt sein müssen, ist die Reihenfolge der Gleichungen egal.

Typ2: Da nur die Zahlen i und j betroffen sind, reicht es zu zeigen, dass die Systeme

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \end{array}\right\} (*)$$

und

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 & + & \cdots & + & (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n & = & b_j + \lambda b_i \end{array}\right\} (**)$$

Löst $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ das System $(*)$, so auch die erste Gleichung in $(**)$ und durch Addition des λ-fachen der ersten Gleichung in $(*)$ zur zweiten auch die zweite Gleichung in $(**)$.
Umgekehrt schließt man analog durch Subtraktion des λ-fachen der 1.Gleichung in $(**)$ von der zweiten. $\square$

1.5 Satz

Jede $m \times n$-Matrix kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform Überführt werden. Zum Beweis geben wir einen Algorithmus an, der das Geforderte leistet:

1.6 Algorithmus

Input: $m \times n$-Matrix A

Output: $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform

1. setze $A_1 = A$, $p_1 = m, q_1 = n$

2. Wende so lange die Funktion „Zeilenstufenschritt“ an, d.h. setzte $(A_k, p_k, q_k) :=$ Zeilenstufenschritt$(A_{k-1}, p_{k-1}, q_{k-1})$ bis $\min(p_k, q_k) = 0$

3. Nenne den Abbruchindex k_0 und gebeA_{k_0} aus.

Hierbei ist:

Zeilenstufenschritt

$$(\mathbb{R}^{m\times n} \times \{0, \cdots, m\} \times \{0, \cdots, n\} \to \mathbb{R}^{m\times n} \times \{0, \cdots, m\} \times \{0, \cdots, n\})$$

Wie folgt definiert:

Zeilenstufenschritt$(A, p, q) := (\tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q})$, wobei:

1. Sei $B = (b_{ij})_{i=1,\cdots,p,j=1,\cdots,q}$ mit $b_{ij} := a_{m-p+i,n-q+j}$
Veranschaulichung:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-p} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-q,1} & \cdots & a_{m-q,n-p} & \cdots & a_{m-q,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \multicolumn{2}{|c|}{B} \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-p} & \multicolumn{2}{|c|}{} \end{pmatrix}$$

2. Ist $b_{ij} = 0$ für alle $i = 1, \cdots, p$ und $j = 1, \cdots, q$, setze $\tilde{p} = \tilde{q} = 0$ und $\tilde{A} = A$

3.1 Andernfalls seien: $j_1 = min\{j | b_{ij} \neq 0$ für ein $i = 1, \cdots, p\}$ (die Spalte von B mit minimalem Index, in der ein von 0 verschiedener Eintrag ist.)
und $i_1 = min\{i | b_{ij} \neq 0\}$ (die Zeile mit minimalem Index, in der j_1-ten Spalte ein von 0 verschiedener Eintrag steht)

3.2 Setze $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{i=1,\cdots,p,j=1,\cdots,q}$, wobei $\tilde{b}_{1j} := b_{i_1,j} \forall j = 1, \cdots, q$ und für $i = 2, \cdots, p$ und $j = 1, \cdots, q$:

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{b_{ij_1}}{\tilde{b}_{1j_1}} & \tilde{b}_{1j} & + & b_{ij} & i \neq i_1 \\ -\dfrac{b_{1j_1}}{\tilde{b}_{1,j_1}} & \tilde{b}_{1j} & + & b_{1j} & i = i_1 \end{cases}$$

(Hier wird erst die i_1-te mit der ersten Zeile vertauscht und dann ein geeignetes Vielfaches der neuen ersten Zeile zu den anderen Zeilen addiert. $\tilde{B}$ geht also durch elementare Zeilenumformungen aus B hervor.)

3.3 Setze $\tilde{p} = p - 1, q = \tilde{q} - j_1$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-p} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-q,1} & \cdots & a_{m-q,n-p} & \cdots & a_{m-q,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \tilde{B} \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-p} & & \end{pmatrix}$$

Beachte, die Matrix $\tilde{B}$ hat die Form

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{i_1,j_1} & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} * : \text{belibige Einträge, } b_{i_1,j_1} \neq 0$$

1.7 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -18 \end{pmatrix} = A_2$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = A_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_4$$

Wir zeigen: Algorithmus 1.6 führt jede $m \times n$-Matrix A mit endlich vielen elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform über.

Beweis: Da $min(p_k, q_k) < min(p_{k-1}, q_{k-1})$, bricht der Algorithmus nach endlich vielen Schritten ab. Ist $A_1 = A$ die Nullmatrix, so ist A bereits in Zeilenstufenform und der Algorithmus liefert A als Output. Andernfalls entsteht A_2 aus A_1 durch endlich viele elementare Zeilenumformungen und hat die Form

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (*) & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & B_2 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Der Eintrag $(*) \neq 0$ steht in der $m - p_2 = 1$-ten Zeile und $n - q_2$-ten Spalte. Also ist B_2 eine $p_2 \times q_2$-Matrix.
Ist B_2 de Nullmatrix, so ist A_2 in Zeilenstufenform und der Algorithmus gibt A_2 aus.

Andernfalls wird B_2 im nächsten Schritt mit endlich vielen Elementaren Zeilenumformungen auf die Form (1.1) gebracht. Dehnt man diese Umformungen auf die Zeilen 2 bis m von A_2 aus, ändern sich die ersten $n - q_2$ Spalten von A_2 nicht, da dort nur Nullen stehen.
A_2 wird also in diesem Schritt mit endlich vielen elementaren Zeilenumformungen auf die Form

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (*) & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & (*) & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & B_3 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

gebracht. Induktiv überzeugt man sich leicht, dass der Algorithmus das Geforderte leistet. □

Diese Überlegungen führen zu:

1.8 Algorithmus (Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung von $Ax = b$)

Input: $m \times n$-Matrix A, $b \in \mathbb{R}^m$

Output: „es ex. keine Lösung“ od.($0 \leq r \leq n$ und eine Bijektion $\Phi_{A,b} : \mathbb{R}^{n-r} \to$ Lös(A, b))

1. Bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) in Zeilenstufenform $(\tilde{A}, \tilde{b})$ mit Algorithmus 1.6

2. Bestimme den Zeilenrang r von $\tilde{A}$(m minus die Anzahl der Nullstellen von $\tilde{A}$)

3. Tausche die Spalten von $\tilde{A}$(falls nötig) so, dass die Pivots in den ersten r Spalten stehen. (Wir bezeichnen die entstehende Matrix weiterhin mit $\tilde{A}$)

4. Verwende Algorithmus 1.3 mit Input $\tilde{A}, \tilde{b}, r$ und setzten im Existenzfall $\Phi_{(A,b)} := \Phi_{(\tilde{A},\tilde{b})}$ (wobei ggf. die Umnummerierung der Unbekannten aus Schritt 3 zu beachten ist).
Die Korrektheit des Algorithmus folgt aus Satz 1.4.

1.9 Folgerung

Die Lös(A, b) für $Ax = b$ ist entweder leer oder einelementig oder überabzählbar unendlich.

