Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет ИТМО"Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6 по курсу «Информатика»

Группа: **P3131**
Выполнил: Друян Э. А.
Вариант: **20**

Санкт-Петербург
2021 г.

5. Определить угол треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части.

Разбор задач первого тура

1. Ясно, что каждое из восьми срезаемых у куба по углам тел является правильной треугольной пирамидой с прямыми углами между боковыми ребрами (рис. 1). Если

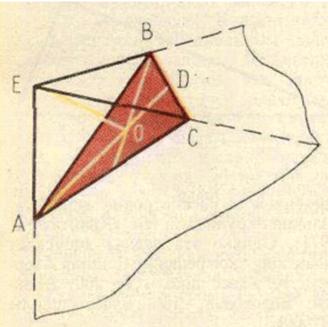

Рис. 1.

обозначить сторону основания пирамиды через b, то $AD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $OD = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, $CD = \frac{b}{2}$, и тогда по теореме Пифагора высота пирамиды $EO = \frac{b\sqrt{6}}{6}$. Площадь основания равна $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

Поэтому объем такой пирамиды равен $\frac{b^3\sqrt{2}}{24}$, а объем тела, получающегося из куба срезом весьми таких пирамд, равен

$$a^3 - \frac{b^3\sqrt{2}}{3}. \qquad (1)$$

Так как по условию задачи от граней куба должны остаться правильные многоугольники, то решений два. Могут быть восьмиугольники или квадраты (рис. 2 *а*, *б*).

В первом случае $b = a(\sqrt{2} - 1)$, и тогда из (1) после преобразований получаем $V = \frac{7a^3(\sqrt{2}-1)}{3}$.

Во втором случае $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, и тогда из (1) находим $V = \frac{5a^3}{6}$.

Заметим, что лишь 20% школьников нашли оба решения задачи. Остальные находили только одно решение. При этом предпочтения не было для кого-либо одного из двух многогранников — каждый получил приблизительное равное число голосов.

Фигура	Король	Ферзь	Ладья	Слон	Конь	Пешка
Число внешней устойчивости	9	5	8	8	12	32
Число внутренней устойчивости	16	8	8	14	32	32

Табл. 1.

По причине требований к «лабе» пришлось добавить таблицу[1] и сноску.

[1] Таблица со страницы 51.

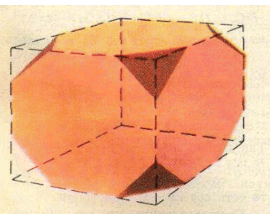

Рис. 2а.

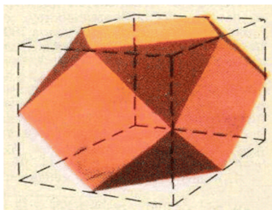

Рис. 2б.

Случай с методом математической индукции

Однажды учитель задал ученикам 10-го класса на дом следующую задачу:

Доказать, пользуясь методом математической индукции, что при любом натуральном n верно неравенство

$$P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Коля В. нашел дома следующее решение:

а) При $n = 1$ неравенство верно, так как
$$P_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

б) Покажем, что из условия $P_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ вытекает справедливость неравенства $P_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}},$$

или

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{n+1}{n+2}},$$

или

$$4n^3 + 12n^2 + 9n + 2 < \\ < 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4,$$

или

$$0 < 3n + 2,$$

что, очевидно, верно. Таким образом, справедливость доказываемого неравенства следует из приципа математической индукции.

Однако, рассказывая в школе это решение, Коля забыл поставить в знаменателе единицу и стал доказывать более «грубое» неравенство:

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Вот что у него получилось:

а) При $n = 1$ неравенство верно, так как
$$P_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{1}.$$

б) Покажем, что из условия $P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ следует $P_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}},$$

или

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

или

$$(2n+1)^2(n+1) < 4(n+1)^2 n,$$

или

$$4n^3 + 8n^2 + 5n + 1 < 4n^3 + 8n^3 + 4n,$$

или

$$n + 1 < 0.$$

Получился абсурд. Более точное неравенство оказалось и более легким для доказательства. Почему?

Разобравшимся в этом вопросе предлагаем доказать два неравенства:

1. $P_n < \frac{1}{\sqrt{3{,}1n}}$.
   Интересно, что в этом неравенстве коэффициент 3,1 нельзя заменить на 3,2. Самый большой коэффициент, при котором оно остатся верным, равен π (отношение длины окружности к диаметру).

2. $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$.

Links for the task:

1. Main page.
2. Table is here.
3. Additional task.
4. My GitHub Repository.

Additional tasks: $\sum_{b=1}^{\infty} \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$;

$$\sum_{b=0}^{\infty} \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$