Tiểu chủ đề 1.7.
đơn ánh, toàn ánh, song ánh và ánh xạ ngược

Thông tin cơ bản

7.1. Đơn ánh

Deleted:

Formatted: Heading02, Space Before: 0 pt

Formatted: Heading03

Ta xét các ánh xạ trong ví dụ sau:

Ví dụ 7.1: Cho hai tập hợp X = {a, b, c, d, e},

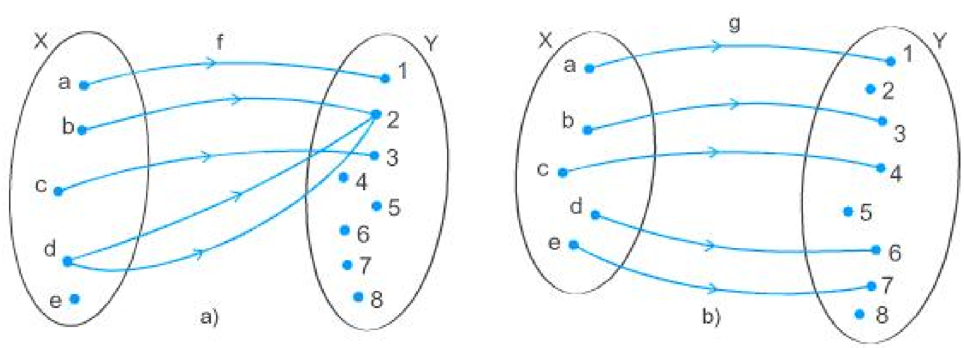
Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} và hai ánh xạ f : X → Y,

g : X → Y xác định b?i các bảng sau đây:

x	a	b	c	d	e
f(x)	1	2	3	2	2

x	a	b	c	d	e
g(x)	1	3	4	6	7

Hai ánh xạ f và g được biểu diễn bởi hai lược đồ hình tên trong Hình 8 dưới đây.



Hình 2

Ta thấy ba phần tử b, d, e của tập hợp X đều có ảnh qua ánh xạ f là phần tử 2 của tập hợp Y. Trong lược đồ 8a), ba mũi tên từ ba điểm b, d, e của X đều đi đến điểm 2 của Y. Điều này không xảy ra với ánh xạ g. Các phần tử a, b, c, d, e của tập hợp X có các ảnh qua ánh xạ g là những phần tử đôi một khác nhau của tập hợp Y. Trong lược đồ 8 b), các mũi tên từ hai điểm khác nhau của X đi đến hai điểm khác nhau của Y. Nói một cách khác, hai phần tử khác nhau bất kì của tập hợp X có ảnh qua ánh xạ g là hai phần tử khác nhau của tập hợp Y. Ánh xạ g được gọi là một đơn ánh.

Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa: ánh xạ f: $X \to Y$ gọi là một *đơn ánh* nếu hai phần tử khác nhau bất kì của tập X có ảnh qua f là hai phần tử khác nhau của tập hợp Y, tức là với mọi $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Hiển nhiên, điều kiện trên tương đương với điều kiện sau: Với mọi $x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Theo định nghĩa vừa nêu, hiển nhiên ánh xạ f trong Ví dụ 1 không phải là một đơn ánh.

Ví dụ 7.2 :

(i) Ánh xạ f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$ không phải là một đơn ánh vì chẳng hạn, $f(-1) = f(1) = 1$.

(ii) Ánh xạ g : $N^* \to Q$ xác định bởi g(n) = là một đơn ánh vì với hai số nguyên dương m,

n bất kì, nếu $m \neq n$ thì $\neq$.

(iii) Ánh xạ φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi (x) = sin x không phải là một đơn ánh vì chẳng hạn, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Tuy nhiên, nếu đặt A = {x ∈ $\mathbb{R}$: ≤ x ≤ } thì ánh xạ /A : A → $\mathbb{R}$, thu hẹp của trên tập con A của $\mathbb{R}$ là một đơn ánh.

Tương tự, ánh xạ (x) = cos x không phải là một đơn ánh. Tuy nhiên, nếu đặt $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \pi\}$ thì ánh xạ /B : B → $\mathbb{R}$, thu hẹp của trên tập con B của $\mathbb{R}$ là một đơn ánh.

ánh xạ h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x) = |x|$ không phải là một đơn ánh nhưng ánh xạ h/R^+ $\mathbb{R}$, thu hẹp của h trên tập hợp $\mathbb{R}^+$ các số nguyên không âm R^+ là một đơn ánh.

(iv) Hiển nhiên, nếu ánh xạ f : X → Y là một đơn ánh và A là một tập con của tập hợp X thì ánh xạ f/A : A → Y, thu hẹp của f trên A, là một đơn ánh.

7.2. Toàn ánh

Ta trở lại xét hai ánh xạ f và g trong Ví dụ 2.1.

ảnh của ánh xạ f là f(X) = {1, 2, 3}. Mỗi phần tử 4, 5, 6,7, 8 của Y không phải là ảnh của bất kì một phần tử nào của X qua ánh xạ f; f(X) là một tập con thực sự của Y, tức là $f(X) \subset Y$ và $f(X) \neq Y$. Tương tự, ảnh của ánh xạ g là g(X) = {1, 3, 4, 6, 7}. Mỗi phần tử 2, 5, 8 của Y không nhận một phần tử nào của Y làm ảnh của nó qua ánh xạ g. g(X) cũng là một tập con thực sự của Y.

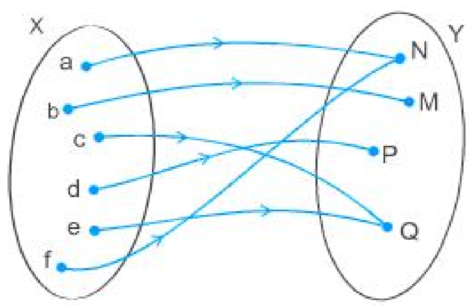
Ta xét một ví dụ khác.

