Ejercicios: relatividad especial

Elaborado por: Gabriela Zeledón Quesada

01 Postulados de la teoría

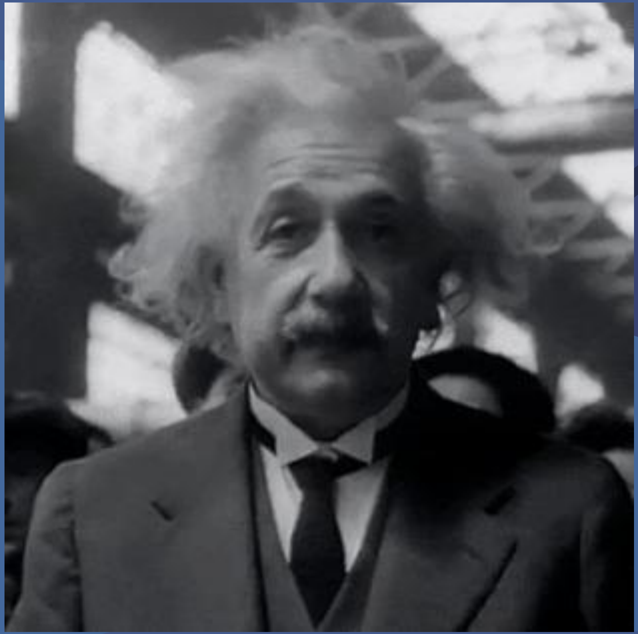
02 Consecuencias de la teoría

03 Ejemplos y ejercicios

01

Postulados

De la Teoría de la relatividad especial



Postulados

1

El principio de la relatividad: las leyes físicas deben ser las mismas en todos los marcos de referencia inerciales

La invariabilidad de la rapidez de la luz: la rapidez de la luz en el vacío tiene el mismo valor, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, en todos los marcos inerciales

2

02

Consecuencias de la teoría

A continuación se presenta la información y fórmulas relevantes al respecto

Dilatación del tiempo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p$$

Fórmula abreviada

Observadores situados en diferentes marcos inerciales pueden medir distintos intervalos entre un par de eventos

Δt_p: *tiempo propio*, $[s]$

υ: *velocidad*, $\left[\frac{m}{s}\right]$

c: velocidad de la luz, $\left[\frac{m}{s}\right]$

γ: factor de Lorentz, [adim.]

Donde:

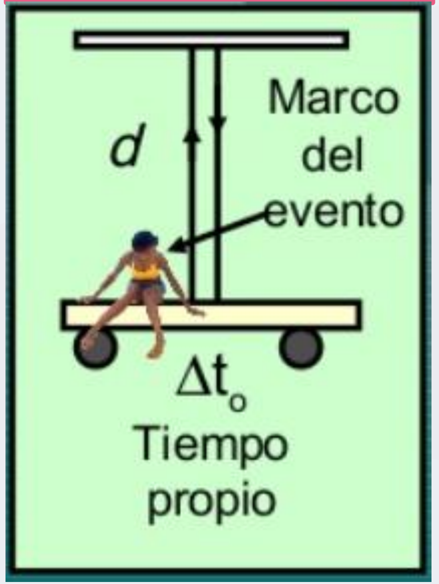
$$\Delta t_p = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{velocidad de la luz}} = \frac{2d}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

