



**SORBONNE  
UNIVERSITÉ**

COMPTE-RENDU DE RADIOASTRONOMIE :  
ROTATION DE LA VOIE LACTÉE

Physique Fondamentale et Applications : Première Année

Physique Expérimentale II : MU4PY207 - S2

Réalisé par :  
MARTINI *Christophe*  
n° : 28706976

Courrier électronique : christophe.martini@etu.sorbonne-universite.fr

et :  
HADDAD *Rayan*  
n° : 3801546

Courrier électronique : rayan.haddad@etu.sorbonne-universite.fr

Supervisé par :  
ATEK *Hakim*  
Courrier électronique : atek@iap.fr

Rendu le : 30/04/2022

# Table des matières

<b>Liste des symboles</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.1 Contexte Physique . . . . .	4
1.1.1 Structure de la Voie-Lactée . . . . .	4
1.1.2 Spectroscopie . . . . .	4
1.1.3 Méthode Radiométrique . . . . .	5
1.2 Présentation du Problème . . . . .	5
1.2.1 Objectifs . . . . .	5
<b>2 Questions Préliminaires</b>	<b>6</b>
2.1 Introduction à la Radioastronomie . . . . .	6
2.1.1 Question 1 : Événements importants de la radioastronomie . . . . .	6
2.1.2 Question 2 : Avantages de la radioastronomie . . . . .	6
2.2 Corps Noir et Température de Brillance . . . . .	6
2.2.1 Question 1 : Modèle de Rayleigh-Jeans . . . . .	6
2.2.2 Question 2 : Flux radiatif . . . . .	6
2.2.3 Question 3 : Puissance du signal . . . . .	7
2.3 La Raie à 21 cm de l'Hydrogène . . . . .	7
2.3.1 Question 1 : Transition hyperfine de l'hydrogène . . . . .	7
2.4 Mesure de l'Effet Doppler-Fizeau . . . . .	7
2.4.1 Question 1 : Effet Doppler-Fizeau et longueur de bande . . . . .	7
2.5 Vitesse de Rotation de la Galaxie . . . . .	8
2.5.1 Question 1 : Équations du mouvement galactique . . . . .	8
2.6 Bras Spiraux . . . . .	8
2.6.1 Question 1 . . . . .	8
2.7 Potentiels Gravitationnels . . . . .	8
2.7.1 Question 1 : Dérivation du potentiel gravitationnel . . . . .	8
<b>3 Developpement</b>	<b>9</b>
3.1 Manipulations . . . . .	9
3.2 Mesures . . . . .	9
3.2.1 Observations à distance . . . . .	9
3.2.2 Détermination de la masse de la Voie Lactée . . . . .	11
<b>4 Analyse des Résultats</b>	<b>13</b>
4.1 Discussion et incertitudes . . . . .	13
4.1.1 Vitesses de rotation . . . . .	13
4.1.2 Masse dans la galaxie . . . . .	14
<b>5 Conclusion</b>	<b>16</b>
<b>Appendices</b>	<b>17</b>
<b>A Annexe</b>	<b>18</b>
A.1 Valeurs des Constantes . . . . .	18
A.1.1 Constantes fondamentales . . . . .	18
A.1.2 Constantes du problème . . . . .	18
A.2 Développement des Calculs Mathématiques . . . . .	18
A.2.1 Dérivation du potentiel gravitationnel . . . . .	18
A.3 Code numérique . . . . .	18

# Table des figures

1.1	Galaxie NGC 2525. . . . .	4
3.1	Coordonnées galactiques. . . . .	9
3.2	Interface du LAB pour l'obtention des données. . . . .	10
3.3	Courbe de rotation obtenue à partir des données expérimentales. . . . .	11
4.1	Courbe de vitesse de rotation expérimentale et modèle statistique. . . . .	14
4.2	Masse de la Voie-Lactée en fonction du rayon galactique. . . . .	15

# Liste des tableaux

3.1	Premières mesures de la vitesse maximale et la distance au centre galactique. . . . .	10
3.2	Mesures de la distance et la vitesse maximale en fonction de la longitude galactique. . . . .	11
4.1	Rayons galactiques, vitesses de rotation et leurs incertitudes associées. . . . .	13
4.2	Distance et masse estimée de la voie lactée avec ses incertitudes . . . . .	15

# Liste des symboles

$\delta$	Diamètre apparent
$\Delta\nu$	Largeur de bande en fréquence
$\eta$	Rendement
$\lambda$	Longueur d'onde
$\nu$	Fréquence
$\Phi$	Potentiel gravitationnel
$\Phi_{toomre}$	Potentiel gravitationnel de Toomre
$\rho$	Densité de matière
$\theta$	Coordonnée azimutale
$\varphi$	Coordonnée équatoriale
$A$	Surface
$a$	Demi-grand axe du disque galactique
$b$	Rayon caractéristique du bulbe galactique
$B_\nu$	Densité énergétique spectrale du corps noir
$c$	Vitesse de la lumière dans le vide
$F_\nu$	Flux d'énergie radiative monochromatique
$G$	Constante universelle de gravitation
$h$	Constante de Planck
$k_b$	Constante de Boltzmann
$l$	Longitude galactique
$M$	Masse
$M_g$	Masse de gaz
$M_s$	Masse stellaire
$M_\odot$	Masse solaire
$P$	Puissance
$r$	Coordonnée radiale
$R_0$	Distance du soleil au centre de la galaxie
$T$	Température
$T_\odot$	Temperature du soleil
$v$	Vitesse de rotation
$v_0$	Vitesse du soleil par rapport au centre de la galaxie

# 1. Introduction

## 1.1 Contexte Physique

### 1.1.1 Structure de la Voie-Lactée

La Voie-Lactée est une galaxie de type spirale barrée (Sb). Les galaxies spirales barrées se composent de deux parties principales, au centre d'un bulbe allongé sur une composante suivi d'un disque constitué de bras spiraux.<sup>1</sup> Un exemple de galaxie spirale barrée est montré dans la figure 1.1.<sup>2</sup>



Figure 1.1 – Galaxie NGC 2525.

Les galaxies de taille moyenne, la Voie-Lactée incluse, sont des systèmes stellaires composés d'un ordre de  $10^{11}$  étoiles,<sup>3</sup> c'est pour cela que, dans le but de les étudier, il est nécessaire de les caractériser par des grandeurs macroscopiques. Dans ce cadre, les grandeurs principales qu'on doit introduire sont une densité de matière finie et continue  $\rho$ , son potentiel gravitationnel associé  $\Phi$  et la vitesse de rotation  $v$  qui, au premier ordre peut être associée à celle d'un disque.<sup>4</sup>

Dans le cas de la Voie-Lactée, la vitesse de rotation des étoiles à  $8,5 \text{ kpc}$ , c'est à dire, à la distance du soleil au centre de la galaxie, est estimée à  $220 \text{ km.s}^{-1}$ .<sup>5</sup> Par ailleurs, la masse totale de la galaxie estimée à  $150 \text{ kpc}$  (incluant le halo de matière noire) a été récemment estimée à  $M \sim 3 \times 10^{11} M_{\odot}$ , pendant qu'avec le théorème du viriel la masse estimée est de  $M \sim 10^{11} M_{\odot}$ . En outre, il est important de préciser que la masse visible de la Voie-Lactée est composée de 90% de masse stellaire  $M_s$  puis le restant s'agit de la masse de gas interstellaire  $M_g$ .<sup>6</sup>

### 1.1.2 Spectroscopie

La spectroscopie est un des outils principaux utilisés pour extraire les propriétés des systèmes astrophysiques. À travers elle, il est possible de calculer la température de corps noir des étoiles (loi de Wien), mesurer les périodes

---

1. Longair, M. S. (2007). *Galaxy formation*. Springer Science & Business Media.

2. NASA & Riess, A. (2019). Ngc 2525.

3. Duric, N. (2004). *Advanced astrophysics*. Cambridge University Press.

4. ibid.

