

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/344500895>

# Geodésicas en la métrica de Schwarzschild, una solución numérica

Poster · October 2020

DOI: 10.13140/RG.2.2.35062.83522

CITATIONS

0

READS

1,006

3 authors:



**César Duarte-Ortiz**

Autonomous University of Nuevo León

9 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

SEE PROFILE



**Sao Leija**

Autonomous University of Nuevo León

11 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

SEE PROFILE



**Freddy Flores**

State University of Milagro

3 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

SEE PROFILE



# Geodésicas en la métrica de Schwarzschild, una solución numérica

César Duarte-Ortiz<sup>1</sup>; Sao Leija<sup>1</sup>; Freddy Flores<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, México;

cesar.duartertz@uanl.edu.mx

## Resumen

En este proyecto se resolverán numéricamente las ecuaciones de las geodésicas de Schwarzschild para un planeta ligero que está inmerso en un espacio-tiempo deformado por una estrella masiva, con simetría esférica y estática, esto con base en la teoría general de la relatividad. Se analizarán los casos posibles para un planeta cercano o lejano a un objeto que produce una deformación en el espacio-tiempo. Además, se resolverán también las mismas ecuaciones para una partícula sin masa.

## Introducción

En la teoría de relatividad general de Einstein, la métrica de Schwarzschild es la solución a las ecuaciones de campo de Einstein que describe el campo gravitatorio fuera de una masa esférica, en el supuesto de que la carga eléctrica de la masa, el momento angular de la masa y la constante cosmológica universal son todos cero. La solución es una aproximación útil para describir objetos astronómicos que giran lentamente, como muchas estrellas y planetas, incluida la Tierra y el Sol.

## Deducción de las ecuaciones diferenciales a resolver

Supondremos un espacio vacío en el que hay un cuerpo masivo esférico estático. Resolviendo las ecuaciones de Einstein para el vacío se obtiene la solución de Schwarzschild que cumple la siguiente métrica en coordenadas polares

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \quad (1)$$

El intervalo en el espacio-tiempo en cualquier sistema coordenado es  $ds^2 \equiv dx \cdot dx = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  de donde para partículas con masa  $ds^2 \neq 0$  y para partículas sin masa  $ds^2 = 0$ .

$ds^2 < 0$  Intervalo temporaloide. Medición entre dos eventos, que cambia en el tiempo, pero de posición no.  
 $ds^2 > 0$  Intervalo espacioloide. Medición entre dos eventos que cambia de posición, pero de tiempo no.  
 $ds^2 = 0$  Intervalo luminoide. Mediciones de un evento donde la información de un evento a otro es comunicada a la velocidad de la luz.

La invariancia del intervalo, expresada para cualesquiera dos sistemas de referencia inerciales  $S$  y  $S'$  se representa como  $ds'^2 = ds^2$ .

Una consecuencia inmediata de la invariancia es que dinámica de la radiación electromagnética y la dinámica de las ondas gravitacionales son la misma para cualquier marco de referencia.

Nos interesa buscar la trayectoria de partículas con masa en ese espacio. Para eso, buscamos la geodésica de esta métrica, que sería la trayectoria de esa partícula, teniendo siempre presente que, la masa de la partícula es tan pequeña respecto a la de la “estrella”, que se puede anular su aportación a la métrica del espacio.

$$\mathcal{L} = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (2)$$

Como consecuencia del intervalo temporaloide y por convención

$$\mathcal{L} = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = -1 \quad (3)$$

Las ecuaciones de Lagrange asociadas son:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que

$$x^1 = r \quad , \quad x^2 = \theta \quad , \quad x^3 = \phi \quad , \quad x^4 = t$$

Obtenemos

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 = -1 \quad (5)$$

Manipulando las ecuaciones diferenciales y estableciendo el plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$  obtenemos

