

Оценка стоимости опциона в биномиальной модели рынка

Автор:

студент 412 группы
Горбунов Александр Александрович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент
Морозов Владимир Викторович

Москва, 2019

Цели работы

- Оценка стоимости американского опциона в биномиальной модели рынка
- Построение аппроксимации множества немедленного исполнения американского опциона

Биномиальная модель рынка

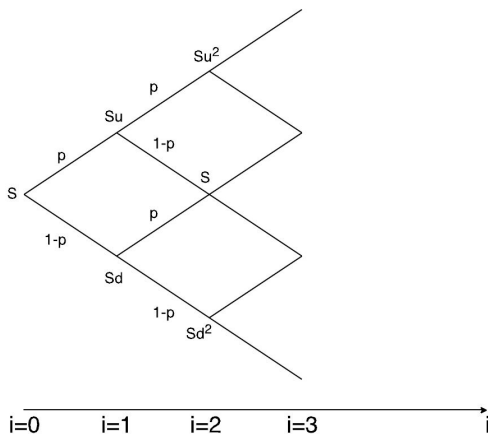


Рис.: Изменение стоимости акции в биномиальной модели рынка с течением времени

Классический биномиальный метод

Оценка стоимости американского опциона осуществляется с помощью метода динамического программирования:

$$\begin{cases} V_j^i = \max(e^{-r\Delta t} (pV_{j+1}^{i+1} + (1-p)V_{j-1}^{i+1}), S_j - K) \\ V_j^n = (S_j - K)^+ \end{cases}$$

При этом стоимость самого опциона будет равна V_0^0 .

Метод Рундсона

В основе метода Рундсона лежит следующий полином:

$$F(h) = F(0) + a_1 h^p + a_2 h^r + O(h^s), \quad s > r > p$$

$F(0)$, a_1 , a_2 - неизвестные величины.

$$\begin{cases} F(h) = F(0) + a_1 h^p + a_2 h^r + O(h^s) \\ F(kh) = F(0) + a_1 (kh)^p + a_2 (kh)^r + O(h^s) \\ F(qh) = F(0) + a_1 (qh)^p + a_2 (qh)^r + O(h^s) \end{cases}$$

Цель состоит в том, чтобы отыскать $F(0)$.

Метод Ричардсона

В результате, получаем, что

$$F(0) = F(h) + \frac{A}{C}[F(h) - F(kh)] - \frac{B}{C}[F(kh) - F(qh)],$$

где

- $A = q^r - q^p + k^p - k^r,$
- $B = k^r - k^p,$
- $C = q^r(k^p - 1) - q^p(k^r - 1) + k^r - k^p.$

Окончательно, оценка стоимости американского опциона принимает следующий вид:

$$P = P_3 + \frac{7}{2}(P_3 - P_2) - \frac{1}{2}(P_2 - P_1),$$

где $P_1 = F(qh), P_2 = F(kh), P_3 = F(h),$
 $q = 3, k = \frac{3}{2}, p = 1, r = 2.$

Сравнительный анализ

Таблица: Сравнение классического биномиального метода и метода Ричардсона ($S = 120$, $K = 100$, $T = 0.5$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.03$, $\delta = 0.07$, истинное значение опциона — 23.710), где K — классический биномиальный метод, а R — метод Ричардсона

n	K, с.	R, с.	K, рез-т	R, рез-т
100	0.017	0.011	23.714	23.723
500	0.355	0.186	23.709	23.704
1000	1.529	0.740	23.709	23.705
15000	143.294	69.647	23.710	23.710

Использование метода Ричардсона приводит к существенному ускорению вычисления стоимости американского опциона.

Граница множества немедленного исполнения

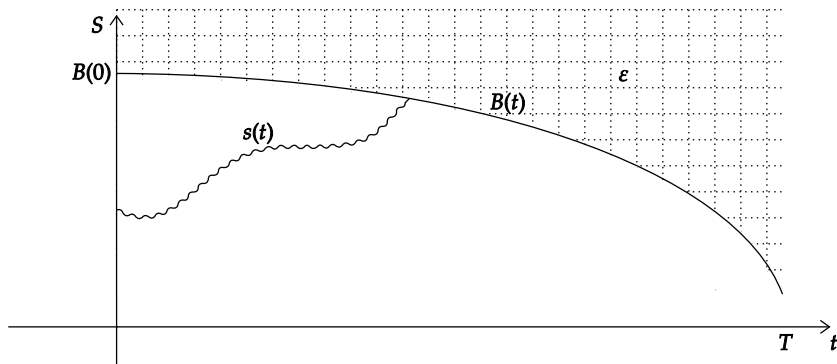


Рис.: Граница множества немедленного исполнения $B(t)$

Метод динамического программирования

Граница немедленного исполнения в дискретном случае строится с помощью метода динамического программирования:

$$\begin{cases} V_j^i = \max(e^{-r\Delta t} (pV_{j+1}^{i+1} + (1-p)V_{j-1}^{i+1}), S_j - K) \\ V_j^n = (S_j - K)^+, \end{cases}$$

