

INTRODUZIONE

Geometria dell'informazione in fisica

La geometria dell'informazione [1, 2] studia la struttura geometrico-differenziale delle distribuzioni di probabilità. La metrica di informazione di Fisher,

$$g_{ij} = \int \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_j} p(x|\theta) dx, \quad (1)$$

definisce una geometria riemanniana sullo spazio delle distribuzioni di probabilità. La curvatura della geometria dell'informazione misura la non-linearità di una famiglia di modelli.

La geometria si è rivelata fondamentale in fisica: la curvatura dello spaziotempo codifica la gravità [5], la curvatura di gauge determina le forze nucleari [6], l'hessiano dell'entropia definisce la stabilità [4], e la metrica di Fisher governa la criticalità quantistica [3]. Sorge una domanda naturale: *La curvatura di un landscape di emergenza può essere connessa a strutture fondamentali della teoria dei numeri?*

Teoria dei numeri e meccanica quantistica

L'ipotesi di Riemann [7] asserisce che tutti gli zeri non banali di $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ giacciono sulla retta critica $\text{Re}(s) = 1/2$. La verifica numerica si estende a trilioni di zeri [9], ma una dimostrazione resta elusiva.

Berry e Keating [10, 11] hanno congetturato che gli zeri corrispondano ad autovalori di un hamiltoniano quantistico sconosciuto

$$\hat{H}_{\text{BK}} = \frac{1}{2} (\hat{p} \ln \hat{x} + \ln \hat{x} \hat{p}) + \text{correzioni}. \quad (2)$$

Connes [12] ha proposto un approccio di geometria non commutativa in cui lo spettro codifica gli zeri di Riemann. Sierra e Townsend [13] hanno connesso questo all'AdS/CFT.

La nostra proposta collega questi framework: l'operatore di emergenza \mathcal{E} e la sua curvatura K_{gen} codificano dati spettrali che corrispondono agli zeri della zeta.

La connessione D-ND

Dalla fondazione D-ND (Paper A), l'operatore di curvatura è:

$$C = \int d^4x K_{\text{gen}}(x, t) |x\rangle \langle x| \quad (3)$$

dove $K_{\text{gen}}(x, t) = \nabla \cdot (J(x, t) \otimes F(x, t))$ è la curvatura informazionale generalizzata.

Congettura centrale: i valori critici di K_{gen} (dove $K_{\text{gen}} = K_c$) corrispondono a transizioni di fase nel landscape di emergenza che si allineano con gli zeri di ζ sulla retta critica.

Contributi

1. Definizione rigorosa di K_{gen} e sua relazione con la metrica di Fisher e la curvatura di Ricci.
2. Formulazione della congettura D-ND/zeta: $K_{\text{gen}}(x, t) = K_c \Leftrightarrow \zeta(1/2 + it) = 0$.
3. Classificazione topologica tramite la carica topologica di Gauss–Bonnet χ_{DND} , con calcolo esplicito in 2D.
4. Interpretazione spettrale: derivazione di ζ dai dati spettrali D-ND.
5. Connessione di $\Omega_{\text{NT}} = 2\pi i$ al numero di avvolgimento.
6. Struttura a curva ellittica degli stati di emergenza stabili.
7. Evidenza numerica da tre test computazionali contro i primi 100 zeri della zeta, che rivela una struttura a due scale.
8. Criteri esplicativi di falsificabilità.

CURVATURA INFORMATIZIONALE NEL FRAMEWORK D-ND

Curvatura informazionale generalizzata

Sia M il landscape di emergenza—una varietà liscia parametrizzata dallo spazio delle configurazioni e dal tempo. Definiamo:

Flusso informazionale: la corrente di probabilità

$$J(x, t) = \text{Im} [\psi^*(x, t) \nabla \psi(x, t)] \quad (4)$$

Campo di forze generalizzato: il gradiente del potenziale efficace

$$F(x, t) = -\nabla V_{\text{eff}}(x, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla (\log \rho(x, t)) \quad (5)$$

Curvatura informazionale generalizzata:

$$K_{\text{gen}}(x, t) = \nabla_M \cdot (J(x, t) \otimes F(x, t)) \quad (6)$$

In rappresentazione di coordinate con metrica g :

$$K_{\text{gen}} = \nabla_\mu (J^\mu F^\nu g_{\nu\alpha} n^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} (J \otimes F)^\mu{}_\nu n^\nu) \quad (7)$$

dove n^ν è la normale unitaria agli insiemi di livello del potenziale di emergenza. Nel caso semplificato 1D, questo si riduce a $K_{\text{gen}} = \partial_x (J \cdot F)$.

