Capítulo 2. Gravitación y Métricas de la Relatividad General.

2.1.- Métrica de Friedman-Robertson-Walker.[1]

Hemos analizado hasta el momento, en lo que respecta al espacio-tiempo, a la métrica de Minkowski, ésta representa en realidad a un espacio-tiempo “plano”. Es decir, la métrica de Minkowski define intervalos de espacio-tiempo en un espacio-tiempo no curvado. Sin embargo, nuestros análisis, para poder llegar al límite Newtoniano de la gravitación que explicó Albert Einstein, se encontraran inmersos en el marco de la relatividad general, dicha teoría resulta ser una generalización de la relatividad especial para incluir situaciones en donde el espacio-tiempo, en el cual ocurren los eventos, no es plano o, en otras palabras, posee curvatura.

Una primera métrica que describe un espacio-tiempo curvo, es decir, que ya no es plano, es la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW). Dicha métrica además de incluir el efecto de la curvatura incluye otro más. En la década de los 20’s Edwin Hubble determinó, a través de sus estudios, que el Universo se encontraba en expansión y es precisamente ésta la segunda propiedad que la métrica FRW incluye: la expansión. Ahora bien, tratemos de entender el surgimiento de la métrica FRW.

Supongamos que nos encontramos en la tarea de intentar describir la métrica que posee una hiperesfera. De entrada debemos definir dicho concepto. Resulta que una esfera, tal como la conocemos, es un elemento geométrico descrito por sólo dos dimensiones, es decir, sólo requerimos de dos dimensiones para poder describir o generar toda la superficie de una esfera. Sin embargo, para la descripción de ésta, como para la descripción de algunos otros múltiples elementos geométricos, resulta de utilidad imaginar a la esfera en un espacio Euclidiano de una dimensión extra, por lo tanto, para este caso imaginamos que la esfera se encuentra inmersa en un espacio de Euclides de 3 dimensiones. Ahora bien, una hiperesfera será una generalización de la esfera que conocemos pero descrita por 3 dimensiones, es decir, que se encuentra inmersa en un espacio Euclidiano de 4 dimensiones.

En un espacio Euclideo de 4 dimensiones el elemento de línea, por analogía al caso de menores dimensiones, está dado por:

[1] La deducción de la métrica FRW aquí mostrada se fundamenta en la propuesta en [7].

$$dl^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 + dx_4{}^2. \tag{2.1}$$

Ahora bien, extendiendo la definición de esfera en tres dimensiones a hiperesfera podemos escribir ahora la ecuación de una hiperesfera como la suma, del cuadrado de las coordenadas, igualada a una constante:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = R^2. \tag{2.2}$$

Es decir hemos hecho a x_4 dependiente de las demás coordenadas o en otras palabras ha quedado restringida a:

$$x_4{}^2 = R^2 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2. \tag{2.3}$$

en donde además sabemos que:

$$dx_4 = \frac{\partial x_4}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_4}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x_4}{\partial x_3} dx_3. \tag{2.4}$$

De la ecuación (2.3) podemos obtener que:

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{\sqrt{R^2 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2}}. \tag{2.5}$$

Con dicho análisis podemos obtener:

$$dx_4 = -\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{\sqrt{R^2 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2}}. \tag{2.6}$$

o que su cuadrado es:

$$dx_4{}^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2}. \tag{2.7}$$

Si sustituimos la ecuación (2.7) en la ecuación (2.1), entonces podemos llegar a una nueva expresión que nos describa el elemento de línea sobre una hiperesfera:

$$dl^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2}. \tag{2.8}$$

Por lo tanto la ecuación (2.8) representa el elemento de línea o la distancia que existe entre dos puntos vecinos los cuales, ambos, se encuentran en la superficie de la hiperesfera.