Значение границы в данный момент времени i находится по следующему правилу:

$$B(i) = \sup_j \{S_j \mid V_j^i \leq S_j - K\}.$$

Дискретная модель

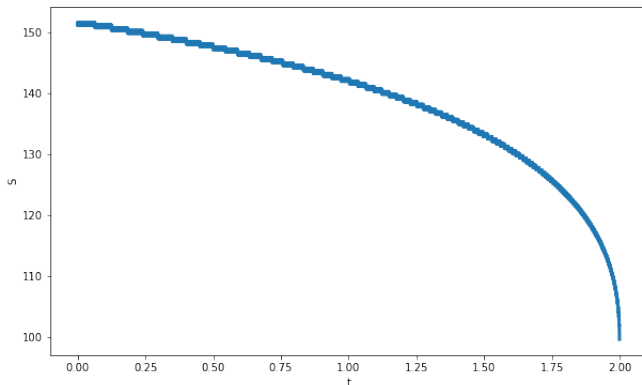


Рис.: Граница области немедленного исполнения в дискретном случае при $T = 2, \sigma = 0.3, K = 100, S = 120, r = 0.02, \delta = 0.07$

Непрерывная модель

Требуется найти решение следующей задачи:

$$W'_L(S, L) \Big|_{L=S} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} W'_L(S, L) \Big|_{L=S} = & \left[1 - \left(1 - \frac{K}{S} \right) \beta_1 \right] \Phi \left(\frac{\xi \sqrt{T}}{\sigma} \right) + \\ & + \left[1 - \left(1 - \frac{K}{S} \right) \beta_2 \right] \Phi \left(-\frac{\xi \sqrt{T}}{\sigma} \right) + 2(a-1)e^{-\delta T} \cdot \\ & \cdot \left[\Phi(d_1) - \Phi \left(\frac{(\tilde{\alpha} + \sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right] - 2ae^{-rT} \frac{K}{S} \left[\Phi(d_2) - \Phi \left(\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right]. \end{aligned}$$

Непрерывная модель

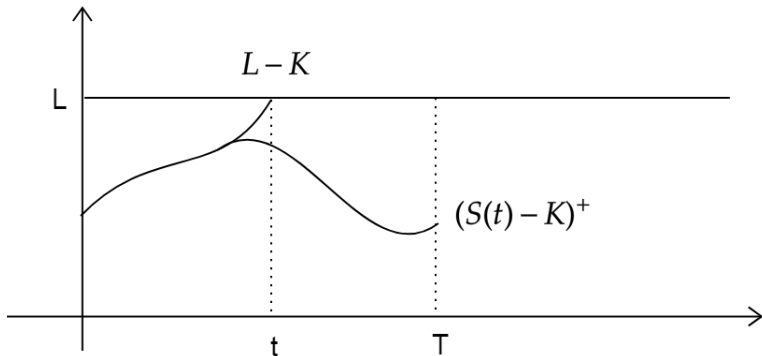


Рис.: Пояснение к расчёту среднего дисконтированного выигрыша

Непрерывная модель

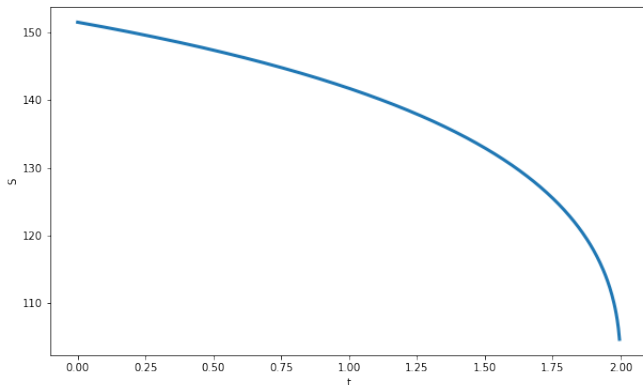
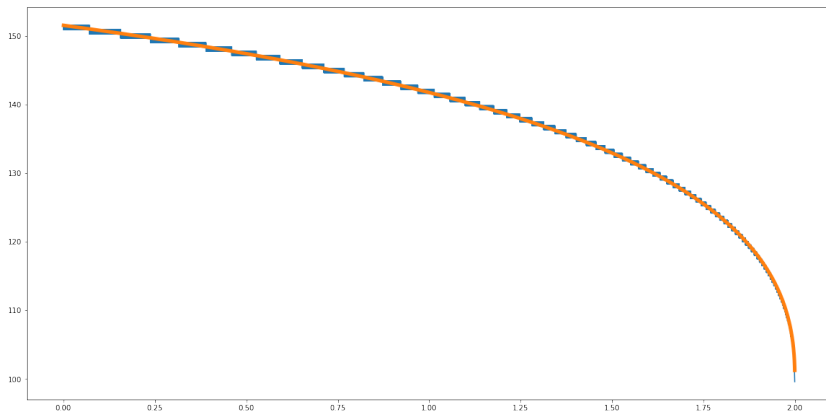


Рис.: Граница области немедленного исполнения в непрерывном случае при $T = 2, \sigma = 0.3, K = 100, S = 120, r = 0.02, \delta = 0.07$

Сравнительный анализ результатов, полученных в непрерывной и дискретной моделях



Результаты

- Достигнуты следующие результаты:
 - Построена оценка стоимости американского опциона в дискретной модели рынка;
 - Реализован метод Ричардсона, который позволил ускорить вычисления стоимости опциона, а также показано достигаемое с его помощью ускорение;
 - Построена аппроксимация множества немедленного исполнения американского опциона в непрерывном и дискретном случаях;
- Вычисления проводились на языке Python в среде Jupyter Notebook