1.10 Beispiel (Rundungsfehler im Gauß-Algorithmus)

Zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Gaußalgorithmus liefert:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & -9999 & -9998 \end{array}\right)$$

Also:

$$x_2 = \frac{9998}{9999} \approx 0,9999$$
$$x_1 = 10^4(1 - 1 * \frac{9998}{9999}) \approx 1,0001$$

Führen wir nun den Algorithmus mit der Rechengenauigkeit von 3 Dezimalstellen aus, so:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,00 * 10^{-4} & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 2,00 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1,00 * 10^{-4} & 1,00 & 1,00 \\ 0 & 1,00 * 10^4 & 1,00 * 10^4 \end{array}\right)$$

Also: $x_2 = 1, x_1 = 10^4(1-1) = 0$, was stark von der exakten Lösung abweicht.

Problem:

Der erste Pivot 10^{-4}, durch den zu Beginn des Algorithmus geteilt wird, ist „sehr klein“ und führt zu einem „großen“ Rundungsfehler, durch im Lauf des Algorithmus fortsetzen kann.

Ausweg:

Vertausche die Zeilen im Verlauf des Gauß-Algorithmus so, dass in der jeweiligen Spalte immer ein betragsmäßig möglichst großer Pivot entsteht (Gauß-Algorithmus mit Teilpivotierung)
In dieser Form ist der Gauß-Algorithmus „stabiler“, also weniger anfällig gegen Rundungsfehler.

Im Beispiel mit Rundungen auf 3 Dezimalstellen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,00 * 10^{-4} & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 2,00 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 1,00 & 2,00 \\ 1,00 * 10^{-4} & 1,00 & 1,00 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 1,00 & 2,00 \\ 0 & 1,00 & 1,00 \end{array}\right)$$

da $1 - 10^{-4} = 0,9999 und 1 - 2 * 10^{-4} = 0,9998$ auf 3 Stellen gerundet gleich 1 ist,
Also $x_2 = 1,00$ und $x_1 = 1,00$, was der Rundung der korrekten Lösung auf 3 Stellen entspricht.

Formal bedeutet die Teilpivotierung:
Verwende in „Zeilenstufenschritt“ (Alg. 1.6) in Schritt 3.1:

$$i_1 := min\{i | |b_{i,j_1}| \geq |b_{k,j_1}| \forall k = 1, ..., p\}$$

Rechenaufwand des Gauß-Algorithmus

Wir bestimmen die Anzahl der Multiplikationen, die im Verlauf der Gauß-Algorithmus durchgeführt werden, im Fall $m = n = r$.

- Umformen in Zeilenstufenform:
  Die erste Zeile von (A, b) auf Zeilenstufenform zu bringen, benötigt

  $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zeilen}}}{(n-1)} \quad * \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faktor}}}{1} \quad + \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zeilen}}}{(n-1)} \quad * \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spalten}}}{n} \quad = (n-1) * (n+1)$$

  Multiplikationen.
  Iteration führt zu:

  $$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

  Multiplikationen.

- Rückwärtseinsetzen:
  Da der Zeilenrang von $\tilde{A}$ gleich n ist, so werden zur Berechnung von x_k

  $$(n - k + 1)$$

  Multiplikationen benötigt, also insgesamt:

  $$\sum_{k=1}^{n} (n - k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}$$

  Multiplikationen.

- Gesamtaufwand: $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ Multiplikationen

Ist n sehr groß (s. Beispiel 1.1), so müssen approximative Lösungsverfahren mit niedrigerem Rechenaufwand zum Einsatz gebracht werden.

2 Vektorräume

Sei $A \in \mathbb{R}^m \times n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Um das System $Ax = b$ weiter zu studieren , bietet es sich an, die Funktion

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$$

zu untersuchen. Dies werden im allgemeineren Rahmen von „Linearen Abbildungen“ zwischen „Vektorräumen“ vornehmen.
Zunächst einige Begriffe:

2.1 Definition

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$, also einer Abbildung $* : G \times G \to G$ heißt **Gruppe**, falls

(G1) $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$ (assoziativ)

(G2) Es gibt:

- ein $e \in G$ mit: $\forall_{a \in G} : e * a = a$
- für alle $a \in G$ ein $a^{-1} \in G$ mit: $a^{-1} * a = e$ (e wird **neutrales Element genannt,** a^{-1} **das inverse Element zu a)**

Gilt zudem $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$, so wird G **abelsch** (oder **kommutativ**) genannt.

2.2 Beispiel

i) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind jeweils mit der Addition eine abelsche Gruppe.$\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{C}\backslash\{0\}$ bilden mit der Multiplikation als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.

ii) Die Menge aller bijektiven Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung ist eine Gruppe, aber nicht kommutativ (Erinnerung: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$)

2.3 Satz

Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann:

i) Das neutrale Element e ist eindeutig und $a * e = a \forall a \in G$

ii) Das inverse Element a^{-1} zu$a \in G$ ist eindeutig und $a * a^{-1} = e \forall a \in G$

iii) Für alle $a, b \in G$ gilt: $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

iv) Für $a, b, \tilde{b} \in G$ gelten die „Kürzungsregeln“:

$$a * b = a * \tilde{b} \Rightarrow b = \tilde{b}$$

$$b * a = \tilde{b} * a \Rightarrow b = \tilde{b}$$

Beweis:

Es seien $a \in G, a^{-1}$ ein inverses Element zu a und $(a^{-1})^{-1}$ ein inverses Element zu a^{-1}.
Dann:

$$a*a^{-1} = e*(a*a^{-1}) = ((a^{-1})^{-1}*a^{-1})*(a*a^{-1}) = (a^{-1})^{-1}*(a^{-1}*a)*a^{-1} = (a^{-1})^{-1}*(e*a^{-1})$$

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$$

Somit:

$$a * e = a * (a^{-1} * a) = (a * a^{-1}) * a = e * a = a$$

Sei $\tilde{e}$ ein weiteres neutrales Element. Dann:

$$\tilde{e} * e = \tilde{e} \text{ und } \tilde{e} * e = e$$

Also $e = \tilde{e}$
Ist a' ein weiteres neutrales Element zu a. Dann:

$$a' = a' * e = a' * (a * a^{-1}) = (a' * a) * a^{-1} = e * a^{-1} = a^{-1}$$

Dies zeigt i) und ii). iii) und iv): Übung □
Erinnerung:

2.4 Definition

Eine Menge K mit Verknüpfungen $+ : K \times K \to K, * : K \times K \to K$ heißt **Körper**,falls

K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Man bezeichnet das neutrale Element mit 0 und das inverse Element zu a mit $-a$.

K2) $(K \backslash \{0\}, *)$ ist eine abelsche Gruppe. Man bezeichnet das neutrale Element mit 1 und das inverse Element zu a mit a^{-1} oder $\frac{1}{a}$.