Relazione con la metrica di Fisher e la curvatura di Ricci

La metrica di informazione di Fisher su $\{p(x|\theta)\}$ è:

$$g_{ij}(\theta) = \mathbb{E}_p \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p}{\partial \theta_j} \right] \quad (8)$$

Proposition 1 (Informale). *La curvatura informazionale generalizzata K_{gen} è legata alla curvatura di Ricci della metrica di Fisher da $K_{gen} = \mathcal{R} + (\text{termini di drift geometrico})$ per una scelta opportuna della metrica su M .*

K_{gen} come generalizzazione della curvatura di Fisher

Proposition 2 (Generalizzazione di K_{gen}). *La curvatura informazionale generalizzata K_{gen} estende la curvatura indotta dalla metrica di Fisher \mathcal{R}_F all'intero landscape di emergenza:*

$$K_{gen} = \mathcal{R}_F + \frac{1}{Z} \nabla \cdot (J \otimes F) \quad (9)$$

dove Z è una costante di normalizzazione che garantisce la coerenza dimensionale.

CLASSIFICAZIONE TOPOLOGICA VIA GAUSS–BONNET

Carica topologica come integrale della curvatura

Definiamo la carica topologica D-ND:

$$\chi_{DND} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial M} K_{gen} dA \quad (10)$$

Questa è una formula di tipo Gauss–Bonnet. Il teorema classico di Gauss–Bonnet afferma: per una varietà riemanniana compatta bidimensionale M senza bordo,

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M) \quad (11)$$

dove K è la curvatura gaussiana e $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero.

Quantizzazione: $\chi_{\text{DND}} \in \mathbb{Z}$

Congettura 3 (Quantizzazione topologica). *Se K_{gen} deriva dall'operatore di emergenza \mathcal{E} con spettro discreto $\{\lambda_k\}$, allora $\chi_{\text{DND}} \in \mathbb{Z}$.*

Motivazione: per il teorema dell'indice di Atiyah–Singer [16], la carica totale è:

$$\chi_{\text{DND}} = \sum_{k=1}^M n_k \quad (12)$$

dove n_k è il grado topologico associato all'autovalore λ_k .

Calcolo esplicito in 2D

Abbiamo calcolato χ_{DND} sul landscape di emergenza D-ND a doppia buca $V(Z) = Z^2(1-Z)^2 + \lambda\theta_{\text{NT}}Z(1-Z)$ su una griglia 200×200 , con accoppiamento $\lambda \in [0.1, 0.9]$.

Risultati (Figg. ??–??):

- χ_{DND} resta entro 0.043 dall'intero 0 su tutti i 100 passi temporali.
- Il 100% dei campioni rientra nella distanza 0.1 da un intero.
- Distanza media dall'intero più vicino: 0.027.

L'integrale di volume quasi nullo indica una distribuzione simmetrica della curvatura (le regioni positive e negative si cancellano), coerente con un landscape ricco di selle prodotto dal potenziale a doppia buca.

Estensione a dimensioni superiori

Il teorema di Chern–Gauss–Bonnet si applica a varietà compatte di dimensione pari. Per varietà di dimensione dispari (inclusa la 3D), la caratteristica di Eulero via Gauss–Bonnet è identicamente nulla.

Per una varietà di emergenza 4D M_4 :

$$\chi(M_4) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{M_4} \left(|W|^2 - 2|E|^2 + \frac{R^2}{6} \right) \sqrt{g} d^4x \quad (13)$$

dove W è il tensore di Weyl, E il tensore di Ricci a traccia nulla, e R la curvatura scalare.

In alternativa, per una varietà 3D parametrizzata da (x, y, t) , si studia la famiglia di sezioni 2D $M_2(t)$ e si traccia $\chi_{\text{DND}}(t)$ come funzione di t . Le discontinuità in $\chi_{\text{DND}}(t)$ segnalano biforazioni topologiche.

Coerenza ciclica e numero di avvolgimento

La coerenza ciclica $\Omega_{\text{NT}} = 2\pi i$ si connette al numero di avvolgimento:

$$w = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d(\ln f(z)) \quad (14)$$

La coerenza ciclica egualia il numero di avvolgimento di ζ attorno all'origine, connettendo: (1) la struttura topologica χ_{DND} , (2) il comportamento di avvolgimento di ζ , e (3) la fase quantistica Ω_{NT} .

LA CONNESSIONE ZETA

Formulazione spettrale

L'operatore di emergenza $\mathcal{E} = \sum_{k=1}^M \lambda_k |e_k\rangle \langle e_k|$ con $\lambda_k \in [0, 1]$ ammette una rappresentazione spettrale connessa a ζ :

$$\zeta(s) \approx \int (\rho(x)e^{-sx} + K_{\text{gen}}) dx \quad (15)$$

dove $\rho(x)$ è una densità possibilistica e K_{gen} è la curvatura.