Ví dụ 7.3 :

Cho hai tập hợp X = {a, b, c, d, e, f} và Y = {M, N, P, Q}. Xét ánh xạ $\varphi : X \to Y$ cho bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e	f
φ(x)	N	M	Q	P	Q	N

ánh xạ φ được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong hình 9



Hình 9

Khác với hai ánh xạ f và g trong Ví dụ 1, ở đây ảnh của φ là φ(X) = {M, N, P, Q} = Y. Như vậy mỗi phần tử của Y đều là ảnh của một phần tử nào đó của X qua ánh xạ φ. Người ta gọi ánh xạ φ là một toàn ánh.

Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa

ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là một *toàn ánh* nếu ảnh của ánh xạ f bằng tập đến của ánh xạ, tức là: f(X) = Y.

Từ định nghĩa của toàn ánh suy ra rằng $f : X \to Y$ là một toàn ánh khi và chỉ khi với mỗi $y \in Y$, tồn tại ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho f(x) = y.

Hiển nhiên các ánh xạ f và g trong Ví dụ 1 không phải là những toàn ánh.

Ví dụ 7.4:

(i) Đặt A = {x $\mathbb{R}$: < x < }. Ánh xạ f : A → $\mathbb{R}$ xác định bởi f(x) = tgx là một toàn ánh vì với mọi y ∈ $\mathbb{R}$, tồn tại x ∈ A sao cho f (x) = tgx = y.

(ii) ánh xạ g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi g(x) = $|x|$ không phải là một toàn ánh vì ảnh của ánh xạ là tập hợp g($\mathbb{R}$) = {$|x|$: x ∈ $\mathbb{R}$} = $\mathbb{R}^+$; đó là một tập con thực sự của $\mathbb{R}$. Tuy nhiên ánh xạ φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi φ(x) = $|x|$ là một toàn ánh vì φ($\mathbb{R}$) = $\mathbb{R}^+$.

(iii) ánh xạ h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$xác định bởi h(x) = sinx không phải là một toàn ánh vì h($\mathbb{R}$) = {sin x : x ∈ $\mathbb{R}$} = {y ∈ $\mathbb{R}$: $-1 \le y \le 1$} ≠ $\mathbb{R}$.

Tuy nhiên, nếu đặt A = {$-1 \le y \le 1$} thì ánh xạ φ : $\mathbb{R}$ → A xác định bởi φ(x) = sin x là một toàn ánh.

Toàn ánh f : X Y còn được gọi là ánh xạ từ X <u>lên</u> Y. Chẳng hạn, người ta gọi toàn ánh φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ x → φ(x) = $|x|$ là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ <u>lên</u> $\mathbb{R}^+$ hoặc toàn ánh từ X <u>lên</u> Y.

Hiển nhiên, nếu ánh xạ f : X → Y không phải là một toàn ánh thì thay tập đến Y bởi ảnh f(X) của f, ta được toàn ánh φ : X → f(X), x → φ (x) = f(x) từ X lên f(X).

7.3. Song ánh

Formatted: Heading03

Định nghĩa: ánh xạ f : X → Y gọi là một song ánh nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.

f là một toàn ánh khi và chỉ khi f(X) = Y, tức là với mỗi y ∈ Y, tồn tại x ∈ X sao cho f(x) = y. Nếu x' là một phần tử của X sao cho f(x') = y thì f(x') = f(x). Vì f là một đơn ánh nên từ đó suy ra x' = x. Do đó

ánh xạ f : X → Y là một song ánh khi và chỉ khi với mỗi phần tử y ∈ Y, tồn tại một phần tử duy nhất x ∈ X sao cho f(x) = y.

Ví dụ 7.5:

(i) Dễ dàng thấy rằng ánh xạ f : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi f(x) = x_2 là một toán ánh. Vì với hai số thực x_1, x_2 không âm bất kì, nếu $x_1 \ne x_2$ thì f(x1) = = = f(x_2) nên f cũng là một đơn ánh. Do đó f là một song ánh từ $\mathbb{R}^+$ lên $\mathbb{R}^+$.

(ii) ánh xạ g: → $\mathbb{R}$ xác định bởi g(x) = lnx là một song ánh từ lên $\mathbb{R}$ vì với mỗi số thực y, tồn tại một số dương duy nhất x sao cho lnx = y. (là tập hợp các số thực dương: = {x ∈ $\mathbb{R}$: x > 0}).

(iii) ánh xạ h : $\mathbb{R}$ → Xác định bởi h(x) = ex là một song ánh với mỗi số dương y, tồn tại một số thực duy nhất x sao cho f(x) = ex = y.

(iv) ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi f(x) = là một song ánh vì với mỗi số thực không âm y, tồn tại một thực không âm duy nhất x sao cho φ (x) = = y.

(v) Đặt A = {x $\in \mathbb{R}$: 0 < x < π}. ánh xạ $\psi : A \to \mathbb{R}$ xác định bởi g(x) = cotgx là một song ánh từ A lên $\mathbb{R}$ vì với mỗi số thực y, tồn tại một phần tử duy nhất x $\in$ A sao cho ψ (x) = cotgx = y.

7.4. ánh xạ ngược

Giả sử f : X → Y là một song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y. Khi đó, với mỗi phần tử y ∈ Y, tồn tại một phần tử duy nhất x ∈ X sao cho f(x) = y.

a) Định nghĩa: Giả sử f : X → Y là một song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y. ánh xạ: g : Y → X

xác định bởi: y → g(y) = x,

trong đó x là phần tử duy nhất của X sao cho f(x) = y, gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f. ánh xạ ngược của song ánh f : X → Y được kí hiệu là f^{-1}.