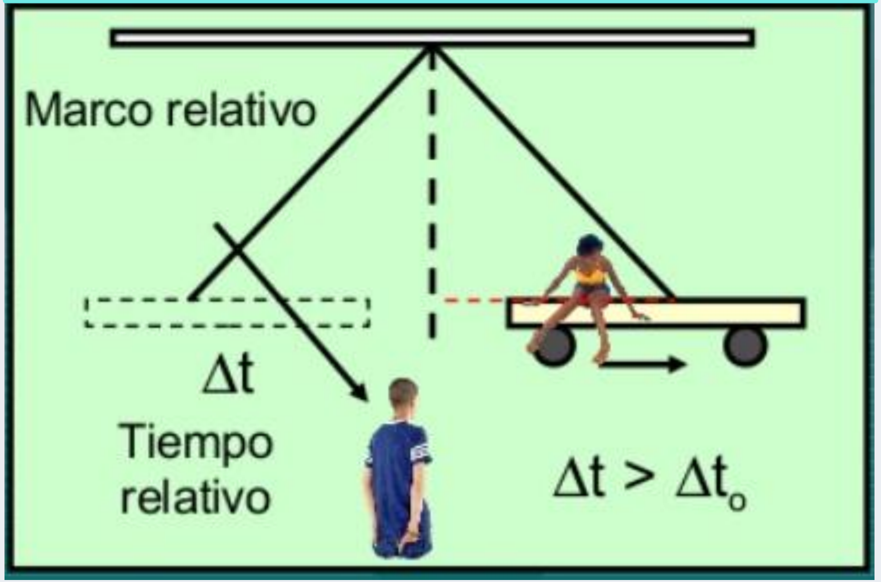
A continuación de presenta una aclaración del tiempo propio, conocido como Δt_p

Tiempo propio y relativo

Intervalo de tiempo entre 2 sucesos medido por un observador que ve los sucesos cuando ocurren en el mismo lugar



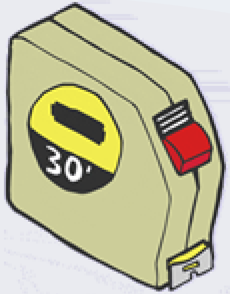
Intervalo de tiempo entre 2 sucesos que ocurren en 2 puntos distintos de su sistema de referencia



Contracción de la longitud

La distancia medida entre dos puntos en el espacio también depende del marco de referencia del observador.

- La longitud característica Lp de un objeto es la longitud medida por alguien en reposo respecto al objeto.



Contracción de la longitud

Si un objeto tiene una longitud característica Lp cuando es medido por un observador en reposo respecto al objeto, su longitud L cuando se mueve con rapidez v en una dirección paralela a su longitud, es más corta