K3) Für alle $a, b, c \in K$ gilt:

$$(a + b) * c = a * c + b * c \text{ Distributivgesetz}$$

2.5 Beispiel

i) $(\mathbb{Q},+,*),(\mathbb{R},+,*),(\mathbb{C},+,*)$ sind Körper, $(\mathbb{Z},+,*)$ nicht.

ii) Ist p eine Primzahl, so bilden die Restkassen modulo p, versehen mit der modularen Addition und Multiplikation einen Körper, der mit $\mathbb{Z}_p$ oder $\mathbb{F}_p$ bezeichnet wird (siehe MFI1).
Erinnerung: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit Addition und Multiplikation erklärt durch:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Notation: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann schreiben wir $a^n := a * a * \cdots * a$, $a^{-n} := \left(\frac{p}{a}\right)$, $a^0 := 1$

2.6 Definiton

Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit Abbildungen:

$$+ : V \times V \to V \text{ (Addition)}$$

$$* : V \times V \to V \text{ (skalare Multiplikation)}$$

wird **K-Vektorraum** (oder **Vektorraum** über K) genannt, wenn:

V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe (Das neutrale Element heißt Nullvektor und wird mit 0 bezeichnet, das inverse Element zu $v \in V$ mit $-v$).

V2) Die skalare Multiplikation ist verträglich mit den Übrigen Verknüpfungen, d.h. für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, v \in V$ gilt:

$$(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v, \lambda * (v + w) = \lambda * v + \lambda * w$$

$$(\lambda * \mu) * v = \lambda * (\mu * v), 1 * v = v (1 \in K)$$

Achtung

+ bezeichnet hier sowohl die Addition im Körper, als auch die Addition im Vektorraum. Aus dem Kontext wird klar, was gemeint ist,**zum Beispiel:**

$$\begin{array}{ccccc} (\lambda & + & \mu) * v = \lambda * v & + & \mu * v \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{Addition} & & \text{Addition} & \\ & \text{im Körper} & & \text{im Vektorraum} & \end{array}$$

Analog wird $*$ für die Multiplikation im Körper und für die skalare Multiplikation verwendet und 0 kann für die neutrale Elemente bzgl. der Addition im Körper und im Vektorraum stehen.

2.7 Beispiel

Sei K ein Körper.

i) $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_i \in K \forall i = 1, ..., n \right\}$

Also die Menge aller Spalten der Höhe n mit Einträgen in K mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 & + & y_1 \\ & \vdots & \\ x_n & + & y_n \end{pmatrix}$$

,

$$\lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda * x_1 \\ \vdots \\ \lambda * x_n \end{pmatrix}$$

ist ein **K-Vektorraum**.

ii) Für eine nichtleere Menge A sei $K^A := \{f : A \to K\}$ die Menge aller Funktionen von A nach K. Dann wird K^A zu einem K-Vektorraum mit $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$, $(\lambda * f)(a) := \lambda * f(a)$, $a \in A$

2.8 Beispiel

Ein Datenblock aus n Bits kann als Vektor in $\mathbb{F}_2$ notiert werden, also Vektor der Länge n mit Einträgen$\{0, 1\}$. Aufgrund der Additionstabelle in (Beispiel 2.5) folgt:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ wobei } z_i = \begin{cases} 0 & , v_i = w_i \\ 1 & , v_i \neq w_i \end{cases}$$

2.9 Definition

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ nicht leer. Dann wird U ein **Untervektorraum (UVR)** von V genannt, falls

1. $\forall u, v \in U : u + v \in U$

2. $\forall \lambda \in K, u \in U : \lambda * u \in U$

2.10 Bemerkung

Sei U ein UVR von V. Schränkt man die Addition und die skalare Multiplikation auf $U \times U$ bze. $K \times U$ ein, so ist $(U, +, *)$ ein Vektorraum. Denn : Für jeden Vektor $u \in U$ gilt: $-u = (-1) * u \in U$ und $0 = u + (-u) \in U$.

2.11 Beispiel

i) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann sind

$$\zeta([a.b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ stetig}\}$$
$$\zeta^1([a.b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ stetig, differenzierbar}\}$$
$$\zeta^\infty([a.b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ belibig oft differenzierbar}\}$$

ii) Sei K ein Körper. Die Menge der **Polynomfunktionen**

$$Pol(K) = \left\{f : K \to K | f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0\lambda^0,\ \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_0, \cdots, a_n \in K\right\}$$

ist ein UVR des K^K.

Achtung:

Ist etwa $K = \mathbb{F}_2$, so gilt für die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2, \lambda \mapsto \lambda + \lambda^2 :$$

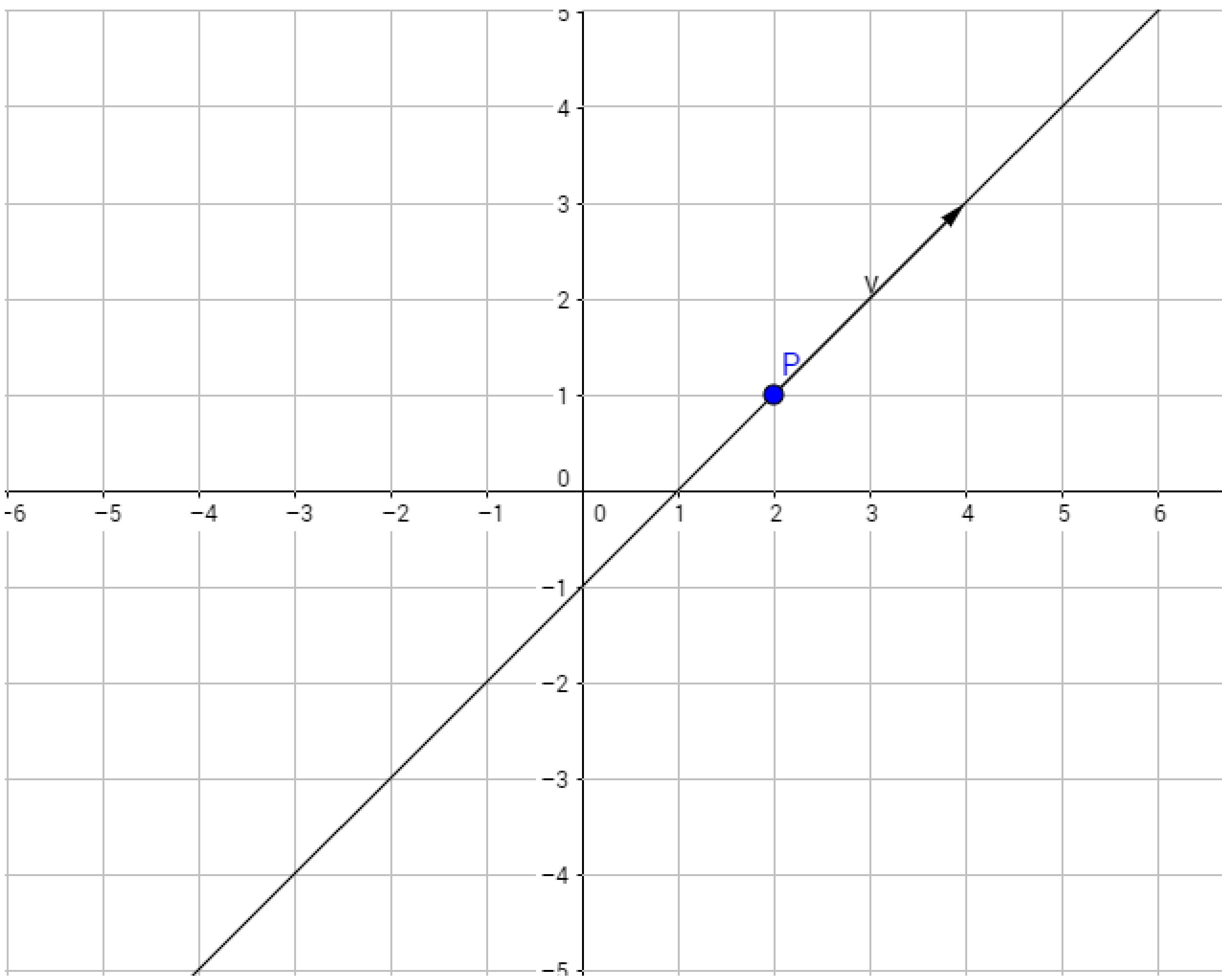
$f(0) = 0 + 0 = 0$
$f(1) = 1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$
Also ist $f : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ die Nullfunktion. Polynome mit verschiedenen Koeffizienten können in endlichen Körpern die gleiche Funktion darstellen.

