

---

# Matematika 4 — Logika pre informatikov

## 4. sada teoretických úloh

---

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **15. marca 2021 o 11:30** cez odovzdávací formulár pre tu04<sup>1</sup>. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel<sup>2</sup>.

**Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF** s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**<sup>3</sup>.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky<sup>3</sup>, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

<sup>1</sup> <https://forms.gle/yqLKxoJSJ4qr7x139>

<sup>2</sup> [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh)

<sup>3</sup> <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

**Cvičenie 4.1.** (4.3.1) Nech  $\mathcal{L}_1$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu s množinami individuových konštánt  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} = \{\text{Fero, Mara, BT333XY}\}$  a predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1} = \{\text{zelené}^1, \text{špinavé}^1, \text{ľúbi}^2\}$ .

Dokážte, že existuje jazyk  $\mathcal{L}_2$  výrokovologickej časti logiky prvého rádu s množinou individuových konštánt  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{z\}$  a vhodne zvolenou množinou predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$  taký, že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu  $A$  v jazyku  $\mathcal{L}_1$  existuje výrokovologická formula  $B$  v jazyku  $\mathcal{L}_2$  taká, že

- a)  $A$  je výrokovologicky splniteľná *vtt*  $B$  je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie  $v_1$  také, že  $v_1 \models_p A$ , existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie  $v_2$  také, že  $v_2 \models_p B$ ).
- b) Štruktúra  $\mathcal{M}_1$  taká, že  $\mathcal{M}_1 \models A$ , existuje *vtt* existuje štruktúra  $\mathcal{M}_2$  taká, že  $\mathcal{M}_2 \models B$ .

**Cvičenie 4.2.** (4.3.5) Nech  $X, Y$  a  $Z$  sú ľubovoľné formuly, nech  $T$  je ľubovoľná teória. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Ak  $T \models_p (X \rightarrow Y)$ , tak  $T \not\models_p X$  alebo  $T \models_p Y$ .
- b) Ak  $\{X, Y\} \models_p Z$ , tak  $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$  je tautológia.

**Cvičenie 4.3.** (4.1.1) O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{ľúbi}^2\}$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{P, L\}$ , pričom P značí Peter a L značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nespĺniteľná. Pri každej formule rozhodnite o všetkých uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

- a)  $((\neg \text{ľúbi}(P, L) \rightarrow \neg \text{ľúbi}(L, P)) \wedge (\text{ľúbi}(P, L) \vee \text{ľúbi}(L, P)))$
- b)  $\neg(\neg(\text{ľúbi}(P, L) \wedge \text{ľúbi}(L, P)) \leftrightarrow (\neg \text{ľúbi}(P, L) \vee \neg \text{ľúbi}(L, P)))$

## Hodnotená časť

**Úloha 4.4.** (0,5 b., 4.2.1) Zistite, či sú nasledujúce formuly výrokovologicky ekvivalentné v zmysle def. 4.9 z prednášky:

$$\neg(i(E) \rightarrow (r(E) \wedge b(E))) \quad \text{a} \quad (\neg(i(E) \rightarrow r(E)) \vee (i(E) \wedge \neg b(E))).$$

**Úloha 4.5.** (1,5 b., 4.3.2, 4.3.1) Nech  $\mathcal{L}_1$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu s množinami individuových konštánt  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} = \{\text{prof\_Mráček}, \text{doc\_Uhladená}, \text{Kiki}, \text{Veve}, \text{študent}_1, \dots, \text{študent}_7, \text{Mat\_1}, \dots, \text{Mat\_4}, \text{Prog\_1}, \text{Prog\_2}, \text{null}, A, B, \dots, \text{FX}, \text{riadny}, \text{1.opravný}, \text{2.opravný}\}$  a predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1} = \{\text{milý}^1, \text{prísny}^1, \text{študent}^1, \text{učiteľ}^1, \text{usilovný}^1, \text{školliteľ}^2, \text{učiteľ\_predmetu}^2, \text{hodnotenie}^5\}$ .

Dokážte, že existuje jazyk  $\mathcal{L}_2$  výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenou množinou individuových konštánt  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$  a množinou predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{\text{platí}^2\}$  taký, že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu  $A$  v jazyku  $\mathcal{L}_1$  existuje výrokovologická formula  $B$  v jazyku  $\mathcal{L}_2$ , pre ktorú platí:

- a) Výrokové ohodnotenie  $v_1$  také, že  $v_1 \models_p A$ , existuje vtt existuje výrokové ohodnotenie  $v_2$  také, že  $v_2 \models_p B$ .
- b) Štruktúra  $\mathcal{M}_1$  taká, že  $\mathcal{M}_1 \models A$ , existuje vtt existuje štruktúra  $\mathcal{M}_2$  taká, že  $\mathcal{M}_2 \models B$ .