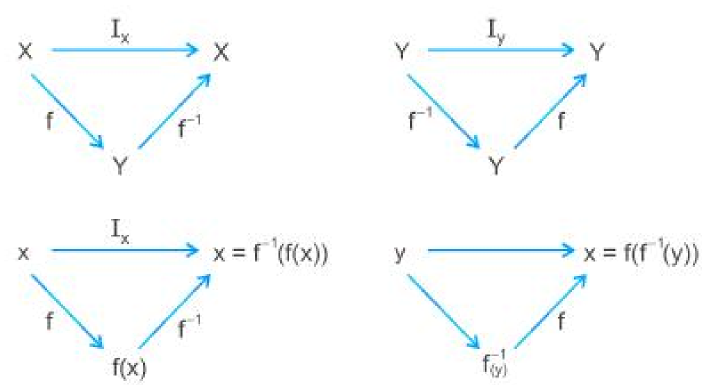
Tính chất đặc trưng của ánh xạ ngược được cho trong định lí sau:

b) Định lí: Nếu f : X → Y là một song ánh và f : Y → X là ánh xạ ngược của f thì với mọi x ∈ X, y ∈ Y,

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ và } f(f^{-1}(y)) = y, \qquad (1)$$

tức là: f = Ix và fo f^{-1} = IY, trong đó IX và IY, theo thứ tự, là ánh xạ đồng nhất trên tập hợp X và tập hợp Y.

Nói một cách khác, hai lược đồ sau là giao hoán.



Hình 10

Chứng minh: Giả sử y là một phần tử bất kì của Y. Khi đó $f^{-1}(y)$ = x, trong đó x là phần tử duy nhất của X sao cho f(x) = y. Do đó f (f^{-1} (y)) = f(x) = y. Ta đã chứng minh hệ thức thứ hai trong (1). Nếu x là một phần tử bất kì của X thì y = f(x) ∈ Y. Vì f là một đơn ánh nên x là phần tử duy nhất có ảnh qua ánh xạ f là y. Do đó $f^{-1}(y)$ = x và ta có f^{-1} (f(x)) = $f^{-1}(y)$ = x.

Ta sẽ thấy f^{-1} là ánh xạ duy nhất thoả mãn đồng thời hai hệ thức trong (1). Đó là hệ quả của định lí sau:

c) Định lí. Giả sử hai ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow X$ thoả mãn các hệ thức sau:

$g(f(x)) = x$ với mọi $x \in X$ và $f(g(y)) = y$ với mọi $y \in Y$
(2)

Khi đó

(i) f và g là những song ánh.

(ii) g là ánh xạ ngược của f.

Chứng minh :

Trước hết ta chứng minh f là một song ánh. Với mỗi $y \in Y$, $x = g(y)$ là một phần tử của X. Theo giả thiết, ta có $f(x) = f(g(y)) = y$. Do đó f là một toàn ánh.

Với hai phần tử bất kì $x_1, x_2 \in X$, nếu $f(x_1 = f(x_2)$ thì $g(f(x_1) = g(f(x_2))$. Do đó, từ hệ thức thứ nhất trong (2) suy ra $x_1 = x_2$. Vậy f là một đơn ánh. f vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh nên nó là một song ánh. Tương tự, g cũng là một song ánh.

Bây giờ ta chứng minh g là ánh xạ ngược của X, tức là $g(y) = f^{-1}(y)$ với mọi $y \in Y$. Thật vậy, giả sử y là một phần tử bất kì của Y và $g(y) = x$. Từ hệ thức thứ hai trong (2) suy ra $f(x) = f(g(y)) = y$. Vì f là một đơn ánh nên x là phần tử duy nhất của x có ảnh là y qua ánh xạ f. Do đó $f^{-1}(y) = x = g(y)$.

Từ định lí trên suy ra rằng:

d) Nếu $g : Y \rightarrow X$ là ánh xạ ngược của ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ thì f là ánh xạ ngược của g. Do đó: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Quan hệ giữa các ánh xạ ngược f^{-} và g^{-1} của hai song ánh $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ với ánh xạ ngược $(gof)^{-1}$ của ánh xạ hợp gof Z được cho trong định lí sau.

e) Định lí Cho hai ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$. Khi đó

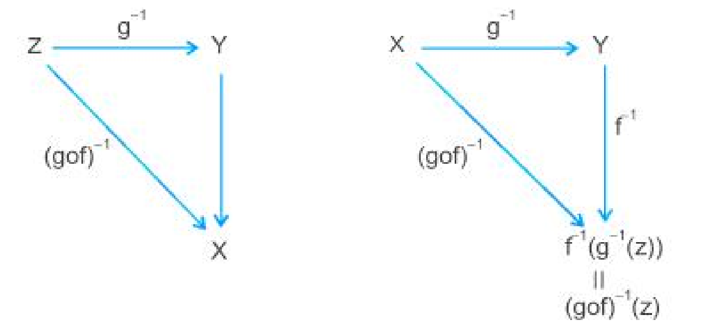
(i) Nếu f và g là những đơn ánh thì ánh xạ hợp gof là một đơn ánh.

(ii) Nếu f và g là những toàn ánh thì gof là một toàn ánh.

(iii) Nếu f và g là những song ánh thì gof là một song ánh, và

$(gof)^{-1} = f^{-1} . g^{-1}$,

tức là lược đồ sau là giao hoán.



Hình 11

Chứng minh

Đặt h = gof.

(i) Với mọi x_1, $x_2 \in X$, nếu $x_1 \in x_2$ thì do f là một đơn ánh nên $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vì g là một đơn ánh nên $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, tức là $h(x_1) \neq h(x_2)$. Vậy h = gof là một đơn ánh.

(ii) Giả sử z là một phần tử bất kì của Z. Vì $g : Y \rightarrow Z$ là một toàn ánh nên tồn tại $y \in Y$ sao cho g(y) = z. Lại vì $f : X \rightarrow Y$ là một toàn ánh nên tồn tại $x \in X$ sao cho f(x) = y. Do đó g(f(x)) = g(y) = z, tức là h(x) = z. Vậy h là một toàn ánh.