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{l^2}{r^3} - \frac{3Ml^2}{r^4} \quad (6)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{l}{r^2} \quad (7)$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{r}{r-2M} + \frac{r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2}{r-2M} + \frac{r^2 \dot{r}^2}{(r-2)^2} \quad (8)$$

Ahora, vamos a estudiar las órbitas de rayos luminosos, el calculo es similar al anterior, con unas diferencias, se muestra a continuación

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (9)$$

Podemos ver que la diferencia es que en la derecha aparece 0 (intervalo luminoide) en vez de -1. Manipulando las ecuaciones diferenciales y si se usa el cambio  $u = 1/r$ , obtenemos

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2} \quad (10)$$

de donde  $b$  es el parámetro de impacto, y dependiendo el valor que tome se pueden resumir las orbitas en tres tipos:

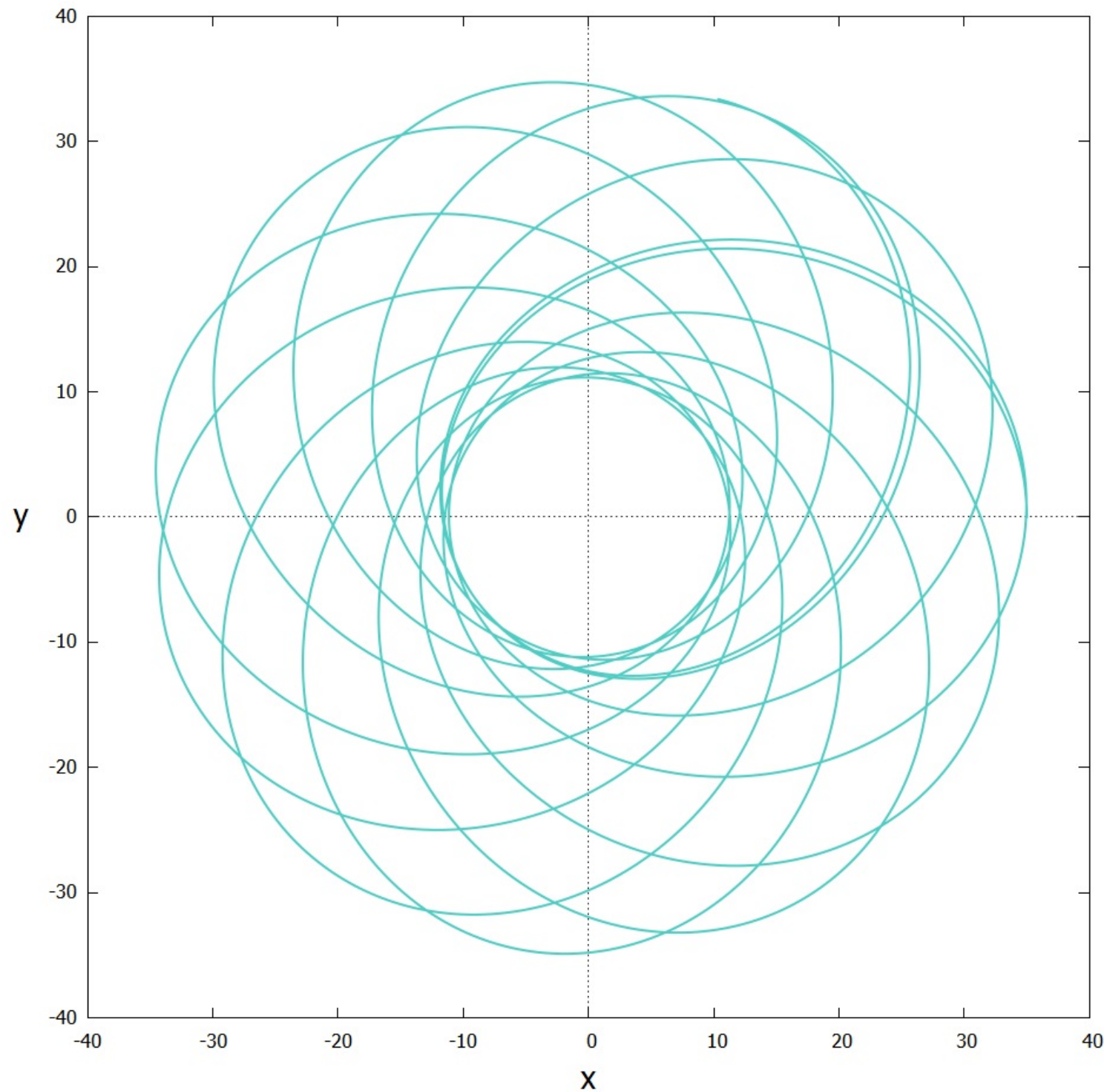
Tipo  $\alpha$ . Para  $b > \sqrt{27}M$ , orbitas de dispersión