Podemos ahora introducir coordenadas polares esféricas que guardan las siguientes relaciones:

$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi. \tag{2.9}$$

$$x_2 = r \sin\theta \sin\phi. \tag{2.10}$$

$$x_3 = r \cos\theta. \tag{2.11}$$

en donde los rangos de dichas coordenadas son:

$\theta: \quad 0 \rightarrow \pi.$

$\phi: \quad 0 \rightarrow 2\pi.$

$r: \quad 0 \rightarrow R.$

Podemos realizar una primera simplificación o reducción algebraica sobre la ecuación (2.8) para llevar a cabo el cambio de coordenadas cartesianas a esféricas. Tenemos que:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{2.12}$$

y que por lo tanto:

$$dr = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \tag{2.13}$$

obteniendo entonces:

$$dr^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{2.14}$$

Con base en la ecuación (2.14) sería válido decir que:

$$dr^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2. \tag{2.15}$$

Finalmente tomamos la ecuación (2.15) y la ecuación (2.12) y las sustituimos en la ecuación (2.8) para obtener una primera simplificación de la siguiente forma:

$$dl^2 = {dx_1}^2 + {dx_2}^2 + {dx_3}^2 + \frac{dr^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{R^2 - r^2} = {dx_1}^2 + {dx_2}^2 + {dx_3}^2 + \frac{dr^2 r^2}{R^2 - r^2}. \tag{2.16}$$

Será sobre la ecuación (2.16) sobre donde continuemos sustituyendo nuestras coordenadas esféricas, tomando en cuenta que:

$$dx_1 = r\cos\theta\cos\phi\, d\theta + \cos\phi\sin\theta\, dr - r\sin\theta\sin\phi\, d\phi\,. \qquad (2.17)$$

$$dx_2 = r\cos\phi\sin\theta\, d\phi + r\cos\theta\sin\phi\, d\theta + \sin\theta\sin\phi\, dr\,. \qquad (2.18)$$

$$dx_3 = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta. \qquad (2.19)$$

Si sustituimos las ecuaciones (2.17)-(2.19) en (2.16) y simplificamos términos obtenemos finalmente la expresión del elemento de línea sobre la superficie de una hiperesfera:

$$dl^2 = \left[\frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right]. \qquad (2.20)$$

Podemos definir:

$$r' \equiv \frac{r}{R}. \qquad (2.21)$$

el cual sustituido en la ecuación (2.16) nos da:

$$dl^2 = R^2 \left[\frac{dr'^2}{1 - r'^2} + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right]. \qquad (2.22)$$

Ahora bien, si quisiéramos un espacio de esta naturaleza, como el que hemos estado estudiando, pero con curvatura negativa entonces tendríamos que cambiar a R por iR y realizar los mismos pasos anteriores para llegar a:

$$dl^2 = R^2 \left[\frac{dr'^2}{1 + r'^2} + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right]. \qquad (2.23)$$

Por lo tanto podemos introducir un factor k el cual a través de sus valores nos proporcione los diferentes casos de curvatura, teniendo entonces:

$$dl^2 = R^2 \left[\frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \mathrm{Sin}^2\theta\, d\phi^2\right]. \qquad (2.24)$$

en donde k puede tomar tres valores: -1 para el caso de una curvatura negativa, +1 para el caso de una curvatura positiva, y 0 para el caso de una hipersuperficie sin curvatura o plana. Es así como finalmente la ecuación (2.24) es en realidad el elemento de longitud de una hipersuperficie que puede ser una hiperesfera con curvatura positiva o negativa, o simplemente plana.

Teníamos anteriormente que la métrica de Minkowski la podíamos expresar, de manera resumida, como:

$$ds^2 = c^2dt^2 - ({dx_1}^2, {dx_2}^2, {dx_3}^2). \qquad (2.25)$$

en donde el segundo elemento, del lado derecho, representa una métrica espacial Euclidiana que depende de tres dimensiones.