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

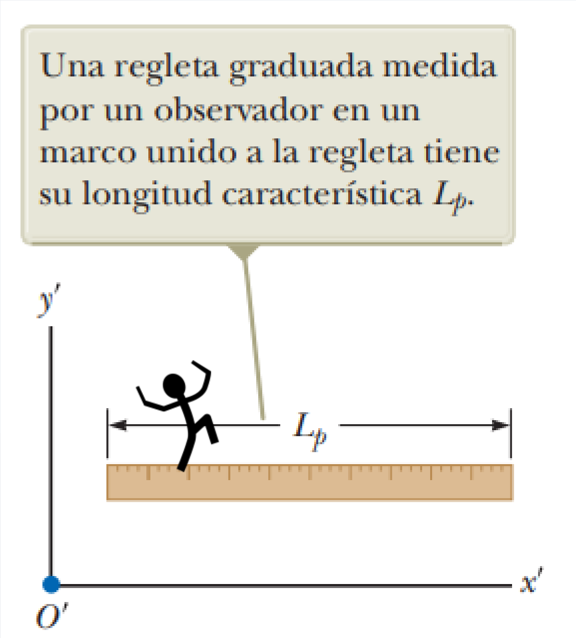
L_p: *longitud propia*, $[m]$

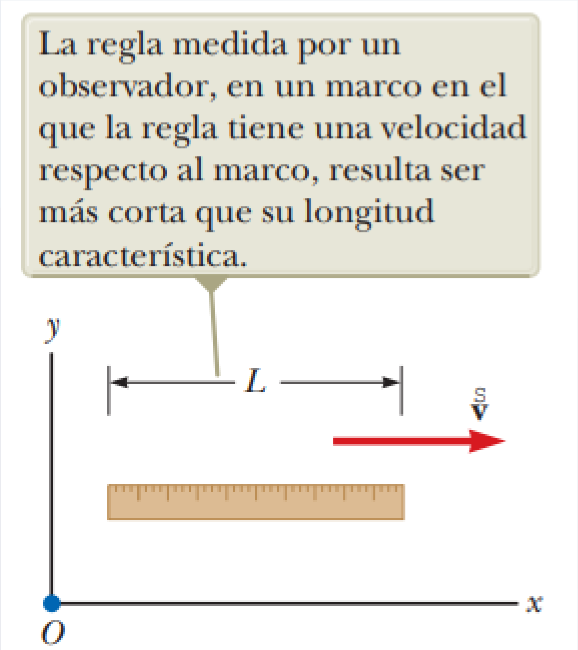
υ: *velocidad*, $\left[\frac{m}{s}\right]$

c: velocidad de la luz, $\left[\frac{m}{s}\right]$

ϒ: factor de Lorentz, [adim.]

Contracción de la longitud





03

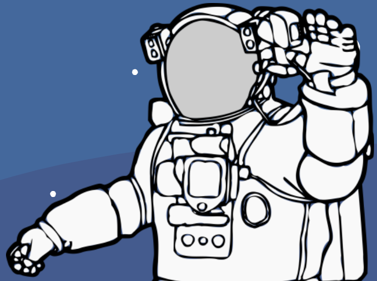
Ejemplos y ejercicios

Ejemplo 1:

Morty es un gran aficionado a los viajes espaciales. Su mayor ilusión sería llegar a algún lugar de Alfa Centauro, el sistema estelar más próximo al Sol y que se encuentra a 4.36 años luz de distancia.

a) ¿A qué velocidad debe viajar la nave espacial para que su hija de 10 años pueda ver regresar a su padre el día que ella cumple 70 años?

b) Si el padre tenía 30 años el día que inició el viaje, ¿cuántos tendrá a su regreso?



Ejemplo 1: **a)** ¿A qué velocidad debe viajar la nave espacial para que su hija de 10 años pueda ver regresar a su padre el día que ella cumple 70 años?

La velocidad y el tiempo que usa Morty desde el sistema de referencia de su hija están relacionados según la expresión:

$$\upsilon = \frac{2 \cdot d}{\Delta t}$$

Nota: "d" es la distancia recorrida por Morty (en este caso es $2 \cdot d$ ya que es un viaje de ida y vuelta a Alfa Centauro)

Ejemplo 1: **a)** ¿A qué velocidad debe viajar la nave espacial para que su hija de 10 años pueda ver regresar a su padre el día que ella cumple 70 años?

Ser tiene que la distancia a Alfa Centauro es de 4.36 años luz, es decir $4.36 \cdot c$

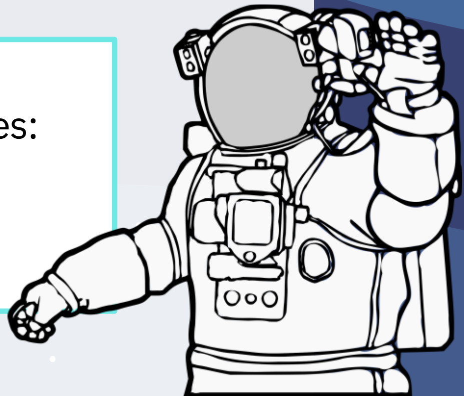
Además ya que la hija tiene 10 años deben trascurrir 60 años para que ella cumpla 70 años. Sustituyendo los valores conocidos se tiene:

$$\upsilon = \frac{2 \cdot 4.36 \cdot c}{60}$$

Se sabe que $c = 3.00 \times 10^{8}$ m/s, pero en este caso se dejará la respuesta en términos de c.

Entonces se tiene que la velocidad a la que debe viajar la nave es:

$$\boldsymbol{\upsilon = 0.145 \cdot c}$$



Ejemplo 1: **b)** Si el padre tenía 30 años el día que inició el viaje, ¿cuántos tendrá a su regreso?