Tipo  $\beta$ . Para  $b = \sqrt{27}M$ , orbitas de circunferencias inestables

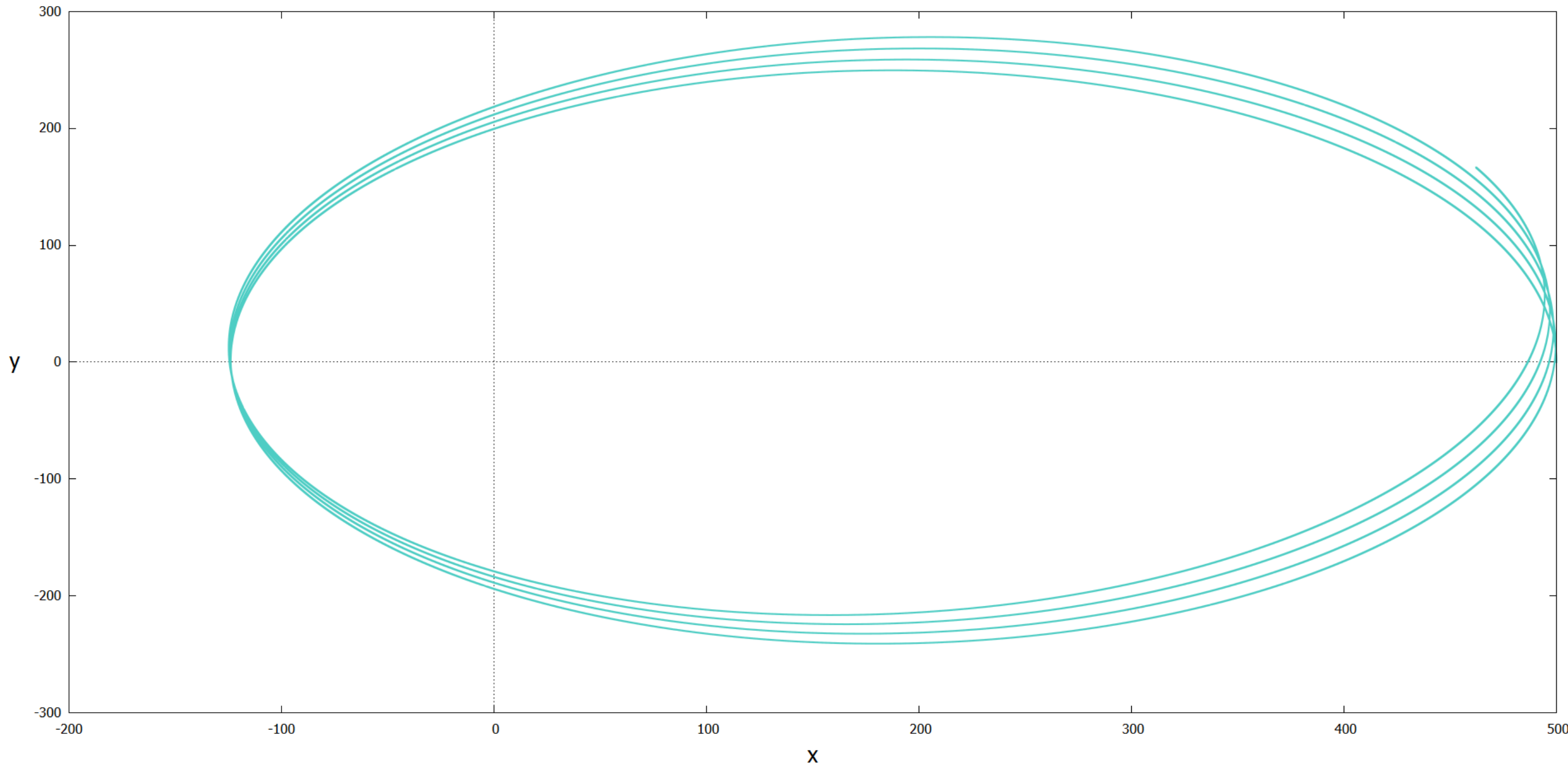
Tipo  $\gamma$ . Para  $b < \sqrt{27}M$ , orbitas de caída en el centro