2.12 Beispiel

Im $\mathbb{R}^n$ seinen Vektoren p und $v \neq 0$ gegeben. Eine Menge der Form

$$L(p, v) := \{p + \lambda * v | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

heißt **Gerade** mit **Aufpunkt** p und **Richtungsvektor** v.
Eine Gerade ist genau dann ein UVR des $\mathbb{R}^n$ falls $0 \in l(p, v)$.


P
v
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4
-5
-6

3 Lineare Unabhängigkeit und Basen

3.1 Definition

Sei V ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V.(d.h. $I \neq \emptyset$ ist eine Menge und für alle $i \in I$ gilt: $v_i \in V$)

i) v heißt **Linearkombination** von $(v_i)_{i\in I}$, falls es ein $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \cdots, i_r \in I$ und $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in K$ gibt mit

$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k}.$$

Die Menge aller Linearkombinationen von $(v_i)_{i\in I}$ wird mit $span((v_i)_{i\in I})$ notiert und heißt **Spann** von $(v_i)_{i\in I}$.
Konvention: $span(\emptyset) = \{0\}$

ii) $(v_i)_{i\in I}$ wird **Erzeugendensystem** von V genannt, falls $span((v_i)_{i\in I}) = V$

iii) V heißt **endlich erzeugt**, falls es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \cdots v_r \in V$so, dass $(v_1, \cdots, v_r)$ ein Erzeugendensystem von V ist.

3.2 Bemerkung

Sei $U := span((v_i)_{i\in I})$. Dann ist U ein UVR von V. Denn sind $u_1, u_2 \in U$, so existiert $r \in \mathbb{N}, i_1, \cdots, i_r \in I$ und $\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)} \in K(k = 1, \cdots, r)$ mit:

$$u_1 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(1)} v_{i_k}, u_2 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(2)} v_{i_k}$$

Somit folgt für alle $\mu_1, \mu_2 \in K$:

$$\mu_1 * u_1 + \mu_2 * u_2 = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{(\mu_1\lambda_k^{(1)} + \mu_2\lambda_k^{(2)})}_{\in K} * v_{i_k} \in U$$

3.3 Beispiel

i) Für einen Körper K ist K^n endlich erzeugt. Sei:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Position,}$$

i-te Einheitsvektor im K^n(i=1,...,n). Dann ist $(e_1, ..., e_n)$ ein Erzeugendensystem des K^n Denn für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i * e_i$$

ii) Der $\mathbb{R}$-VR der Polynomfunktion Pol($\mathbb{R}$) ist nicht endlich erzeugt. Denn seinen $p_1, ..., p_n \in Pol(\mathbb{R})$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n$ reelle Zahlen. Sei k der maximale Grad dieser n-Polynome. Dann hat

$$p := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$$

höchstens Grad k. Also ist $(p_1, ..., p_n)$ kein Erzeugendensystem von Pol($\mathbb{R}$).

3.4 Definiton

Sei V ein K-VR.

i) Eine endliche Familie von Vektoren $(v_1, ..., v_n)$ wird **Linear unabhängig** genannt, falls für alle $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \in V \Rightarrow \forall_{i=1,...,n} \lambda_i = 0 \in K$$

ii) Eine beliebige Familie von Vektoren $(v_i)_{i \in I}$ wird **linear unabhängig** genannt, falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist (d.h. für alle $J \subset i$ endlich gilt: $(v_j)_{j \in J}$ ist linear unabhängig)
Andernfalls heißt $(v_i)_{i \in I}$ **linear abhängig**.

iii) Unter einer **Basis** von V verstehen wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.

3.5 Bemerkung

Lineare Abhängigkeit bedeutet also, dass man aus der Familie $(v_i)_{i \in I}$ den Nullvektor durch eine nicht-triviale Linearkombination darstellen kann (d.h. durch eine Linearkombination, bei der nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind).
Die Familie

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ im } \mathbb{R}^3$$

ist also linear abhängig, denn

$$-2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.6 Beispiele

i) Die Familie $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ im K^n ist eine Basis. Denn seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \in K^n$$

Da $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, folgt $\lambda_i = 0 \in K$ für alle i=1,...,n. Also ist $(e_i, ..., e_n)$ linear unabhängig. Nach Beispiel 3.3 ist $(e_i, ..., e_n)$ auch ein Erzeugendensystem, also eine Basis.
$(e_i, ..., e_n)$ wird **kanonische Basis** in K^n genannt.

ii) Die Familie $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis im $\mathbb{R}^3$
Lineare Unabhängigkeit:

$$\lambda_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3 * \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Erzeugendensystem: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann $\lambda_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 *$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ für $\lambda_3 = \frac{x_3}{3}, \lambda_2 = \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{3}, \lambda_1 = x_1 - \frac{x_2}{2}$.

iii) Seien $q_n(t) = t^n, n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von Pol($\mathbb{R}$).
Lineare Unabhängigkeit: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Ist $\lambda_i \neq 0$ für ein $i = 0, ..., n$, dann hat

$$\left(\sum_{i=0}^{n} q_i\right)(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i t^i$$

höchstens n Nullstellen. Also ist $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i q_i \neq 0 \in Pol(\mathbb{R})$.
Erzeugendensystem: Sei $p \in Pol(\mathbb{R})$. Dann

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Also } p = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k q_k.$$

Zur Charakterisierung von Basen:

3.7 Satz

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Familie von Vektoren eines K-VR V. Dann sind äquivalent:

i) B ist Basis

ii) B ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem , dass heißt für jedes $r \in \{1, ..., n\}$ ist $(v_1, ..., v_{r-1}, v_{r+1}, ..., v_n)$ kein Erzeugendensystem, aber B ist ERzeugendensystem.

iii) Zu jedem Vektor $v \in V$ ex. eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit: $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$

iv) B ist unverlängerbar linear unabhängig, d.h. B ist linear unabhängig und für alle $v \in V$ ist $(v_1, ..., v_n, v)$ linear abhängig.