Ahora bien, si quisiéramos convertir la métrica de Minkowski en una métrica de un espacio curvado que se expande, entonces podríamos introducir como nuestra métrica espacial a la métrica de una hipersuperficie, como la hiperesfera general que acabamos de definir, en donde además, y para lograr el efecto de expansión, el radio de la hipersuperficie depende del tiempo. Por lo tanto de hacer esto obtendríamos entonces que:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2\right]. \qquad (2.26)$$

Ésta última es precisamente la métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

Dicha métrica, evidentemente, denota el siguiente sistema de coordenadas generalizadas:

$$q^0 = ct. \qquad (2.27)$$
$$q^1 = r. \qquad (2.28)$$
$$q^2 = \theta. \qquad (2.29)$$
$$q^3 = \phi. \qquad (2.30)$$

Así mismo dado el elemento de longitud podemos encontrar el tensor métrico el cual tendrá la siguiente forma:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-R^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2(t)r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

obteniendo, dada (1.49) y haciendo uso del programa generado por este proyecto de tesis y desglosado en el Apéndice 1, los siguientes símbolos de Christoffel no nulos:

$$\Gamma^0_{11} = \frac{R\dot{R}}{1-kr^2}. \tag{2.32}$$

$$\Gamma^0_{22} = r^2 R\dot{R}. \tag{2.33}$$

$$\Gamma^0_{33} = r^2\sin^2(\theta)R\dot{R}. \tag{2.34}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2}. \tag{2.35}$$

$$\Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2). \tag{2.36}$$

$$\Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\sin^2(\theta). \tag{2.37}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}. \tag{2.38}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin(\theta)\cos\theta. \tag{2.39}$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta. \tag{2.40}$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{R}}{R}. \tag{2.41}$$

Con base en nuestro símbolos de Christoffel calculados y haciendo uso de nuestra ecuación (1.51) podemos calcular las ecuaciones de geodésicas de esta métrica a través de un razonamiento análogo al que realizamos en el caso de la esfera de radio unitario. Llevando a cabo este proceso, de entrada, resulta evidente que en esta ocasión tendremos 4 ecuaciones debido a que estamos en un espacio descrito por 4 coordenadas generalizadas. Finalmente las cuatro ecuaciones que obtendremos, en un sistema de unidades donde $c = 1$, serán:

Para $m = ct = t$, tenemos:

$$\ddot{t} + \frac{R\dot{R}}{1-kr^2}(\dot{r})^2 + r^2 R\dot{R}(\dot{\theta})^2 + r^2(\sin^2\theta)R\dot{R}(\dot{\phi})^2 = 0. \tag{2.42}$$

Para $m = r$, tenemos:

$$\ddot{r} + \frac{kr}{1-kr^2}(\dot{r})^2 - r(1-kr^2)\left(\dot{\theta}\right)^2 - r(1-kr^2)(\sin^2\theta)\left(\dot{\phi}\right)^2 + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{t}\dot{r} = 0. \tag{2.43}$$

Para $m = \theta$, tenemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - (\sin\theta\cos\theta)(\dot{\phi})^2 + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{t}\dot{\theta} = 0. \tag{2.44}$$

Para $m = \phi$, tenemos:

$$\ddot{\phi} + (\cot\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{t}\dot{\phi} = 0. \tag{2.45}$$

2.2.- Conceptos Generales de Gravitación en Relatividad General.

La teoría de la relatividad, desde su postulación especial hasta la general, contribuyó a generar múltiples cambios en la estructura de la Física y en la forma en cómo las teorías de ésta se describen. No es objetivo de esta disertación evaluar o estudiar en su totalidad la teoría de la relatividad; sin embargo, algunos conceptos de ésta serán necesarios para derivar la relación, en los límites adecuados, que deseamos encontrar entre la gravitación, debida a una distribución esférica de masa-energía, en la relatividad general y la gravitación para estas condiciones pero de la teoría Newtoniana.