(iii) Nếu f và g là những song ánh thì f và g vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Do đó từ (i) và (i) suy ra rằng h = gof cũng vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, tức là gof là một song ánh. Do đó tồn tại các ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \rightarrow X$, $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ và $(gof)^{-1} : Z \rightarrow X$. Ta chứng minh:

$(gof)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$ với mọi $z \in Z$.

Thật vậy, giả sử z là một phần tử bất kì của Z. Vì g là một song ánh nên tồn tại một phần tử duy nhất $y \in Y$ sao cho: g(y) = z (1)

Vì f là một song ánh nên tồn tại một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho: f(x) = y (2)

Từ (1) và (2) suy ra g (f(x)) = g(y) = z, tức là: h(x) = z (3)

Vì g, f, h là những song ánh nên từ (1), (2), (3) suy ra:

$g^{-1}(z) = y$, $f^{-1}(y) = x$ và $h^{-1}(z) = x$. Do đó:

$f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x = h^{-1}(z)$.

f) Hoán vị của một tập hợp

Giả sử X là một tập hợp cho trước. Mỗi song ánh $f : X \rightarrow X$ từ tập hợp X lên X gọi là một hoán vị của tập hợp X.

Hiển nhiên ánh xạ đồng nhất IX trên tập hợp X là một hoán vị của tập hợp X.

Từ định lí e) suy ra rằng ánh xạ hợp của hai hoán vị của tập hợp X là một hoán vị của tập hợp X.

Nếu X là một tập hợp hữu hạn, chẳng hạn X có n phần tử thì định nghĩa của hoán vị nêu trên tương đương với định nghĩa hoán vị của một tập hợp n phần tử mà ta đã biết trong sách giáo khoa toán ở bậc phổ thông trung học.

Hoạt động 7.1. Tìm hiểu đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Sinh viên đọc thông tin cơ bản rồi thảo luận theo nhóm 2 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 :

– Cho ba ví dụ về ánh xạ không phải là đơn ánh cũng không phải là toàn ánh.

– Cho ba ví dụ về đơn ánh không phải là toàn ánh.

– Cho ba ví dụ về toán ánh không phải là đơn ánh.

– Cho ba ví dụ về ánh xạ $f : X \to Y$ không phải là đơn ánh nhưng thu hẹp $f/_A$ của nó trên một tập con A của X là một đơn ánh.

– Cho n ánh xạ $f_1 : X \to X_1$, $f_2 : X_1 \to X_2$, ... $fn = Xn_{-1} \to Xn$ và đặt $h = fn \,.\, fn_{-1}. \dots . f_1 : X \to Xn$.

• Nếu h_1... hn là những đơn ánh thì h có phải là một đơn ánh hay không?

• Nếu h_1, ..., hn là những toàn ánh thì h có phải là một toàn ánh hay không?

• Nếu h_1, ..., hn là những song ánh thì h có phải là một song ánh hay không?

Nhiệm vụ 2 :

– Tập hợp X có m phần tử, tập hợp Y có n phần tử cho m < n. Tồn tại hay không một toàn ánh từ X lên Y?

– Tập hợp X có m phần tử, tập hợp Y có n phần tử. Giả sử m > n. Tồn tại hay không một đơn ánh từ X vào Y?

– Cho hai ví dụ về ánh xạ $f : X \to Y$ không phải là song ánh nhưng ánh xạ thu hẹp $h = f/_A$ của f trên một tập hợp con A của X là một song ánh. Tìm ánh xạ ngược của h.

– Tìm hai cặp ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ sao cho f không phải là một toàn ánh nhưng ánh xạ hợp gof là một toàn ánh.

Đánh giá hoạt động 7.1

1. Cho hai tập hợp A = {a, b, c, d}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} và hai ánh xạ f : A → B, g : A → B xác định bởi hai bảng sau:

x	a	b	c	d
f(x)	1	2	3	2

x	a	b	c	d
g(x)	2	1	4	3

a) Biểu diễn các ánh xạ f và g bởi lược đồ hình tên.

b) f và g có phải là đơn ánh không?

2. Cho hai tập hợp X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, Y = {a, b, c, d, e, f} và hai ánh xạ f, g : X → Y xác định bởi các bảng sau:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	a	b	c	b	c	d	e	d

x	1	2	3	4	5	6	7	8
g(x)	b	a	c	a	b	d	e	f

x	a	b	c	d	e
f(x)	5	1	3	2	4

xạ f, g : X

x	a	b	c	d	e
g(x)	2	3	4	5	1

a) Biểu diễn f và g bởi lược đồ hình tên.

b) Chứng minh rằng f và g là những song ánh và tìm ánh xạ ngược của f và g.

4. Cho hai số thực a, b, a ≠ 0. Chứng minh rằng ánh xạ f : |R →|R xác định bởi f(x) = ax + b là một song ánh và tìm ánh xạ ngược của f.

5. Chứng minh rằng các ánh xạ sau đây là những song ánh và tìm ánh xạ ngược của mỗi ánh xạ đó:

a) f : $|R^+ \to |R^+$ xác định bởi f(x) = ,

b) g : |R →|R xác định bởi g(x) = x^3,

c) $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \to h(x) =$,

d) $u : A \to A, x \to u(x) =$, trong đó $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

6. Giả sử C là tập hợp các điểm của đường tròn đường kính AB và D là tập hợp các điểm của tiếp tuyến với đường tròn tại điểm B. Với mỗi điểm $M \in D$, gọi N là giao điểm của đường thẳng AM với đường tròn.

a) ánh xạ $f : D \to C$ xác định bởi $f(M) = N$ có phải là một đơn ánh hay không?

b) f có phải là một song ánh hay không?

7. Cho tập hợp số thực $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ và hai ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to A$ xác định bởi

$$f(x) = \sin 2x,\ g(x) = \begin{cases} 0 \text{ với } x \in \mathbb{R} \setminus A, \\ x \text{ với } x \in A. \end{cases}$$

Chứng minh rằng ánh xạ hợp gof là một toàn ánh.