Beweis:

i) $\Rightarrow$ ii): Sei B ein ERzeugendensystem. Ist B verkürzbar, so gilt:

$$v_r = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{r-1} v_{r-1} + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n$$

Also:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{r-1} v_{r-1} + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n + (-1) * v_r = 0,$$

d.h. B ist nicht linear unabhängig und also keine Basis.

ii)$\Rightarrow$ *iii)* : Sei B ein Erzeugendensystem. Ist die Eindeutigkeitsbedingung nicht erfüllt, so gibt es ein $v \in V$ mit

$$v = \lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$

($\lambda_r \neq \mu_r$ für mindestens ein r).
Für ein solches r gilt:

$$v_r = \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\lambda_r - \mu_r} v_1 + ... + \frac{\mu_{r-1} - \lambda_{r-1}}{\lambda_r - \mu_r} v_{r-1} + \frac{\mu_{r+1} - \lambda_{r+1}}{\lambda_r - \mu_r} v_{r+1} + ... + \frac{\mu_n - \lambda_n}{\lambda_r - \mu_r} v_n$$

Also ist B verkürzbar.

iii) $\Rightarrow$ **iv):** Aus iii) mit $v = 0 \in V$ folgt, direkt die lineare Unabhängigkeit. Sei $v \in V$. Dann hat v die Darstellung:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Also

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 v_i + (-1) * v = 0,$$

d.h $(v_1, ..., v_n, v)$ ist linear abhängig.

iv) $\Rightarrow$ **i):** Aus iv) folgt: Für jedes $v \in V$ existieren $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda v = 0,$$

wobei nicht alle $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda$ gleich 0 sind. Da B linear unabhängig ist, muss gelten $\lambda \neq 0$. Also:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\lambda_1}{\lambda} v_i,$$

d.h. B ist auch ein Erzeugendensystem.□

3.8 Folgerung

Jeder endlich erzeugte K-VR hat eine Basis.

Beweis:

Von einem endlichen Erzeugendensystem nehme man so lange Vektoren weg, bis es unverkürzbar ist. □

Konvention:

Die leere Familie von Vektoren ist linear unabhängig, also ist sie Basis von $V = \{0\}$.

Frage:

Kann ein endlich erzeugter Vektorraum Basen unterschiedlicher Länge(also mit unterschiedlich vielen Vektoren) haben?

3.9 Lemma (Austauschlemma)

Sei V ein K-VR mit Basis B= $(v_1, ..., v_n)$ und $w = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \in V$.
Falls $\lambda_k \neq 0$, so ist $(v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ =:B' ebenfalls eine Basis von V.

Beweis:

Durch Umnummerierung kann man erreichen, dass $k = 1$.

- B'= $(w, v_2, ..., v_n)$ ist Erzeugendensystem:
  Sei $v \in V$. Dann: $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i, \mu_1, ..., \mu_n \in K$. Da $\lambda_1 \neq 0$, folgt:

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i$$

  Somit:

$$v = \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \sum_{i=2}^{n} (\mu_i - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \lambda_i) v_i$$

- B' ist linear unabhängig: Sei

$$0 = \mu * w + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i$$

  Da $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, folgt:

$$0 = \mu \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\mu_i + \mu \lambda_i) v_i$$

  Da B linear unabhängig ist, folgt:$\mu\lambda_1 = 0$ und $(\mu_i + \mu\lambda_i) = 0$ für $i = 2, ..., n$.
  Da $\lambda_1 \neq 0$, gilt $\mu = 0$ und $\mu_i = 0$ für $i = 2, ..., n$.$\square$

3.10 Satz

Sei V ein K-VR mit Basis B= $(v_1, ..., v_r)$ und $(w_1, ..., w_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann:

i) $n \leq r$

ii) Es gibt Indizes $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., r\}$, sodass die Familie B', die entsteht, wenn man in B $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$ durch $w_1, ..., w_n$ ersetzt weiterhin eine Basis von V ist.

Beweis:

Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$

- $n = 0$: Hier ist nichts zu zeigen
- $(n-1) \rightsquigarrow n$: Da auch $(w_1, ..., w_{n-1})$ linear unabhängig ist, ergibt die Induktionsannahme, dass $(n-1) \leq r$ und dass nach geeigneter Umnummerierung der Basis B $(w_1, ..., w_{n-1}, v_n, ..., v_r)$ Basis von V ist (Umnummerierung mit $i_1 = 1, ..., i_{n-1} = n-1$).
  Um $n \leq r$ zu zeigen, genügt es, $n - 1 = r$ zu einem Widerspruch zu führen. In diesem Fall wäre $(w_1, ..., w_{n-1})$ eine Basis von V im Widerspruch zu Satz 3.7 iv).
  Ferne hat w_n die Darstellung
  $$w_n = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \lambda_n v_n + ... + \lambda_r v_r$$
  Da $(w_1, ..., w_n)$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_k \neq 0$ für ein $k = n.n+1, ..., r$. Also kann nach dem Austauschlemma v_k durch w_n ersetzt werden, ohne dass die Basiseigenschaft verloren geht.□

3.11 Folgerung

Sei V ein K-VR mit Basen $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_r)$. Dann: $n = r$.

Beweis

Der Austauschsatz liefert: $n \leq r$ und $r \leq n$. □

3.12 Folgerung

Hat ein K-VR eine endliche Basis, so sind alle seine Basen endlich.

Beweis

Sei $(v_1, ..., v_r)$ eine endliche Basis und $(w_i)_{i \in I}$ eine unendliche Basis. Dann existiert $i_1, ..., i_{r+1} \in I$ mit $(w_{i_1}, ..., w_{i_{r+1}})$ linear unabhängig ist. Dies widerspricht dem Austauschsatz.□

Also ist der folgende Dimensionsbegriff wohldefiniert.

3.13 Definition

Ist V ein K-VR, so definieren wir die **Dimension** von V durch:

$$dimV = \begin{cases} \infty & \text{, falls V endlich erzeugt} \\ r & \text{, falls V Basis der Länge } r \in \mathbb{N}_0 \text{ hat.} \end{cases}$$

Hierbei sei die **Länge** einer endlichen Basis die Anzahl von Vektoren in der Basis. Man schreibt auch $dim_K V$ statt $dimV$, falls der Körper aus dem Kontext nicht klar ist.

3.14 Beispiel

i) $dim K^n = n$

ii) $dim Pol(\mathbb{R}) = \infty$

3.15 Beispiel (und Erinnerung)

Auf dem $\mathbb{R}^2$ führen wir folgende Multiplikation ein:

$$* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 :$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 y_1 & - & x_2 y_2 \\ x_1 y_2 & + & x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Mit diesem Beispiel wird $(\mathbb{R}, +, *)$ zu einem Körper, dem Körper der **komplexen Zahlen**, $\mathbb{C}$. Das neutrale Element bzgl.$*$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man notiert daher:

$$1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat dann eine eindeutige Darstellung der Form:

$$z = \lambda_1 * 1 + \lambda_2 * i, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

λ_1 heißt **Realteil** von $z(Re(z))$, λ_2 **Imaginärteil** von $z(Im(z))$. i wird **imaginäre Einheit** genannt. Es gilt:

$$i^2 = i * i = -1 \in \mathbb{C}$$

Die reellen Zahlen können als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden, indem man $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $\lambda * 1 \in \mathbb{C}$ identifiziert. (Die reellen Zahlen findet man also auf der x-Achse). Man schreibt dann: $z = \lambda_1 + \lambda_2 * i$ als Kurzform für $z = \lambda_1 * 1 + \lambda_2 * i(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$ Nach Beispiel 3.14 gilt:

$$dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$$

$$dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$$

Einige weiter Folgerungen des Austauschsatzes:

3.16 Folgerung(Basisergänzungssatz)

Sei V ein endlich erzeugter K-VR und $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig. Dann existiert $r \in \mathbb{N}_0$ und $v_{n+1}, ..., v_{n+r} \in V$, sodass $(v_1, ..., v_{n+r})$ eine Basis von V ist.