Un primer concepto con el cual debemos de caminar hacia nuestros objetivos es el espacio-tiempo. Durante siglos las teorías Físicas se describieron en un espacio Euclideo de tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal totalmente independiente de estas. Posteriormente, y como es bien sabido, una relación entre el tiempo y las dimensiones espaciales fue encontrada gracias a la teoría de la relatividad especial y los experimentos que derivaron de ésta. El tiempo usualmente se había visto como una constante que evolucionaba a una tasa fija; sin embargo, dada la teoría de la relatividad especial se encontró que la tasa a la cual el tiempo pasa depende de la velocidad del objeto sobre el cual se mide el tiempo así como de la intensidad de los campos gravitacionales, los cuales pueden hacer que el tiempo transcurra más lento. Experimentos a altas velocidades han demostrado que el tiempo se dilata, o pasa más lento, cuando nos encontramos viajando a velocidades de este tipo de magnitud. Ahora bien, estos efectos sobre el tiempo demuestran que éste no es una constante y que no evoluciona a una tasa fija y que además depende de variables definidas sobre dimensiones espaciales, es decir, lo que la teoría de la relatividad terminó definiendo fue que el espacio y el tiempo se encuentran íntimamente relacionados en un único sistema de coordenadas, típicamente, de cuatro dimensiones. Por lo tanto ahora las teorías Físicas serán descritas en un espacio-tiempo. Es decir, los eventos de todo el Universo sucederán ahora en una entidad geométrica conocida como espacio-tiempo en el cual hemos unificado la localización geométrica en el tiempo y en el espacio como consecuencia de que el cambio entre componentes espaciales y temporales es relativo de acuerdo al estado de movimiento del observador.

Por lo tanto ya sabemos ahora sobre qué escenario sucederán los diferentes eventos que serán descritos bajo las diferentes teorías físicas, ahora necesitamos entender qué características posee este espacio-tiempo. Para nuestros fines sólo será necesario entender o describir una de dichas características y esa es que el espacio-tiempo se puede curvar. La teoría de la relatividad general establece que la presencia de materia-energía en el espacio-tiempo tiene el efecto de distorsionar a éste o, de manera más específica, de curvarlo. Esta curvatura puede ser descrita por un tensor característico de la geometría específica del especio-tiempo en el que nos encontramos que es llamado el tensor de Riemmann. En el caso, por ejemplo, del espacio de la relatividad especial, el cual como hemos visto es el espacio de Minkowski, sabemos que cumple con una condición de no curvatura la cual puede ser expresada como el hecho de que el espacio-tiempo de Minkowski es un espacio-tiempo “plano”. Es importante que recordemos que las leyes de la mecánica clásica nos indican que en un espacio plano mientras no se ejerza fuerza externa alguna sobre un objeto éste permanecerá en estado de reposo o en movimiento a velocidad constante a través de un camino recto.

Ahora bien, hemos escuchado que la relatividad general asocia a una presencia de materia-energía una curvatura del espacio-tiempo; sin embargo, la teoría de la Gravitación Universal de Newton ha asociado durante siglos a una presencia de masa una fuerza llamada gravitación que esta masa ejerce sobre cualquier partícula de prueba que entre a su campo gravitatorio. Es decir, según la teoría de la gravitación de Newton un objeto masivo, de forma esférica ubicado en algún punto, ejercerá una fuerza sobre cualquier otro objeto que se encuentre cercano a él. Si ubicamos una partícula de prueba, que se mueve a velocidad constante, en la vecindad del objeto veremos que la trayectoria de ésta será alejada del camino recto que seguía y tomará ahora, en lugar de ello, un camino o trayectoria curvada hacia la masa que produce el campo y con una aceleración producto de la atracción que siente debido al objeto masivo.

La teoría de la relatividad toma un concepto distinto al respecto de la gravitación. La relatividad general convierte a la gravitación en una teoría geométrica de la gravitación. De acuerdo a la teoría de Einstein la situación recién descrita por la teoría Newtoniana tiene una explicación distinta: la distribución de masa que ubicamos en un lugar del espacio-tiempo va a generar una distorsión o curvatura del mismo. Por lo tanto, un espacio-tiempo vacío es "plano", es decir, luce exactamente igual que el espacio-tiempo de la relatividad especial, en cambio el espacio-tiempo con una distribución de masa-energía luce curvado. Ahora, de la misma manera como en la superficie de un esfera no encontramos líneas rectas, así también en un espacio-tiempo curveado dejan de existir la líneas rectas, lo más cercano que vamos a estar de una línea recta es encontrándonos sobre una geodésica, que es la curva en nuestro espacio-tiempo específico que más se acerca a una trayectoria recta o "derecha", y es por eso que la geodésica es la curva de menor longitud que une dos puntos en un espacio-tiempo (hablando en términos geométricos de la relatividad general). Entonces, según la teoría de la relatividad general de Einstein, una partícula de prueba en movimiento inercial en la vecindad del objeto masivo de nuestro ejemplo, seguirá, como su trayectoria, una geodésica. Es decir, según Einstein, la gravitación no aleja a las partículas en movimiento inercial de su trayectoria en línea recta, simplemente, redefine lo que quiere decir moverse a través de la línea más recta posible.

