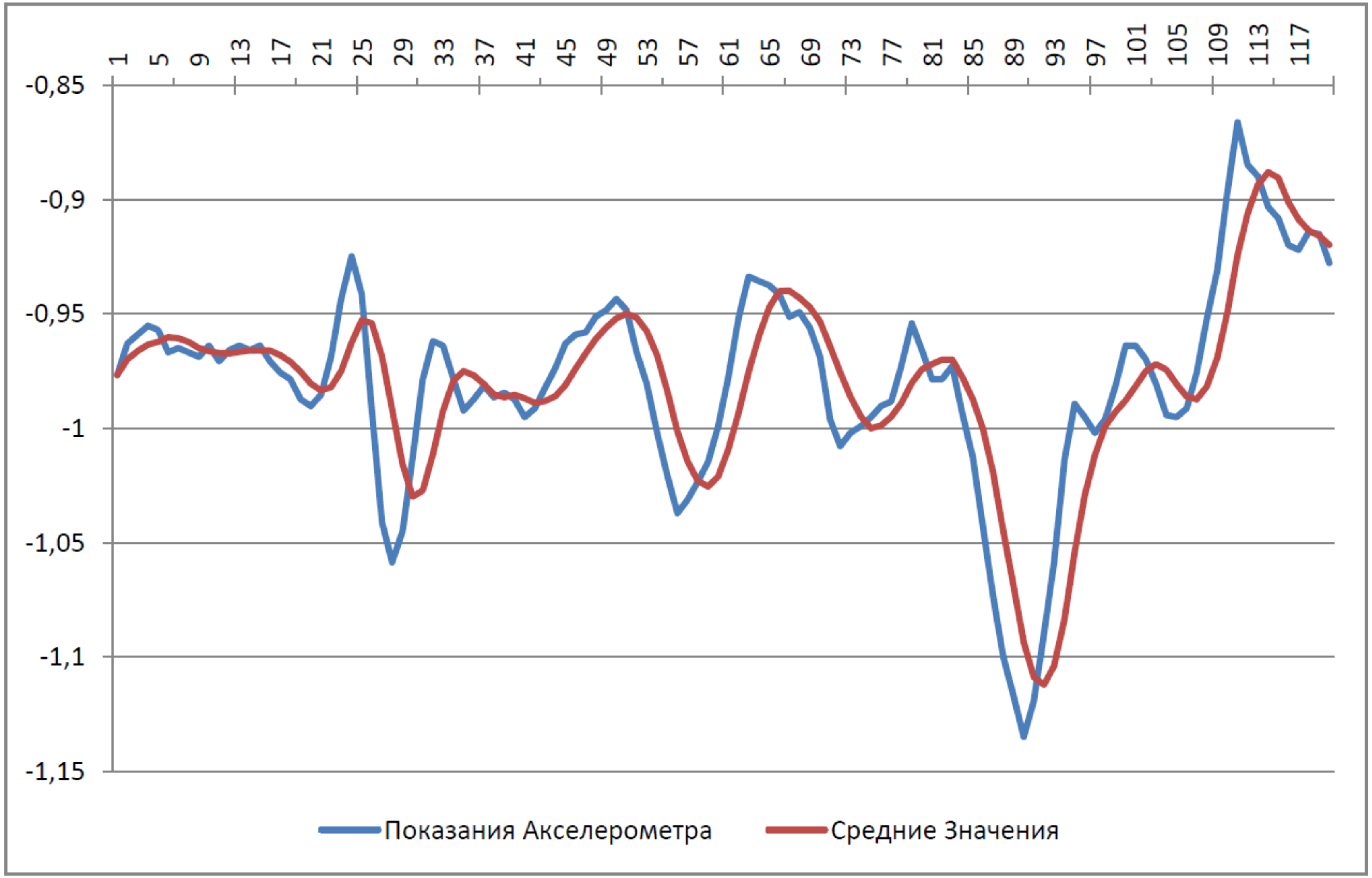
Фильтрация данных

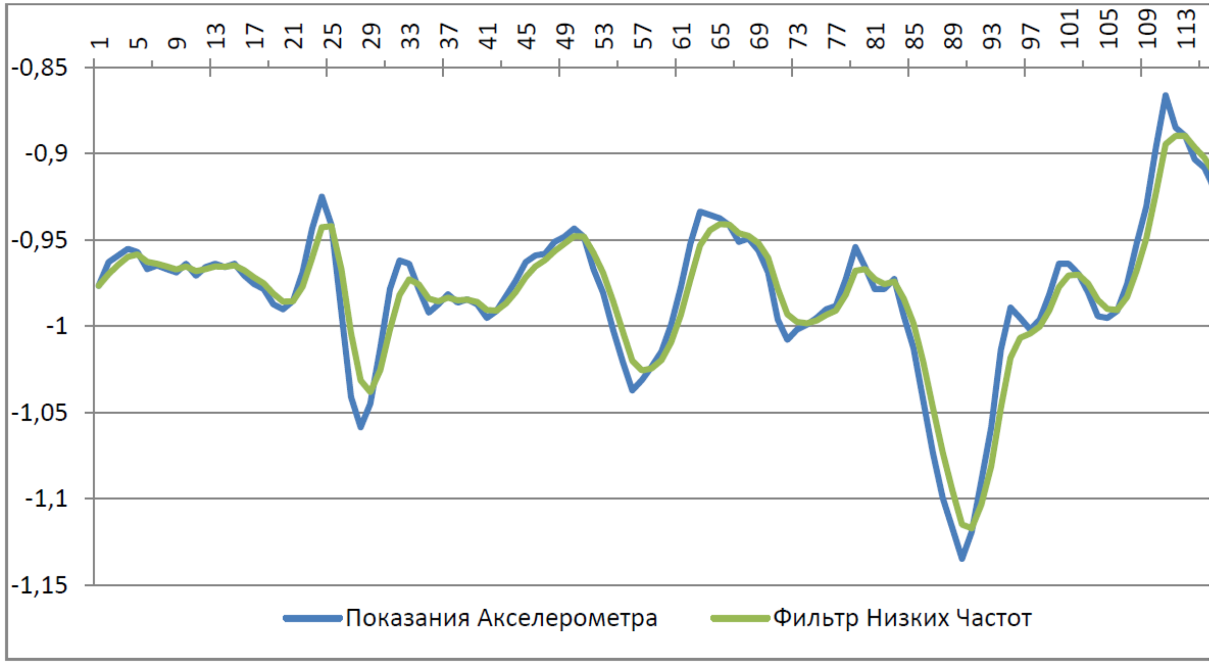
Пример: показания акселерометра

