

Propuesta Reto # 11 - Deformaciones del Espaciotiempo

Juan Felipe Rodríguez
Gregory García Esteban
Jhonny Camacho Cortes
Universidad Industrial de Santander
Carrera 27 Calle 9 Bucaramanga

Índice

1. Introducción	2
2. Estado del Arte	2
2.1. Relatividad Especial	2
2.2. Espaciotiempo de Minkowski	3
2.3. Relatividad General	3
2.4. Métrica de Schwarzschild	3
2.5. Geodésicas	4
2.6. La analogía de la tela elástica	4
3. Objetivos	4
3.1. Objetivo principal	4
3.2. Objetivos específicos	4
4. Metodología	5
5. Equipo de Investigación	5
6. Cronograma	6
7. Referencias	6

Resumen

En este proyecto se evalúa la efectividad de la analogía de Einstein que utiliza una tela elástica para representar la curvatura del espacio-tiempo causada por la masa, en el contexto de la relatividad general. Se describe cómo la masa de un objeto distorsiona el espacio-tiempo, empleando la métrica de Schwarzschild como referencia teórica. La metodología consiste en construir un montaje experimental basado en una mesa con una tela elástica para simular un espacio-tiempo bidimensional. Se estudiarán las trayectorias de esferas bajo esta deformación, registrando los datos de velocidad y posición con una cámara y el software Tracker. Los resultados

experimentales se compararán con simulaciones computacionales para validar el modelo y analizar las limitaciones de la analogía.

This project evaluates the effectiveness of Einstein's analogy that uses an elastic sheet to represent the curvature of spacetime caused by mass, within the framework of general relativity. It describes how the mass of an object distorts spacetime, referencing the Schwarzschild metric as the theoretical model. The methodology involves constructing an experimental setup using a table with an elastic sheet to simulate a two-dimensional spacetime. The trajectories of spheres under this deformation will be studied, with data on speed and position recorded using a camera and Tracker software. The experimental results will be compared with computational simulations to validate the model and assess the limitations of the analogy.

1. Introducción

El movimiento de los astros ha sido quizá uno de los fenómenos más intrigantes para la humanidad. Antes se creía que la esfera celeste seguía leyes divinas ajenas a lo terrestre [Kuhn, 1957]. Con la obra Newton, se empezó a entender que el movimiento de las estrellas y los planetas obedecía las mismas leyes que regían los acontecimientos mundanos, dando origen a la noción de la gravedad como una fuerza universal [Newton, 1687]. Sin embargo algunas ideas se quedaron con nosotros por unos siglos más: que el espacio y el tiempo eran absolutos. A principios del Siglo XX estas ideas fueron debatidas [Einstein, 1905] para abrir paso a una nueva teoría: La Teoría General de la Relatividad [Einstein, 1915]. En esta se propone que la gravedad no es simplemente una fuerza, sino una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo causada por la masa y la energía.

Esta teoría, aunque revolucionaria, ha sido frecuentemente malinterpretada. Por ello, es fundamental realizar experiencias que ilustren la íntima relación entre la masa de los objetos y la estructura del espacio-tiempo en que se desarrollan. Una de estas experiencias está basada en una analogía que hizo Einstein para explicar la teoría general de la relatividad: sobre una tela elástica se ponen objetos pesados para después dejar mover unos más livianos sobre esta [Thorne, 1994]. No obstante, surge la pregunta sobre la efectividad y limitaciones de esta analogía [Postiglione and De Angelis, 2021b]. Por esto, en este proyecto se explora y evalúa esta representación para entender mejor la relación entre la masa de los objetos y la curvatura del espacio-tiempo.

2. Estado del Arte

2.1. Relatividad Especial

El espaciotiempo es la amalgama formada por el espacio y el tiempo. La estructura utilizada para describir al espaciotiempo es la del espacio afín donde un punto en esta estructura representa un evento existente que está unívocamente caracterizado por cuatro números: tres que representan su ubicación espacial y uno para su fecha [Gourgoulhon, 2016].