5. Longair, M. S. (2007). *Galaxy formation*. Springer Science & Business Media.

6. Sofue, Y. (2013). Mass distribution and rotation curve in the galaxy. *Planets, Stars and Stellar Systems*, pages 985–1037.

et vitesses de rotation de certains astres, déterminer la composition de corps célestes (transitions atomiques), entre autres. Ce travail concerne principalement la spectroscopie de transitions discrètes donc il est pertinent de restreindre notre analyse à cette dernière.

Les transitions atomiques d'émission entre niveaux d'énergie se produisent lorsqu'un atome passe d'un certain niveau d'énergie à un niveau d'énergie plus faible en libérant un photon. Dans ce cas, en observant un spectre atomique on remarque des raies discrètes d'émission correspondantes, chacune, à une transition spécifique du système en question. Le modèle le plus simple possible pour expliquer ces transitions est le modèle de l'atome d'hydrogène à cause de son seul électron de valence, ce qui revient à étudier un système à deux corps à potentiel central. Ce dernier tient compte de l'énergie cinétique de l'électron ainsi que du potentiel coulombien entre le noyau et l'électron et il prévoit des transitions énergétiques de l'ordre de  $1 - 10^1 \text{ eV}$ . Néanmoins, à travers le modèle de structure fine, il est possible d'approfondir le modèle simple de l'atome d'hydrogène en tenant compte des effets relativistes et du couplage spin-orbite dans le hamiltonien, non seulement pour lever des dégénérescences, mais aussi pour obtenir des corrections sur les niveaux d'énergie. De même, il existe un modèle plus précis dit de structure hyperfine qui prend compte de l'interaction entre le spin du noyau et celui de l'électron pour obtenir à nouveau une levée de dégénérescence et des corrections sur les énergies. Les effets de la structure fine et hyperfine sur l'atome d'hydrogène sont respectivement  $\sim 10^3$  et  $\sim 10^6$  fois plus faibles que les ordres de grandeur du modèle simple.

Les transitions énergétiques de la structure hyperfine sont alors produites par le changement du spin soit de l'électron soit du noyau. Dans le cas spécifique du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, la transition hyperfine est produite par le changement du spin "up" au spin "down" de l'électron ce qui produit l'émission d'un photon avec une longueur d'onde de  $21 \text{ cm}$ .

L'univers est constitué principalement constitué de gaz légers, 73% d'hydrogène et 25% d'hélium,<sup>7</sup> de plus, la température correspondante à l'énergie d'ionisation de l'hydrogène est de l'ordre de  $\sim 10^5 \text{ K}$  tandis que la température des nuages interstellaires est de  $\sim 10 \text{ K}$  et la température solaire de  $T_{\odot} 5800 \text{ K}$ ,<sup>8</sup> par conséquent, il est théoriquement rare d'observer des transitions de l'hydrogène en ne tenant compte ni des effets relativistes ni de ceux de couplage. Ainsi, en considérant la température interstellaire et, les ordres de grandeur des corrections de la structure fine et hyperfine, il est pertinent d'utiliser la raie de  $21 \text{ cm}$  de la transition hyperfine de l'hydrogène, correspondante à une température de  $\sim 10^{-2}$ , pour analyser la dynamique galactique.<sup>9</sup> Ceci car il est correct de supposer que l'hydrogène se trouve dans un état non ionisé, donc dans le niveau d'énergie fondamental du modèle simple et que la transition la plus basse du niveau hyperfin aura la plus grande probabilité de se produire dans le milieu interstellaire.

### 1.1.3 Méthode Radiométrique

La raie de l'hydrogène à  $21 \text{ cm}$  correspond, dans le spectre électromagnétique, à une onde radio, c'est pour cela que la mesure de cette raie doit se faire par radiométrie. Dans le cas de la voie lactée on peut se servir de la géométrie des bras spiraux pour réaliser des mesures. Dans ce cadre, une antenne pointée sur une ligne de visée déterminée capte les émissions de la raie de  $21 \text{ cm}$  des objets se trouvant sur cette ligne et mesure la projection de leurs vitesse sur cet axe à travers l'effet Doppler-Fizeau. À cause de la géométrie de la galaxie, les objets mesurés se trouvent principalement sur les bras spiraux de la galaxie, par conséquent, les mesures réalisées représentent les vitesses des bras galactiques et ainsi il est possible de déterminer leurs vitesses de rotation et celle de la galaxie.

## 1.2 Présentation du Problème

### 1.2.1 Objectifs

La finalité de ce travail sera de déterminer expérimentalement la masse de la galaxie. Pour cela, il sera nécessaire, premièrement, de mesurer les projections des vitesses des bras spiraux sur un axe de la galaxie. Dans un deuxième temps, on devra calculer les vitesses de rotation des bras à partir de données obtenues. Pour terminer, on retrouvera par le calcul la masse de la galaxie à partir des vitesses de rotation.

7. <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/c/Chemical+Composition>. Consulté le 17/03/2022.

8. Résultat direct de la loi de Wien.

9. Conversions de températures réalisées avec les constantes fondamentales de la base de données du NIST <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.

## 2. Questions Préliminaires

### 2.1 Introduction à la Radioastronomie

#### 2.1.1 Question 1 : Événements importants de la radioastronomie

La radioastronomie est une technique qui permet de réaliser des mesures astronomiques à travers l'envoi, la réception et l'analyse d'ondes radio. Découverte accidentellement par Karl Jansky en 1933 après la réception d'ondes radio d'origine cosmique, la radioastronomie prend du temps à s'instaurer comme une technique reconnue dans le domaine astrophysique. Ce n'est qu'en 1943 que Grote Reber publia une carte du ciel grâce à des données captées depuis 1937. Il fallut attendre la fin de la Seconde Guerre Mondiale pour qu'une recherche plus approfondie et un usage plus courant de la radioastronomie soient mis en place, à ce moment des radars allemands étudiaient les émissions radios de météores et de tempêtes solaires. En 1951, peu de temps après, Harold Ewen et Edward Purcell découvrent la raie d'émission galactique de l'hydrogène  $\lambda = 21$  cm. La suivante grande découverte se produit en 1962 quand Penzias et Wilson découvrent la radiation du fond cosmologique.

#### 2.1.2 Question 2 : Avantages de la radioastronomie

La radioastronomie présente divers avantages comme le fait que les ondes radio ne soient pas affectées par l'atmosphère terrestre, que les antennes peuvent être utilisées aussi bien le jour que la nuit, la non diffusion des ondes radio dans l'espace, la détection de nuages d'hydrogène froid et de certains gaz qui émettent dans la bande des ondes radio.