La teoría de la relatividad permite relacionar el intervalo de tiempo experimentado por Morty con el que experimenta su hija según la expresión:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p$$

En este caso tiempo propio, denotado como Δt_p es el de Morty

Ejemplo 1: **b)** Si el padre tenía 30 años el día que inició el viaje, ¿cuántos tendrá a su regreso? Recordar que $c = 3.00 \times 10^8$ m/s,

Despejando Δt_p de la ecuación anterior se tiene:

$$\boxed{\Delta t_p = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\Delta t_p = 60\ años \sqrt{1 - \frac{(0.145 \cdot c)^2}{c^2}} = 59.37\ años$$

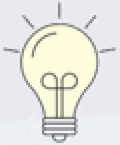
Ejemplo 1: **b)** Si el padre tenía 30 años el día que inició el viaje, ¿cuántos tendrá a su regreso? Recordar que $c = 3.00 \times 10^8$ m/s,

Por lo tanto la edad de Morty cuando regrese será:

(30.00 + 59.37) años = **89,37 años**

Morty de regreso a la Tierra

Su hija

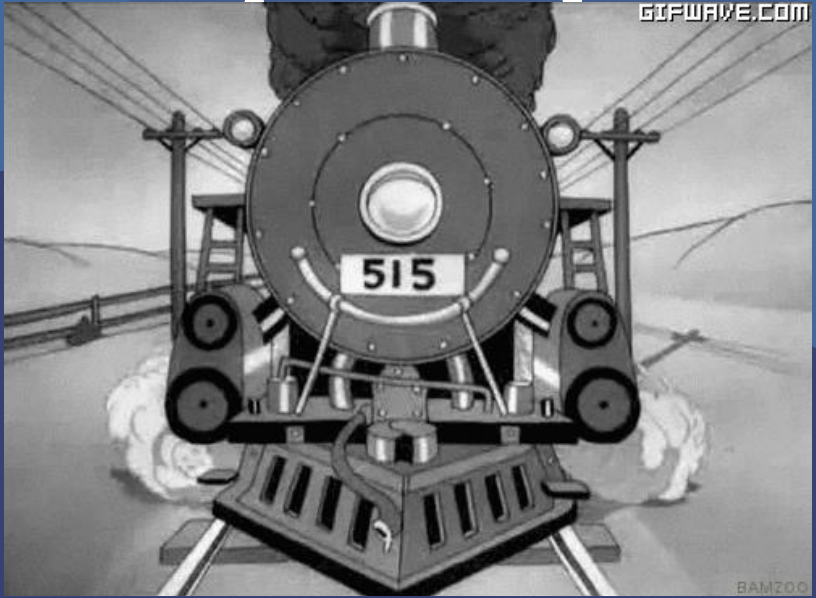


Para Morty han transcurrido menos de 60 años, ya que él se ha movido con una velocidad del orden de la velocidad de la luz en el vacío.

Ejemplo 2:

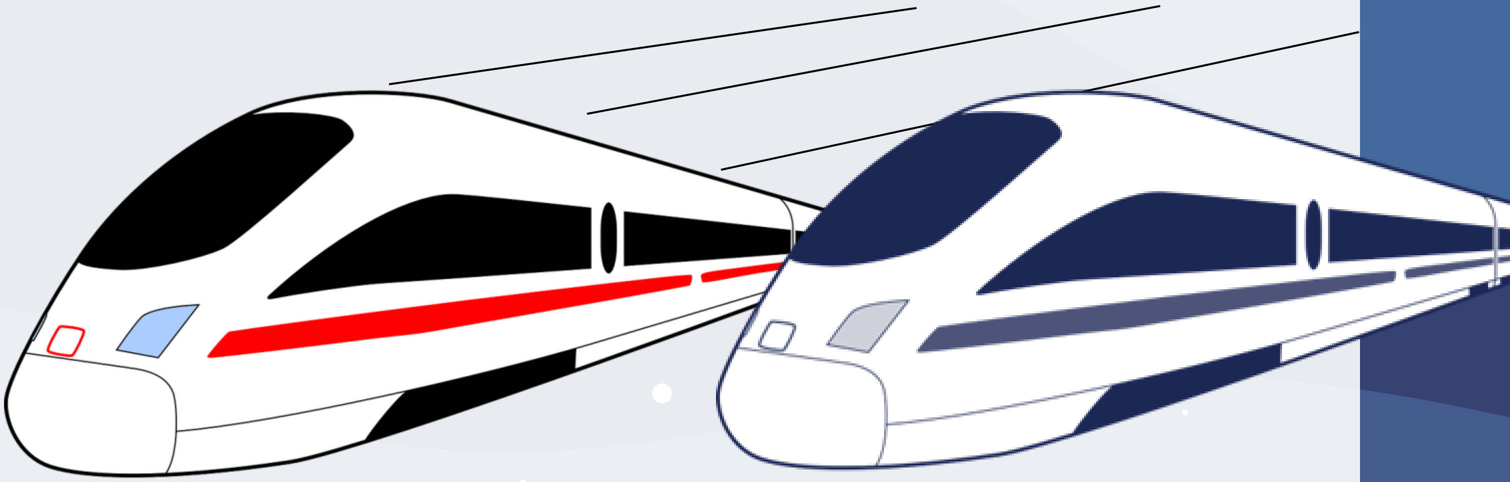
Un tren de altísima velocidad que mide 1 km de longitud en reposo pasa junto a otro tren en reposo. Para el conductor del tren en reposo, este mide 800 m y percibe que el tren en movimiento tiene la misma longitud que el suyo propio.

¿Cómo es esto posible? ¿A qué velocidad se mueve el tren?



Ejemplo 2: ¿Cómo es esto posible? ¿A qué velocidad se mueve el tren?

El conductor en reposo aprecia una longitud contraída para el tren en movimiento. Por eso le parece que ambos trenes son iguales aunque cuando están en reposo la longitud del tren que está en movimiento es mayor.



Ejemplo 2: ¿A qué velocidad se mueve el tren?

La relación entre ambas longitudes viene dada por la siguiente expresión relativista:

$$\boxed{L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se debe despejar υ de la siguiente manera:

$$\left(\frac{L}{L_p}\right)^2 = 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$\text{->} \quad 1 - \left(\frac{L}{L_p}\right)^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$\text{->} \quad \sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_p}\right)^2} = \frac{\upsilon}{c}$$

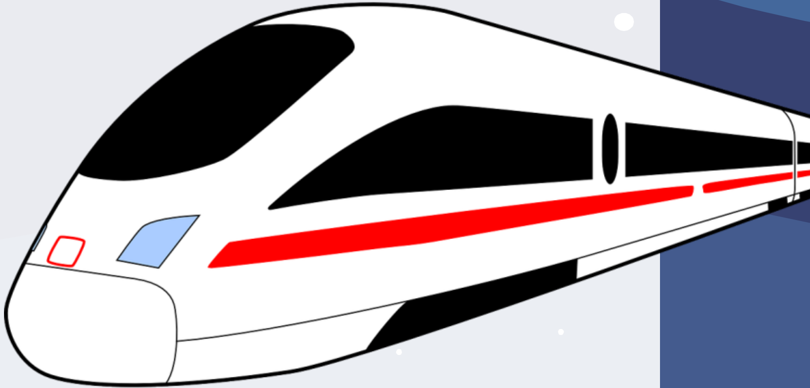
$$\text{->} \quad \sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_p}\right)^2} \cdot c = \upsilon$$

Ejemplo 2: ¿A qué velocidad se mueve el tren?

Sustituyendo los valores conocidos, y dejando por comodidad la velocidad en términos de “c” se tiene que:

$$\sqrt{1-\left(\frac{800}{1000}\right)^2}\cdot c = \upsilon$$

$$\upsilon = 0.6 \cdot c$$



Ejercicio 1:

Realice el ejercicio y consulte su respuesta.

Imagine una nave espacial de 100 m de longitud. Los habitantes de una colonia espacial la observan pasar y dicen que mide 99 m.