3.17 Folgerung

Ist U ein UVR eines endlich erzeugten K-VR V. Dann:

i) $dimU \leq dimV$

ii) $dimU = dimV \Rightarrow U = V$

4 Matrizen

Sei K ein Körper. Wir bezeichnen mit $k^{m \times n}$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K, also der Rechteckschemata der Form:

$$A = (a_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in K.$$

Mit Addition:

$$(a_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n} + (b_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n} := (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n}$$

und der skalaren Multiplikation:

$$\lambda * (a_{ij}) = (\lambda * a_{ij}), \lambda \in K$$

wird $K^{m \times n}$ zu einem K-VR.

4.1 Definition

Sei $A \in K^{m \times n}$ mit Zeilen:

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, ..., a_m := \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

(als Spaltenvektor geschrieben). Dann wird $Z(A) := span(a_1, ..., a_m) \subset K^n$ der **Zeilenraum** von A genannt.

4.2 Algorithmus

Input: $A \in K^{m \times n}$

Output: Basis B von $Z(A)$

- **1.:** Bringe A auf Zeilenstufenform mit Algorithmus 1.6 und bezeichne die resultierende Matrix mit $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n}$
- **2.:** Bestimme den Zeilenrang r von $\tilde{A}$ (also die Anzahl von Zeilen von $\tilde{A}$, die nicht nur Nulleinträge haben).

3.: Setze für $i = 1, ..., r$

$$b_i = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{i1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{in} \end{pmatrix} \text{(i-te Zeile von } \tilde{A} \text{ als Spaltenvektor)}$$

und gebe $B = (b_1, ..., b_r)$ aus.

Beweis der Korrektheit von Algorithmus 4.2

i) Elementare Zeilenumformungen ändern den Zeilenraum nicht, d.h. $Z(A) = Z(\tilde{A})$. Ist etwa $v \in Z(A)$ und A_1 gehe aus A hervor, indem das λ-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addiert wird. Dann:

$$v = \sum_{k=1}^{m} \mu_k a_k = \left(\sum_{k \in \{1,...,m\} \setminus \{i,j\}} \mu_k a_k \right) + \mu_i(a_i + \lambda a_j) + (\mu_i - \lambda\mu_i)a_j$$

Also $v \in Z(A_1)$, d.h. $Z(A) \subset Z(A_1)$
Analog:$Z(A_1) \subset Z(A)$
klar: Zeilenvertauschungen ändern den Zeilenraum nicht.

ii) B ist Erzeugendensystem von $Z(A)$:
Dies folgt aus i), da B ein Erzeugendensystem von $Z(\tilde{A})$ (Weglassen der Nullzeilen ändert den Spann nicht).

iii) **B** ist linear unabhängig:
Sei $\tilde{a}_{i,j_i}$ der i-te Pivot von $\tilde{A}$. Dann:

$$\tilde{a}_{k,j_1} = 0 \forall k > i.$$

Seien $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ mit

$$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r = 0 \in K^n$$

Betrachtung des j_1-ten Eintrags führt zu

$$\lambda_1 \underbrace{\tilde{a}_{1,j_1}}_{\neq 0} + \lambda_2 \underbrace{\tilde{a}_{2,j_1}}_{=0} + ... + \lambda_r \underbrace{\tilde{a}_{r,j_1}}_{=0} = 0 \in K$$

Also:$\lambda_1 = 0$. Iteriert man dies, folgt leicht:$\lambda_k = 0 \forall k = 1, ..., r$. $\square$

4.3 Bemerkung

Die Algorithmen 1.3, 1.6, 1.8 behalten ihre Gültigkeit, falls man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper K ersetzt. Spezielle Eigenschaften wurden dort nicht verwendet.

4.4 Bemerkung

Man nennt die Dimension des Zeilenraums einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ den **Zeilenrang** von A. Für Matrizen in Zeilenstufenform stimmt dies mit der Begriffsbildung aus Definition 1.2 überein. Die Zahl r im Output von Algorithmus 1.8 ist also der Zeilenrang von A, da elementare Zeilenumformungen den Zeilenrang nicht ändern.

4.5 Beispiel

Sei

$$U = span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^5$$

Wir betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Algorithmus 1.6 liefert(s. Beispiel 1.7):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $dim(Z(A)) = 3$ und

$$U = span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}\right) \text{ist Basis von } Z(A).$$

4.6 Definition

Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{jk}) \in K^{m \times r}$ (d.h. A hat so viele Spalten, wie B Zeilen). Dann ist das Produkt von A und B definiert durch

$$A \cdot B := C \in K^{m \times r}, C = (c_{ik})_{i=1,\ldots,m,k=1,\ldots,r}$$

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$A \cdot B$ hat also so viele Zeilen wie A und so viele Spalten wie B.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & b_{1k} & \cdot \\ \cdot & b_{2k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_{rk} & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ik} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

4.7 Bemerkung

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, selbst dann nicht, wenn AB und BA definiert werden können (d.h. $A \in K^{m\times n}, b \in K^{n\times m}$).

Gegenbeispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen mit E_n die n-reihige Einheitsmatrix, d.h.:

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

Die folgenden Rechenregeln können elementar überprüft werden:

4.8 Satz

Seien $A, A' \in K^{m\times n}, B, B' \in K^{n\times r}, C \in K^{r\times s}$ und $\lambda \in K$, dann:

i) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ und $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$ (Distributivgesetze)

ii) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot)$ (Assoziativgesetz)

iii) $E_m \cdot A = A \cdot E_n$

iv) $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$

4.9 Bemerkung

i) Man schreibt auch AB, statt $A \cdot B$

ii) Eine Matrix mit n Zeilen und 1 Spalte ist ein Spaltenvektor der Höhe n. Man schreibt K^n, statt $K^n \times 1$. Als Spezialfall von Definition 4.6 erhält man:

$$A * x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

Analog werden Elemente von $K^{1\times n}$ werden **Zeilenvektoren genannt**

4.10 Satz

Sei $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Dann sind äquivalent:

i) Lös$(A, b) \neq \emptyset$, d.h. es eine Lösung zu $Ax = b$

ii) Zeilenrang(A) = Zeilenrang((A,b))

Beweis

Wir verwenden den Algorithmus 1.8 und Bemerkung 4.3 und 4.4.
Sei r := Zeilenrang($\tilde{A}$). Da Zeilenrang(A) = Zeilenrang ((A,b)) $\Leftrightarrow$ Zeilenrang($\tilde{A}$) = Zeilenrang(($\tilde{A}, \tilde{b}$)) $\Leftrightarrow$ Die Gleichungen $r + 1, ..., m$ von $\tilde{A}x = \tilde{b}$ lauten $0 = 0 \Leftrightarrow$ Algorithmus 1.8 liefert mindestens eine Lösung zu $Ax = b$.