8. Giả sử $f : X \in X$ là một toàn ánh từ tập hợp X lên X. Chứng minh rằng nếu fof = f thì f là ánh xạ đồng nhất trên tập hợp X.

9. Cho ba ánh xạ $f, g : X \to Y$ và $h : Y \to Z$. Chứng minh rằng nếu h là một đơn ánh và hof = hog thì f = g.

10. Cho ba tập hợp X, Y, Z và ánh xạ $f : Y \to Z$ có tính chất sau: Với mọi ánh xạ $u, v : X \to Y$, fou = fov $\Rightarrow$ u = v.

Chứng minh rằng f là một đơn ánh.

11. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Chứng minh rằng:

a) Nếu ánh xạ hợp h = gof là một đơn ánh thì f là một đơn ánh,

b) Nếu h là đơn ánh và f là toàn ánh thì g là đơn ánh,

c) Nếu h là toàn ánh và g là đơn ánh thì g và f là những toàn ánh.

12. Giả sử $f : X \to Y$ và $g : Y \to X$ là hai toàn ánh thoả mãn đẳng thức gof = IX.

Chứng minh rằng g là ánh xạ ngược của f.

13. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và hai hoán vị $f : A \to A$ và $g : A \to A$ của tập hợp A xác định bởi:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	6	5	4	3	2	1

x	1	2	3	4	5	6
g(x)	3	4	5	6	1	2

Tìm các hoán vị hợp gof và fog.

14. Giả sử X và Y là hai tập hợp có n phần tử (N(X) = n và N(Y) = n). Chứng minh rằng có tất cả n! song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y.

Từ đó suy ra rằng số hoán vị của một tập hợp n phần tử là n!

Hướng dẫn :

Điều khẳng định đúng với n = 1. Thật vậy, giả sử X = $\{a_1\}$ và Y = $\{b_1\}$. Chỉ có một song ánh từ X lên Y : đó là ánh xạ f : X $\rightarrow$ Y xác định bởi f $(a_1) = b_1$. Như vậy, nếu X và Y là những tập hợp có một phần tử thì có 1 = 1! song ánh từ X lên Y.

Giả sử điều khẳng định đúng với n, tức là có n! song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y, nếu X và Y đều có n phần tử. Ta chứng minh điều khẳng định đúng cho n + 1. Thật vậy, giả sử X = $\{a_1, a_2, ..., an, an_{+1}\}$ và Y = $\{b_1, b_2, ... , bn, bn_{+1}\}$. Phải chứng minh có cả thảy (n + 1) ! song ánh từ X lên Y. Ta chia tập hợp tất cả các song ánh từ X lên Y thành n + 1 tập con như sau:

Tập con thứ nhất A_1 gồm tất cả các song ánh f : X $\rightarrow$ Y sao cho f $(an_{+1}) = b_1$. Tập con thứ hai A_2 gồm tất cả các song ánh f : X $\rightarrow$ Y sao cho $f(an_{+1}) = b_2$, ... Tập con thứ n + 1 An_{+1} gồm tất cả các song ánh f : X $\rightarrow$ Y sao cho f (an_{+1}) = bn_{+1}. Các tập con A_1, ..., An_{+1} đôi một rời nhau. Hãy chứng minh rằng mỗi tập hợp Ak có n! phần tử, k = 1, 2, ..., n + 1.

15. Giả sử tập hợp X có k phần tử, tập hợp Y có n phần tử, k $\le$ n. Chứng minh rằng có cả thảy n (n – 1) ... (n – k + 1) đơn ánh từ X vào Y.

Hướng dẫn :

Ta chứng minh điều khẳng định bằng phép quy nạp theo k. Điều khẳng định đúng với k = 1. Giả sử X = $\{x_1\}$ và Y = $\{y_1, y_2, ..., yn\}$, n là một số nguyên dương bất kì, n > 1. Khi đó, có cả thảy n đơn ánh từ X vào Y: Đó là các ánh xạ f_1 : X $\rightarrow$ Y, $x_1 \rightarrow f_1(x_1) = y_1$, ánh xạ f_2 : $X_2 \rightarrow Y_2$, $x_1 \rightarrow f_2(x_1) = y_2$, ..., ánh xạ fn : X $\rightarrow$ Y, $x_1 \rightarrow$ fn (x_1) = yn. Giả sử điều khẳng định đúng cho k, tức là nếu X có k phần tử và Y có n phần tử, k n thì có cả thảy n (n – 1)

... (n − k + 1) đơn ánh từ X vào Y. Ta chứng minh điều khẳng định đúng cho k + 1, tức là nếu tập hợp X có k + 1 phần tử và tập hợp Y có n phần tử, k + 1 ≤ n thì có cả thảy n (n − 1) ... (n − (k + 1) + 1) đơn ánh từ X vào Y. Thật vậy, giả sử X = {x_1, x_2, ..., xk, xk_{+1}}, Y = {y_1, y_2, ..., yn}. Chia tập hợp tất cả các đơn ánh từ X vào Y thành n tập con như sau: Tập con A_1 gồm tất cả các đơn ánh f : X → Y sao cho f (xk_{+1}) = y_1, tập con A_2 gồm tất cả các đơn ánh f : X Y sao cho f (xk_{+1}) = y_2, ..., tập con An gồm tất cả các đơn ánh f : X → Y sao cho f (xk_{+1}) = yn. Các tập con A_1, ..., An đôi một rời nhau. Hãy chứng minh rằng mỗi tập con Ak có (n – 1) (n – 2) ... ((n – 1) – k + 1).

Formatted: Heading01

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.8. ẢNH VÀ TẠO ẢNH QUA MỘT ÁNH XẠ

Thông tin cơ bản

8.1. ảnh của một tập hợp qua một ánh xạ

a) Định nghĩa: Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ và A là một tập con của X. Tập hợp các ảnh của tất cả các phần tử của A qua ánh xạ f gọi là *ảnh của tập hợp A qua ánh xạ f*, kí hiệu là f(A).