¿Cuál es la velocidad de la nave respecto de los habitantes de la colonia?

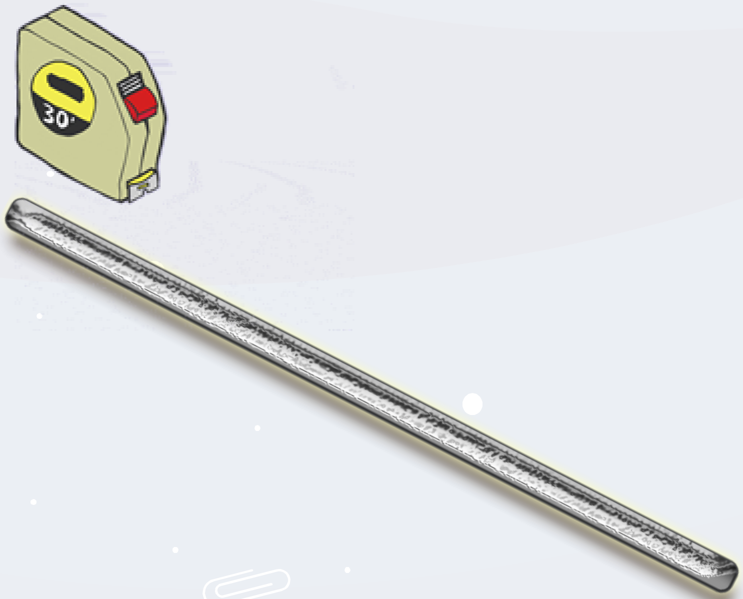
El planteamiento es igual que en el caso anterior, en este caso L es 99 m y Lp es 100 m.

R/ $\boldsymbol{v} = \mathbf{0.14} \cdot \boldsymbol{c}$

Ejemplo 3:

Una barra se mueve a una velocidad 0.9c.
Si en reposo su longitud es de 2.0 m

¿cuál es la longitud de la barra cuando está en movimiento?



Ejemplo 3: ¿Cuál es la longitud de la barra cuando está en movimiento?

Datos: La velocidad “υ" es de 0.9c y la longitud “L” de 2.0 m

La relación entre ambas longitudes viene dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Despejando la variable de interés se tiene que:

$$L_p = L\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los datos conocidos en la ecuación anterior:

$$L_p = 2.0\sqrt{1 - \frac{(0.9 \cdot c)^2}{c^2}} = 0.87\, m$$

Por lo tanto cuando la barra se mueve a 0.9c tiene una longitud de 0.87 m, se contrajo su longitud

Ejercicio 2:

Realice el ejercicio y consulte su respuesta.

Un muon pasa junto a la Tierra a una velocidad 0.6c. Visto desde el muon.

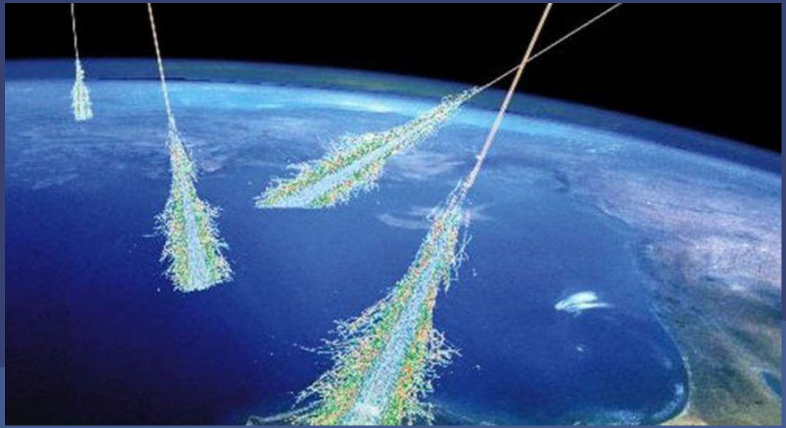
¿Cuál es el valor del diámetro terrestre medio en una dirección paralela al movimiento del muon?