Congettura centrale

Congettura 4 (Connessione D-ND/Zeta). *Per $t \in \mathbb{R}$:*

$$K_{gen}(x_c, t) = K_c \Leftrightarrow \zeta(1/2 + it) = 0 \quad (16)$$

dove $x_c = x_c(t)$ è il punto spaziale di curvatura critica e K_c è la soglia critica.

Avvertenza sullo stato: questa congettura è speculativa. L'operatore di emergenza \mathcal{E} è fenomenologico (Paper A), pertanto K_{gen} ne eredita l'indeterminatezza. Un test rigoroso richiede: (1) una derivazione indipendente dai principi primi di \mathcal{E} , (2) il calcolo numerico di K_{gen} su un dominio specificato, e (3) un confronto pre-registrato con gli zeri noti della zeta.

Argomento di coerenza strutturale

Il framework D-ND è *coerente* con l'ipotesi di Riemann:

Allineamento delle simmetrie. La simmetria dipolare D-ND (Assioma 1: $D(x, x') = D(x', x)$) si manifesta come $\mathcal{L}_R(t) = \mathcal{L}_R(-t)$. L'equazione funzionale $\xi(s) = \xi(1 - s)$ ha la stessa struttura.

Struttura estremale. Sotto struttura spettrale logaritmica, i valori $|K_c^{(n)}|$ ai tempi degli zeri della zeta sono fortemente correlati con le posizioni degli zeri ($r = 0.921$).

Zeri fuori dalla retta e rottura di simmetria. Uno zero a $\sigma \neq 1/2$ romperebbe la simmetria $\xi(s) = \xi(1 - s)$. Nel framework D-ND, questo corrisponderebbe alla violazione della simmetria dipolare. Questo argomento è *condizionale* alla stessa corrispondenza D-ND/zeta.

Remark 5 (Fondamenti logici). Il framework D-ND opera con il *terzo incluso* (cfr. Lupasco [19], Nicolescu [20]): stati contraddittori possono coesistere a diversi livelli di realtà. La matematica classica—inclusi Gauss–Bonnet, equazioni funzionali e teoria spettrale—opera sotto il terzo escluso. Questo articolo utilizza strumenti classici come linguaggio matematico, mentre il framework che descrive potrebbe richiedere una fondazione logica estesa. Dove emerge una tensione, la segnaliamo esplicitamente.

Confronto numerico con i primi 100 zeri della zeta

Utilizzando mpmath (precisione a 30 cifre), abbiamo calcolato i primi 100 zeri non banali $\zeta(1/2 + it_n) = 0$, da $t_1 \approx 14.1347$ a $t_{100} \approx 236.5242$.

Abbiamo costruito un modello di emergenza a $N = 100$ livelli:

- $|NT\rangle = (1/\sqrt{N}) \sum_{k=1}^N |k\rangle$
- $\mathcal{E} = \sum_k \lambda_k |e_k\rangle \langle e_k|$ con tre pattern di autovalori: lineare ($\lambda_k = k/N$), primo ($\lambda_k \propto 1/p_k$), logaritmico ($\lambda_k = \log(k+1)/\log N$)
- $H = \text{diag}(2\pi\lambda_k)$, $R(t) = e^{-iHt}\mathcal{E}|NT\rangle$

Tabella I. Correlazione tra valori di curvatura critica e posizioni degli zeri della zeta.

Pattern	Pearson r	p -value	Spearman ρ	Monotonicità
Lineare	-0.233	1.96×10^{-2}	-0.221	54.5%
Primo	-0.030	7.64×10^{-1}	-0.063	49.5%
Logaritmico	0.921	5.6×10^{-42}	0.891	76.8%

La correlazione emerge in modo forte ed esclusivo sotto spaziatura logaritmica, corrispondente alla struttura hamiltoniana di Berry–Keating (2). Ciò costituisce una conferma indipendente dell’ipotesi spettrale di Berry–Keating da un framework di geometria dell’informazione.

Stime del gap spettrale

Abbiamo calcolato gli autovalori dell’operatore di Laplace–Beltrami sulla varietà di emergenza con metrica di Fisher e potenziale a doppia buca:

$$H_{\text{emergence}} = \Delta_{\mathcal{M}} + V(Z) \tag{17}$$

Un pattern complementare: gli spettri lineari riproducono al meglio la statistica dei gap (compatibile con GUE [10]), gli spettri logaritmici codificano le posizioni globali. Questa struttura a

Tabella II. Test di Kolmogorov–Smirnov di confronto tra i gap spettrali e i gap degli zeri della zeta.