Như vậy, với mọi $x \in Y$, y f(A) khi và chỉ khi tồn tại x A sao cho $y = f(x)$.

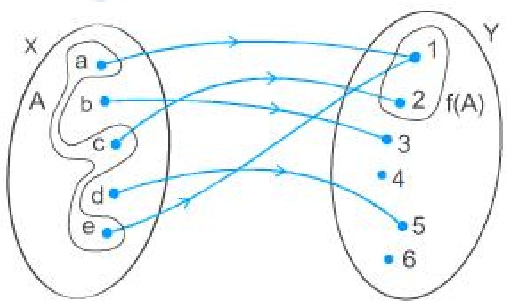
Do đó: $f(A) = \{y \in Y$: Tồn tại $x \in A$ sao cho $y = f(x)\}$.

Ví dụ 8.1 :

Cho hai tập hợp X = {a, b, c, d, e}, Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6} và ánh xạ $f : X \to Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e
f(x)	1	3	2	5	1

ánh xạ f được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 1 dưới đây.



Hình 1

Cho hai tập con A và B của X : A = {a, c, e}; B = {a, d}. ảnh của A và B qua ánh xạ f là: f(A) = {1, 2}; f (B) = {1, 5}.

Ví dụ 8.2 :

(i) Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $f(x) = x^2$, A = {, 3, 7} và $\mathbb{R}^-$ là tập hợp các số thực không dương, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$. Khi đó:

f(A) = {2, 9, 49} và $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$.

(ii) Giả sử $D : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ là ánh xạ xác định bởi:

1 với $x \in Q$,

$D(x) =$

0 với $x \in \mathbb{R} \setminus Q$.

(D là hàm số Điritslê). Tìm ảnh của các tập hợp

A = {1, –1, 0,5, 1, 118}, B = {, , e}, C = {, 100} qua ánh xạ D.

Ta có:

$f(A) = \{1\}; f(B) = \{0\}; f(C) = \{0, 1\}$.

(iii) Cho ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -3x$ và các tập hợp số thực $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$.

ảnh của A và B qua ánh xạ f là:

$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : -15 \le y \le -6\}$ và $f(B) = \{y \in \mathbb{R} : y > 3\}$.

Một vài tính chất của ảnh

b) Định lí

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và các tập con A, B của X. Khi đó:

(i) Nếu $A \subset B$ thì $f(A) \subset f(B)$,

(ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(iii) $f(A \cap B)$ $f(A) \cap f(B)$.

Chứng minh

(i) Nếu $y \in f(A)$ thì tồn tại $x \in A$ sao cho $y = f(x)$. Vì $A \subset B$ nên từ đó suy ra $x \in B$ và $y = f(x)$. Do đó $y \in f(B)$. Vậy $f(A) \in f(B)$.

(ii) Vì $A \subset A \cup B$ nên, theo (i), ta có $f(A) \subset f(A \cup B)$.

Tương tự, $f(B) \subset f(A \cup B)$. Do đó

(1) $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Ta chứng minh bao hàm thức ngược

(2) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Giả sử y là một điểm bất kì của $f(A \cup B)$. Khi đó, tồn tại $x \in A \cup B$ sao cho $y = f(x)$. Vì $x \in A \cup B$ nên $x \in A$ hoặc $x \in B$. Nếu $x \in A$ thì $y = f(x) \in f(A)$, do đó $y \in f(A) \cup f(B)$. Nếu $x \in B$ thì $y \in f(B)$; do đó $y \in f(A) \cup f(B)$. Ta đã chứng minh (2). Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức (ii) cần chứng minh.

(iii) Vì $A \cap B \subset A$ nên, theo (i), ta có $f(A \cap B) \subset f(A)$,

Tương tự, $f(A \cap B) \subset f(B)$. Do đó $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Chú ý :

Trong (iii), không thể thay dấu bởi dấu =. Chẳng hạn, xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$ và các tập số thực $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Khi đó $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$; $f(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-) = f(\{0\}) = \{0\}$; $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$ và $f(\mathbb{R}^+$ và $f(\mathbb{R}^+) \cap f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$. Như vậy, $f(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-\}$ là một tập con thực sự của $f(\mathbb{R}^+) \cap f(\mathbb{R}^-)$.

Tuy nhiên, nếu $f : X \to Y$ là một đơn ánh thì bao hàm thức (iii) trở thành đẳng thức.

c) Định lí

Nếu ánh xạ $f : X \to Y$ là một đơn ánh thì với hai tập con A, B bất kì của X, ta đều có:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Chứng minh

Theo định lí b), (iii), ta có $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ta chứng minh:

(1) $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Giả sử $y \in f(A) \cap f(B)$. Khi đó $y \in f(A)$ và $y \in f(B)$. Do đó, tồn tại $x_1 \in A$ sao cho $y = f(x_1)$ và tồn tại $x_2 \in B$ sao cho $y \in f(x_2)$. Từ đó ta có $f(x_1) = f(x_2)$. Vì f là một đơn ánh nên đẳng thức vừa nêu kéo theo $x_1 = x_2$. Như vậy, ta có $x_1 \in A$, $x_1 \in B$ và $y = f(x_1)$, tức là $x_1 \in A \cap B$ và $y = f(x_1)$. Do đó $y \in f(A \cap B)$.Từ đó có đẳng thức (1) cần chứng minh .

d) Định lí

Nếu $f : X \to Y$ là một ánh xạ thì với hai tập con bất kì của X, ta có:

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B).$$

Chứng minh

Giả sử $y \in f(A) \setminus f(B)$. Khi đó $y \in f(A)$ và $y \in f(B)$. Do đó, tồn tại $x_1 \in A$ sao cho $f(x) = y$. Hiển nhiên $x_2 \notin B$ (vì nếu $x \in B$ thì $y = f(x) \notin f(B)$). Như vậy, ta có $x \in A$, $x \notin B$ và $y = f(x)$, tức là $x \in A \setminus B$ và $y = f(x)$. Do đó $y \in f(A \setminus B)$. Từ đó ta có bao hàm thức cần chứng minh.

