

---

# Matematika 4 — Logika pre informatikov

## 3. sada teoretických úloh

---

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **8. marca 2021 o 11:30** cez odovzdávací formulár pre tu03<sup>1</sup>. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel<sup>2</sup>.

**Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF** s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**<sup>3</sup>.

Číslo úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky<sup>3</sup>, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

<sup>1</sup> <https://forms.gle/phnVxynCEjWwtd828>

<sup>2</sup> [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh)

<sup>3</sup> <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

**Cvičenie 3.1.** (3.1.1, 3.1.2, 3.1.3; Def. 3.10, tvrdenia 3.11 a 3.13)

- a) Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack, Corona}\}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$ . Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$  je štruktúra pre jazyk  $\mathcal{L}$ , kde:

$$\begin{aligned}D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\i(\text{Jack}) &= s3, \\i(\text{Corona}) &= p1, \\i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\}\end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie  $v$  pre  $\mathcal{L}$  zhodné so štruktúrou  $\mathcal{M}$ .

- b) Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy, Woody}\}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá_sa}^2\}$ . Nech

$$\begin{aligned}v &= \{\text{hračka}(\text{Woody}) \mapsto t, & \text{hračka}(\text{Andy}) \mapsto f, \\& \text{chlapec}(\text{Andy}) \mapsto t, & \text{chlapec}(\text{Woody}) \mapsto f, \\& \text{hrá\_sa}(\text{Andy, Woody}) \mapsto t, & \text{hrá\_sa}(\text{Woody, Andy}) \mapsto f\}\end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka  $\mathcal{L}$ . Zostrojte štruktúru  $\mathcal{M}$  zhodnú s  $v$  na dom  $v$ .

**Cvičenie 3.2.** (3.2.1, 3.2.2) Majme výrokovologickú teóriu  $T$ :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1: (\text{tancuje}_s(A, B) \rightarrow (\text{tancuje}_s(A, B) \vee \text{spieva}(A))), \\ A_2: (\neg \text{tancuje}_s(A, B) \vee \neg \text{spieva}(A)), \\ A_3: (\neg \text{spieva}(A) \rightarrow \text{frajer}(A)) \end{array} \right\}.$$

O každej z formúl  $X_1$ – $X_3$  rozhodnite, či a) vyplýva z teórie  $T$ , b) je nezávislá od  $T$ , alebo c) ani z nej nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

( $X_1$ )  $(\text{tancuje}_s(A, B) \rightarrow \text{frajer}(A))$ ,

( $X_2$ )  $\neg \text{spieva}(A)$ ,

( $X_3$ )  $(\text{spieva}(A) \rightarrow \text{tancuje}_s(A, B))$ .

 Aká formula vyplýva z teórie v prípade c)?

**Cvičenie 3.3.** (3.2.3, 3.2.2) Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z krádeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Roberta. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné skutočnosti:

( $A_1$ ) Miles je určite vinný.

( $A_2$ ) Miles nikdy nepracuje sám, je teda vinný, iba ak je vinný aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.


( $A_3$ ) Davies vždy pracuje s Robertsom.

( $A_4$ ) Roberts sa s Milesom neznáša, vinný je preto nanajvýš jeden z nich.

( $A_5$ ) Na lúpeži sa mohli podieľať len títo traja podozriví a nikto iný.


Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu  $T$  v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ .

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

 **Pomôcka.** Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

## Hodnotená časť

**Úloha 3.4.** (2.2.5) Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu s binárnymi spojками  $\rightarrow$  (implikácia) so štandardným významom a  $\vee$  (XOR), pričom neformálny význam ( $A \vee B$ ) je: pravdivá je práve jedna z formúl  $A$  a  $B$ . Formuly nebudú obsahovať *žiadne iné spojky*.

 Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

V definícii pravdivosti formuly v štruktúre vyjadrite význam spojok iba pomocou slovenských spojok *a* a *alebo* a pomocou pravdivosti a nepravdivosti priamych podformúl.

**Úloha 3.5.** (3.2.6, 3.2.2) Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

- ( $A_1$ ) Ak minister nie je schopný, premiér ho odvolá. Alebo je premiérov kamarát.
- ( $A_2$ ) Minister je premiérov kamarát, ak ho premiér neodvolal.
- ( $A_3$ ) Minister, ktorý účinne zasiahol proti pandémie, je schopný.
- ( $A_4$ ) Premiér ministra neodvolal, napriek tomu, že minister proti pandémie účinne nezasiahol.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite (ak je to možné), či na základe výrokov  $A_1 - A_4$ :

- ( $C_1$ ) je minister schopný,
- ( $C_2$ ) premiér ministra odvolá,
- ( $C_3$ ) minister je premiérov kamarát.

 **Pomôcka.** Uvedomte si, že v tomto zadaní sú minister a premiér konkrétne osoby.