### 2.2 Corps Noir et Température de Brillance

#### 2.2.1 Question 1 : Modèle de Rayleigh-Jeans

On commence par calculer le rapport  $h\nu/k_bT$  pour une température de 100 K et une fréquence de 10 GHz :

$$\frac{h\nu}{k_bT} = 4,79924 \times 10^{-6}. \quad (2.1)$$

Puisque  $h\nu/k_bT \ll 1$  donc il est possible de réaliser un développement limité de l'intensité spécifique sur ce rapport. L'intensité spécifique est donnée par la densité spectrale du rayonnement du corps noir :

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_bT} - 1}. \quad (2.2)$$

En utilisant un développement en série de Maclaurin au premier ordre sur l'exponentielle on obtient :

$$B_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{h\nu/k_bT}, \quad (2.3a)$$

$$B_\nu \approx \frac{2k_bT\nu^2}{c^2}. \quad (2.3b)$$

#### 2.2.2 Question 2 : Flux radiatif

Premièrement, il est nécessaire de poser la façon de convertir le diamètre apparent  $\delta$  en distance  $d$  observée depuis une distance  $D$ , pour cela on pose :

$$\delta = 2 \arctan(d/2D), \quad (2.4a)$$

et sous l'approximation des petits angles,  $\delta \ll 1$  :

$$\delta \approx d/D. \quad (2.4b)$$

Pour continuer, sous les hypothèses du modèle de Rayleigh-Jeans, une température de corps noir  $T_b = 10^5 K$  et une longueur d'onde  $\lambda = 21 cm$ , on a pour un corps de surface d'un disque de diamètre apparent de  $0,5$  degrés :

$$\int d\Omega = \pi \left( \frac{0,5 \times \pi}{360} \right)^2 \approx 5,981149 \times 10^{-5} str, \quad (2.5)$$

et donc :

$$F_\nu \approx \frac{2k_b T}{\lambda^2} \int d\Omega \approx \frac{2 \times 1,380649 \times 10^{-23} \times 10^5}{(21 \times 10^{-2})^2} \times 5,981149 \times 10^{-5} \approx 3,76091 \times 10^5 Jy \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Question 3 : Puissance du signal

On peut calculer la puissance mesurée par une antenne avec la formule :

$$F_\nu = \frac{2P}{\eta A \Delta\nu}, \quad (2.7)$$

où  $P$  est la puissance,  $A$  la surface collectrice,  $\eta$  l'efficacité et  $\Delta\nu$  la largeur de bande. On calcule la puissance pour l'observation du soleil  $P_s$  pour  $\eta = 0,8$ , une antenne de  $2,3 m$  de diamètre et une largeur de bande de  $1,22 MHz$  :

$$P_s = \frac{3,76091 \times 10^{-21} \times 0,8 \times \pi \times (1,5)^2 \times 1,22 \times 10^6}{2} \approx 1,297314 \times 10^{-11} W. \quad (2.8)$$

En comparant avec la puissance maximale d'un téléphone portable  $P_p$  on obtient :

$$\frac{P_s}{P_p} \approx 1,89124 \times 10^{-14}, \quad (2.9)$$

on observe alors que  $P_s \ll P_p$ .

## 2.3 La Raie à 21 cm de l'Hydrogène

### 2.3.1 Question 1 : Transition hyperfine de l'hydrogène

La raie à 21cm de l'hydrogène est produite lors d'une transition due à la structure hyperfine de l'hydrogène. En d'autres mots, elle est due à la transition entre les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène qui agissent sur le couplage entre le spin de l'électron et celui du proton. Dans ce cadre, quand la projection du spin de l'électron passe de  $\hbar/2$  à  $-\hbar/2$  et que le spin du proton ne change pas, une émission de photon correspondante à 21cm se produit du au changement du nombre quantique  $F$  qui traduit le couplage des spins.

## 2.4 Mesure de l'Effet Doppler-Fizeau

L'effet Doppler-Fizeau exprime la différence entre la fréquence émise  $f_{rest}$  par une source en mouvement et la fréquence perçue par un observateur sur cette ligne de mouvement  $f_{obs}$ . L'effet en question se traduit par :

$$f_{obs} = f_{rest} \left( 1 - \frac{v_r}{c} \right), \quad (2.10)$$

où  $v_r$  est la vitesse de la source et  $c$  la vitesse du signal, dans ce cas, la vitesse de la lumière dans le vide.

### 2.4.1 Question 1 : Effet Doppler-Fizeau et longueur de bande

Pour une vitesse de  $220 km/s$  et un signal électromagnétique de longueur d'onde de  $21 cm$  nous avons alors que :<sup>1</sup>

$$f_{obs} = 0.999266159 \times f_{rest} = 1,426535514 GHz \quad (2.11)$$

et

$$\Delta\nu = 1,2 \times 10^6 \times 21 \times 10^{-2} = 252 km/s \quad (2.12)$$

---

1. La valeur de  $c$  utilisée est celle du NIST et la longueur d'onde  $21 cm$ .



## 2.5 Vitesse de Rotation de la Galaxie

Les équations relatives au mouvement de la galaxie sont :

### 2.5.1 Question 1 : Équations du mouvement galactique

$$r(l) = R_0 \sin(l), \quad (2.13a)$$

et

$$v(l) = v_{rmax} + v_0 \sin(l), \quad (2.13b)$$

où  $r(l)$  est la distance la plus petite entre un nuage et le centre galactique,  $R_0 = 8,5 \text{ kpc}$  la distance entre le soleil et le centre galactique,  $v_{rmax}$  la vitesse maximale assumée tangente à la rotation de la galaxie et associée au nuage le plus proche du centre galactique,  $v_0 = 220 \text{ km/s}$  la vitesse du soleil dans la galaxie et  $l$  la longitude galactique.

## 2.6 Bras Spiraux

### 2.6.1 Question 1

## 2.7 Potentiels Gravitationnels

La vitesse de rotation de la galaxie dans le plan galactique  $v(r)$  est donnée par :

$$v^2 = r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{z=0}. \quad (2.14)$$

Un modèle simplifié du potentiel est celui de Toomre :

$$\Phi_{toomre}(r, z) = - \frac{GM}{\sqrt{r^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}, \quad (2.15)$$

où  $a$  est le demi-grand axe du disque galactique,  $b$  le rayon caractéristique du bulbe galactique,  $G$  la constante universelle de gravitation et  $M$  la masse de la galaxie.

### 2.7.1 Question 1 : Dérivation du potentiel gravitationnel

En posant  $z = 0$  dans l'expression 2.15 on arrive à la simplifier sous la forme :

$$\Phi_{toomre}(r, 0) = - \frac{GM}{\sqrt{r^2 + (a + b)^2}}, \quad (2.16)$$

puis en dérivant on obtient :<sup>2</sup>

$$M = \frac{v^2(r^2 + (a + b)^2)^{3/2}}{Gr^2}. \quad (2.17)$$

---

2. Voir annexe A.2.1 pour la dérivation détaillée.

# 3. Developpement

## 3.1 Manipulations

À travers l'interface EU-HOU nous avons utilisé deux antennes radio pour mesurer la vitesse de rotation de la galaxie, la première situé à l'IAP et la deuxième à Krakow. Premièrement nous avons choisis une région de l'espace à étudier. Puisque le soleil est excentré du centre galactique comme c'est montré sur la figure 3.1,<sup>1</sup> il est nécessaire de choisir une ligne de visée pertinente de façon à optimiser les mesures.