## Método de resolución

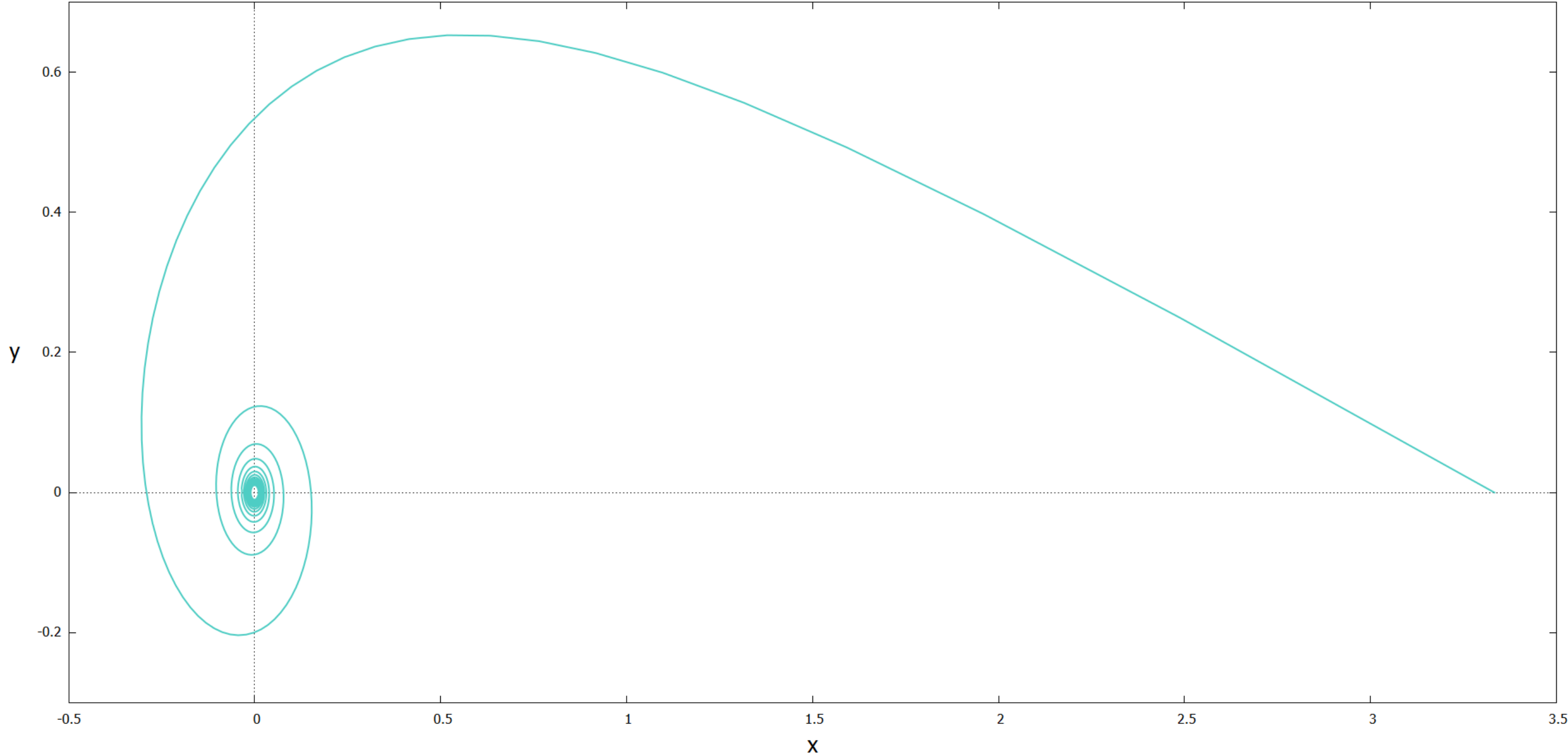
La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales sera numéricamente por el método Runge-Kutta de cuarto orden. Se computaron dos programas en FORTRAN, uno para resolver las geodésicas de partículas con masa y otro para el caso de partículas sin masa. En ambos programas el usuario es libre de escoger las condiciones iniciales del sistema y el tiempo en segundos. A continuación se muestran las gráficas de los resultados obtenidos para distintos casos.