Dato: diámetro de la Tierra, medido en la Tierra es de 1.3×10^7m

El planteamiento es igual que en el caso anterior, en este caso L es 1.3×10^7m y υ es 0.6c.

R/ $\boldsymbol{L_p = 1.04 \times 10^7 m}$

Para el muon la Tierra se desplaza a una velocidad de 0.6c. Por tanto, observará un diámetro de menor longitud.



Ejemplo 4:

Se coordinan dos relojes de forma que marquen la misma hora. Uno de ellos se deja en la Tierra y el otro se lleva a una nave espacial que despega a las 12:00 con v de 0.90c y vuelve a la Tierra cuando su reloj marca las 13:00

¿Qué hora marcará el reloj que ha quedado en la Tierra?

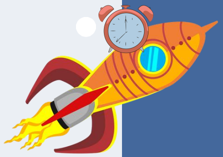
Ejemplo 4: ¿Qué hora marcará el reloj que ha quedado en la Tierra?

Se tiene que en el sistema de referencia de la nave ha transcurrido 1 hora. Para determinar cuánto tiempo ha pasado en la Tierra se utiliza la siguiente expresión:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p$$

Ejemplo 4: ¿Qué hora marcará el reloj que ha quedado en la Tierra?

En esta caso la incógnita es Δt, Δt_p es igual a 1h y la velocidad es de la nave es de 0.90c, sustituyendo los valores se obtiene que:



$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.90 \cdot c)^2}{c^2}}} = 2.29 \text{ horas}$$

Ejemplo 4: ¿Qué hora marcará el reloj que ha quedado en la Tierra?

Realizando conversiones para obtener el tiempo en minutos y segundos:

$$2.29\ horas = 2\ horas + 0.29\ horas$$

$$0.29\ horas \cdot \frac{60\ minutos}{1\ hora} = 17.4\ minutos$$

$$17.4\ minutos = 17\ \text{minutos} + 0.4\ \text{minutos}$$

$$0.4\ minutos \cdot \frac{60\ segundos}{1\ minuto} = 24\ segundos$$

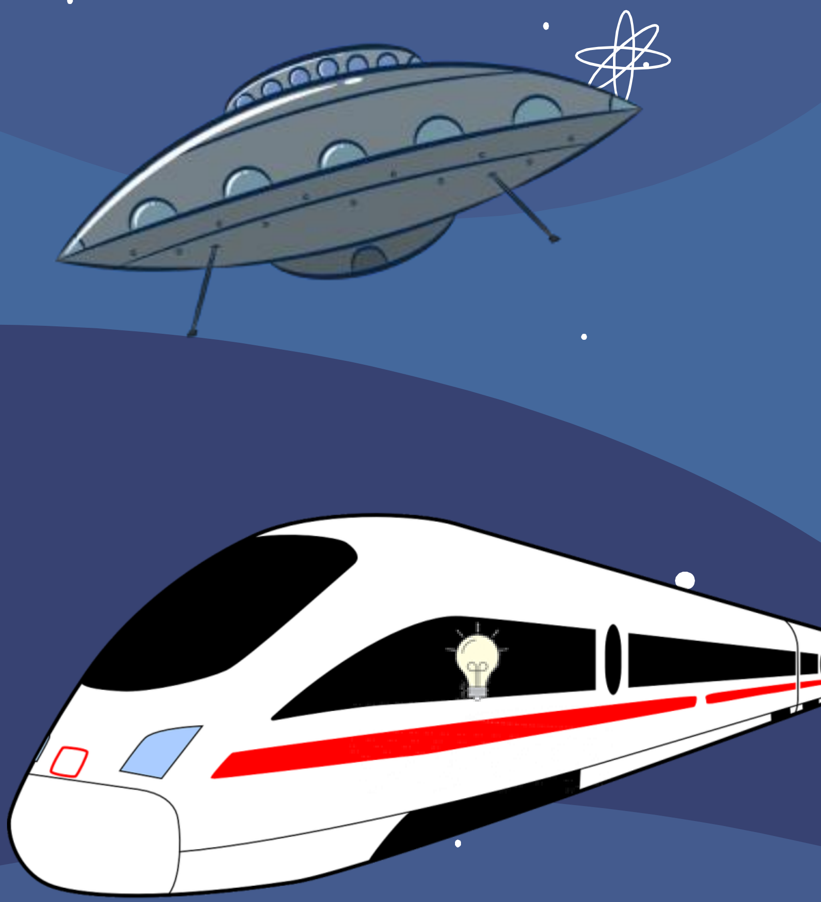
Entonces 2.29 horas es igual a 2 horas y 17 minutos con 24 segundos