4.11 Satz

Sei $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Dann sind äquivalent:

i) Lös(A,b) hat höchstens ein Element, d.h. es gibt höchstens eine Lösung $x \in K^n$ zu $Ax = b$

ii) Zeilenrang(A)=n

Beweis

Nach Bemerkung 4.4 folgt: Zeilenrang(A)= n $\Leftrightarrow$ Algorithmus 1.8 liefert „keine Lösung“ oder Bijektion $\Phi_{A,B} : \mathbb{R}^{n-r} \to$ Lös$(A, b) \Rightarrow$ Lös(A, b) höchstens 1 Element.

4.12 Definition

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ wird **invertierbar** genannt, falls ein $B \in K^{n\times m}$ existiert mit $B \cdot A = E_n$ Wir bezeichnen mit $GL(n, k)$ die Menge aller invertierbaren Matrizen in $k^{m\times n}$ (GL $\Leftrightarrow$ „general linear“).

4.13 Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

i) $\forall b \in K^n Ax = b$ hat genau eine Lösung $x \in K^n$

ii) $\text{Lös}(A, 0) = \{0\}$

iii) Zeilenrang(A) = n

iv) Die Spalten von A bilden eine Basis in K^n

v) A ist invertierbar, d.h. ex. $B \in K^{n \times n}$ mit $B \cdot \cdot A = E_m$
In diesem Fall gilt: B ist eindeutig bestimmt und $B \in GL(n, K)$. Man nennt B die **Inverse** von A und schreibt A^{-1} statt B.

Zur Vorbereitung:

4.14 Definition

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$. Dann wird die durch :

$$A^T = (a'_{ji})_{j=1,\ldots,n, i=1,\ldots,m}, (a_{ij}) =: (a'_{ji})$$

definierte Matrix $\in K^{n \times m}$ die **Transponierte** von A genannt. Hier wird also die i-te Zeile von A zur i-ten Spalte von A^T.

Man prüft leicht: $\forall A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times r}$

$$(A^T)^T = A \text{ und } (AB)^T = B^T A^T$$

4.15 Bemerkung

Unter dem Spaltenraum von $A \in K^{m \times n}$ versteht man den Spalten einer Matrix aufgespannten U-VR von K^m. Dies ist nach Definition identisch mit dem Zeilenraum von A^T. Seine Dimension wird **Spaltenrang** von A genannt.

Bedingung iv) in Satz 4.13 ist äquivalent zu
iv') Spaltenrang(A)=n
Später sehen wir: Es gilt stets: Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A).

Beweis von Satz 4.13: Wir zeigen $iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow v) \Rightarrow iii)$ und $i) \Leftrightarrow iv)$

iii) $\Rightarrow$ ii) Nach Satz 4.11 hat Lös(A,0) höchstens ein Element. Da stets $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, folgt: Lös(A,0)={0}

ii) $\Rightarrow$ iv) Sei $a_{\cdot i}$ die i-te Spalte von A, $x \in K^n$.
Dann $Ax = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{\cdot i}$
ii)
$Leftrightarrow$ Lös$(A, b) = \{0\} \Leftrightarrow Ax = 0$ gilt nur für $x_1 = ... = x_n = 0$
$\Leftrightarrow x_1 a_{\cdot 1} + ... + x_n a_{\cdot n} = 0$ nur für $x_1 = ... = x_n = 0$
$\Leftrightarrow a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}$ sind linear unabhängig.
Da alle Basen des K^n die Länge n haben (Folgerung 3.11) ist $(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n})$ nach Satz 3.10 unverlängerbar linear unabhängig, also eine Basis von K^n (Satz 3.7)

iv) $\Leftrightarrow$ i) Da $Ax = b \Leftrightarrow x_1 a_{\cdot 1} + \cdots + x_n a_{\cdot n} = b$, liefert Satz 3.7 die Äquivalenz von iv) und i) (vgl. Folien).

iv) $\Rightarrow$ v) : Nach Bem 4.13 ist dann Zeilenrang$(A^T) = n$ und so ist auch Zeilenrang$(A^T|b) = n \forall b \in K^n$.
Satz 4.10 liefert: $\forall b \in K^n$ existiert eine Lösung $x \in K^n$ zu $A^T x = b$. Für $i = 1, ..., n$ wähle $b := e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Zeile. Dann existieren $c_{\cdot i} \in K^n$ mit $A^T c_{\cdot i} = e_i$. Die Matrix C mit Spalten $c_{\cdot i}$ erfüllt dann

$$A^T * C = E_n$$

Sei $B := C^T$, dann gilt:$B \cdot A = ((B \cdot A)^T)^T = ((C^T \cdot A)^T)^T = (A^T \cdot C)^T = (E_n)^T = E_n \Rightarrow$ A ist invertierbar.

v) $\Rightarrow$ iii) Sei C wie oben, d.h. $C = B^T$, dann: $A^T C = A^T b^T = (BA)^T = E_n^T = E_n$

$$\begin{array}{ccc} (A^T C)x & = & E_n x \\ \| & & \| \\ A^T(Cx) & = & x \\ & & \Downarrow \end{array}$$

$\forall x \in K^n$ ist darstellbar als lineare Kombination von Spalten der A^T (mit Koeffizienten(Cx)). Somit erzeugen die Spalten von A^T und also die Zeilen von A den K^n. Da $dim K^n = n$ und $A n$ Zeilen hat, bilden die Zeilen von A ein unverkürzbares Erzeugendensystem, also eine Basis von K^n (Satz 3.7). Somit ist Zeilenrang(A)=n.

Zusatz: Sei $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, d.h. $\exists B \in K^{n\times n}$ mit $B \cdot A = E_n$. Wir zeigen, dass B eindeutig bestimmt und invertierbar ist. Sei $B \cdot A = E_n$. Dann gilt für alle $x \in K^n$: $(BA)x = E_n x \Leftrightarrow B(Ax) = x$. Also erzeugen die Spalten von B den K^n. DA $dim K^n = n$ und B n Spaten hat, bilden die Spalten von B ein unverkürzbares Erzeugendensystem, und also eine Basis von K^n. Nach Satz 4.13(iv)$\Leftrightarrow$ v)) folgt, dass B invertierbar ist. Die Eindeutigkeit von B ergibt sich aus Satz 2.3 und dem folgenden Satz:

4.16 Satz

$GL(n, k)$ bildet versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

Beweis

- Seien $A, B \in GL(n.K)$. Dann existieren $A', B' \in GL(n, K)$ mit $A'A = E_n, B'B = E_n$. Ferner, $(B'A')AB = B' \underbrace{(A'A)}_{=E_n} B = B'B = E_n$. Also: $AB \in GL(n, K)$.
- Assoziativität: Folgt aus Satz 4.8.
- Neutrales Element: E_n
- Inverses Element: $A \in GL(n, K) \Rightarrow \exists A' \in GL(n, K)$ mit $A'A = E_n \Rightarrow A'$ ist Inverse zu A. $\square$

4.17 Bemerkung

i) Ist A invertierbar, so gilt nach Satz 2.3: $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$

ii) Ist A invertierbar, so ist auch A^T invertierbar. Und es gilt: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Denn: $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = (E_n)^T = E_n$

Zur Berechnung der Inversen:

Nach Bem 4.17 i) und Satz 4.13 gilt: Ist A invertierbar, so $\exists A^{-1}$ mit $AA^{-1} = E_n$. Sei $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$, dann für jedes $i = 1, ..., n$ ist $x_{\cdot i} := \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ die eindeutige Lösung zu $Ax = e_i$.