2.2. Espaciotiempo de Minkowski

El espacio tiempo de Minkowski es la cuádrupla formada por $(E, \mathbf{g}, L^+, \epsilon)$ [Gourgoulhon, 2016] donde:

- E es un espacio afín de cuatro dimensiones, que tiene asociado un espacio vectorial E subyacente.
- \mathbf{g} una forma bilineal, simétrica y no degenerada y de signatura $(-, +, +, +)$, llamada métrica.
- L^+ el denominado cono nulo futuro.
- ϵ una cuatro-forma multilineal y antisimétrica, es denominado tensor de *Levi-Civita*.

Esta estructura es lo que se considera espaciotiempo "plano".

2.3. Relatividad General

El nombre de esta teoría se deriva del hecho que generaliza la teoría de la relatividad especial para espaciotiempos cuya métrica puede ser diferente a la de Minkowski. La gravitación y la dinámica de cuerpos masivos entra en el marco de la relatividad general, donde dicha dinámica se explica por la existencia de la curvatura del espaciotiempo [Pederzini, 2009]. El espaciotiempo en ausencia de masa luce completamente plano o en otras palabras, se encuentra completamente descrito por la métrica de Minkowski. Resulta que dada una distribución de masa en el espaciotiempo provoca una distorsión o curvatura en el mismo [Pederzini, 2009].

2.4. Métrica de Schawrzschild

Resulta que un espaciotiempo curvado por la presencia de una distribución de masa esférica y no rotante es descrito a través de la métrica de Schawrzschild cuya deducción no se encuentra contenida aquí pero se puede revisar [Pederzini, 2009]. El elemento de línea para el espaciotiempo de Schawrzschild es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 + c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2, \quad (1)$$

de donde se deduce que las coordenadas generalizadas son $q_0 = ct, q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$, y el tensor métrico es

$$\begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right) \end{pmatrix}.$$

2.5. Geodésicas

Ecuaciones de las geodésicas para la métrica de Schwarzschild son:

$$\ddot{t} - \frac{m}{r^2 c^2 \left(r - \frac{2m}{c^2}\right)} \dot{t} + \left(-1 + \frac{2m}{c^2 r}\right) r \dot{r} \dot{r} + \left(-1 + \frac{2m}{c^2 r}\right) r \sin^2 \theta \dot{\theta} \dot{\theta} - \frac{m \left(-1 + \frac{2m}{c^2}\right)}{r^2} \dot{\phi} \dot{\phi} = 0. \quad (2)$$

$$\ddot{r} + \frac{2}{r} \text{tr} \dot{r} - \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} \dot{\theta} = 0. \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{t} \dot{\theta} - 2 \cot \theta \dot{r} \dot{\theta} = 0. \quad (4)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2m}{r^2 c^2 \left(r - \frac{2m}{c^2}\right)} \dot{\phi} \dot{\phi} = 0. \quad (5)$$

2.6. La analogía de la tela elástica

La analogía creada por Einstein para describir la dinámica de los cuerpos en el espaciotiempo es aparentemente un recurso didáctico a través del cual se puede visualizar como un objeto se ve atraído por otro masivo. Cuando se simula el espaciotiempo como una licra o tela elástica se simplifica gravemente el fenómeno. Primero y más evidente el espaciotiempo no está hecho por una tela, segundo el espaciotiempo es cuatridimensional, sin embargo solo podemos percibir un espacio tridimensional. Entonces cuando usamos una tela elástica para simular estamos reduciendo la dimensión del espaciotiempo a solo dos dimensiones [Postiglione and De Angelis, 2021a].

3. Objetivos

3.1. Objetivo principal

Comparar las trayectorias descritas por distribuciones de masa esféricas ubicadas sobre una tela elástica y las geodésicas de la relatividad de Einstein para distribuciones esféricas de masa.

3.2. Objetivos específicos

- Modelar computacionalmente el espaciotiempo curvado por una distribución esférica de masa.
- Construir una superficie elástica curvada por la presencia de una masa esférica.
- Interpolare la trayectoria descrita por un cuerpo que se mueve sobre una superficie elástica curvada por una distribución esférica de masa.
- A partir de las ecuaciones de las geodésicas en el espaciotiempo construir una solución exacta o como mínimo numérica para la trayectoria descrita por un cuerpo que se mueve en el espaciotiempo curvado por una distribución esférica de masa.
- Comparar las trayectorias descritas por la relatividad general y las trayectorias descritas en el modelo de tela elástica.