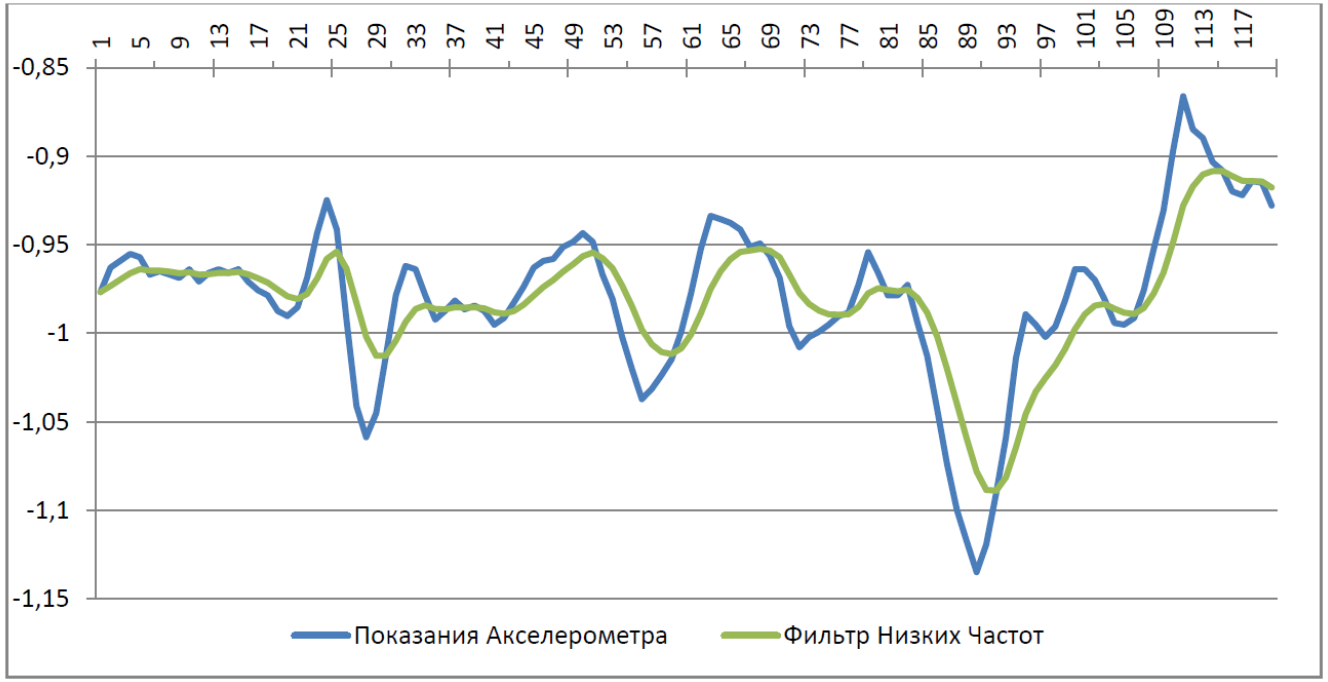
Метод средних значений $v_k = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_{k-i}}{n}$.