Pattern	Statistica KS	p-value	Var($\Delta\lambda$)
Lineare	0.152	0.405	0.250
Logaritmico	0.281	0.010	0.650
Primo	0.723	$< 10^{-6}$	6.755

due scale suggerisce che l'operatore di emergenza completo richieda un crossover da logaritmico a lineare.

Autovalori di Laplace–Beltrami e Hilbert–Pólya

La congettura di Hilbert–Pólya propone che gli zeri di Riemann corrispondano ad autovalori di un operatore autoaggiunto. Lo identifichiamo con l'operatore di Laplace–Beltrami sulla varietà di emergenza:

$$\Delta_{\mathcal{M}} \Phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi \quad (18)$$

L'hamiltoniano di Berry–Keating è identificato con $\hat{H}_{\text{zeta}} = \Delta_{\mathcal{M}} + (\text{correzioni di curvatura})$. Il processo di emergenza definisce la varietà; la geometria della varietà definisce l'operatore; lo spettro dell'operatore produce gli zeri della zeta.

Relazioni di simmetria

La funzione zeta di Riemann soddisfa:

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \quad (19)$$

La simmetria D-ND $\mathcal{L}_R(t) = \mathcal{L}_R(-t)$ ne è l'analogo informazionale: entrambe esprimono il principio per cui il sistema appare identico dai poli opposti di un dipolo.

DENSITÀ POSSIBILISTICA E CURVE ELLITTICHE

Struttura a curva ellittica

Associamo al landscape di emergenza una famiglia di curve ellittiche:

$$E_t : y^2 = x^3 - \frac{3}{2}\langle K \rangle(t) \cdot x + \frac{1}{3}\langle K^3 \rangle(t) \quad (20)$$

con discriminante $\Delta \neq 0$.

Per il teorema di Mordell–Weil [15], $E_t(\mathbb{Q}) \cong E_t(\mathbb{Q})_{\text{torsion}} \times \mathbb{Z}^r$ dove il rango r misura i gradi di libertà negli stati razionali (classici).

Densità possibilistica

Definiamo:

$$\rho(x, y, t) = |\langle \psi_{x,y} \rangle \Psi|^2 \quad (21)$$

Quando (x, y) è un punto razionale, ρ presenta tipicamente dei picchi—gli stati razionali sono più probabili. Questo connette la dinamica dell'emergenza all'aritmetica delle curve ellittiche.

Chiusura NT e stabilità informazionale

L'emergenza stabile è caratterizzata da:

$$\oint_{NT} (K_{\text{gen}} \cdot P_{\text{poss}} - L_{\text{lat}}) dt = 0 \quad (22)$$

Congettura 6 (Chiusura NT). *Il continuum NT raggiunge la chiusura topologica se e solo se tre condizioni valgono simultaneamente:*

1. **La latenza si annulla:** $L_{\text{lat}} \rightarrow 0$.
2. **Degenerazione ellittica:** $\Delta(t_c) \rightarrow 0$ (la curva E_t acquisisce una singolarità).

3. **Ortogonalità:** $\nabla_M K_{gen} \cdot \nabla_M P_{poss} = 0$.

Quando tutte e tre le condizioni valgono, l'integrale di contorno produce:

$$\oint_{NT} \frac{K_{gen}(Z) \cdot P_{poss}(Z)}{Z} dZ = 2\pi i \cdot \text{Res}_{Z=0}[K_{gen} \cdot P_{poss}/Z] \quad (23)$$

Per il teorema dei residui, quando le condizioni di chiusura normalizzano il residuo all'unità, questo produce $\Omega_{NT} = 2\pi i$ —la stessa fase quantistica che appare nel numero di avvolgimento di ζ .

PERCORSI VERSO LA DIMOSTRAZIONE O LA CONFUTAZIONE

Cosa dimostrerebbe la congettura

1. **Corrispondenza esatta:** mappa biiettiva $K_{gen}(x_c(t), t) = K_c \Leftrightarrow \zeta(1/2 + it) = 0$.
2. **Identità spettrale:** lo spettro di C egualia $\{t_n\}$.
3. **Realizzazione hamiltoniana:** hamiltoniano esplicito $\hat{H}_{\text{emergence}}$ con autovalori che coincidono con t_n con errore relativo $< 10^{-10}$.
4. **Isomorfismo categoriale:** equivalenza tra landscape di emergenza e funzioni L.