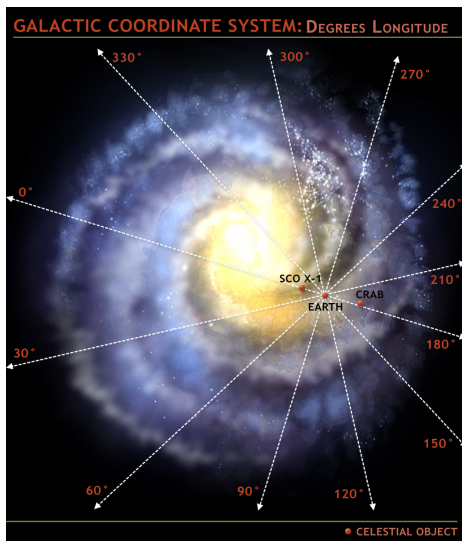


Figure 3.1 – Coordonnées galactiques.

Dans ce cadre, le plus pertinent est de choisir les régions de densité les plus élevées pour augmenter la probabilité d'obtenir une quantité satisfaisante de mesures. Par conséquent, d'après la figure 3.1, les quadrants I (de  $l=0^\circ$  à  $l=90^\circ$ ) et IV (de  $l=270^\circ$  à  $l=360^\circ$ ) sont les plus adaptés pour réaliser des mesures. Lors de la séance expérimentale, d'entre les deux seul le quadrant I était accessible, ainsi nous avons concentré nos mesures de  $l=0^\circ$  à  $l=90^\circ$ .

Pour continuer, nous avons sélectionné une bande de fréquence de  $1400\text{ MHz}$  à  $1440\text{ MHz}$  qui permet de capter les fréquences désirées en tenant compte de l'effet Doppler-Fizeau.

Nous avons ensuite commencé à prendre les mesures et sélectionné les distances les plus proches du centre galactique ainsi que leurs vitesses associées.

## 3.2 Mesures

### 3.2.1 Observations à distance

#### Question 1 : Premières Observations

À travers l'interface EU-HOU nous avons effectué deux premières mesures sur le plan galactique ( $z=0$ ) qui se montrent dans le tableau 3.1.

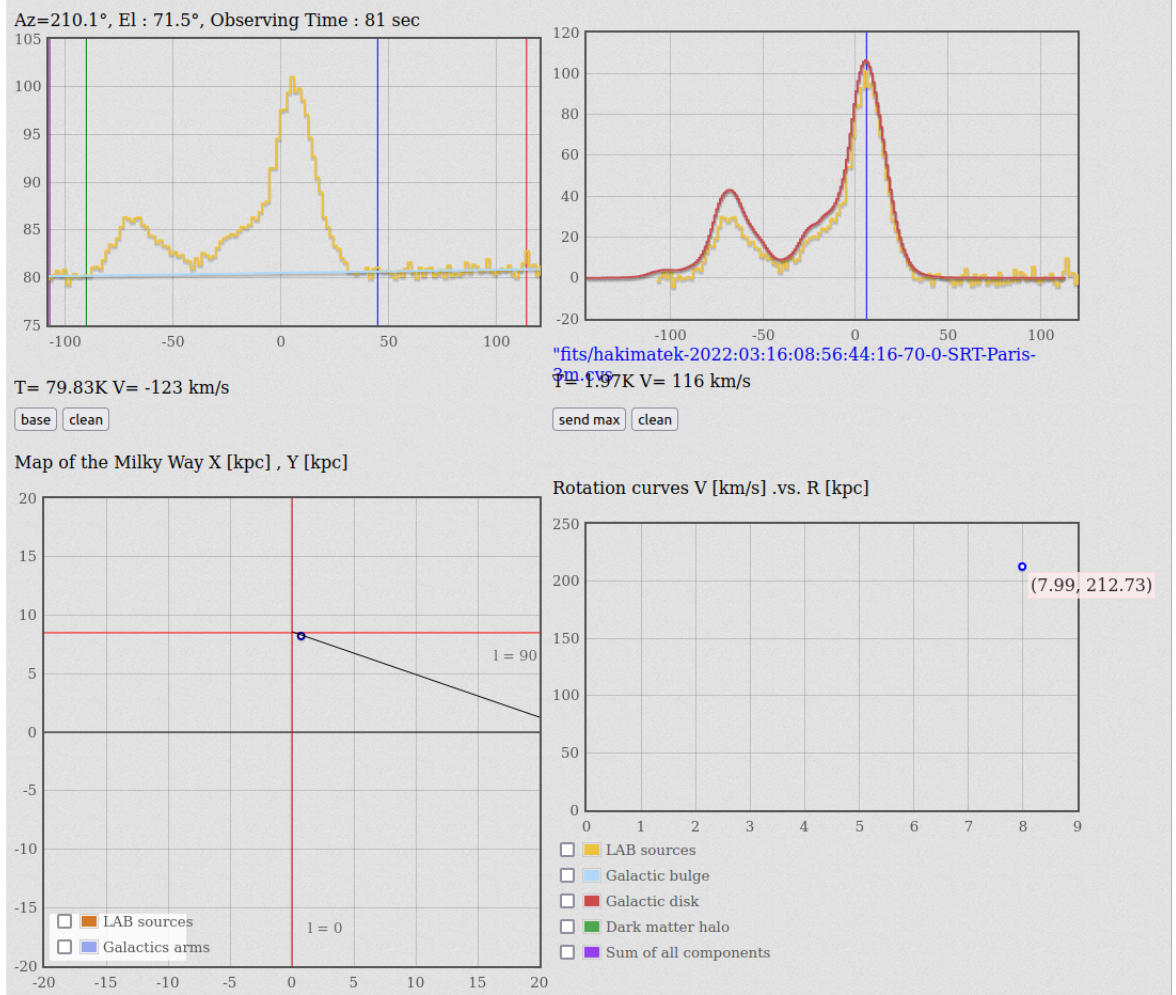
En outre, une image de l'interface se montre dans la figure 3.2 dans laquelle on peut observer le spectre des vitesses et un spectre superposé par l'interface. Dans ces deux derniers on peut observer que le spectre mesuré est rempli de bruit et monté sur une ligne de base différente de 0 tandis que, le spectre du LAB est un lissage du spectre remis à 0. De plus, on observe sur la même figure 4 cadrans. Le premier nous permet d'afficher notre mesure, mesure ayant beaucoup de bruit. Le second cadrant nous permet d'afficher une version de notre spectre compilant l'ensemble des mesures d'archives et en faisant une moyenne ce qui permet d'avoir une courbe

1. Image obtenue de <https://astronomy.ua.edu/undergraduate-program/course-resources-astronomy/lab-exercise-8-cosmic-distributions-and-the-galactic-ecology/1293-2/>, consulté le 21/03/2022.

Mesure	Antenne	Longitude[°]	Largeur de bande[MHz]	Temps d'observation[min]	$r[kpc]$	$v_{max}[km/s]$
1	Paris	36	1400-1440	1	5	81
2	Krakow	70	1400-1440	1	7,99	5

**Table 3.1** – Premières mesures de la vitesse maximale et la distance au centre galactique.

très lisse. le troisième cadran nous donne la position de notre point mesuré sur une carte de la voie lactée. le quatrième cadrant finalement donne la vitesse de rotation mesurée en fonction de la distance.