Por lo tanto ahora bajo la gravitación de la relatividad general se genera una especie de danza cósmica en donde la materia y el espacio-tiempo interactúan indefinidamente, ya que una distribución de masa-energía distorsiona de cierta manera al espacio-tiempo y la distorsión de éste define los caminos específicos bajo los cuales la materia se va a mover, después el movimiento de la materia cambia la distribución de la misma a través del espacio-tiempo haciendo que éste se distorsione de manera diferente haciendo que la materia se mueva ahora de manera distinta y así y así continua esta íntima relación entre el espacio-tiempo y la distribución de masa en él.

Ahora bien, la teoría de la gravitación de la relatividad general es una teoría de la gravitación extendida, que posee capacidad de describir fenómenos gravitatorios de mayores magnitudes de los que la gravitación Newtoniana describe. La teoría de la gravitación de Newton se basó en la observación de fenómenos gravitatorios en la escala planetaria o de nuestro sistema solar, en donde, además de que las situaciones a altas velocidades y las distribuciones de masas distintas a la esférica jamás fueron abordadas, los campos gravitatorios, en comparación con otros que a través del universo podemos encontrar como los de los agujeros negros, son débiles. Sin embargo, para la escala en donde la teoría Newtoniana se enfocó logró describir de manera satisfactoria el fenómeno gravitatorio y sus consecuencias, por lo tanto resulta lógico suponer que una teoría generalizada de la gravitación, como lo es la de Einstein, debe, en los límites Newtonianos (bajas velocidades, campos débiles), retomar o regenerar a la afamada Teoría de la Gravitación Universal del célebre Físico-Matemático Inglés Sir Isaac Newton. Este último punto es precisamente el objetivo que hemos descrito desde un principio que posee esta tesis.

2.3.- Métrica de Schwarzschild y Caracterización.

Hemos ya analizado la raíz de dónde surge el objetivo de esta tesis. Hemos asimismo, en el Capítulo 1, generado las herramientas matemáticas y geométricas, a través de la mecánica clásica, que nos permitirán describir, en ciertos aspectos y límites, la gravitación según la teoría de la relatividad general. Es decir, ya contamos con herramientas, como la métrica, el tensor métrico y los Símbolos de Christoffel, las cuales nos permiten llegar a la descripción y ecuación de las geodésicas de los espacios-tiempos en los que nos encontramos. Por lo tanto si nos encontramos ahora sumergidos en un espacio-tiempo curvado según el efecto de una distribución de masa esférica entonces si conocemos su métrica podemos llegar a su descripción gravitatoria relativista y en los límites apropiados, como mencionamos al final de la sección anterior, podemos intentar comprobar nuestra hipótesis al respecto de la recuperación de la gravitación Newtoniana.

No buscaremos la deducción o surgimiento analítico preciso, según los límites y alcances de esta disertación, de la métrica que describe a un espacio-tiempo curvo consecuencia de una distribución de masa esférica, sino que teniendo esta solución de métrica la caracterizaremos, encontraremos sus geodésicas y buscaremos el límite de las bajas velocidades y los campos débiles.