Chú ý

Trong bao hàm thức của định lí không thể thay dấu $\subset$ bởi dấu =.

Ta lấy lại ví dụ vừa xét: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $f(x) = x^2$, $\mathbb{R}^+$ và $\mathbb{R}^-$ là hai tập con của $\mathbb{R}$. Khi đó, $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^+) \setminus f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+ = \phi$, $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} =$, $f(\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^-) = f() =$.

Ta thấy $f(\mathbb{R}^+) \setminus f(\mathbb{R}^-)$ là tập con của $f(\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^-)$ và $f(\mathbb{R}^+) \setminus f(\mathbb{R}^-) \neq f(\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^-)$.

Trong phần câu hỏi và bài tập, ta sẽ chứng minh rằng nếu $f : X \to Y$ là một đơn ánh thì bao hàm thức trong Định lí d) trở thành đẳng thức.

8.2. Tạo ảnh của một tập hợp qua một ánh xạ

a) Định nghĩa:

Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ và C là một tập con của Y. Tập hợp tất cả các phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) \in C$ gọi là *tạo ảnh của tập hợp C qua ánh xạ f*, kí hiệu là $f^{-1}(C)$.

Như vậy, với mọi $x \in X$,

$x \in f^{-1}(C)$ khi và chỉ khi $f(x) \in C$.

$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$.

Chú ý rằng trong kí hiệu $f^{-1}(C)$, f^{-1} không phải là ánh xạ ngược của f. Với mọi ánh xạ $f : X \to Y$ và với mọi tập con C của Y, tạo ảnh $f^{-1}(C)$ của C luôn tồn tại, trong khi chỉ song ánh f mới có ánh xạ ngược.

Hiển nhiên $f^{-1}(Y) = X$.

Ví dụ 8.3 :

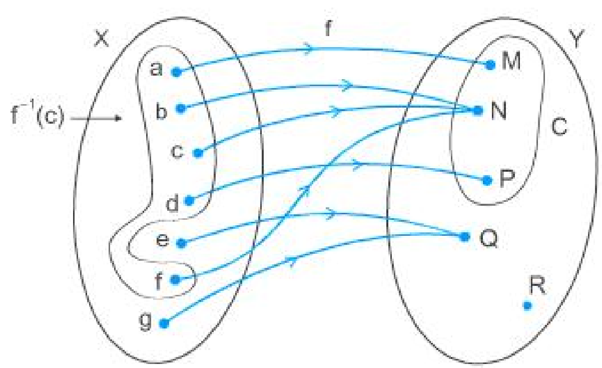
Cho hai tập hợp X = {a, b, c, d, e, f, g}, Y = {M, N, P, Q, R} và ánh xạ $f : X \to Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e	f	g
f(x)	M	N	N	P	Q	N	Q

(i) Biểu diễn ánh xạ f bởi lược đồ hình tên.

(ii) Tìm tạo ảnh của các tập hợp C = {M, N, P} và D = {P, Q, R} qua ánh xạ f.

(i) ánh xạ f được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 2.



Hình 2

(ii) Tạo ảnh của các tập hợp C và D qua ánh xạ f là $f^{-1}(C) = \{a, b, c, d, f\}$; $f^{-1}(D) = \{d, e, g\}$.

Ví dụ 8.4 :

(i) Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $f(x) = |x|$, $C = \{y \ \mathbb{R} : 1 \le y \le 3\}$. Khi đó: $f^{-1}(C) = \{1 \le x \le 3\} \cup \{-3 \le x \le -1\}$.

(ii) Cho ánh xạ g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = \sin x$, $C = \{-1, 1\}$, $D = \{0\}$. Khi đó: $g^{-1}(C) = \{ + k\pi : k \in Z\}$; $g^{-1}(D) = \{k : k \in Z\}$.

(iii) Với ánh xạ h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \in Q, \\ 0 \text{ với } x \in \mathbb{R} \setminus Q. \end{cases}$$

$C = \{y \in \mathbb{R} : -1 \le y < 1\}$, $D = \{y \in \mathbb{R} : y \ge 1\}$, $E = \{y \in \mathbb{R} : y > 3\}$.

Ta có: $f^{-1}(C) = \mathbb{R} \setminus Q$; $h^{-1}(D) = Q$; $h^{-1}(D) = \phi$.

Một vài tính chất của tạo ảnh

b) Định lí

Giả sử f: $X \to Y$ là một ánh xạ, C và D là những tập con của Y. Khi đó:

(i) Nếu $C \subset D$ thì $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$,

(ii) $f{-1} (C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,

(iii) $f{-1} (C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,

(iv) $f{-1} (C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1} D)$.

Chứng minh

(i) Giả sử $C \subset D$. Nếu $x \in f^{-1}(C)$ thì $f(x) \in C$. Vì $C \subset D$ nên $f(x) \in D$; do đó $x \in f^{-1}(D)$.

(ii) Vì $C \subset C \cup D$ nên, theo (i), ta có $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C \cup D)$.

Tương tự, ta có $f^{-1}(D) \ \ f^{-1}(C \cup D)$. Do đó:

(1) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$.

Ta chứng minh bao hàm thức ngược

(2) $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Thật vậy, nếu $x \in f^{-1}(C \cup D)$ thì $f(x) \in C \cup D$. Do đó $f(x) \in C$ hoặc $f(x) \in D$. Nếu $f(x) \in C$ thì $x \in f^{-1}(C)$; do đó $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Nếu $f(x) \in D$ thì $x \in f^{-1}(D)$, do đó $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Từ đó ta có bao ham fthức (2). Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức (ii) cần chứng minh.