**Figure 3.2** – Interface du LAB pour l'obtention des données.

Dans ce contexte, les mesures présentent deux types de bruit, l'un dit de fond et l'autre aléatoire. Le bruit aléatoire  $\sigma_T$  est relié à la température de la source, la bande de fréquence et le temps d'observation de la façon suivante :<sup>2</sup>

$$\sigma_T = \frac{T_s}{\sqrt{\Delta\nu\tau}}. \quad (3.1)$$

Dans ce cas, le bruit aléatoire est calculé comme une déviation RMSE de la mesure attendue.

D'autre part, le bruit de fond est composé peut s'exprimer par la contribution non désirée de la température de facteurs externes. Ainsi on peut définir :

$$T_s = T_{cmb} + T_{source} + T_{rsb} + f(T_{atm}) + T_{spill} + T_r + \dots, \quad (3.2)$$

où  $s$  désigne le système,  $cmb$  le fond cosmologique,  $source$  la source observée,  $rsb$  le fond radio,  $atm$  l'atmosphère,  $spill$  due à la radiation de terre et  $r$  le récepteur.<sup>3</sup>

2. Ransom, S. *Radio Astronomy: Sensitivity and Noise*. <https://events.asiaa.sinica.edu.tw/school/20160815/talk/sransom0818.pdf>. Consulté le 22/03/2022.

3. Ibid.

De plus, la sensibilité de l'antenne se retrouve réduite par les erreurs de la surface de l'antenne  $\sigma_\eta$  qui peuvent s'exprimer en RMSE par l'équation 3.3 connue comme l'équation de Ruze.<sup>4</sup>

$$\eta = \exp \left[ - \left( \frac{4\pi\sigma_\eta}{\lambda} \right)^2 \right]. \quad (3.3)$$

En synthèse, le spectre du LAB prend en compte les fluctuations de bruit décrites précédemment et permet de remettre à 0 le bruit de fond.

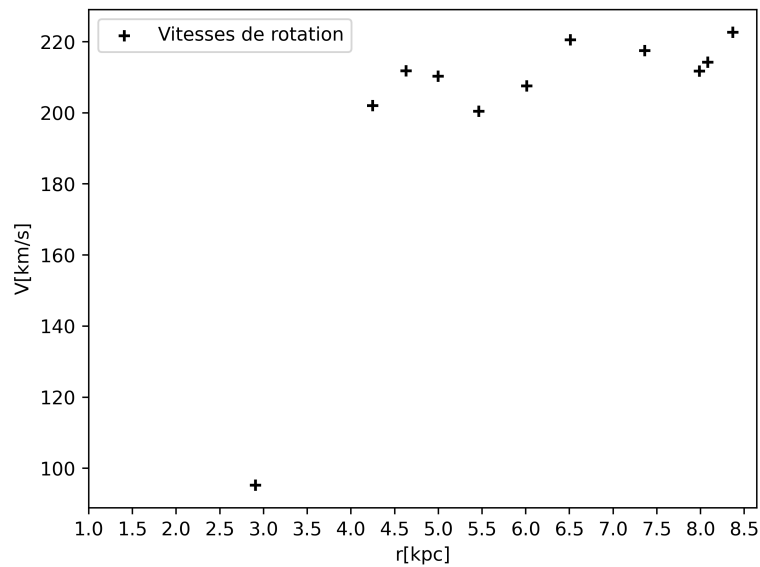
### 3.2.2 Détermination de la masse de la Voie Lactée

#### Question 1 : Données et courbe de rotation

À partir des données obtenues (voir tableau 3.2), des équations 2.13a et 2.13b et, à l'aide d'un code écrit en python<sup>5</sup> nous avons calculé et tracé la courbe de rotation correspondante qui se montre sur la figure 3.3.

**Table 3.2** – Mesures de la distance et la vitesse maximale en fonction de la longitude galactique.

Mesure	$l$ [°]	$r$ [kpc]	$v_{max}$ [km/s]
1	20	2,91	20
2	30	4,25	92
3	33	4,63	92
4	36	5,00	81
5	40	5,46	59
6	45	6,01	52
7	50	6,51	52
8	60	7,36	27
9	70	7,99	5
10	72	8,08	5
11	80	8,37	6



**Figure 3.3** – Courbe de rotation obtenue à partir des données expérimentales.

4. Ibid.

5. Présenté en annexe.

### Question 2 : Estimation du rayon maximal d'observation

Le rayon d'observation est donné en fonction de la longitude galactique par l'équation 2.13a. On voit bien donc que le rayon maximal d'observation est atteint quand  $l = 90^\circ$ , c'est à dire :

$$r_{max} = R_0 = 8,5 \text{ kpc} \quad (3.4)$$

Ainsi, les données du LAB ne permettent pas d'améliorer ce résultat car étant indépendant de la qualité et quantité des mesures il est directement relié à la géométrie du problème et à la méthode utilisée.

### Question 3 : Estimation de la masse

D'après les données du problème nous avons que :

$$r_{max} = 8,5 \pm 0,05 \text{ kpc} \quad (3.5a)$$

et que

$$v_{max} = 220 \pm 0,5 \text{ km.s}^{-1}. \quad (3.5b)$$

Par conséquent, pour calculer la masse contenue dans le rayon maximal nous pouvons utiliser l'équation 2.17 et on obtient que :<sup>6</sup>

$$M = (9,566111 \times 10^{10} \pm 4,348232 \times 10^5) M_\odot. \quad (3.6)$$

### Question 4 : Calcul avec les galaxies naines

Avec les vitesses des nuages de magellan  $v = 175 \text{ km.s}^{-1}$  placées à un rayon de  $r \approx 100 \text{ kpc}$  on obtient une masse de :

$$M = (7,121102 \times 10^{11} \pm 4,069201 \times 10^6) M_\odot. \quad (3.7)$$

---

6. La comparaison avec les autres masses sont présentées dans l'analyse.

# 4. Analyse des Résultats

## 4.1 Discussion et incertitudes

### 4.1.1 Vitesses de rotation

Nous avons calculé les vitesses de rotation en fonction de la distance au centre de la galaxie et de la vitesse maximale. On doit donc procéder à calculer les incertitudes. Nous utilisons pour  $l$  et  $R_0$  la moitié de la moindre échelle et la formule 4.1 pour la propagation d'incertitudes :

$$\Delta f = \sqrt{\sum_x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2}. \quad (4.1)$$

Ce qui génère une erreur  $\Delta r$  :

$$\Delta r = \sqrt{(\sin(l)\Delta R_0)^2 + (R_0 \cos(l)\Delta l)^2}, \quad (4.2)$$

et  $\Delta v$  :

$$\Delta v = \sqrt{(\Delta v_{max})^2 + \left( \frac{v_0}{R_0} \Delta r \right)^2 + \left( \frac{r}{R_0} \Delta v_0 \right)^2 + \left( -\frac{v_0 r}{R_0^2} \Delta R_0 \right)^2} \quad (4.3)$$

