**Équation K(m,n) : modèle de compactons**

Dérivée de l’équation de Korteweg de Vries, l’équation K(m,n) a été élaborée par les mathématiciens P. Roseman et J.M. Hyman en 1992. Elle s’écrit

et (1)

C’est seulement pour certaines valeurs particulières de m et de n que la solution de cette équation est un soliton défini sur un support compact, ce qui signifie que le soliton est rigoureusement nul en dehors d’une plage finie de valeurs de x : de tels solitons sont appelés compactons.

On se propose d’étudier deux cas particuliers de cette équation : les équations K(2,2) et K(3,3).

***Équation K(2,2)***

a) Sous cette forme, (1) possède la solution analytique suivante :

pour

ailleurs

On demande d’écrire le programme de simulation qui permet de visualiser la solution numérique de (1) en fonction de pour des valeurs de  avec  et . La condition initiale et les conditions aux limites de type Dirichlet seront déduites de la solution analytique. Un paramètre fondamental au bon fonctionnement du programme est la définition du domaine spatial. Celui-ci sera donc établi par tâtonnements.

L’élaboration de ce simulateur sera menée en utilisant les outils les plus simples : ode45, schémas de différences finies simples, nombre de points de grille suffisant. En particulier on élaborera un programme de calcul de dérivée troisième et on comparera les simulations obtenues avec ce programme et la technique « stagewise ». Il est conseillé à ce stade de fixer d’emblée les paramètres de précision et à la valeur . Le bon fonctionnement du simulateur sera évalué en comparant graphiquement la solution analytique et la solution numérique.

Dès que le simulateur fonctionne, on modifiera les outils utilisés : schémas de différences finies, intégrateur temporel, valeurs de et , étendue du domaine spatial d’étude, … de manière à sélectionner un simulateur optimal en termes de temps de calcul et de précision (on peut par exemple visualiser la quantité en fonction de pour toutes les valeurs de . En particulier, lors de l’étude de l’influence du choix de l’intégrateur temporel, on testera l’impact de l’utilisation de l’option quand elle est disponible.

b) l’équation K(2,2) développe aussi d’autres formes de solutions : c’est le cas lorsque la condition initiale vaut

si

ailleurs

Les conditions aux limites sont .

On demande d’ajuster les réglages du simulateur précédent pour visualiser la solution obtenue pour

 avec  et . Afin de les visualiser correctement, les solutions relatives aux diverses valeurs de seront représentées sur des figures différentes.

***Équation K(3,3)***

On demande de modifier le simulateur précédent de manière à résoudre (1) avec

Le simulateur sera alimenté par la condition initiale

si

ailleurs

Les conditions aux limites sont et la solution sera visualisée pour

 avec  et . Lorsque la solution analytique n’est pas disponible, comme c’est le cas ici, une manière rigoureuse de vérifier la qualité de la simulation est de vérifier, quand ils existent, la permanence d’invariants. C’est le cas pour cet essai : on peut montrer que

de la solution est un invariant indépendant de . On demande de vérifier cette propriété sur la solution numérique obtenue. On procédera de la manière suivante : on calculera d’abord analytiquement ce que vaut cette quantité sur la condition initiale : soit cette quantité. Ensuite, à l’aide de la formule des trapèzes, on calculera numériquement cette même quantité (appelée ci-après sur la condition initiale (la comparaison avec donnera une idée de la précision que la formule des trapèzes permet d’atteindre dans ce cas) et sur les solutions numériques obtenues . La qualité de la solution numérique sera mesurée en calculant exprimée en pourcents de .