Figura 1: Ejemplo de la mesa como montaje experimental que se deberá construir para reproducir una aproximación al espacio-tiempo de Minkowski. Imagen tomada en [Postiglione and De Angelis, 2021b].

4. Metodología

Como primer paso, se debe realizar el montaje experimental que nos permitirá simular de manera tangible el espacio-tiempo de Minkowski. Para ello, construiremos una mesa que representará una aproximación bidimensional de este espacio-tiempo. La mesa estará compuesta por un soporte metálico y una tela elástica, la cual permitirá simular las deformaciones del espacio-tiempo producidas por un cuerpo masivo. Es fundamental considerar las propiedades físicas de la tela, como su elasticidad y la tensión a la que estará sometida, ya que estas variables afectarán directamente la calidad de la aproximación del montaje al espacio-tiempo de Minkowski. Una ilustración de la mesa en cuestión se encuentra en la figura 1

En el experimento, se utilizarían dos esferas cuyas masas puedan replicar el comportamiento de cuerpos en una región del espacio-tiempo deformado. Los resultados obtenidos se centrarán en la velocidad y la posición de una de estas esferas. Dichos resultados se registrarán con el software Tracker y se compararán con nuestro modelo teórico mediante simulación computacional. Para capturar la trayectoria de la esfera de prueba, se empleará una cámara de video situada en la parte superior de la mesa. Es crucial recordar las propiedades físicas de la tela mencionadas anteriormente, ya que de ellas depende que la mesa funcione como una aproximación efectiva, permitiendo que los resultados experimentales sean comparables con el modelo teórico.

5. Equipo de Investigación

Este proyecto se llevará a cabo por Juan Felipe Rodríguez, Gregory García y Jhonny Camacho, tres estudiantes de octavo nivel de la Universidad Industrial de Santander. Los involucrados tiene

experiencia en simulación y análisis de datos y una formación teórica para poder dar ideas y una discusión frente al presente reto.

6. Cronograma

- **Septiembre 22:** Simular computacionalmente la superficie y las geodésicas para la superficie deformada.
- **Octubre 5:** Calcular las geodésicas para la superficie deformada por la masa.
- **Octubre 5:** Cotizar la estructura, comprar masas esféricas.
- Enviar a hacer **Por definir**.
- **Octubre 20:** Entregar informe de avances.
- **Octubre 20:** Tomar mediciones con Tracker.
- **Octubre 23:** Interpoliar los datos tomados anteriormente para comparar con los resultados de la RG.
- **Octubre 30:** Entregar informe de avances.
- **Noviembre 27:** Entrega de informe final.

7. Referencias

- [Einstein, 1905] Einstein, A. (1905). Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921.
- [Einstein, 1915] Einstein, A. (1915). Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 844–847.
- [Gourgoulhon, 2016] Gourgoulhon, É. (2016). *Special relativity in general frames*. Springer.
- [Kuhn, 1957] Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican Revolution: Planetary Astronomy in the Development of Western Thought*. Harvard University Press, Cambridge, MA.
- [Newton, 1687] Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society, London.
- [Pederzini, 2009] Pederzini, G. D. A. (2009). Las ecuaciones de las geodesicas en gravitacion y su limite newtoniano. *NN*.

- [Postiglione and De Angelis, 2021a] Postiglione, A. and De Angelis, I. (2021a). Experience gravity in the classroom using the rubber sheet: an educational proposal from the collaboration between university and school. *Physics Education*, 56(2):025019.
- [Postiglione and De Angelis, 2021b] Postiglione, A. and De Angelis, I. (2021b). Students' understanding of gravity using the rubber sheet analogy: an italian experience. *Physics Education*, 56(2):025020.
- [Thorne, 1994] Thorne, K. S. (1994). *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*. W. W. Norton & Company, New York.