Les données ainsi que leurs erreurs sont enregistrées de le tableau 4.1

**Table 4.1** – Rayons galactiques, vitesses de rotation et leurs incertitudes associées.

$r[kpc]$	$\Delta r[kpc]$	$v[km/s]$	$\Delta v[km/s]$
2,90717	0,07177	95,24443	1,98135
4,24000	0,06893	201,00000	1,97845
4,62943	0,06791	211,82059	1,97743
4,99617	0,06682	210,31276	1,97637
5,46369	0,06528	200,41327	1,97489
6,01041	0,06325	207,56349	1,97299
6,51138	0,06116	220,52978	1,97108
7,36122	0,05701	217,52559	1,96751
7,98739	0,05339	211,73238	1,96458
8,08398	0,052789	214,23243	1,96411
8,37086	0,05089	222,65771	1,96267

En pratique il est convenable d'utiliser des variables adimensionnalisées donc les equations 2.13a et r2.13b deviennent :

$$R_\star = r/R_0 = \sin(l) \quad (4.4a)$$

et

$$v_\star = v/v_0 = v_{max}/v_0 + R_\star. \quad (4.4b)$$

On a observé dans la figure 3.3 que la vitesse de rotation présentait un comportement logarithmique par rapport au rayon galactique. Par conséquent, à partir de l'équation 2.13b, il est pertinent de poser que :

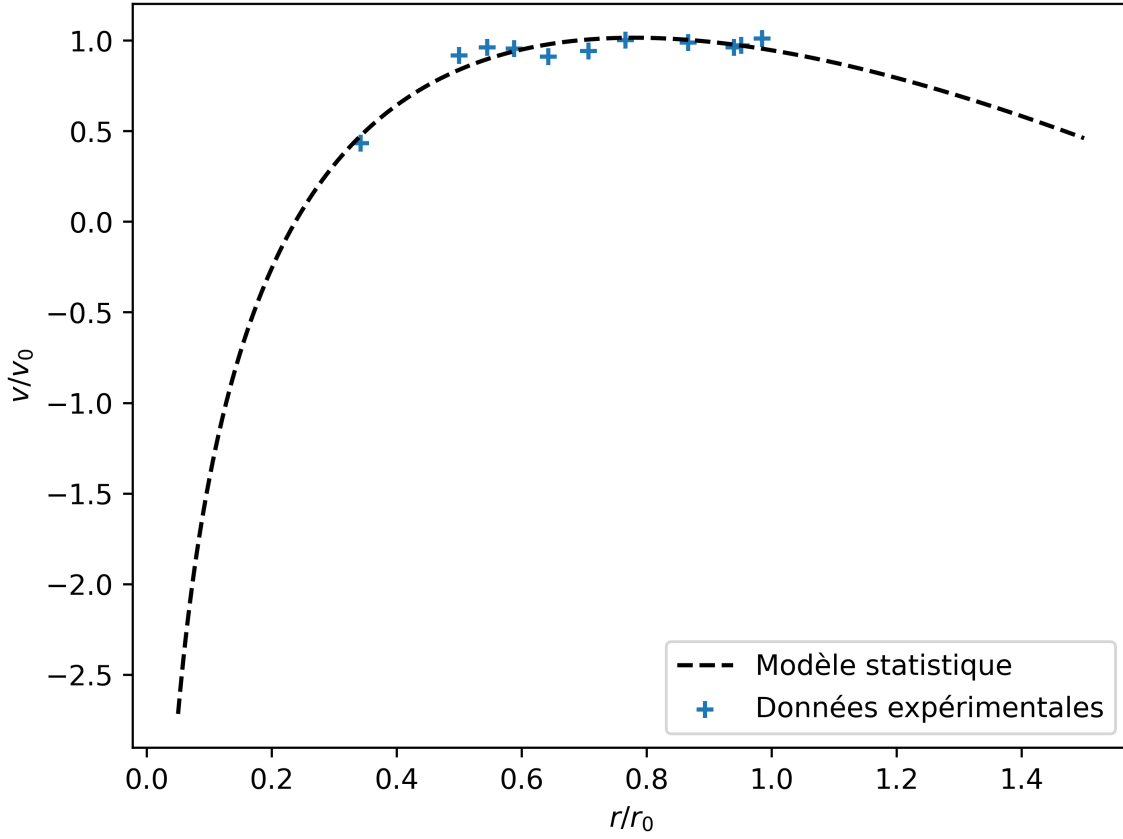
$$v_{max} \sim \ln(r), \quad (4.5)$$

et donc nous avons proposé un modèle de la forme :

$$v(r) = a \ln(r) + br + c, \quad (4.6)$$

Nous avons donc tracé nos données avec leurs incertitudes sur la figure 4.1 et créé un modèle statistique montré dans l'équation 4.7.<sup>1</sup>

1. Le modèle à été créé à partir de nos données et sur le logiciel R.



**Figure 4.1** – Courbe de vitesse de rotation expérimentale et modèle statistique.

$$v_{\star} = (2,0602 \pm 0,3350)\ln(r_{\star}) - (2,6414 \pm 0,5222)r_{\star} + 3,5881 \pm 0,4997 \quad (4.7)$$

et pour les variables non adimensionnées :

$$v(r) = (453,25 \pm 73,71)\ln(r) - (68,36 \pm 13,51)r - 180,61 \pm 50,56. \quad (4.8)$$

Le modèle à été réalisé avec un coefficient de corrélation ajusté de  $R^2 = 0,8824$  et une valeur  $p = 7,829 \times 10^{-5}$ , le modèle est bien représentatif du comportement des données dans l'intervale d'analyse.<sup>2</sup>

#### 4.1.2 Masse dans la galaxie

Avec l'équation 2.17, on à calculé les masses correspondantes aux données présentées dans la section 4.1.1 ainsi que leurs incertitudes respectives données par l'équation 4.9.<sup>3</sup>

$$\Delta M = \sqrt{\left[ \frac{2v}{Gr^2} \left( r^2 + (a+b)^2 \right)^{3/2} \Delta v \right]^2 + \left[ \frac{v^2}{r^3 G} \left( 3 \left( r^2 + (a+b)^2 \right)^{1/2} r^2 - 2 \left( r^2 + (a+b)^2 \right)^{3/2} \right) \Delta r \right]^2} \quad (4.9)$$

On a alors tracé, dans la figure 4.2, la masse en fonction de la distance avec les données reportées et avec la vitesse calculée avec le modèle 4.8.

On observe d'après le graphe 4.8 que le calcul de la masse à partir du modèle statistique de la vitesse n'est pas précis mais présente la comportement général des données dans l'intervale d'analyse.