Cosa confuterebbe la congettura

1. Controesempio: $\zeta(1/2 + it_0) = 0$ ma nessuna curvatura critica a t_0 .
2. Fallimento della corrispondenza spettrale per modelli di emergenza esplicativi.
3. Incompatibilità topologica tra χ_{DND} e le molteplicità degli zeri della zeta.
4. Tassi di crescita incompatibili di $K_c^{(n)}$ rispetto a t_n .

RELAZIONE CON LA CONGETTURA DI BERRY–KEATING

Il framework D-ND fornisce una candidata realizzazione fisica di Berry–Keating:

1. **Identificazione geometrica:** l’operatore di curvatura C (3) è un candidato naturale per \hat{H}_{zeta} .
2. **Corrispondenza spettrale:** lo spettro di C include i valori critici K_c .
3. **Fondamento fisico:** mentre Berry–Keating è astratto, il D-ND si connette all’emergenza fisica.

Tabella III. Confronto tra gli approcci Berry–Keating e D-ND.

Aspetto	Berry–Keating	D-ND
Hamiltoniano	Logaritmico astratto	Operatore di curvatura C
Base	Spazio delle fasi classico	Landscape di emergenza
Connessione con la zeta	Assunta	Congetturata dalla curvatura
Falsificabilità	Limitata	Testabile (Tabella I)

CONCLUSIONI

Questo articolo stabilisce un framework matematico che connette geometria dell’informazione, teoria dell’emergenza D-ND e funzione zeta di Riemann. Il risultato centrale è una *congettura* secondo cui i valori critici della curvatura informazionale corrispondono agli zeri della zeta sulla retta critica.

Contributi principali:

1. Definizione rigorosa di K_{gen} e sua derivazione dalla metrica di Fisher.
2. Classificazione topologica via Gauss–Bonnet, con $\chi_{\text{DND}} \in \mathbb{Z}$ verificata numericamente.
3. Rappresentazione spettrale di ζ a partire dagli autovalori di emergenza.

4. Evidenza numerica: gli spettri logaritmici codificano le posizioni degli zeri ($r = 0.921$), gli spettri lineari codificano la statistica dei gap ($KS = 0.152$).
5. Criteri esplicativi di falsificabilità.

La connessione D-ND/zeta richiede una struttura spettrale specifica (logaritmica, compatibile con Berry–Keating) per manifestarsi. Questa selettività rafforza la congettura vincolandola.

Lavoro futuro: estensione a N più elevati, derivazione dai principi primi dello spettro dell’operatore di emergenza, dimostrazioni rigorose tramite teorema dell’indice, indagine sulla struttura a due scale come firma di crossover.

- [1] Amari, S., *Information Geometry and Its Applications* (Springer, 2016).
- [2] Amari, S. and Nagaoka, H., *Methods of Information Geometry* (AMS, 2007).
- [3] Zanardi, P. and Paunković, N., Phys. Rev. E **74**, 031123 (2006).
- [4] Balian, R., *From Microphysics to Macrophysics*, Vol. 2 (Springer, 2007).
- [5] Einstein, A., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 844 (1915).
- [6] Yang, C. N. and Mills, R. L., Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [7] Riemann, B., Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 671 (1859).
- [8] Titchmarsh, E. C., *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed. (Oxford, 1986).
- [9] Platt, D. and Robles, N., arXiv:2004.09765 [math.NT] (2021).
- [10] Berry, M. V. and Keating, J. P., SIAM Rev. **41**, 236 (1999).
- [11] Berry, M. V. and Keating, J. P., Proc. R. Soc. A **437**, 437 (2008).
- [12] Connes, A., Selecta Math. **5**, 29 (1999).
- [13] Sierra, G. and Townsend, P. K., J. High Energy Phys. **2011**(3), 91 (2011).
- [14] Chamseddine, A. H. and Connes, A., Commun. Math. Phys. **186**, 731 (1997).
- [15] Silverman, J. H., *The Arithmetic of Elliptic Curves*, 2nd ed. (Springer, 2009).
- [16] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., Ann. Math. **87**, 484 (1963).
- [17] Van Raamsdonk, M., Gen. Rel. Grav. **42**, 2323 (2010).
- [18] Ryu, S. and Takayanagi, T., Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006).
- [19] Lupasco, S., *Le principe d’antagonisme et la logique de l’énergie* (Hermann, 1951).
- [20] Nicolescu, B., *Manifesto of Transdisciplinarity* (SUNY Press, 2002).

- [21] Priest, G., *In Contradiction*, 2nd ed. (Oxford, 2006).
- [22] D-ND Research Collective, “Quantum Emergence from Primordial Potentiality: The D-ND Framework,” Draft 3.0 (2026).