(iii) Vì $C \cap D \subset C$ nên $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C)$. Tương tự,

ta có $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(D)$. Do đó

(3) $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Ta chứng minh:

(4) $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$.

Thật vậy, nếu $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ thì $x \in f^{-1}(C)$ và $x \in f^{-1}(D)$.

Do đó $f(x) \in C$ và $f(x) \in D$. Từ đó suy ra $f(x) \in C \cap D$; do đó $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Ta đã chứng minh (4). Từ (3) và (4) suy ra đẳng thức (iii).

(iv) Các điều kiện sau là tương đương:

$x \in f^{-1}(C \setminus D)$,

$f(x) \in C \setminus D$,

$f(x) \in C$ và $f(x) \notin D$,

$x \in f^{-1}(C)$ và $x \notin f^{-1}(D)$,

$x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Do đó ta có đẳng thức (iv) .

Quan hệ giữa ảnh và tạo ảnh được cho trong định lí sau:

c) Định lí

Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ tập hợp X vào tập hợp Y. Khi đó:

(i) Với mọi tập con C của Y, ta có:

(1) $f(f^{-1}(C)) \subset C$,

(ii) Với mọi tập con A của X, ta có:

(2) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Chứng minh

(i) Nếu $y \in f(f^{-1}(C))$ thì tồn tại $x \in f^{-1}(C)$ sao cho $y = f(x)$.

Vì $x \in f^{-1}(C)$ nên $f(x) \in C$, tức là $y \in C$. Do đó $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

(ii) Nếu x A thì f (x) f(A). Do đó x thuộc tạo ảnh của tập hợp f(A) qua ánh xạ f, tức là x f–1 (f(A)). Vậy A f–1 (f(A)) .

Chú ý:

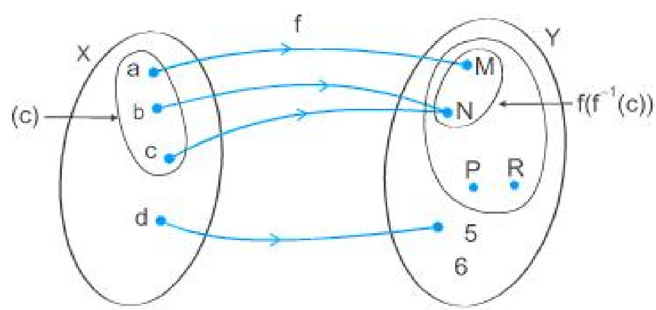
(i) Trong bao hàm thức (1) không thể thay dấu $\subset$ bởi dấu =. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 8.5 :

Cho hai tập hợp X = {a, b, c, d}, Y = {M, N, P, Q, R} và ánh xạ f : X $\rightarrow$ Y xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d
f(x)	M	N	N	Q

ánh xạ f được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 3.



Hình 3

Với tập con C = {M, N, P, R} của tập hợp Y, ta có: $f^{-1}(C)$ = {a, b, c}, $f(f^{-1}(C))$ = {M, N}.

Ta thấy $f(f^{-1}(C))$ là một tập con thực sự của C, tức là $f(f^{-1}(C)) \neq C$.

Một ví dụ khác: Giả sử g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi g(x) = x^2 và C = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ là một tập con của $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có $f^{-1}(C) = \mathbb{R}$ và $f(f^{-1}(C)) = \mathbb{R}^+$.

ở đây, ta lại thấy $f(f^{-1}(C))$ là một tập con thực sự của C.

Trong phần câu hỏi và bài tập ta sẽ chứng minh rằng nếu C $\subset$ f(X) thì bao hàm thức (1) trong Định lí c) trở thành đẳng thức.

(ii) Trong bao hàm thức (2), không thể thay dấu $\subset$ bởi dấu =.

Ta xét ví dụ sau:

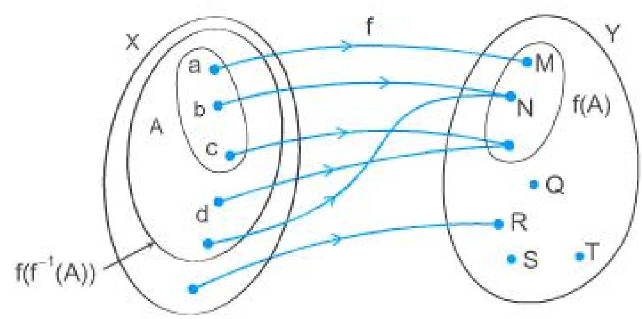
Ví dụ 8.6 :

Cho hai tập hợp X = {a, b, c, d, e, f},

Y = {M, N, P, Q, R, S, T} và ánh xạ $f : X \to Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e	f
f(x)	M	N	P	P	N	R

ánh xạ được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 4.



Hình 4

Với tập con A = {a, b, c} của tập hợp X, ta có: f(A) = {M, N, P} và f^{-1} (fA)) = {a, b, c, d, e}.

Ta thấy A là một tập con thực sự của tập hợp f^{-1} (f(A)).

Ta xét một ví dụ khác: cho ánh xạ $D : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ xác định bởi:

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \in Q, \\ 0 \text{ với } x \in \mathbb{R} \setminus Q. \end{cases}$$

(D là hàm số Điritslê).

Với tập con A = {–1, } của $\mathbb{R}$, ta có:

$D(A) = \{1\}$ và $D^{-1}(D(A)) = d^{-1}(\{1\}) = Q$.

A là một tập con thực sự của D^{-1} (D(A)).

Trong phần câu hỏi và bài tập, ta sẽ chứng minh rằng nếu ánh xạ $f : X \to Y$ là một đơn ánh thì bao hàm thức (2) trong Định lí c) trở thành đẳng thức.

d) Quan hệ giữa tạo ảnh của một tập hợp qua một song ánh và ảnh của tập hợp đó qua ánh xạ ngược của song ánh.