Par ailleurs, la masse contenue à l'intérieur de la galaxie estimée avec les données des nuages de magellan dans 3.2.2 à présentée une valeur de  $M_{mag} = 7,121102 \times 10^{11} M_{\odot}$  donc le rapport entre la masse contenue dans  $8,5kpc$  et dans  $100kpc$  est de :

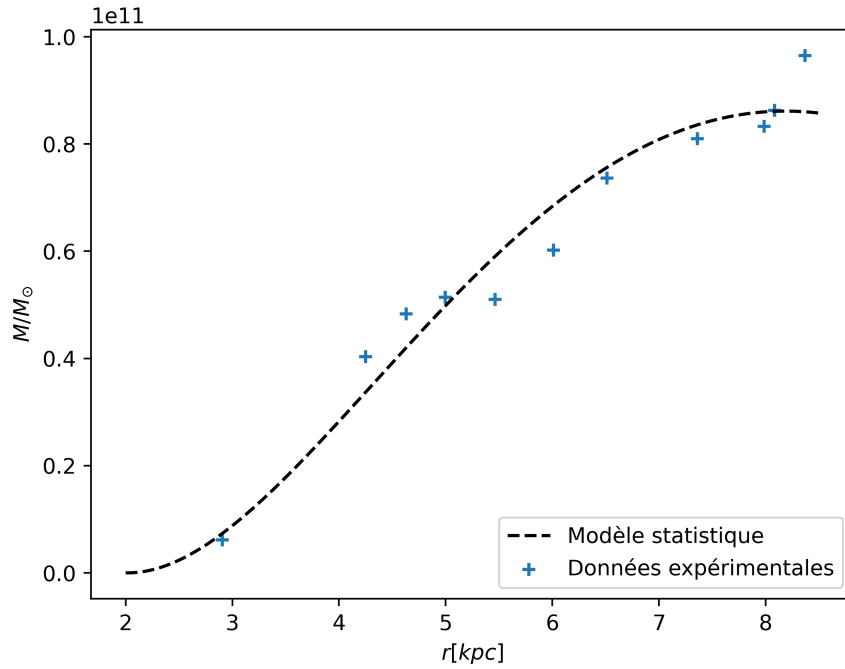
$$M_{8,5kpc}/M_{100kpc} = 0,118, \quad (4.10)$$

2. Il faut retenir que le modèle est valable uniquement localement et non pas dans le bulbe ni pour  $r \gg 8,5kpc$ .

3. Les calculs ont été réalisés sur le code donné en annexe.

**Table 4.2** – Distance et masse estimée de la voie lactée avec ses incertitudes

$r[kpc]$	$M/M_{\odot} \times 10^{-10}$	$\Delta M/M_{\odot} \times 10^{-6}$
2,91	0,613	0,255
4,24	4,03	0,789
4,63	4,83	0,902
4,99	5,14	0,966
5,46	5,10	1,01
6,01	6,02	1,14
6,51	7,36	1,32
7,36	8,10	1,47
7,99	8,33	1,55
8,08	8,63	1,58
8,37	9,65	1,70



**Figure 4.2** – Masse de la Voie-Lactée en fonction du rayon galactique.

ce qui indique que la masse contenue dans le rayon galactique à  $8,5kpc$  ne représente que le  $\sim 12\%$  de la masse totale galactique  $M_T$ . D'après ces résultats on en déduit qu'il existe de la matière noire dans la galaxie et on peut estimer la quantité de masse de gaz  $M_g$ , stellaire  $M_s$  et de matière noire  $M_b$ . Pour faire ça, il faut se rappeler que la masse de gaz est  $\sim 10\%$  de la masse visible que l'on prendra à  $8,5kpc$ .<sup>4</sup>

$$\begin{cases} M_g \approx 9,56 \times 10^9 M_{\odot} \approx 0,0134 M_T \\ M_s \approx 8,61 \times 10^{10} M_{\odot} \approx 0,1210 M_T \\ M_b \approx M_{100kpc} - M_{8,5kpc} \approx 6,16 \times 10^{11} M_{\odot} \approx 0,8656 M_T \end{cases}, \quad (4.11)$$

par conséquent, on trouve que la masse de matière noire dans la galaxie représente  $\sim 86,57\%$  de la masse totale de la galaxie et, doit se trouver dans des régions  $r > 8,5kpc$ , ce qui représente bien le modèle du halo de matière noire.

4. Cela est justifié par le comportement asymptotique des vitesses et de la masse dans l'intervalle analysé.



## 5. Conclusion

En conclusion, on a calculé les rayons galactiques et les vitesses de rotation de la galaxie avec leurs incertitudes respectives à partir d'observations de la raie de  $21\text{cm}$  réalisées avec des antennes radio. À partir de ces données, on a proposé un modèle statistique (4.8) représentatif du comportement des vitesses sur l'intervalle analysé avec un coefficient de corrélation de 0,8824. Ainsi, on a obtenu la masse galactique et ses incertitudes à l'intérieur des distances analysées et tracé son comportement. De cette façon, en comparant la masse englobée dans un rayon de  $8,5\text{kpc}$  avec la masse calculée à partir des nuages de magellan, on a en déduit qu'il y avait un défaut de masse de  $\sim 86,57\%$  de la masse totale de la galaxie et que, par conséquent, cette dernière devait correspondre à la masse du halo de matière noire dans la galaxie.

# Appendices

# A. Annexe

## A.1 Valeurs des Constantes

### A.1.1 Constantes fondamentales

- Constante de Planck  $^1h = 6,62607015 \times 10^{-34} J.Hz^{-1}$ .
- Constante de Boltzmann  $k_b = 1.380649 \times 10^{-23} J.K^{-1}$
- Vitesse de la lumière dans le vide  $c = 2,99792458 \times 10^8 m.s^{-1}$
- Constante universelle de gravitation  $G = 6,67430 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

### A.1.2 Constantes du problème

- Demi-grand axe du disque galactique  $a \approx 15 kpc$ .
- Rayon caractéristique du bulbe galactique  $b \approx 1 kpc$ .
- Distance du centre de la galaxie au soleil  $R_0 \approx 8,5 kpc$ .
- Vitesse de rotation du soleil autour du centre galactique  $v_0 \approx 220 km.s^{-1}$ .
- Masse solaire  $M_\odot = 1,98847 \pm 0,00007 \times 10^{30} kg$

## A.2 Développement des Calculs Mathématiques

### A.2.1 Dérivation du potentiel gravitationnel

$$\Phi_{toomre}(r, 0) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + (a+b)^2}} \quad (A.1a)$$

$$\Rightarrow v^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + (a+b)^2}} \right) \quad (A.1b)$$

$$= -r(GM) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{(r^2 + (a+b)^2)^{3/2}} \right) (2r) \quad (A.1c)$$