Por lo tanto, considerando el tiempo inicial las 12:00:00, para el reloj de la Tierra la hora serán las **14:17:24**

Ejemplo 5:

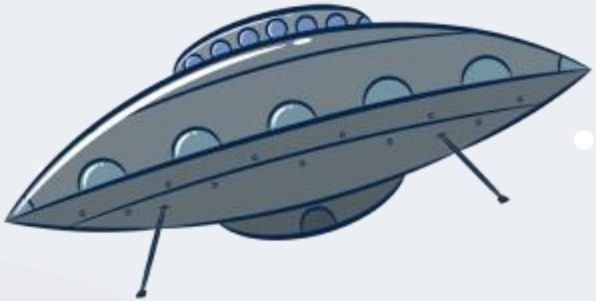
Suponga que una bombilla encendida en un tren que viaja a una velocidad de 80 km/h. Un viajero espacial pasa cerca de él a una velocidad igual a c.

Calcule la velocidad de la luz que percibirá el viajero si avanza acercándose al tren o alejándose delmismo.



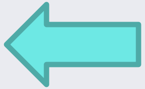
Ejemplo 5:

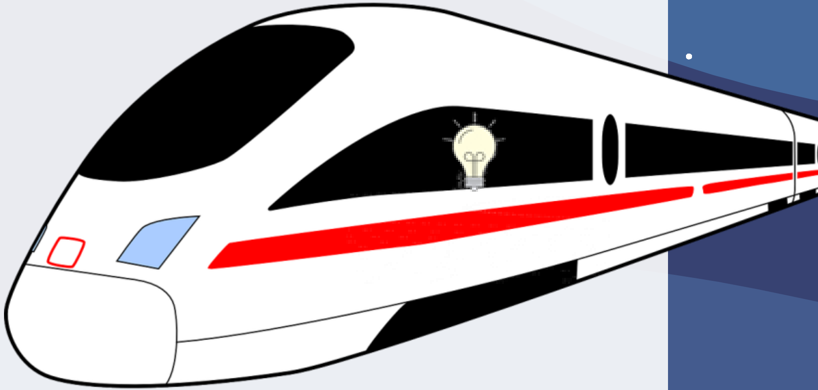
Calcule la velocidad de la luz que percibirá el viajero si avanza acercándose al tren o alejándose del mismo.



Esta es en realidad un pregunta teórica. El viajero notará que la velocidad de la luz es igual a c, independientemente de si se aleja de la fuente de luz o se acerca.

Este es uno de los postulados de la relatividad especial: la velocidad de la luz es una constante, no depende de la velocidad relativa entre un observador y una fuente de luz.





Referencias bibliográficas

(1) Serway, R.; Jewett, J.; Peroomian, V. Physics For Scientists And Engineers; 10th ed.; Cengage, 2018.

(2) Smith, J. Introducción A La Relatividad Especial; Reverté: Barcelona, 2021.

(3) Vidal, M. *Física, 2 Bachillerato*; Santillana Zubia: Etxebarri, Bizkaia, 2017.

ESCUELA DE QUÍMICA

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

TCU-565 Apoyo y promoción de las ciencias **en la educación costarricense**

VAS

Vicerrectoría **de Acción Social**