Фильтры низких частот

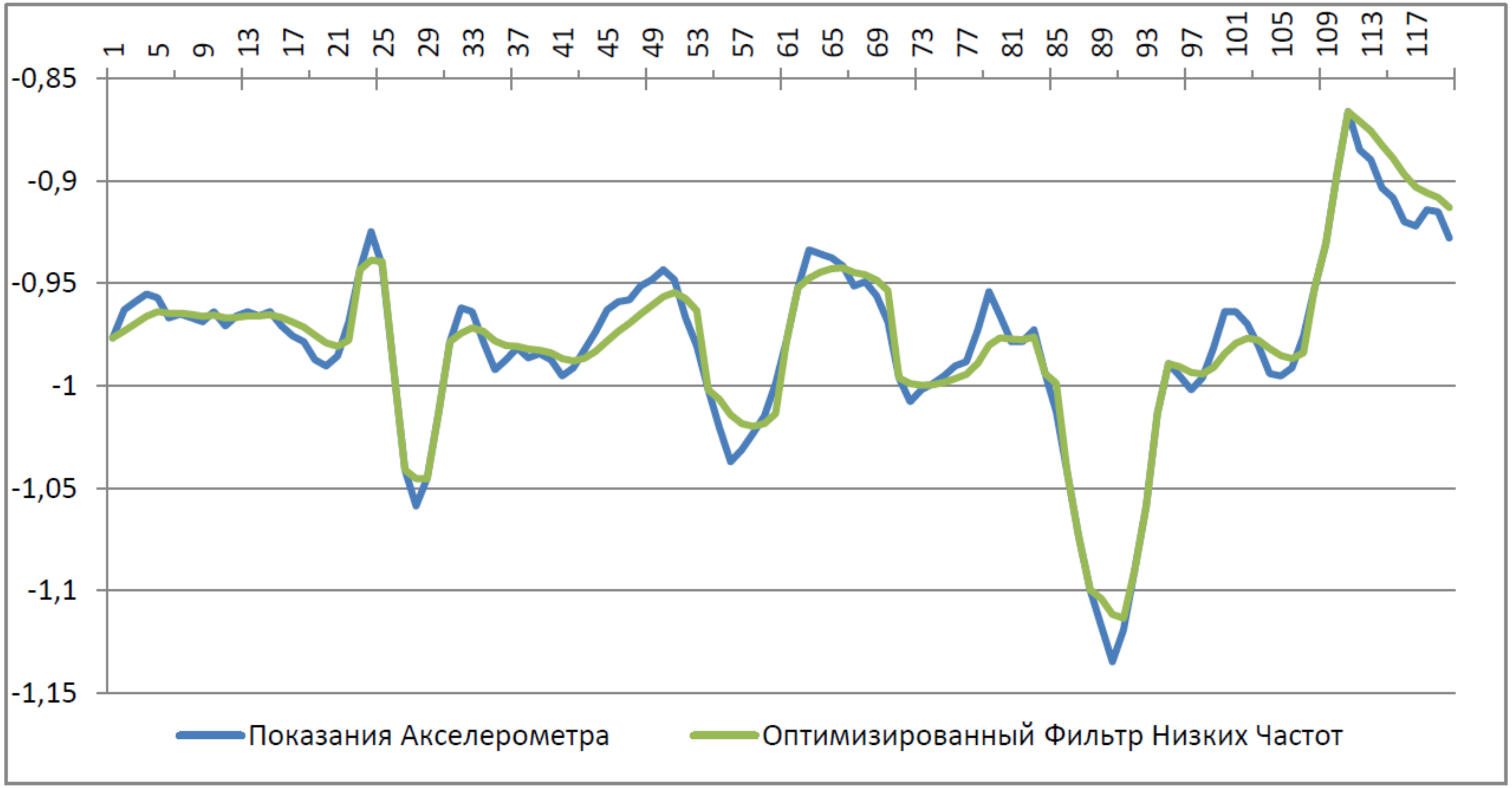
$$O_n = O_{n-1} + \alpha(I_n - O_{n-1})$$