Man geht also wie folgt vor:

i) Betrachte die erweiterte $n \times (2n)$ Matrix $(A| \underbrace{E_n}_{e_1 \dots e_n})$ und bringe diese mit Algorithmus 1.6 auf Zeilenstufenform: $(A|E_n) \rightsquigarrow (\tilde{A}|\tilde{B})$

ii) Ist Zeilenrang von $\tilde{A} < n$ (d.h. hat $\tilde{A}$ eine Nullzeile), so ist A nicht invertierbar.

iii) Andernfalls hat $(\tilde{A}|\tilde{B})$ die Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{11} & \cdots & \vdots & \\ & \tilde{a}_{22} & \vdots & \tilde{B} \\ 0 & \ddots & \tilde{a}_{nn} & \end{array}\right)\Bigg|\text{mit } a_{ii} \neq 0 \forall \tilde{i} = 1, ..., n.$$

iv) Elimiiere sukzessive für $i = n, ..., 1$ durch Addition eines geeigneten Vielfaches der i-ten Zeile zu den darüberliegenden Zeilen die Einträge oberhalb von $\tilde{a_{ii}}$. Dies führt zu:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \cdot \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{11} & & 0 & \\ & \ddots & & \tilde{\tilde{B}} \\ 0 & & \tilde{a}_{nn} & \end{array}\right)$$

---

iv) Dann erhält man A^{-1} indem man die i-te Zeile von $\tilde{\tilde{B}}$ mit $a_{ii}^{\tilde{-1}}$ multipliziert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{11} & & 0 & \\ & \ddots & & \tilde{\tilde{B}} \\ 0 & & \tilde{a}_{nn} & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & A^{-1} \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

Fazit: $(A|E_n) \underbrace{\rightsquigarrow}_{\text{elementare Zeilenumformung}} (E_n|A^{-1})$

4.18 Beispiel

Zu berechnen ist (im Fall der Existenz) A^{-1} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.19 Bemerkung

Üblicherweise betrachtet man drei Typen von elementaren Zeilenumformungen einer Matrix $A \in K^{m \times n}$:

Typ I: Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in K \backslash \{0\}$

Typ II: Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile ($i \neq j, \lambda \in K \backslash \{0\}$)

Typ III: Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile ($i \neq j$)

Das Verfahren zur Invertierung von Matrizen zeigt:
Jede Matrix $A \in GL(n, K)$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen vom Typ I-III in die n-reihige Einheitsmatrix E_n überführt werden.

4.20 Bemerkung

Ist $A \in GL(n, K)$ und ist A^{-1} bereits berechnet, so kann für jede rechte Seite $b \in K^n$ die eindeutige Lösung x zu $A * x = b$ durch Matrixmultiplikation berechnet werden:

$$x = (A^{-1} * A)x = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}b)$$

5 Lineare Abbildungen

5.1 Definition

Eine Abbildung $F : V \to W$ zwischen $K-VR\ V$ und W wird **linear** oder (Vektorraum-) **Homomorphismus** genannt, falls

i) $\forall v \in V, \lambda \in K : F(\lambda v) = \lambda * F(v)$

ii) $\forall v_1, v_2 \in V : F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$

Ist F bijektiv, so wird F ein **Isomorphismus** genannt.

5.2 Beispiel

i) Ist $A \in K^{m\times n}$, so ist $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto A * x$ linear. Es gilt: $F_A(e_j) = A * e_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = 1, ..., n$, d.h.
die Spalten von A sind die Bilder der Einheitsvektoren unter F_A.
Falls $m = n$, so folgt leicht aus Satz 4.13:
F_A bijektiv $\Leftrightarrow$ F_A injektiv $\Leftrightarrow$ F_A surjektiv.

ii) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ($-\infty < a < b < \infty$). Dann sind:

I: $C([a, b]) \to C^1([a, b]) : f \mapsto (x \mapsto \int_a^x f(y)dy)$

D: $C^1([a, b]) \to C([a, b]) : f \mapsto f'$

linear. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt: $D \circ I = id_{C([a,b])}$, sodass I injektiv und D surjektiv ist. Da für konstante Funktionen $G \neq 0$ gilt: $(I \circ D)(g) = 0$ sind weder I noch D Isomorphismen.

5.3 Beispiel

Ein Datenblock bestehend aus n Bits soll übertragen werden. Zur Fehlererkennung bei der Datenübertragung wird bei der Paritätsprüfung ein weiteres Bit, das sogenannte Paritätsbit an den Datenblock angehängt (vor der Datenübertragung). Es ist:

1 , falls der Datenblock eine gerade Zahl von Einsen hat,

0 , sonst.

Dieses Vorgehen führt zu einer linearen Abbildung:

$$F : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^{n+1} : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 + x_2 + ... + x_n \end{pmatrix}$$

Dann hat $F(x)$ stets eine gerade Zahl von Einsen, sodass auf jeden Fall ein Übertragungsfehler vorliegt, wenn der empfangene Datenblock eine ungerade Zahl von Einsen hat.
In Matrixschreibweise gilt:$F = F_A$ mit $A = \begin{pmatrix} & E_n & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

5.4 sehr einfacher Satz

Sei $F : V \to W$ linear. DAnn:

i) $F(0) = 0$

ii) $F(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i)$ $(\lambda_1, ..., \lambda_n \in K, v_1, ..., v_n \in V)$

iii) Sind $V' \subset V, W' \subset W$ UVR, so sind $F(V') \subset W$ und $F^{-1}(W') \subset V$ UVR.

iv) Ist $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig in V, so ist $(F(v_i))_{i \in I}$ linear abhängig in W.

v) Ist F ein Isomorphismus, so ist F^-1 linear.

vi) Ist $G : W \to U$ linear, so ist $G \circ F$ linear.

Beweis

i)-iv),vi) sind eine gut Übung.

v) Seien $w, w' \in W, \lambda, \mu \in K$. Seien $v := F^{-1}(w), v' := F^{-1}(w')$. Dann: $\lambda w + \mu w' = \lambda F(v) + \mu F(v') = F(\lambda v + \mu v')$
Anwenden der Umkehrfunktion liefert:
$F^{-1}(\lambda w + \mu w') = \lambda v + \mu v' = \lambda F^{-1}(w) + \mu F^{-1}(w')\square$

5.5 Definition (Endomorphismus und Automorphismus

Ist $F : V \to V$ linear, so wird F ein **Endomorphismus** genannt. Bijektive Endomorphismen heißen **Automorphismen**.

5.6 Folgerung

Sei V ein K-VR und $Aut(V)$ die Menge alle Automorphismen auf dem V. Dann wird $Aut(V)$ mit der Hintereinanderausführung zu einer Gruppe.

5.7 Definition Bild, Kern, Rang und Defekt

Sei $F : V \to W$ linear. Dann heißt $Im(F) := F(V)$ das **Bild** von F und $Ker(F) := F^{-1}(\{0\})$ der **Kern** von F.
Beides sind UVR nach Satz 5.4. Man nennt $dim(Im(F))$ den **Rang** von F und $dim(Ker(F))$ den **Defekt** von F.