$$v^2 = \frac{GM r^2}{(r^2 + (a+b)^2)^{3/2}} \quad (A.1d)$$

## A.3 Code numérique

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import csv
from numpy import genfromtxt
""" Dictionnaire de variables
```

*Fonctions:*

*-degarad(angle): Prend un angle comme argument et le transforme en degrés.*  
*-calculdistance(rsoleil,anglerad): Calcule le rayon galactique à partir de la distance entre le soleil et le centre galactique et de la longitude galactique.*  
*-calculvitesse(rsoleil,vsoleil,distance,vitessemax): Calcule la vitesse de rotation à partir de la vitesse de rotation du soleil, sa distance au centre galactique, les distances calculées et leurs vitesses.*

---

1. Toutes les valeurs des constantes fondamentales furent prises du NIST <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>

-deltar(dr0,dl,r0,l): Calcule les incertitudes sur la distance.  
 -deltav(dvmax,v0,r0,dr,r,dv0,dr0): Calcule les incertitudes sur la vitesse.  
 -deltaadim(dx0,dx,x0,x): Calcule les incertitudes des variables adimensionnées à partir des variables dimensionnées.  
 -calculmasse(rayon,vitesse): Calcule la masse à partir des distances et leurs Vitesses.  
 -deltam(dr,dv,r,v): Calcule les incertitudes sur la masse.

Constantes:

a: Distance du semi-grand axe galactique.  
 b: Rayon de la sphère de Plumer dans le modèle de Toomre.  
 r0: Distance du soleil au centre galactique.  
 v0: Vitesse de rotation du soleil par rapport au centre galactique.  
 dl: Incertitude sur les angles en radians  
 dr0: Incertitude sur r0  
 dv0: Incertitude sur v0  
 dvmax: Incertitude sur les vitesses  
 kpc: kpc en mètres  
 km: km en mètres  
 G: Constante universelle de gravitation

Variables:

data: Stocke les données.  
 lrad: Longitude galactique en radians.  
 r: Rayon galactique.  
 dr: Incertitude sur r.  
 v: Vitesse de rotation.  
 dv: Incertitude sur v  
 rtheo: Rayon théorique.  
 vtheo: Vitesse théorique (du modèle statistique).  
 vadim: Vitesse adimensionnée.  
 radim: Rayon adimensionné.  
 dvadim: Incertitudes sur la vitesse adimensionnée.  
 dradim: Incertitudes sur le rayon adimensionné.  
 Masse: Masse calculée à partir de données.  
 dm: Incertitudes sur la masse.  
 Mtheo: Masse théorique (à partir du modèle statistique).  
 header: Tête du fichier de sortie.  
 dataout: Fichier de sortie.  
 """

"""Fonctions"""

```
def degarad(angle):
    rad=angle*2*np.pi/360
    return np.array(rad)
def calculdistance(rsoleil,anglerad):
    r=rsoleil*np.sin(anglerad)
    return r
def calculvitesse(rsoleil,vsoleil,distance,vitessemax):
    vitesse=vitessemax+vsoleil*distance/rsoleil
    return vitesse
def deltar(dr0,dl,r0,l):
    dr=np.sqrt((np.sin(l)*dr0)**2+(r0*np.cos(l)*dl)**2)
    return dr
def deltav(dvmax,v0,r0,dr,r,dv0,dr0):
    dv=np.sqrt(dvmax**2+(v0/r0*dr)**2+((r/r0)*dv0)**2+(-v0*r/r0**2*dr0)**2)
    return dv
def deltaadim(dx0,dx,x0,x):
    delta=np.sqrt((1/x0*dx)**2+(-x/x0**2*dx0)**2)
    return delta
def calculmasse(rayon,vitesse):
```

```

r=rayon*kpc
v=vitesse*km
M=(v)**2*(r**2+(a+b)**2)**(3/2)/(G*r**2)
Ms=M/1.98847e30
return Ms
def deltam(dr,dv,r,v):
    r=r*kpc
    v=v*km
    pv=2*v/(G*r**2)*(r**2+(a+b)**2)**(3/2)*dv
    pr=v**2/(G*r**3)*(3*(r**2+(a+b)**2)**(1/2)*r**2-2*(r**2+(a+b)**2)**(3/2))*dr
    dm=np.sqrt(pv**2+pr**2)/1.98847e30
    return dm

""" Constantes """
a=15#kpc
b=1#kpc
r0=8.5#Kpc
v0=220 #km/s
dl=degarad(0.5)#rads
dr0=0.05#kpc
dv0=0.5#km/s
dvmax=0.5#km/s
kpc=3.086e19#m
km=1e3#m
G=6.67430e-11#s.i

"""Traitement de données pour l'analyse des vitesses"""
#donnees.csv archive avec première colonne l, deuxième r et troisième vmax
data = genfromtxt('donnees.csv', delimiter = ';')

#On transforme l en radians:
lrad = degarad(data[:,0])

#On calcule r à partir de l en radians:
r = calculdistance(r0,lrad)

#On calcule les incertitudes sur r:
dr = deltar(dr0,dl,r0,lrad)

#On calcule v à partir de vmax
v=calculvitesse(r0,v0,r,data[:,1])

#On calcule les incertitudes sur v
dv=deltav(dvmax,v0,r0,dr,r,dv0,dr0)

#On introduit le modèle théorique calculé dans le logiciel R.
rtheo=np.linspace(2,9,100)
vtheo=-180.61+453.25*np.log(rtheo)-68.36*rtheo

""" Graphe des vitesses """
plt.figure()
plt.scatter(r,v,marker="+",c="k",label="Vitesses de rotation")
plt.xlabel("r[kpc]")
plt.xticks(np.arange(1,9,step=0.5))
plt.ylabel("V[km/s]")
plt.legend()
plt.savefig("courbe_rotation.png",dpi=500)
plt.show()
plt.close()

""" Graphe Adimensionné """
#On adimensionne les variable et calcule leurs incertitudes

```

```

radim=r/r0
vadim=v/v0
dradim=deltaadim(dr0,dr,r0,r)
dvadim=deltaadim(dv0,dv,v0,v)
#On introduit leur modèle théorique
rtheo=np.linspace(0.05,1.5,1000)
vtheo=3.5881+2.0602*np.log(rtheo)-2.6414*rtheo
#Graphe:
plt.figure()
plt.scatter(radim,vadim,marker="+",label="Données expérimentales")
plt.plot(rtheo,vtheo,"--",c="k",label="Modèle statistique")
plt.xlabel("$r/r_0$")
plt.ylabel("$v/v_0$")
plt.legend()
plt.savefig("Analyse_vitesse.png",dpi=500)
plt.show()

#On calcule masse pour les nuages de magellan et pour r0, v0
print(calculmasse(8.5,220))
print(calculmasse(100,175))

#On calcule la masse sur nos données
Masse=calculmasse(r,v)
#On calcule les incertitudes sur la masse
dM=deltam(dr,dv,r,v)
#On introduit le modèle théorique
rtheo=np.linspace(2,8.5,1000)
vtheo=-180.61+453.25*np.log(rtheo)-68.36*rtheo
Mtheo=calculmasse(rtheo,vtheo)
#Graphe:
plt.scatter(r,Masse,marker="+",label="Données expérimentales")
plt.plot(rtheo,Mtheo,"--",c="k",label="Modèle statistique")
plt.xlabel("$r$[kpc]$")
plt.ylabel("$M/M_{\odot}$")
plt.legend(loc=4)
plt.savefig("Analyse_masse.png",dpi=500)
plt.show()

""" Création de fichier de sortie """
dataout=[]
dataout=np.append(r,(dr,v,dv,radim,dradim,vadim,dvadim,Masse,dM))
dataout=np.reshape(dataout,(len(r),10),order='F')
dataout=np.append(data,dataout,axis=1)

header=np.array(['l',"vmax",'r',"dr",'v',"dv","radim","dradim","vadim","dvadim","M/Ms","dM/Ms"])
with open("dataout.csv","w") as f:
    writer=csv.writer(f)
    writer.writerow(header)
    writer.writerows(dataout)
f.close()

```

# Bibliographie

- [1] Duric, N. (2004). *Advanced astrophysics*. Cambridge University Press.
- [2] Longair, M. S. (2007). *Galaxy formation*. Springer Science & Business Media.
- [3] NASA & Riess, A. (2019). Ngc 2525.
- [Ransom] Ransom, S. *Radio Astronomy : Sensitivity and Noise*. <https://events.asiaa.sinica.edu.tw/school/20160815/talk/sra>
- [5] Sofue, Y. (2013). Mass distribution and rotation curve in the galaxy. *Planets, Stars and Stellar Systems*, pages 985–1037.