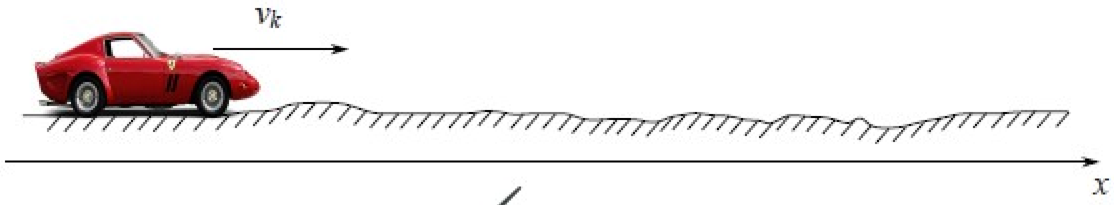


Модифицированный фильтр низких ча

$$|I_n - I_{n-1}| < \ \varepsilon$$



Фильтр Калмана



$$x_{k+1} = x_k + v_k dt + \xi_k$$

$$z_k = x_k + \eta_k$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + u_k + \xi_k \\ z_k &= x_k + \eta_k \end{aligned}}$$

- u_k — это известная величина, которая контролирует эволюцию системы. Мы ее знаем из построенной нами физической модели.
- Ошибка модели ξ_k и ошибка сенсора η_k — случайные величины. И их законы распределения не зависят от времени (от номера итерации k).
- Средние значения ошибок равны нулю: $E\xi_k = E\eta_k = 0$.
- Сам закон распределения случайных величин может быть нам и не известен, но известны их дисперсии σ_ξ^2 и σ_η^2. Заметим, что дисперсии не зависят от k, потому что законы распределения не зависят от него.
- Предполагается, что все случайные ошибки независимы друг от друга: какая ошибка будет в момент времени k совершенно не зависит от ошибки в другой момент времени k'.

$$x_{k+1}^{opt} = K \cdot z_{k+1} + (1 - K) \cdot (x_k^{opt} + u_k)$$

Фильтр Калмана

$$x_{k+1}^{opt} = K \cdot z_{k+1} + (1-K) \cdot (x_k^{opt} + u_k)$$

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x_{k+1}^{opt}$$

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= x_{k+1} - x_{k+1}^{opt} = x_{k+1} - K z_{k+1} - (1-K)(x_k^{opt} + u_k) = \\
&= x_k + u_k + \xi_k - K(x_k + u_k + \xi_k + \eta_{k+1}) - (1-K)(x_k^{opt} + u_k) = \\
&= (1-K)(x_k - x_k^{opt} + \xi_k) - K\eta_{k+1} = (1-K)(e_k + \xi_k) - K\eta_{k+1}
\end{aligned}$$

$$e_{k+1} = (1-K)(e_k + \xi_k) - K\eta_{k+1}$$

$$E(e_{k+1}^2) \to \min$$

$$E(e_{k+1}^2) = (1-K)^2(Ee_k^2 + \sigma_\xi^2) + K^2\sigma_\eta^2$$

$$K_{k+1} = \frac{Ee_k^2 + \sigma_\xi^2}{Ee_k^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}$$

Фильтр Калмана

u_k - известная управляющая функция

ξ_k - ошибка модели, а σ_ξ^2 ее дисперсия

η_k - ошибка сенсора, а σ_η^2 ее дисперсия

$x_{k+1} = x_k + u_k + \xi_k$ - уравнение изменения координаты

$z_k = x_k + \eta_k$ - полученное значение с сенсора

$E(e_{k+1}^2) = \dfrac{\sigma_\eta^2(Ee_k^2 + \sigma_\xi^2)}{Ee_k^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}$ - среднее значение квадрата ошибки