**Figura 1:**  $l = 4$ ,  $r_0 = 35$   $M = 0.8$ ,  $\dot{r}_0 = 0$ . Para partículas con masa. Como el campo no es débil se observa que la órbita no se asemeja a una elipse con una precesión de su perihelio. En el Sistema Solar para sentir un campo tan fuerte se debería estar en una órbita menor al radio solar.



**Figura 2:**  $l = 10$ ,  $r_0 = 500$   $M = 0.5$ ,  $\dot{r}_0 = 0$ . Para partículas con masa. En esta figura podemos observar que las orbitas se acercan a las órbitas Keplerianas pero con una precesión del perihelio de la órbita.



**Figura 3:**  $r_0 = 5$ ,  $M = 1$ ,  $\dot{r}_0 = 0$ ,  $b = 4$ . Para partículas sin masa. Podemos observar que debido a que el factor de impacto  $b < \sqrt{27}M$  cumple que su orbita tiene caída al centro del agujero negro.

## Conclusiones

Las estrellas comunes tienen en buena aproximación simetría esférica. Aunque están rotando, también pueden ser modeladas por medio de la métrica de Schwarzschild.

La mayoría de las pruebas de la relatividad general involucran el movimiento de nuestras partículas favoritas de pruebas, los planetas, en la vecindad de un campo gravitacional con simetría esférica producido por el sol. La precesión de los perihelios, la cual constituye la mejor prueba temprana de la relatividad general puesto que la mecánica newtoniana no puede explicar.

## Referencias

- [1] Subrahmanyan Chandrasekhar. [The mathematical theory of black holes](#), volume 69. Oxford University Press, 1998.
- [2] Erwin Kreyszig. Differential geometry/by erwin kreyszig.
- [3] Óscar A Palmas Velasco and J Guadalupe Reyes Victoria. Curso de geometría diferencial. parte 1. curvas y superficies, 2005.
- [4] Óscar A Palmas Velasco and J Guadalupe Reyes Victoria. Curso de geometría diferencial. parte 2. geometría intrínseca de las superficies, 2012.
- [5] Saúl Ramos-Sánchez. [Relatividad para futuros físicos](#), volume 1. CopIt ArXives, 2018.
- [6] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. [arXiv preprint physics/9905030](#), 1999.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la iniciativa del Taller de Producción Científica de la comunidad estudiantil, que ha brindado un ambiente de colaboración y trabajo óptimo en la comunidad estudiantil. Se agradece a los organizadores del Congreso Nacional de Física por permitir presentar este trabajo.