La métrica que describe el espacio-tiempo curvado debido a una distribución esférica de masa es la métrica de Schwarzschild, en la cual tenemos que dos puntos vecinos se encuentran a una distancia definida de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 + c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 . \tag{2.46}$$

en donde si tomamos a $m = GM$, sabiendo que M es la masa del objeto que curva el espacio, entonces la ecuación (2.42) se convertirá en:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 + c^2\left(1-\frac{2m}{c^2r}\right)dt^2 . \tag{2.47}$$

de donde se observa claramente cuáles son las coordenadas generalizadas con las que se trabaja:

$$q^0 = ct . \tag{2.48}$$
$$q^1 = r . \tag{2.49}$$
$$q^2 = \theta . \tag{2.50}$$
$$q^3 = \phi . \tag{2.51}$$

Así mismo dada (2.47) y haciendo uso de (1.52) podemos obtener el tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, de dicho espacio-tiempo, el cual será:

$$\begin{pmatrix} -\left(1-\dfrac{2m}{c^2r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2sen^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2\left(1-\dfrac{2m}{c^2r}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Una vez dado el tensor métrico podemos entonces, haciendo uso de (1.49) y de la dinámica de programación explicada en el Apéndice 2, calcular los símbolos de Christoffel correspondientes a dicha métrica y así es como obtenemos que aquellos que no son nulos valen lo siguiente:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{c}^2\left(1-\frac{2\mathrm{m}}{\mathrm{c}^2\mathrm{r}}\right)\mathrm{r}^2}. \tag{2.53}$$

$$\Gamma^0_{11} = \left(-1+\frac{2\mathrm{m}}{\mathrm{c}^2\mathrm{r}}\right)\mathrm{r}. \tag{2.54}$$

$$\Gamma^0_{22} = \left(-1+\frac{2\mathrm{m}}{\mathrm{c}^2\mathrm{r}}\right)\mathrm{r}\sin^2(\theta). \tag{2.55}$$

$$\Gamma^0_{33} = -\frac{\mathrm{m}\left(-1+\frac{2\mathrm{m}}{\mathrm{c}^2\mathrm{r}}\right)}{\mathrm{r}^2}. \tag{2.56}$$

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{1}{\mathrm{r}}. \tag{2.57}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\cos(\theta)\sin(\theta). \tag{2.58}$$

$$\Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{02} = \frac{1}{\mathrm{r}}. \tag{2.59}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta. \tag{2.60}$$

$$\Gamma^3_{30} = \Gamma^3_{03} = \frac{m}{c^2\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right) r^2}. \tag{2.61}$$

Dados los símbolos de Christoffel continuamos con la misma dinámica de caracterización que utilizamos para la métrica FRW y entonces procedemos a calcular la expresión de las ecuaciones de geodésicas para la métrica de Schwarzschild haciendo uso de (1.51) y para un sistema de unidades donde $c = 1$, obteniendo finalmente las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{t} - \frac{m}{r^2 c^2\left(r - \frac{2m}{c^2}\right)} \dot{t}\dot{t} + \left(-1 + \frac{2m}{c^2 r}\right) r\, \dot{r}\dot{r} + \left(-1 + \frac{2m}{c^2 r}\right) r \,\mathrm{Sin}^2\theta\, \dot{\theta}\dot{\theta} - \frac{m\left(-1 + \frac{2m}{c^2 r}\right)}{r^2} \dot{\phi}\dot{\phi} = 0. \tag{2.62}$$

$$\ddot{r} + \frac{2}{r}\dot{t}\dot{r} - \cos\theta\sin\theta\, \dot{\theta}\dot{\theta} = 0. \tag{2.63}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{t}\dot{\theta} - 2\cot\theta\, \dot{r}\dot{\theta} = 0. \tag{2.64}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2m}{r^2 c^2\left(r - \frac{2m}{c^2}\right)} \dot{t}\dot{\phi} = 0. \tag{2.65}$$

Habiendo entonces conocido los conceptos básicos de la relatividad general y de la gravitación que esta teoría describe así como dos de las principales y más básicas métricas de esta teoría gravitatoria, entre ellas la de nuestra mayor importancia: la métrica de Schawarzschild, pasaremos ahora al Capítulo 3 en donde llevaremos acabo los procesos de simplificación, en el límite Newtoniano, de la teoría gravitatoria basada en geodésicas a la teoría de gravitación como fuerza.