$E(e_0^2) = E(\eta_0^2) = \sigma_\eta^2$ - база итерации

$K_{k+1} = \dfrac{Ee_k^2 + \sigma_\xi^2}{Ee_k^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2} = \dfrac{E(e_{k+1}^2)}{\sigma_\eta^2}$ - усиление Калмана

$x_{k+1}^{opt} = K_{k+1} \cdot z_{k+1} + (1 - K_{k+1}) \cdot (x_k^{opt} + u_k)$ - оптимальное отфильтрованное значение

$x_0^{opt} = z_0$ - база итерации

Фильтр Калмана. Многомерный случай

- Оценка состояния: собственно оценка состояния системы оценка погрешности определения этого состояния
- 2 оценки состояния: на предыдущем шаге и на текущем

Итерации фильтра Калмана: экстраполяция и коррекция

Начальные значения $\hat{x}_{k-1}$ и P_k^-

Предсказание

1. Предсказание состояния системы

$$\hat{x}_k^- = F\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$$

2. Предсказание ошибки ковариации

$$P_k^- = FP_{k-1}F^T + Q$$

Корректировка

1. Вычисление усиления Калмана (Kalman Gain)

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

2. Обновление оценки с учетом измерения z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

3. Обновление ошибки ковариации

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

F – матрица перехода между состояниями (динамическая модель системы)

B – матрица применения управляющего воздействия

$\hat{x}_k^-$ - предсказание состояния системы в текущий момент времени

u_{k-1} – управляющее воздействие в прошлый момент времени

Предсказание

1. Предсказание состояния системы

$$\boxed{\hat{x}_k^-} = \boxed{F}\,\boxed{\hat{x}_{k-1}} + \boxed{B}\,\boxed{u_{k-1}}$$

2. Предсказание ошибки ковариации

$$\boxed{P_k^-} = F\,\boxed{P_{k-1}}\,F^T + \boxed{Q}$$

$\hat{x}_{k-1}$ – состояние системы в прошлый момент времени

Q – ковариация шума процесса

P_k^- - предсказание ошибки

P_{k-1} – ошибка в прошлый момент времени

H – матрица измерений, отображающая отношение измерений и состояний

R – ковариация шума измерения

K_k - усиление Калмана (Kalman Gain)

Корректировка

1. Вычисление усиления Калмана (Kalman Gain)

$$\boxed{K_k} = P_k^- H^T (\boxed{H}\,P_k^- H^T + \boxed{R})^{-1}$$

2. Обновление оценки с учетом измерения z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(\boxed{z_k} - H\hat{x}_k^-)$$

z_k - измерение в текущий момент времени

I – матрица идентичности

3. Обновление ошибки ковариации

$$P_k = (\boxed{I} - K_k H)P_k^-$$

Определение модели процесса

Для того, чтобы применить фильтр, необходимо определить матрицы/значения переменных определяющих динамику системы и измерений F, B и H:

F — переменная описывающая динамику системы, в случае с топливом — это может быть коэффициент определяющий расход топлива на холостых оборотах за время дискретизации (время между шагами алгоритма). Однако помимо расхода топлива, существуют ещё и заправки… поэтому для простоты примем эту переменную равную 1 (то есть мы указываем, что предсказываемое значение будет равно предыдущему состоянию).

B — переменная определяющая применение управляющего воздействия. Если бы у нас были дополнительная информация об оборотах двигателя или степени нажатия на педаль акселератора, то этот параметр бы определял как изменится расход топлива за время дискретизации. Так как управляющих воздействий в нашей модели нет (нет информации о них), то принимаем B = 0.

H — матрица определяющая отношение между измерениями и состоянием системы, пока без объяснений примем эту переменную также равную 1.

Определение сглаживающих свойств

R — ошибка измерения может быть определена испытанием измерительных приборов и определением погрешности их измерения.

Q — определение шума процесса является более сложной задачей, так как требуется определить дисперсию процесса, что не всегда возможно. В любом случае, можно подобрать этот параметр для обеспечения требуемого уровня фильтрации.

1
5
9
13
17
21
25
29
33
37
41
45
49
53
57
61
65
69
73
77
81
85
89
93
97
101
105
109
113
117
-0,85
-0,9
-0,95
-1
-1,05
-1,1
-1,15
Показания Акселерометра
Фильтр Калмана